Εργασία στο μάθημα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙΙ

Νικολέτα Παπουτσή

ΑΕΜ : 10858

npapoutsi@ece.auth.gr

Παρακάτω υλοποιούνται τα τμήματα Α και Β της εργασίας.

Τμήμα Α

Ερώτημα 1

i. Θεωρητική Ανάλυση

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου:

$$H_c(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{s}{T}+\frac{K}{T}}$$

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου είναι η:

$$s^2 + \frac{s}{T} + \frac{K}{T}$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι :

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

Συγκρίνοντας, έχουμε : ${\omega_n}^2 = \frac{K}{T}$ και $2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$, δηλαδή προκύπτει :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$Y(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}U(s) \;\Rightarrow\; YTs^2 + Ys = KU$$

Στο πεδίο του χρόνου, από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace :

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Ku$$

Αν $u = e(t)$, η εξίσωση γίνεται:

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Ke(t)$$

όπου , $e(t) = r(t) - y(t)$

$$T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Ke(t) = T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t)$$

Θεωρούμε τις καταστάσεις :

$$x_1 = e(t) \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = \dot{e}(t)$$

Οπότε , οι εξισώσεις κατάστασης γίνονται :

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 + \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t)$$

ii. <u>Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου για είσοδο:</u>

a. <u>Βηματική είσοδος πλάτους Α :</u>

$$r(t) = A \quad \Rightarrow \dot{r}(t) = 0, \ \ddot{r}(t) = 0$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Ke(t) = 0$$

Στο σημείο ισορροπίας :

$$\dot{x_1} = \dot{e}(t) = x_2 = 0$$

$$\dot{x_2} = \ddot{e}(t) = 0$$

Άρα, $$Ke(t) = 0$$

Επομένως, το $x_e = (0,0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή η έξοδος y(t) ακολουθεί ακριβώς τη τιμή της εισόδου r(t).

b. <u>Ράμπα κλίσης Β</u>

$$r(t) = Bt \quad \Rightarrow \dot{r}(t) = B, \;\; \ddot{r}(t) = \; 0$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$T\ddot{e}(t) + \; \dot{e}(t) \; + Ke(t) = B$$

Στο σημείο ισορροπίας :

$$\dot{x_1} = \dot{e}(t) = x_2 = 0$$

$$\dot{x_2} = \ddot{e}(t) = \; 0$$

Άρα, $$Ke(t) = B$$

$$x_1 = \; \frac{B}{K}$$

Επομένως, το $x_e = (\frac{B}{K}, 0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος δεν παρακολουθεί τέλεια την είσοδο λόγω του σφάλματος που εξαρτάται από την κλίση Β και το Κ.

<u>Επίδραση των παραμέτρων Κ και Τα</u>

- Παράμετρος Κ:
  - Για βηματική: Το Κ δεν επηρεάζει τη σύγκλιση, καθώς το σφάλμα είναι μηδενικό
  - Για ράμπα: Όσο αυξάνεται το Κ , το σφάλμα εξόδου μειώνεται και τείνει να ταυτιστεί με την είσοδο.
- Παράμετρος Τ:
  - Περίπτωση $\zeta < 1$

$$t_s = \; \frac{4}{2\zeta\omega_n} = 4\mathrm{T}$$

Άρα, όσο μεγαλύτερο το Τ, τόσο πιο αργή είναι η σύγκλιση.

- Περίπτωση $\zeta \geq 1$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι :

$$s_1 = \frac{-\frac{1}{T} + \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 - 4\frac{K}{T}}}{2}$$

$$s_2 = \frac{-\frac{1}{T} - \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 - 4\frac{K}{T}}}{2}$$

Ο χρόνος αποκατάστασης εξαρτάται από την πιο αργή ρίζα, αυτή που είναι πιο κοντά στον φανταστικό άξονα. Άρα,

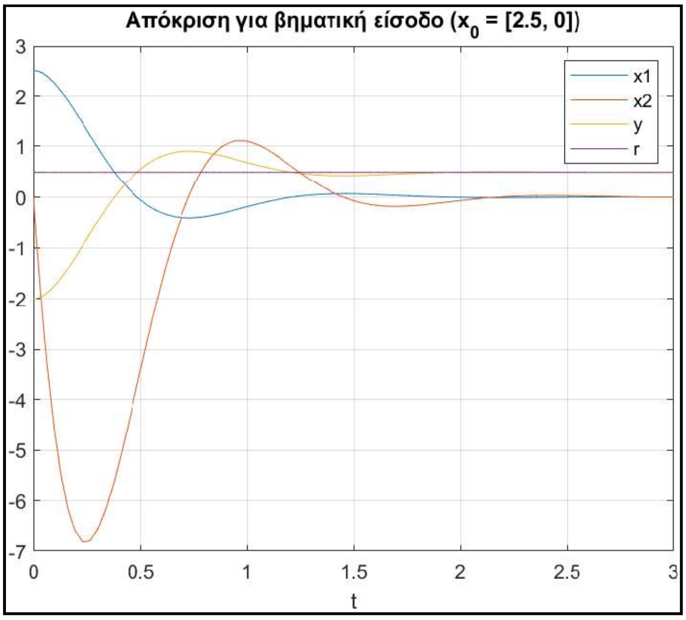
$$t_s = \frac{8\mathrm{T}}{1 - \sqrt{1 - 4KT}}$$

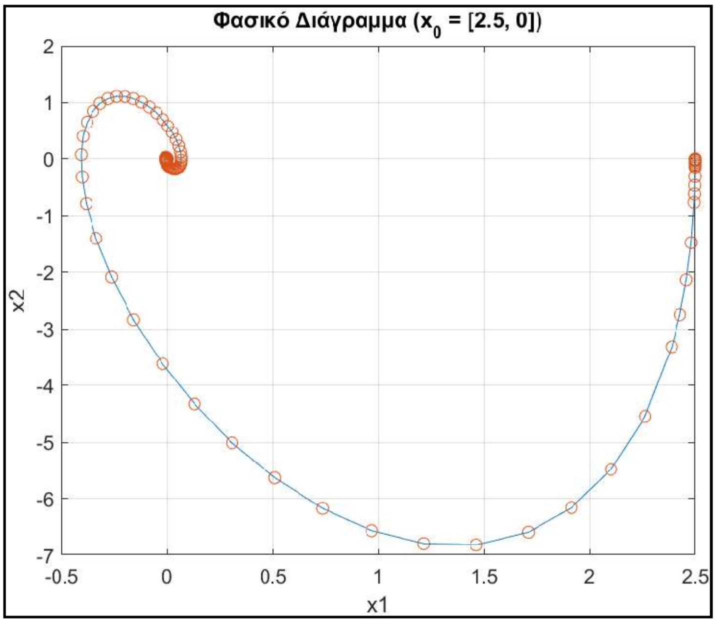
Έτσι, όσο μεγαλύτερο το T, τόσο πιο αργή η σύγκλιση. Ενώ, όσο μεγαλύτερο το K, μειώνεται ο χρόνος αποκατάστασης.

iii. Προσομοιώσεις για K=5,T=0.2

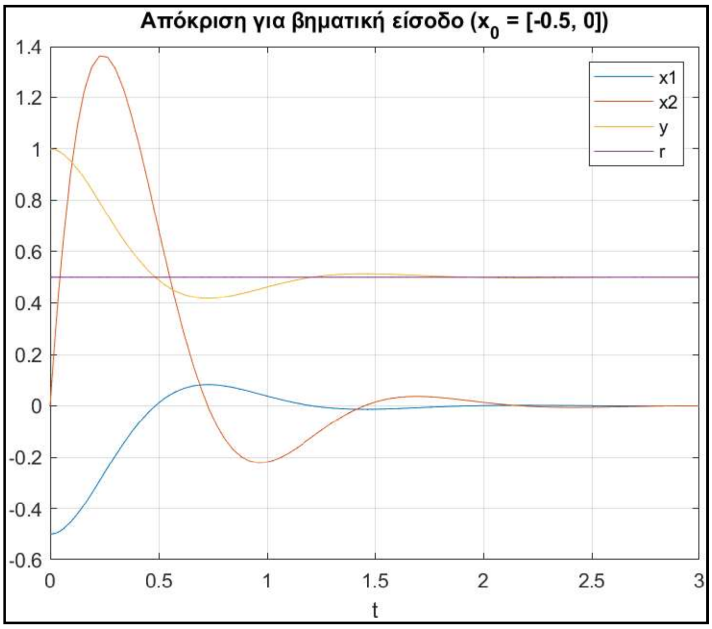
a. Για βηματική είσοδο με πλάτος A= 0.5

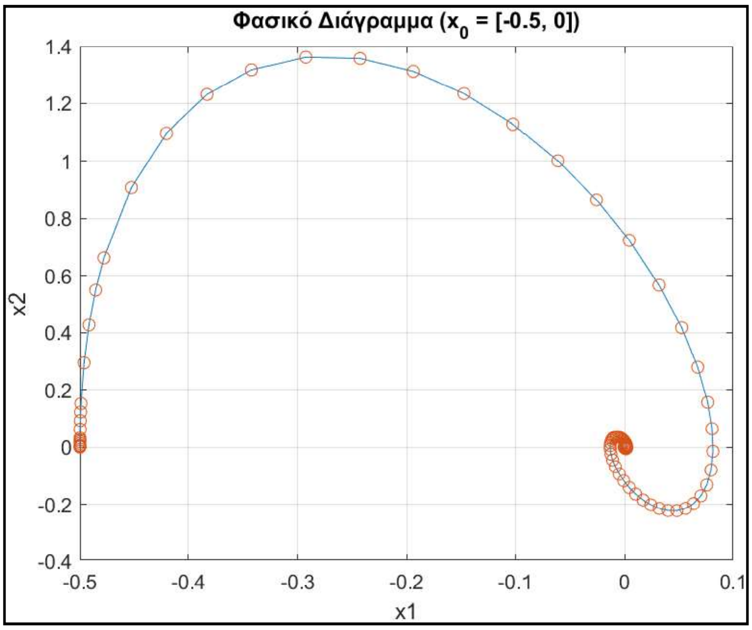
1. $y(0) = -2 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0$



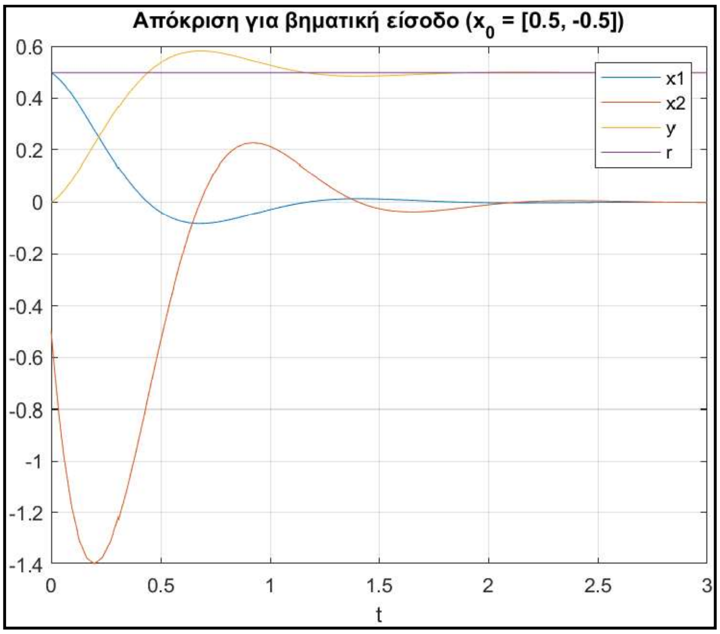


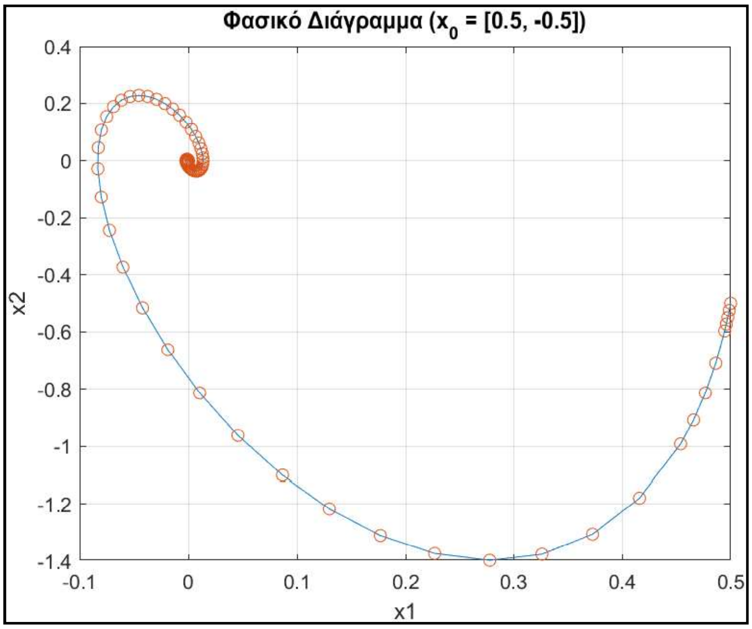
2. $y(0) = 1 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0$



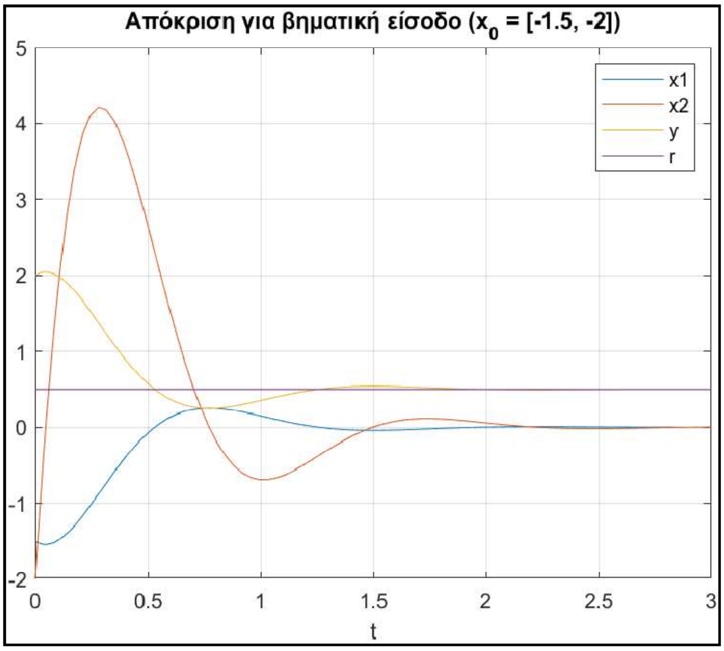


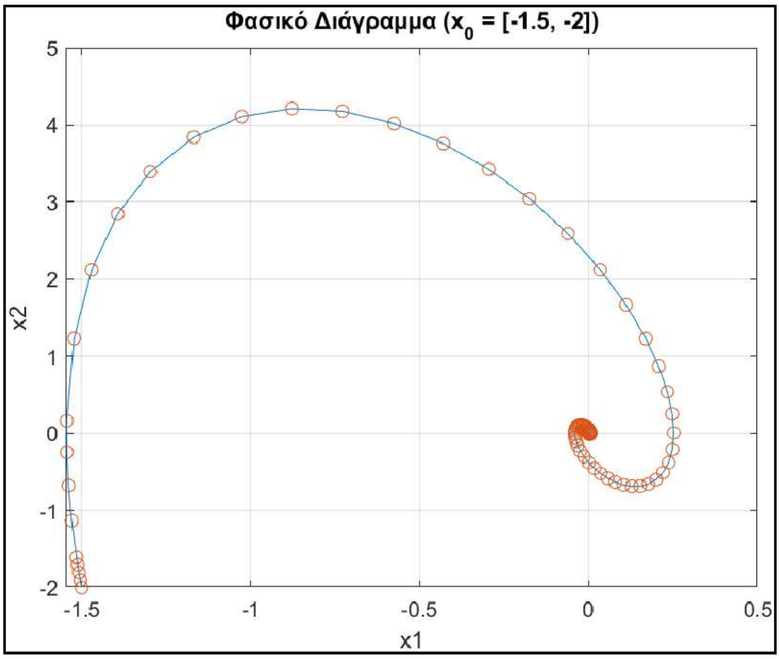
3. $y(0) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0.5$



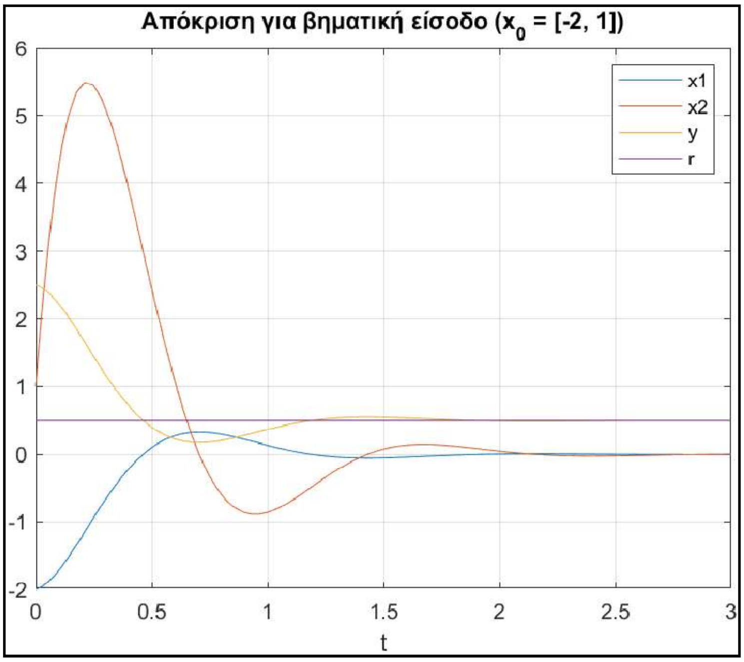


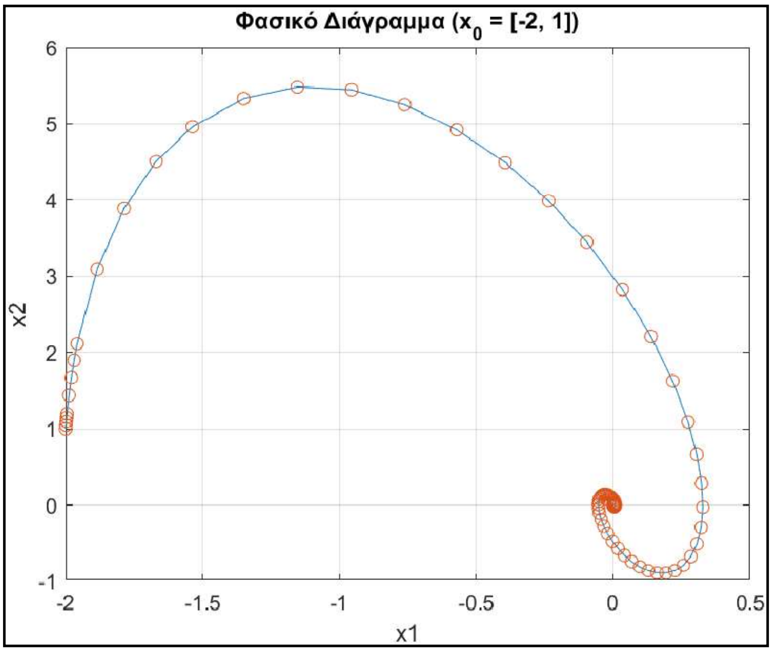
4. $y(0) = 2 \; και \; \dot{y}(0) = 2$



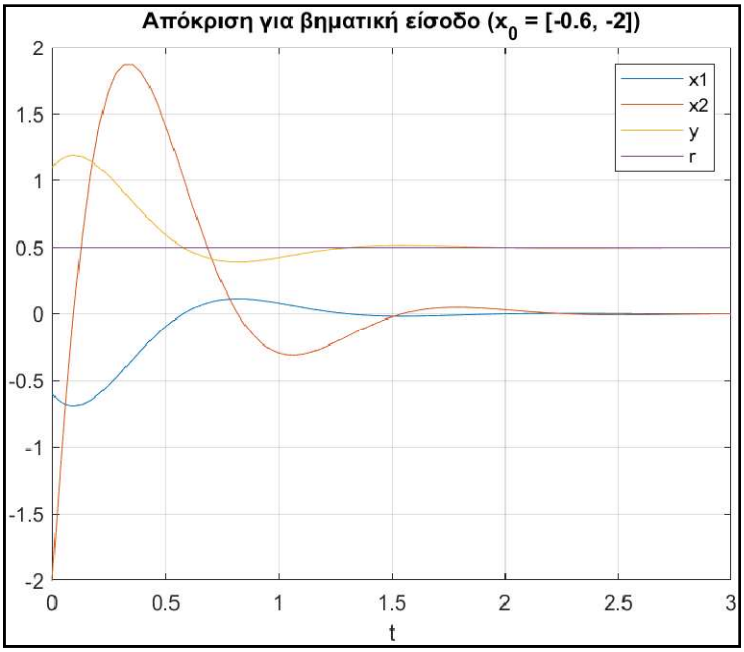


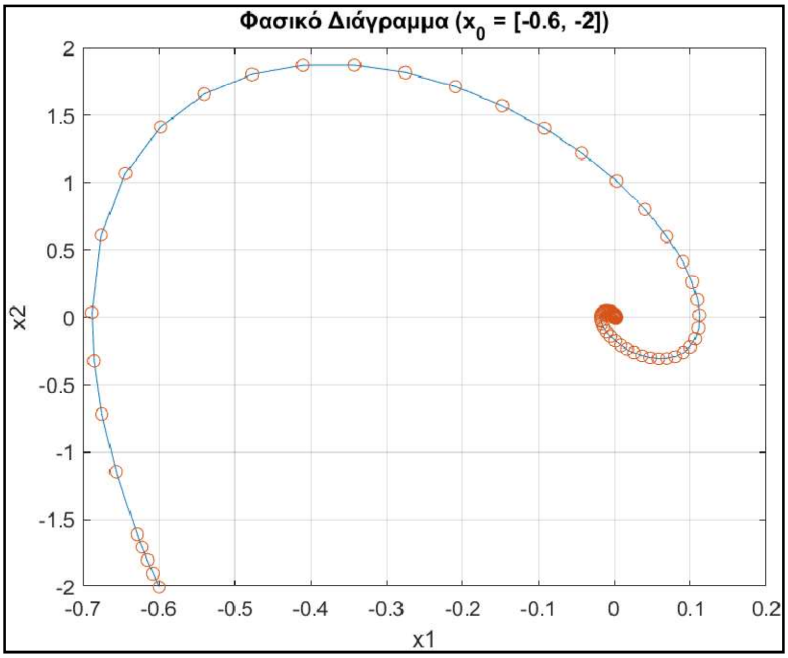
5. $y(0) = 2.5 \; και \; \dot{y}(0) = -1$





6. $y(0) = 1.1 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 2$

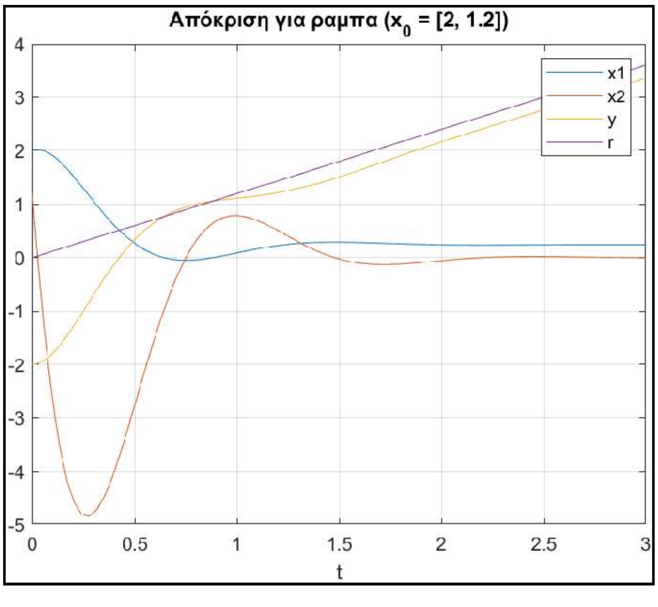


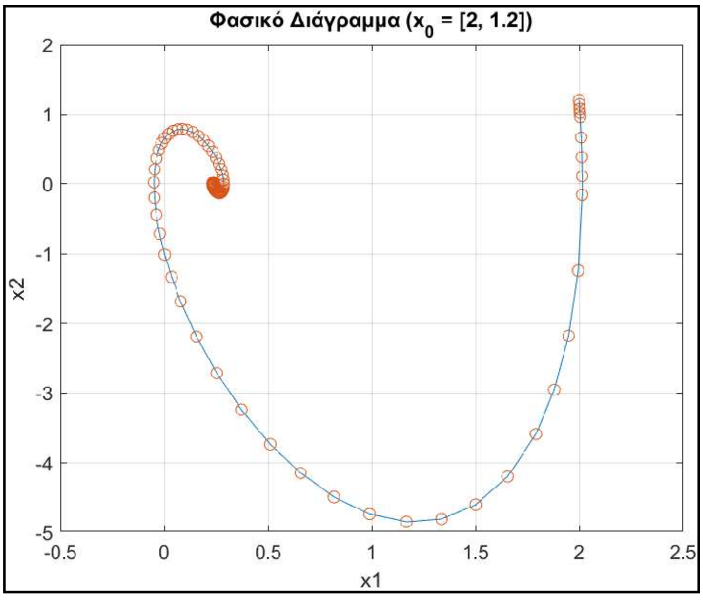


Παρατηρούμε ότι όλες οι καταστάσεις τελικά συγκλίνουν ασυμπτωτικά στην τιμή της εισόδου r(t)=0.5, δηλαδή το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Επίσης, από το φασικό διάγραμμα των καταστάσεων φαίνεται όπως αναμενόταν ότι όλες οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας (0,0).

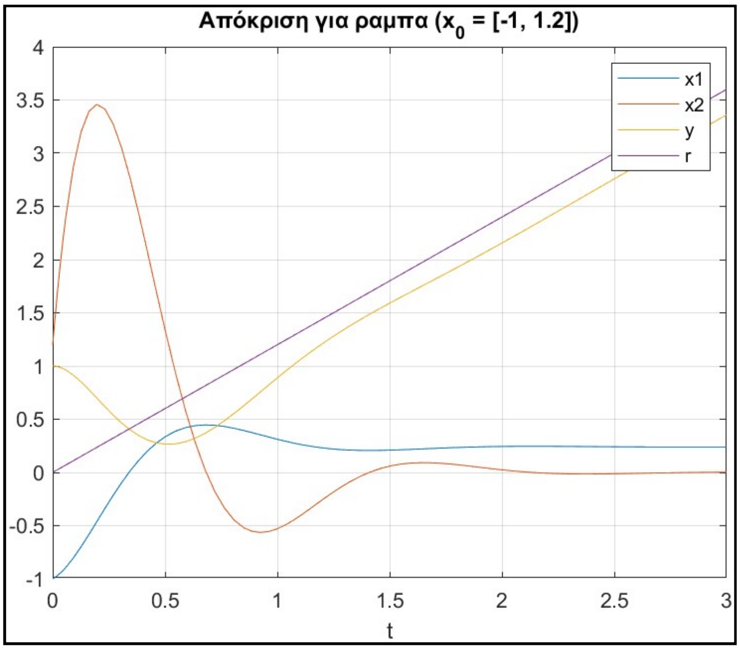
b. Για ράμπα κλίσης B=1.2 (r(t) = 1.2t)

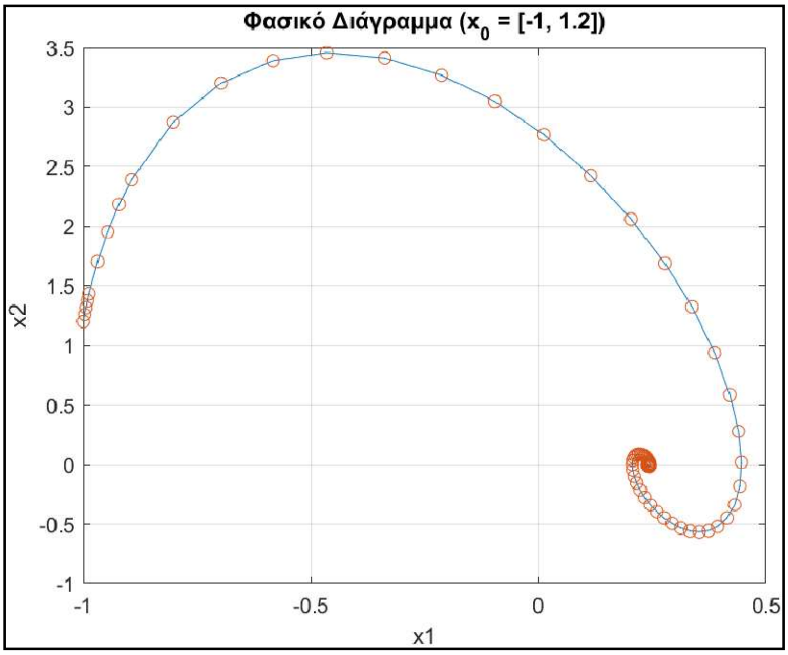
1) $y(0) = -2 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0$



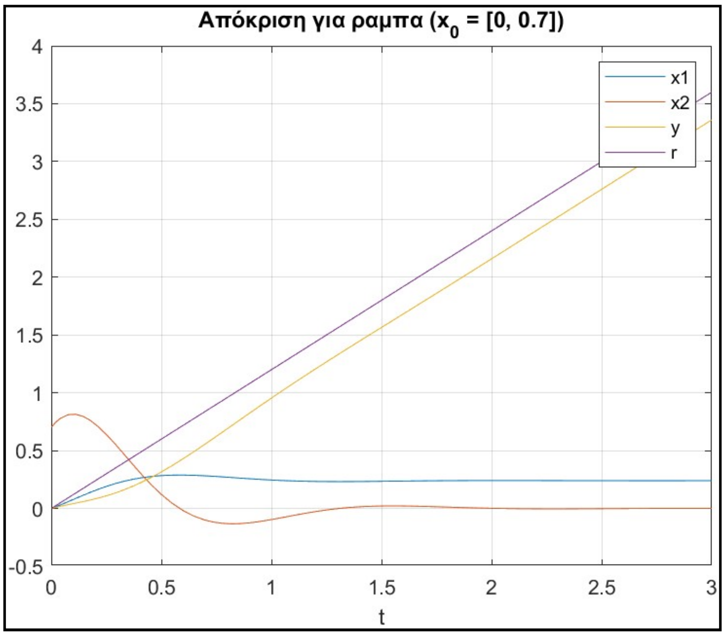


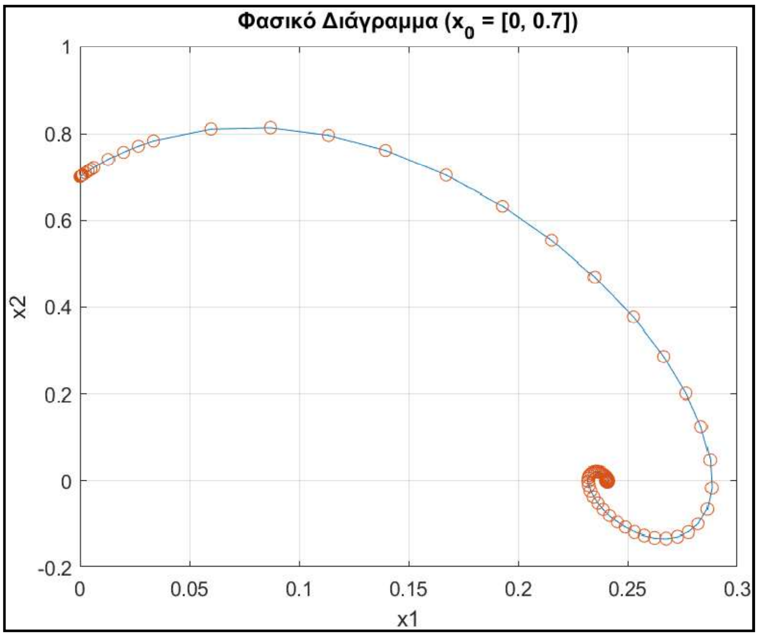
2) $y(0) = 1 \;\; και \; \dot{y}(0) = 0$



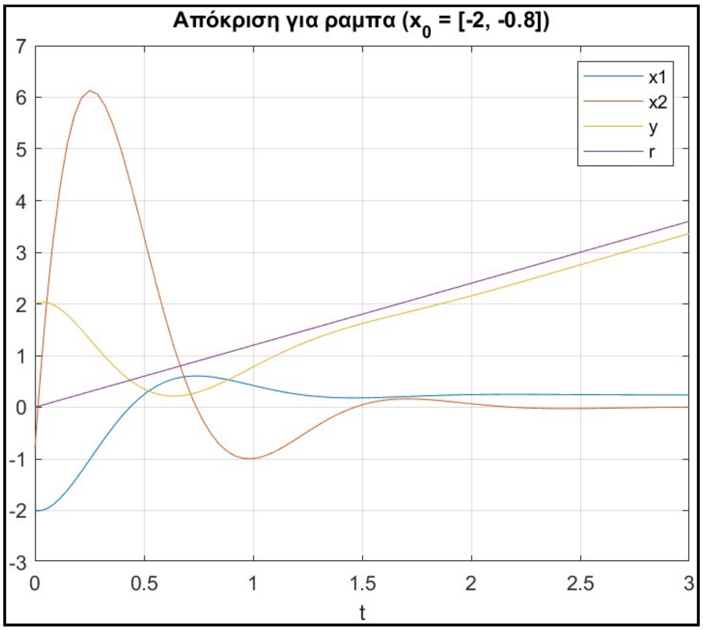


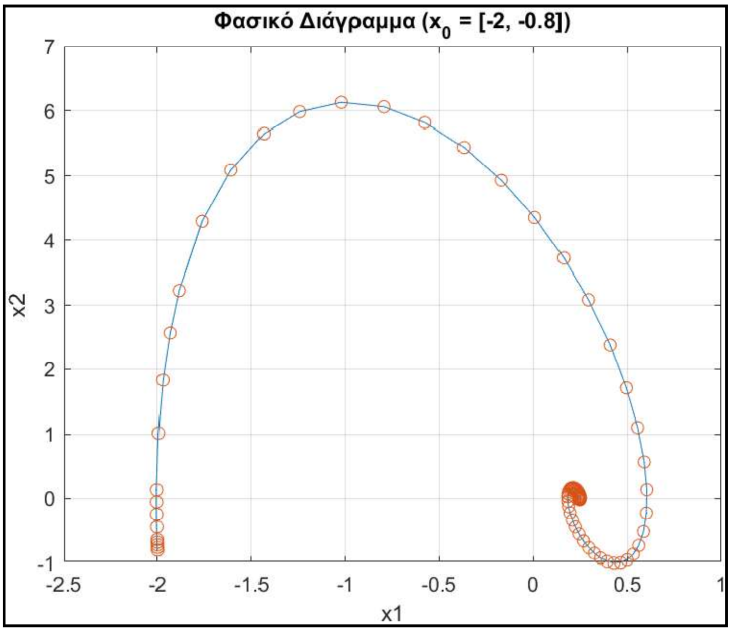
3) $y(0) = 0 \;\; και \; \dot{y}(0) = 0.5$



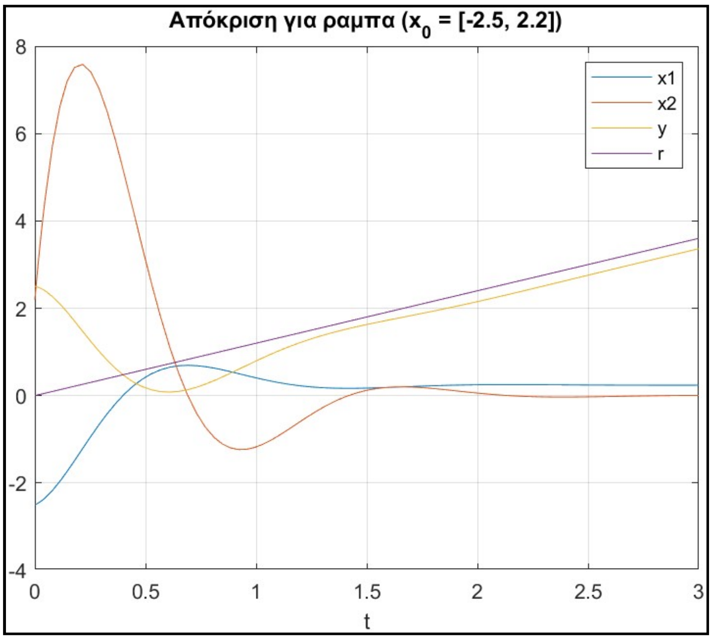


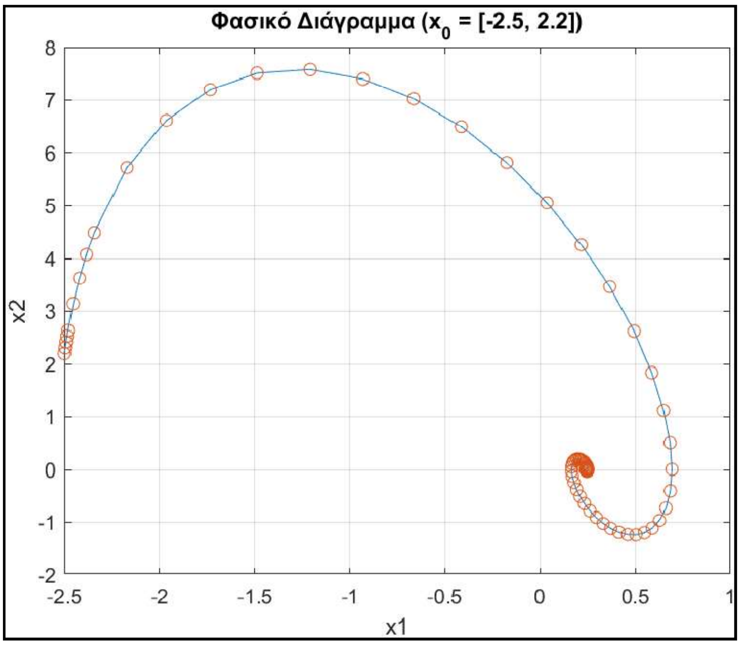
4) $y(0) = 2 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2$



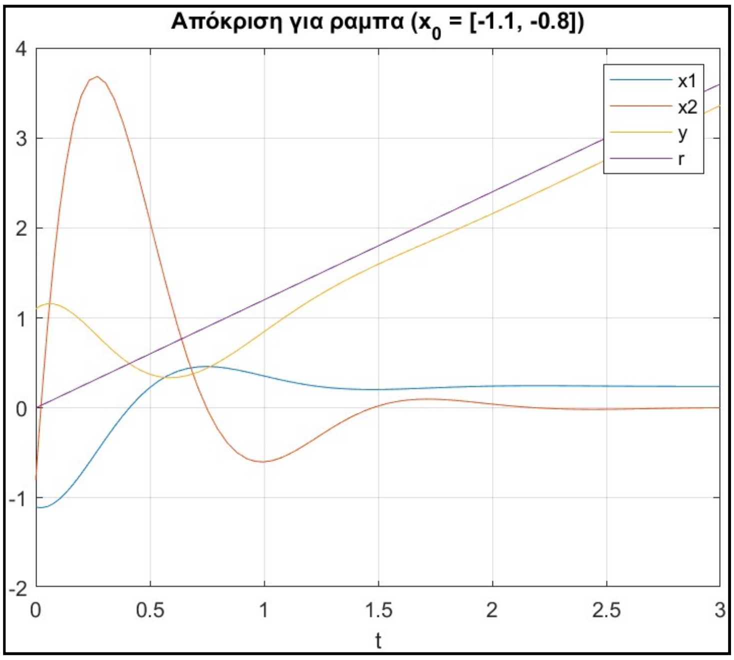


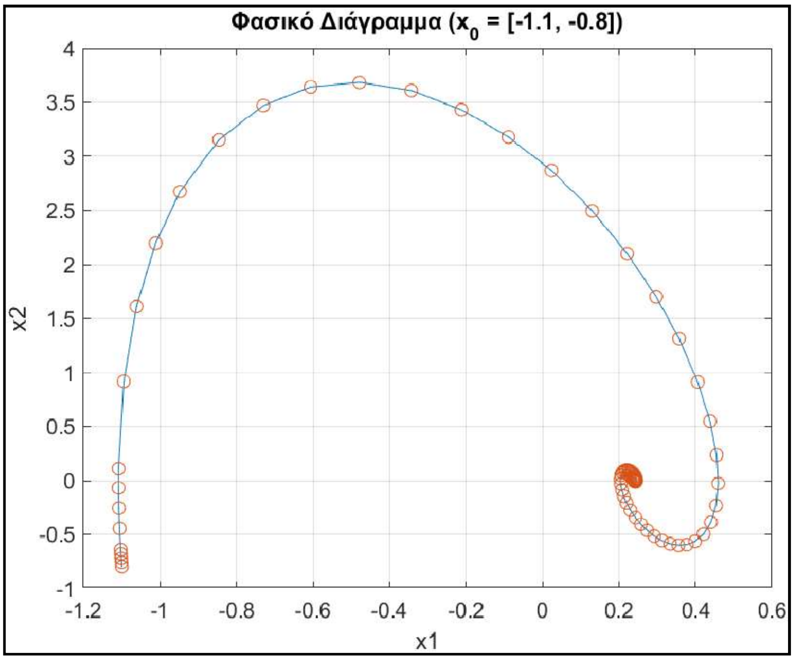
5) $y(0) = 2.5 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = -1$





6) $y(0) = 1.1 \ και \ \dot{y}(0) = 2$





Η έξοδος y(t) συγκλίνει στην είσοδο r(t) αλλά με ένα σταθερό σφάλμα. Το σφάλμα προκύπτει θεωρητικά:

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sH(s)}$$

$K_v = K$, οπότε τελικό σφάλμα ταχύτητας :

$$e(t) = \frac{B}{K} = \frac{1.2}{5} = 0.24 = x_1$$

<u>Ερώτημα 2</u>

i. Για $u = \begin{cases} ae(t) & για \ [-e_0, e_0] \\ e(t)\,, & αν \ |e(t)| > e_0 \end{cases}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση για το κλειστό βρόχο παραμένει :

$$s(Ts+1)Y(s) = KU(s) \ \Rightarrow \ YTs^2 + Ys = KU$$

Στο πεδίο του χρόνου, από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace :

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Ku$$

a) Για $\boldsymbol{e(t)} \in [-\boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_0}]$, $\boldsymbol{N(s)} = \boldsymbol{a}$

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Kae(t)$$

$$\Rightarrow T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Kae(t) = T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t)$$

Θεωρούμε τις καταστάσεις :

$$x_1 = e(t) \quad και \quad x_2 = \dot{e}(t)$$

Οπότε , οι εξισώσεις κατάστασης γίνονται :

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{aK}{T}x_1 + \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου:

$$H_c(s) = \frac{aH(s)}{1+aH(s)} = \frac{\frac{aK}{T}}{s^2+\frac{s}{T}+\frac{aK}{T}}$$

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου είναι η:

$$s^2 + \frac{s}{T} + \frac{aK}{T}$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι :

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

Συγκρίνοντας, έχουμε : ${\omega_n}^2 = \frac{aK}{T}$ και $2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$, δηλαδή προκύπτει :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{aK}{T}} \quad και \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{aKT}}$$

b) Για $|\boldsymbol{e(t)}| > \boldsymbol{e_0}$, N(s) = 1

Οι εξισώσεις κατάστασης γίνονται :

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 + \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου:

$$H_c(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{s}{T}+\frac{K}{T}}$$

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου είναι η:

$$s^2 + \frac{s}{T} + \frac{K}{T}$$

Έχουμε : ${\omega_n}^2 = \frac{K}{T}$ και $2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$, δηλαδή προκύπτει :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

ii. Υπολογισμός σημείων ισορροπίας

- <u>Βηματική είσοδος πλάτους Α :</u>

$$r(t) = A \quad \Rightarrow \dot{r}(t) = 0, \;\; \ddot{r}(t) = 0$$

- Για $|\boldsymbol{x_1}| > \boldsymbol{e_0}$

Στο σημείο ισορροπίας :

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1$$

Επομένως, το $(0,0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή η έξοδος y(t) ακολουθεί ακριβώς τη τιμή της εισόδου r(t). Το x_1 δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, οπότε πρακτικά δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας στο (0,0).

- Για $|\boldsymbol{x_1}| \leq \boldsymbol{e_0}$

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{aK}{T}x_1$$

Επομένως, μοναδικό σημείο ισορροπίας στο (0,0).

  - Ράμπα κλίσης B

$$r(t) = Bt \quad \Rightarrow \dot{r}(t) = B, \ \ddot{r}(t) = 0$$

- Για $|\boldsymbol{x_1}| > \boldsymbol{e_0}$

Στο σημείο ισορροπίας :

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}x_1 + \frac{B}{T}$$

Επομένως, το $(\frac{B}{K}, 0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος, μόνο αν $\left|\frac{B}{K}\right| > e_0$, αλλιώς δεν υπάρχει.

- Για $|\boldsymbol{x_1}| \leq \boldsymbol{e_0}$

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{aK}{T}x_1 + \frac{B}{T}$$

Επομένως, μοναδικό σημείο ισορροπίας στο $(\frac{B}{\alpha K}$,0) μόνο αν $\left|\frac{B}{\alpha K}\right| \leq e_0$. Διαφορετικά το $|x_1|$ εκτός διαστήματος.

Όταν ισχύει ταυτόχρονα:

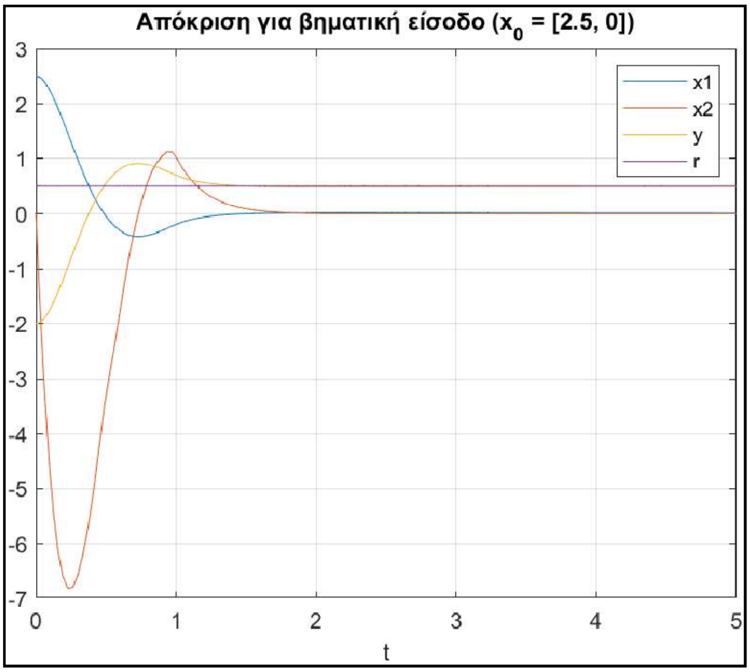
$\left|\frac{B}{aK}\right| > e_0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left|\frac{B}{K}\right| \leq e_0$ βρισκόμαστε στη περιοχή $|x_1| > e_0$.

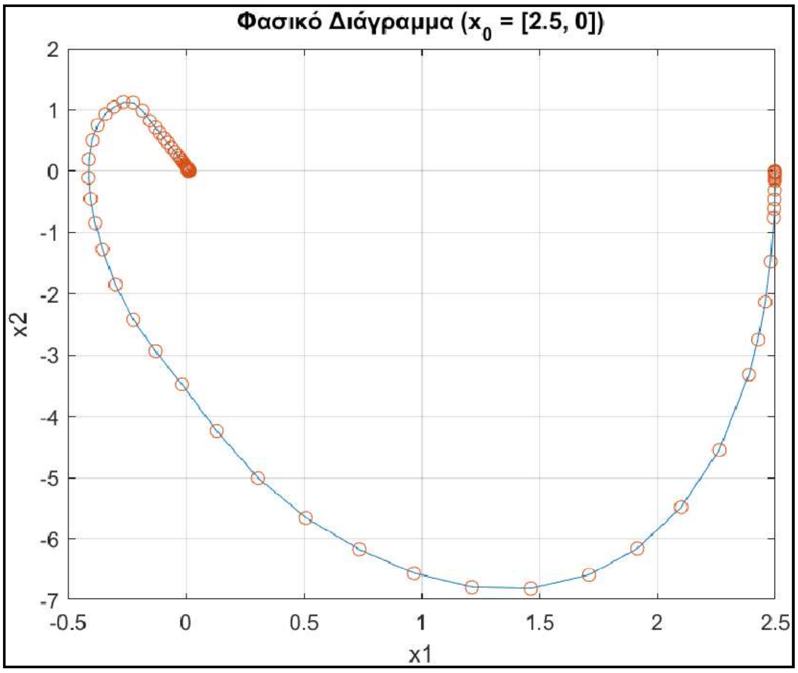
Έτσι, το νέο σημείο ισορροπίας είναι το $(\frac{B}{K}, 0)$.

iii. Προσομοιώσεις για K=5, T=0.2, e_0 = 0.2 , a = 0.05

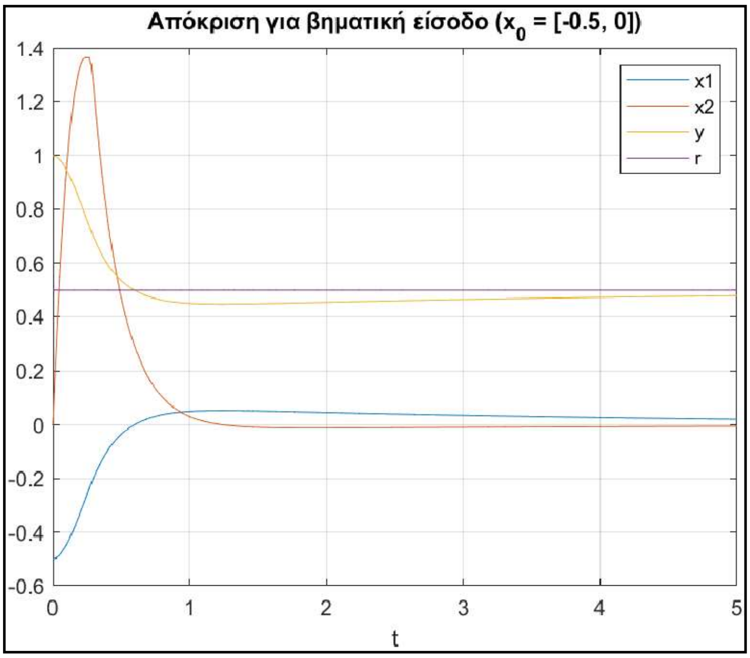
a) Για βηματική είσοδο με πλάτος A= 0.5

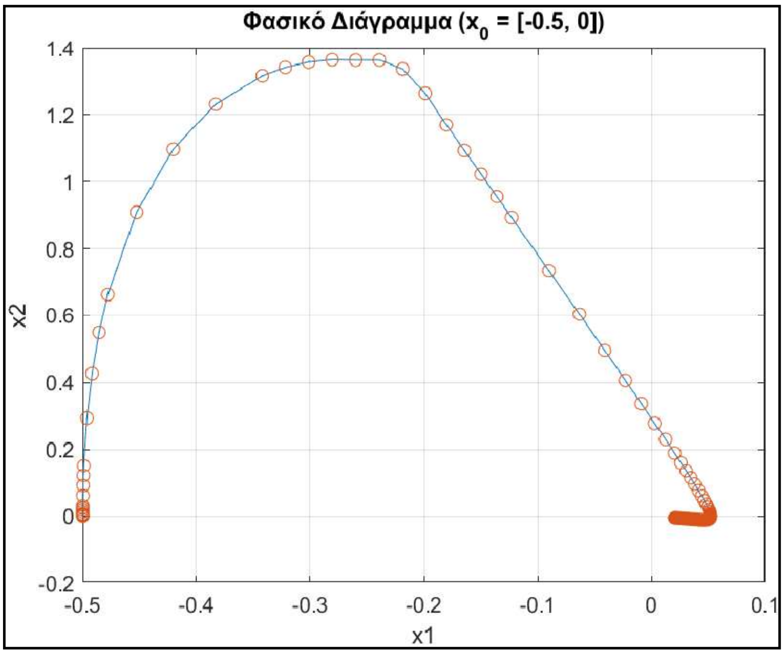
1. $\boldsymbol{y(0) = -2 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0}$



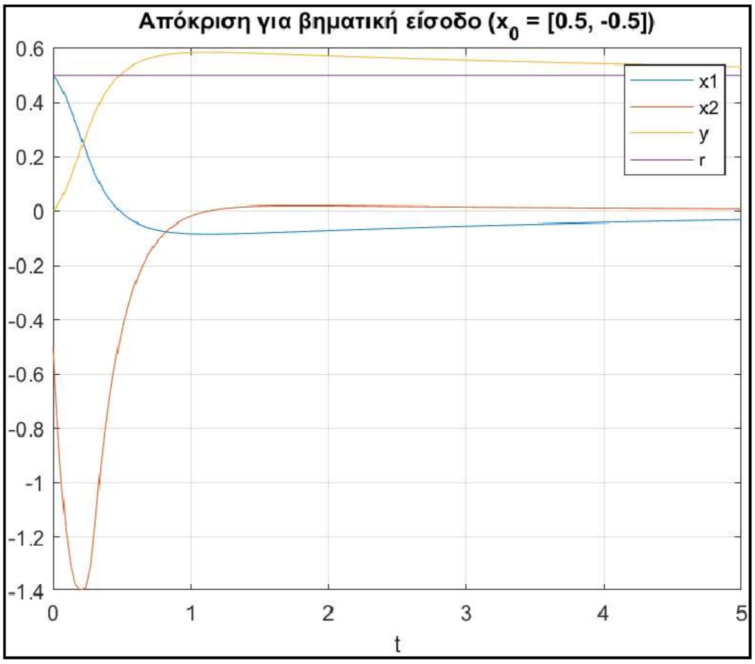


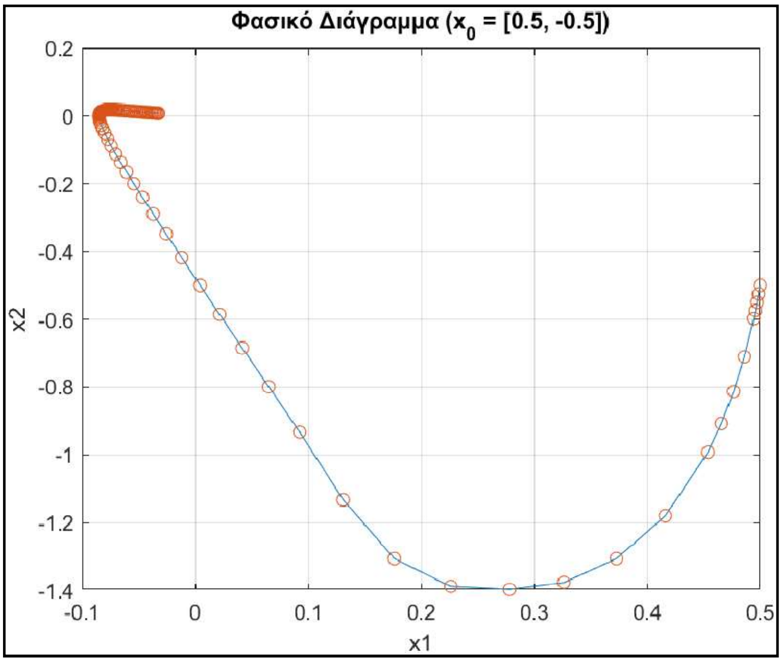
2. $\boldsymbol{y(0) = 1 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0}$



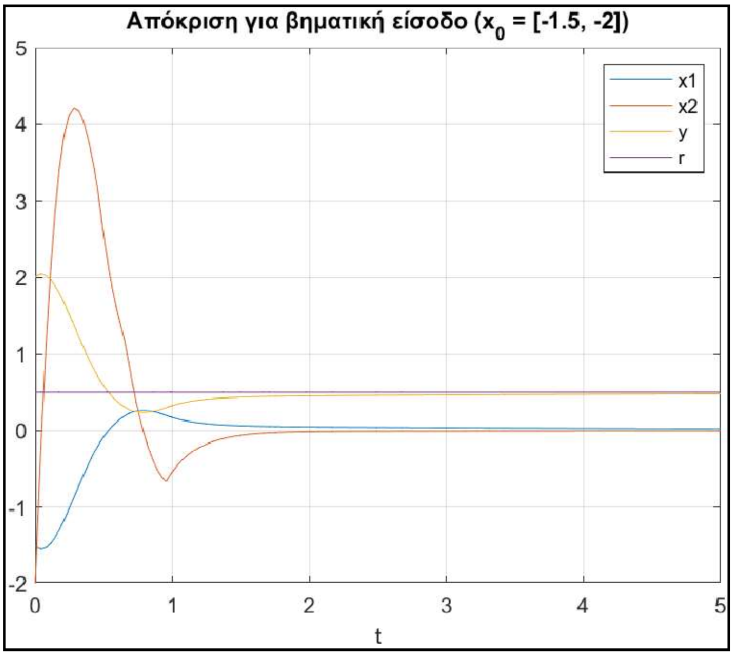


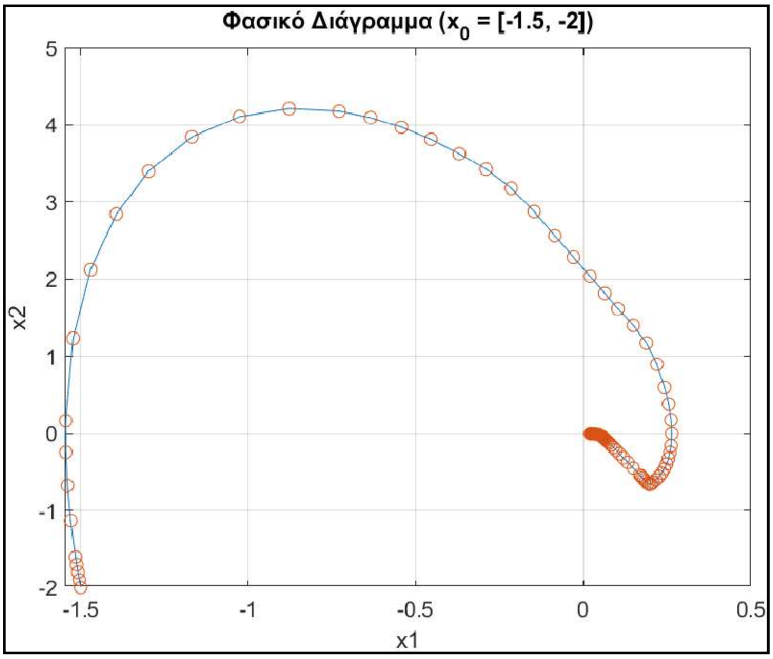
3. $y(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0.5$



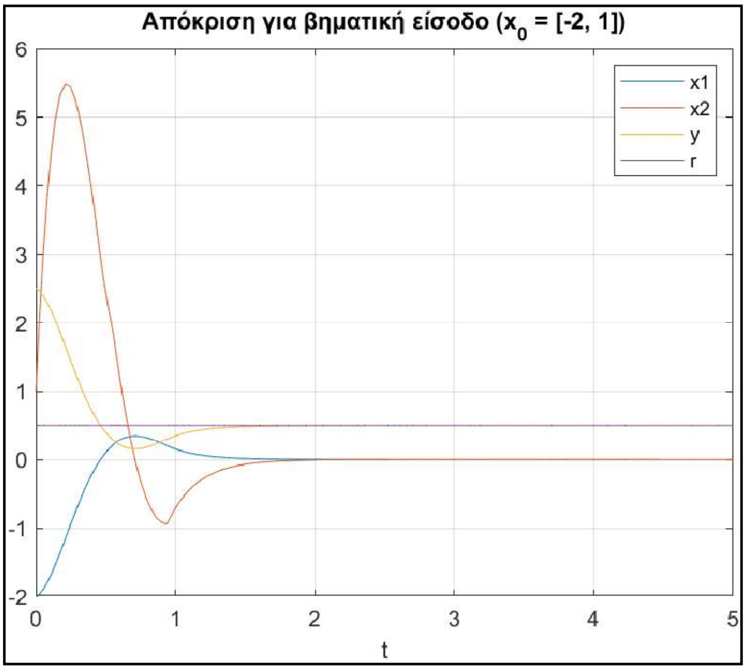


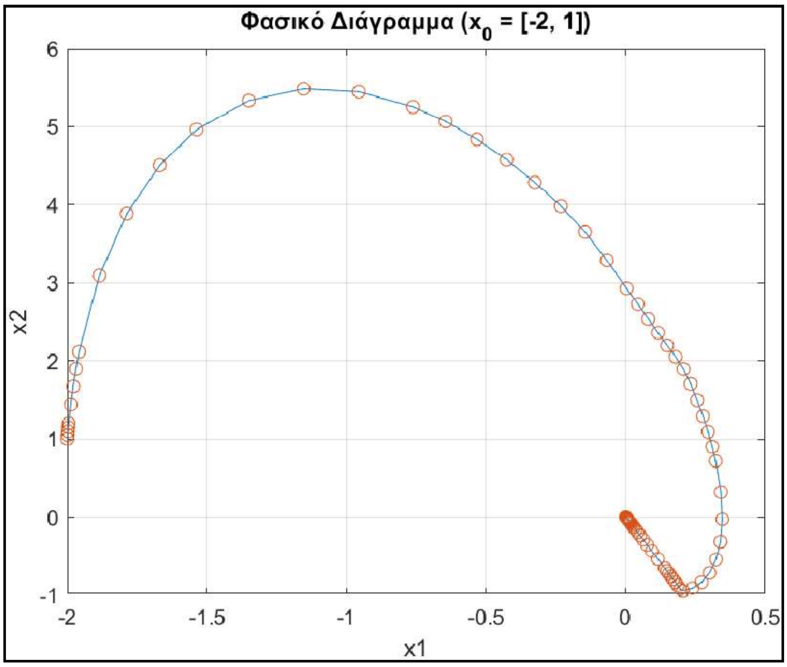
4. $y(0) = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 2$



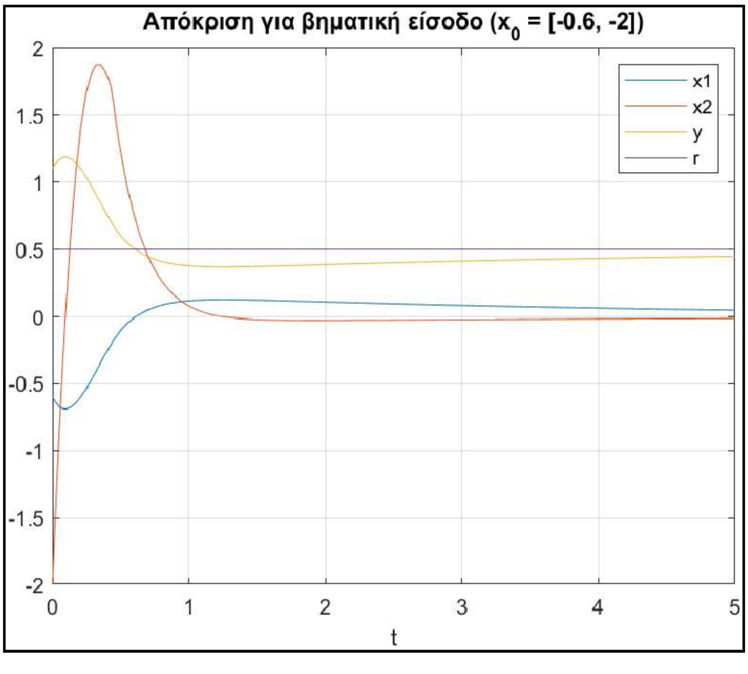


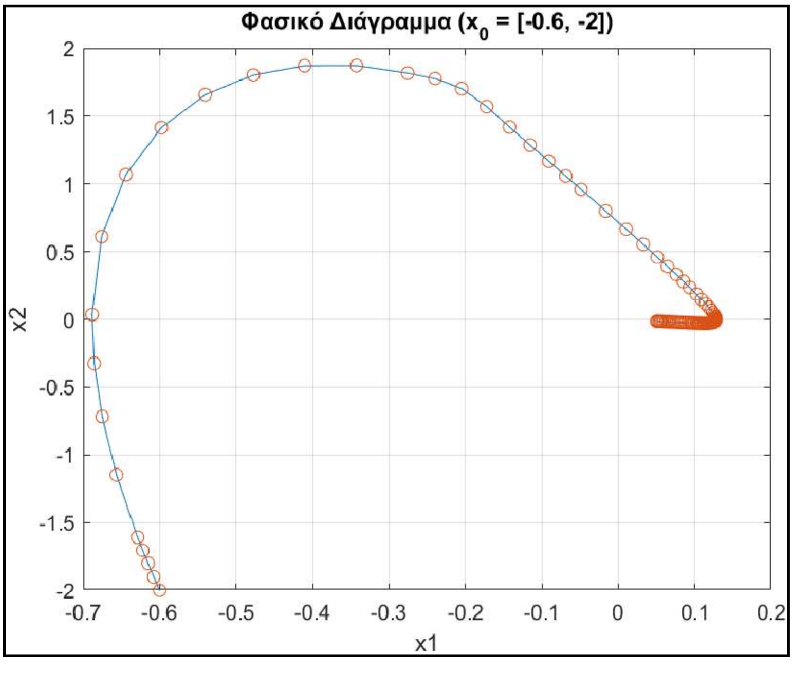
5. $y(0) = 2.5$ $\kappa\alpha\iota$ $\dot{y}(0) = -1$





6. $y(0) = 1.1$ $\kappa\alpha\iota$ $\dot{y}(0) = 2$

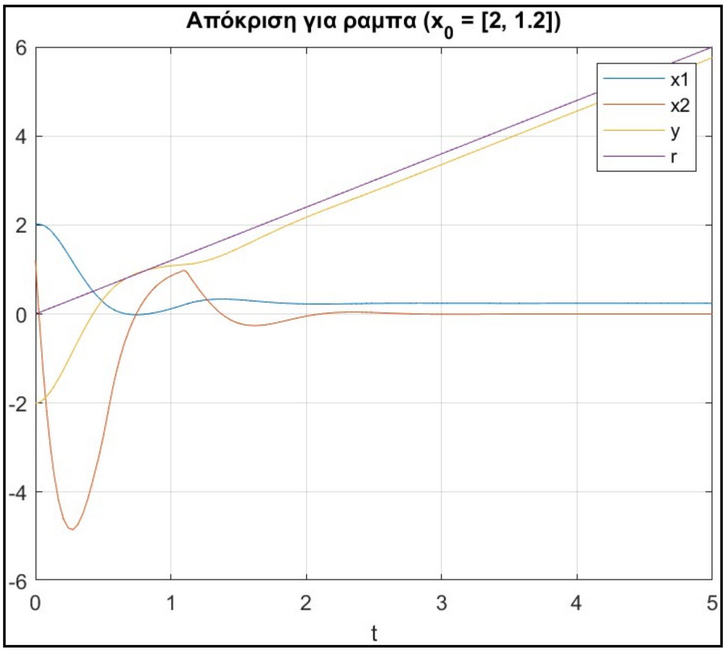


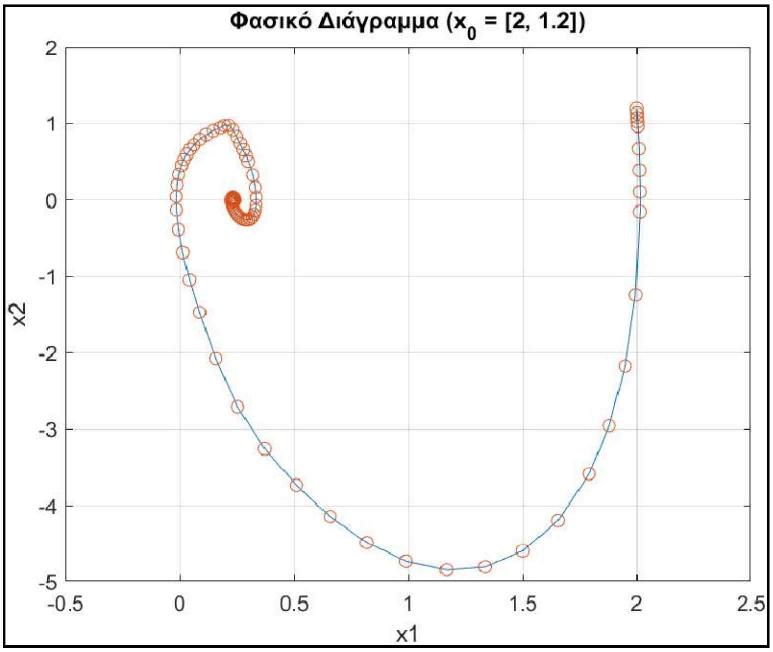


Σε όλες τις περιπτώσεις, το σύστημα δείχνει ασυμπτωτική ευστάθεια. Δηλαδή, η έξοδος y(t) τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή της εισόδου r(t).

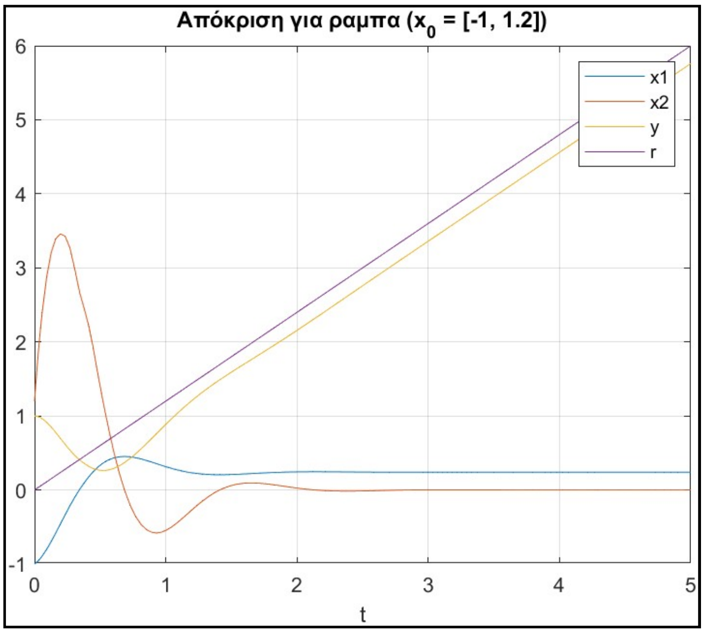
b) Για ράμπα $r_{r1}(t) = 1.2t$

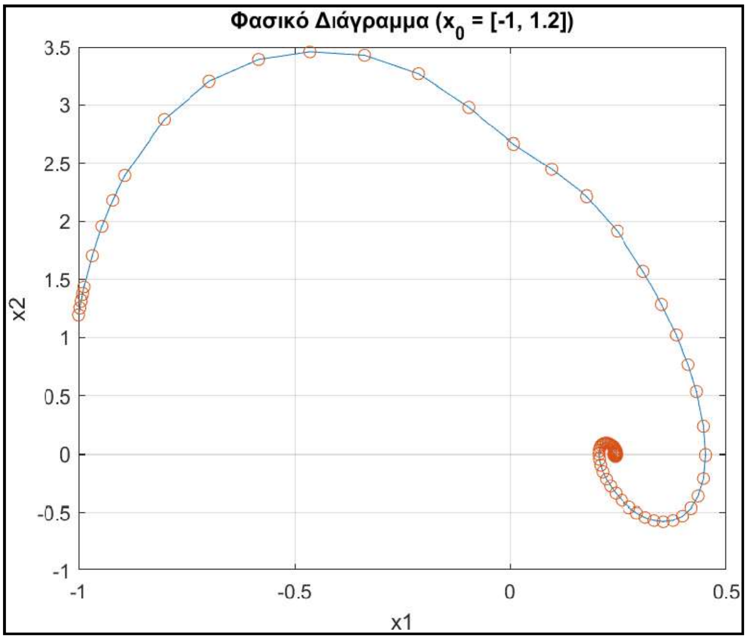
1. $\boldsymbol{y(0) = -2 \;\; και \; \dot{y}(0) = \; 0}$



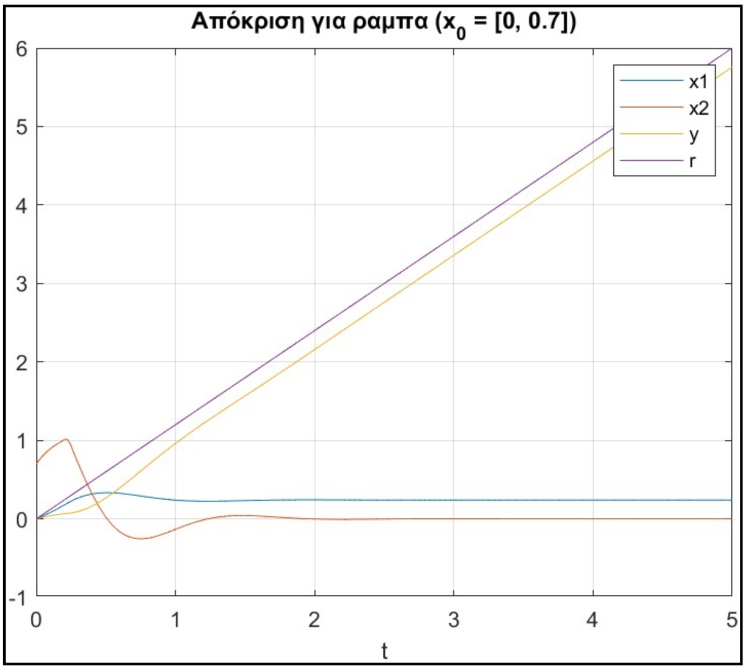


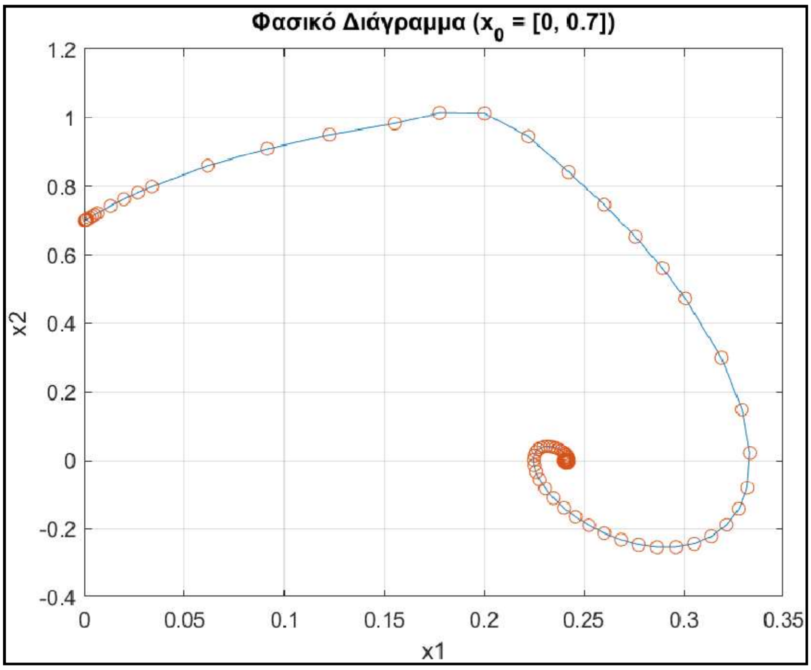
2. $\boldsymbol{y(0) = \; 1 \;\; και \; \dot{y}(0) = \; 0}$



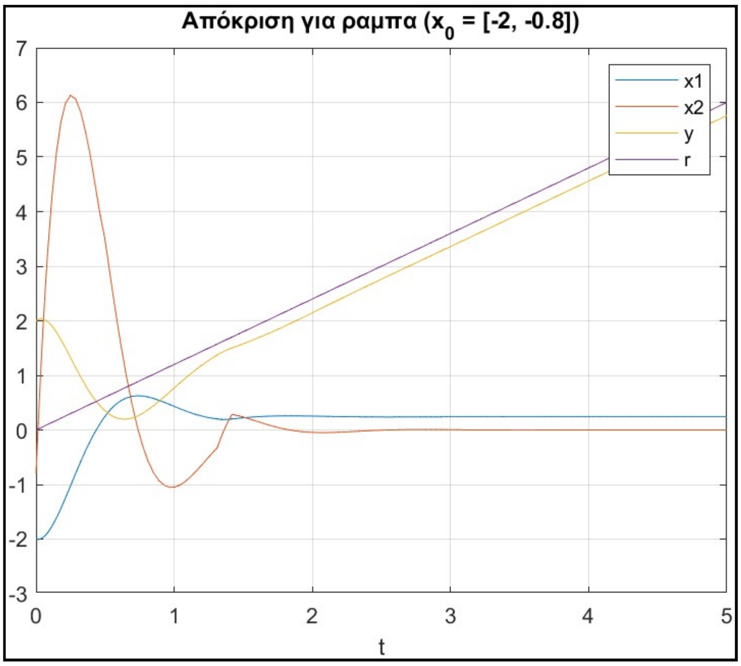


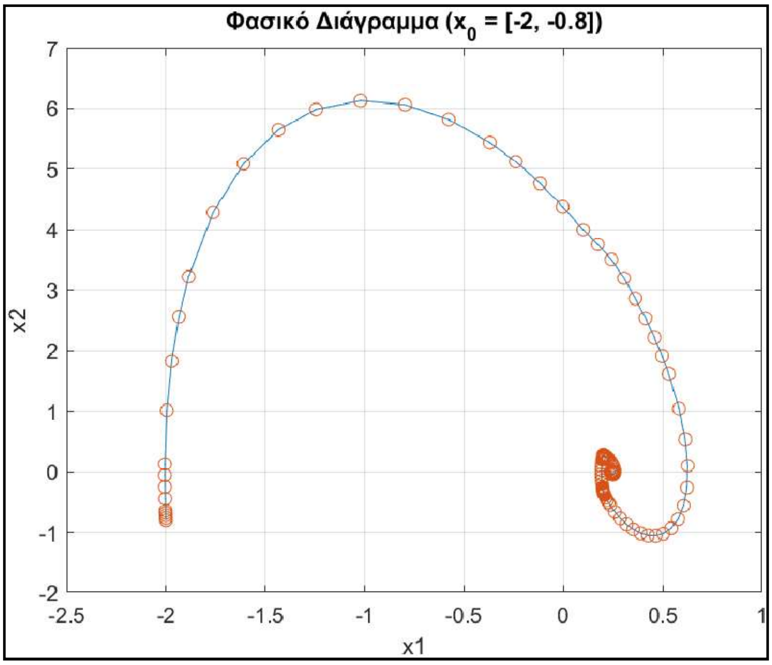
3. $y(0) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0.5$



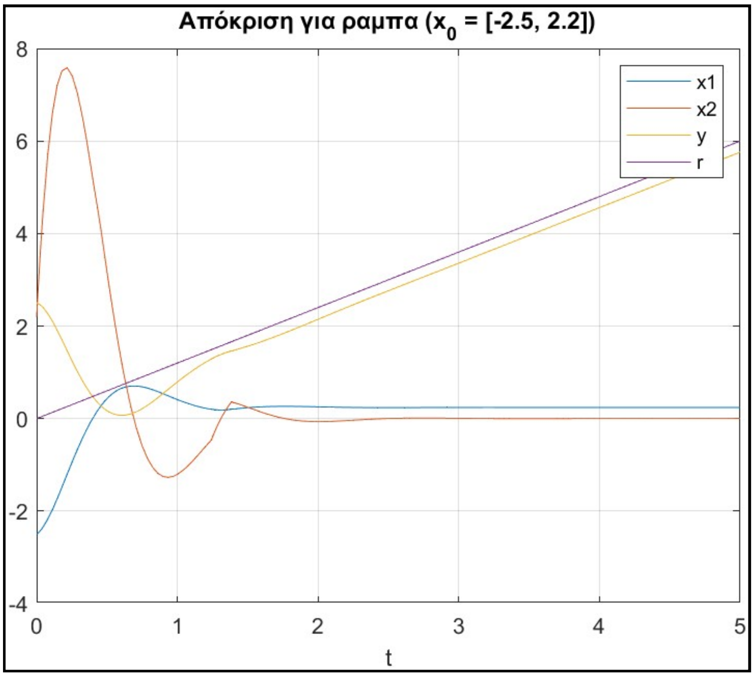


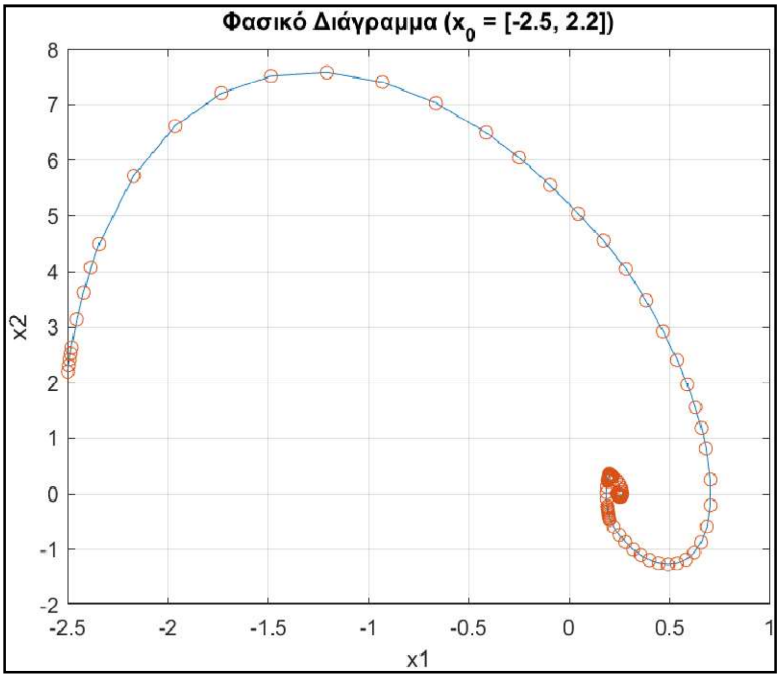
4. $y(0) = 2 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2$



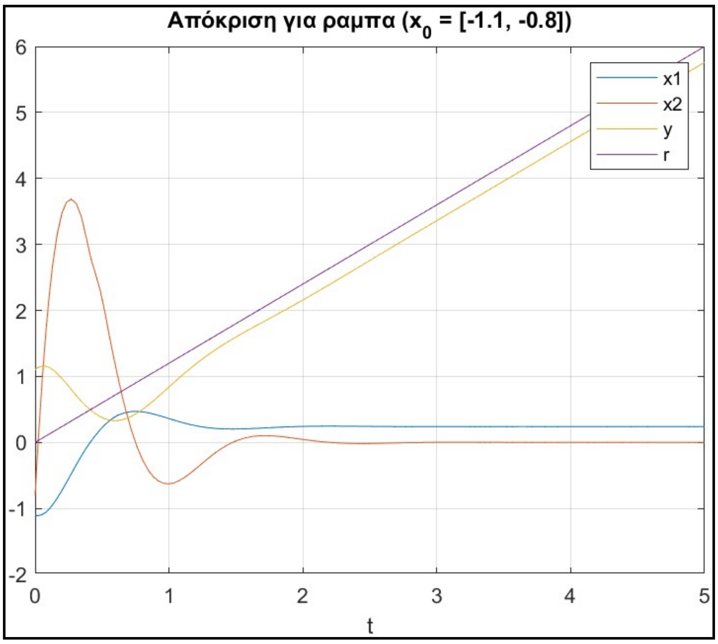


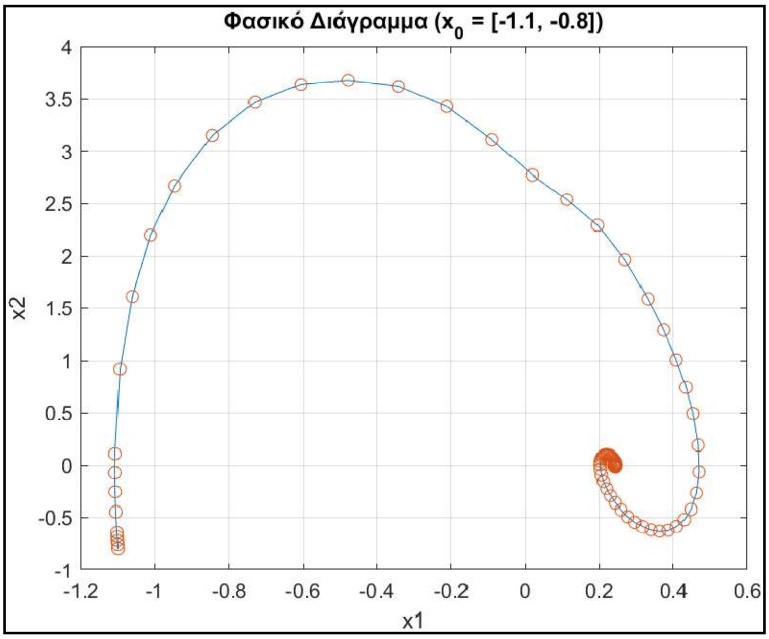
5. $\boldsymbol{y(0) = 2.5 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = -1}$





6. $\boldsymbol{y(0) = 1.1 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2}$

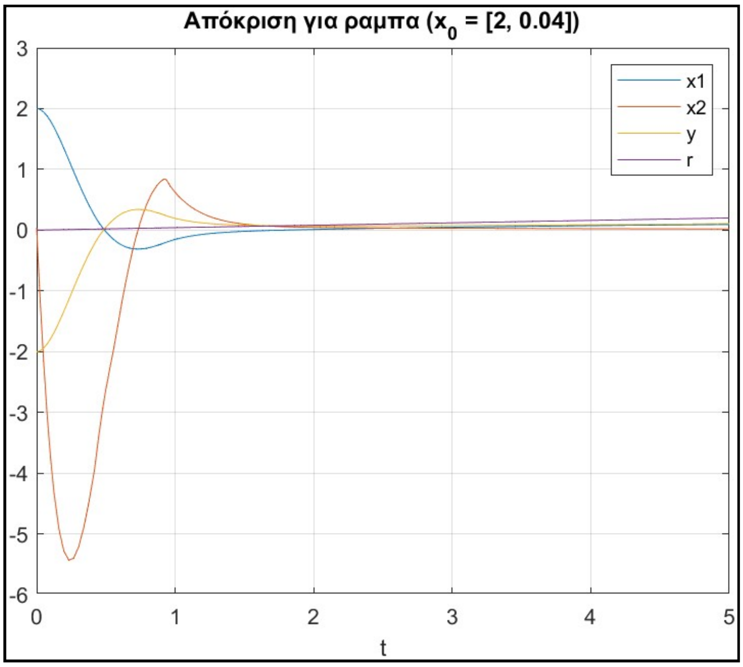


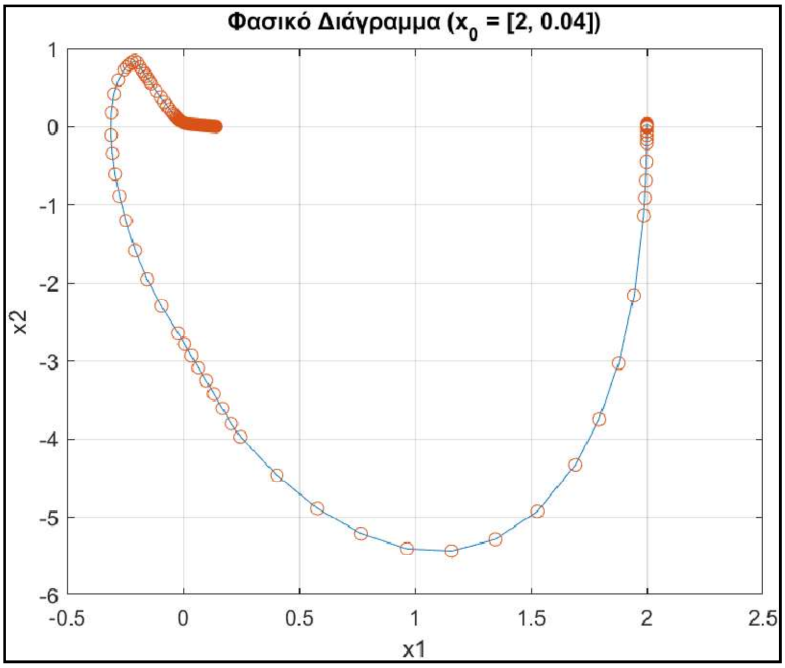


Υπολογισμός του $\left|\frac{B}{K}\right| = \left|\frac{1.2}{5}\right| = 0.24 >$ e_0 , άρα βρισκόμαστε στη περιοχή $|x_1| > e_0$. Οπότε, το σύστημα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο νέο σημείο ισορροπίας (0.24,0). Έτσι, η έξοδος y δεν προσεγγίζει πλήρως την είσοδο r , αλλά με ένα στατικό σφάλμα e_{ssv}=0.24.

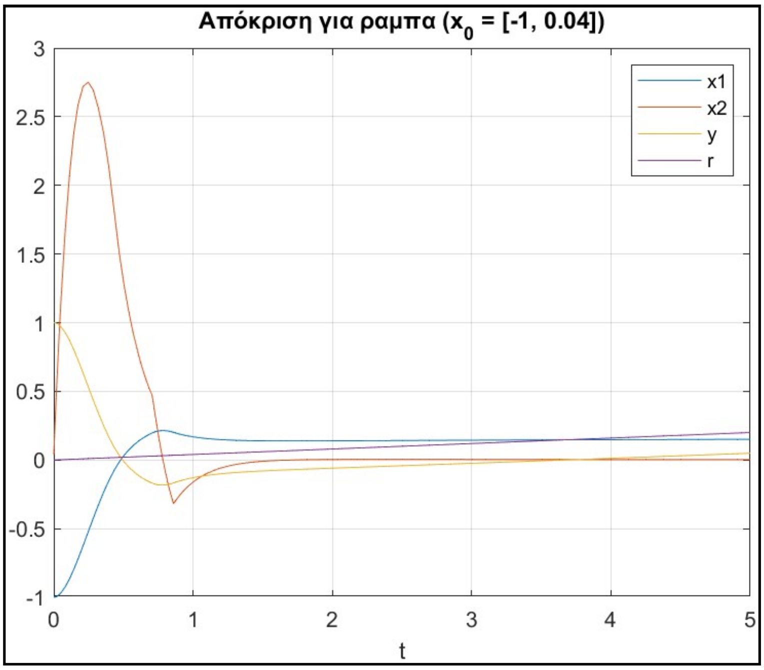
c) Για ράμπα $r_{r2}(t) = 0.04t$

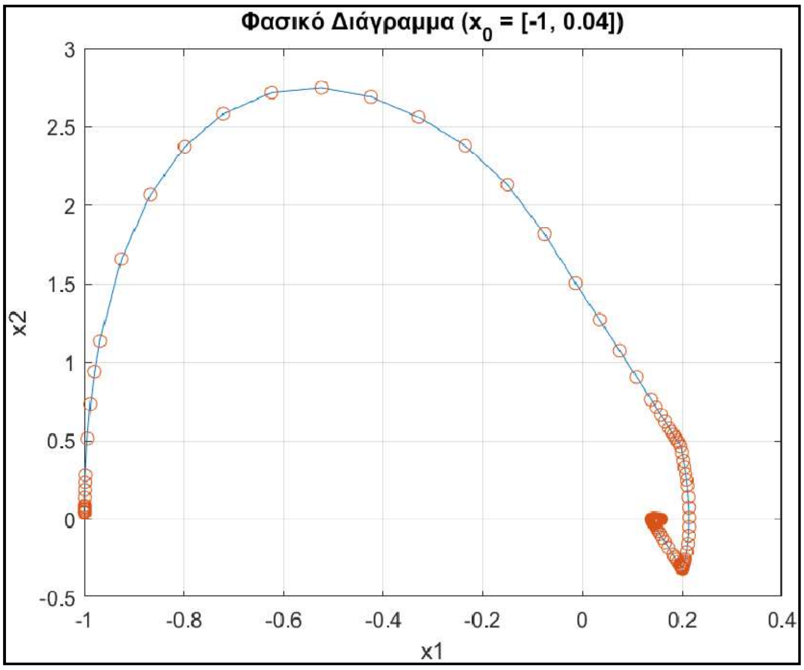
1. $\boldsymbol{y(0) = -2 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0}$



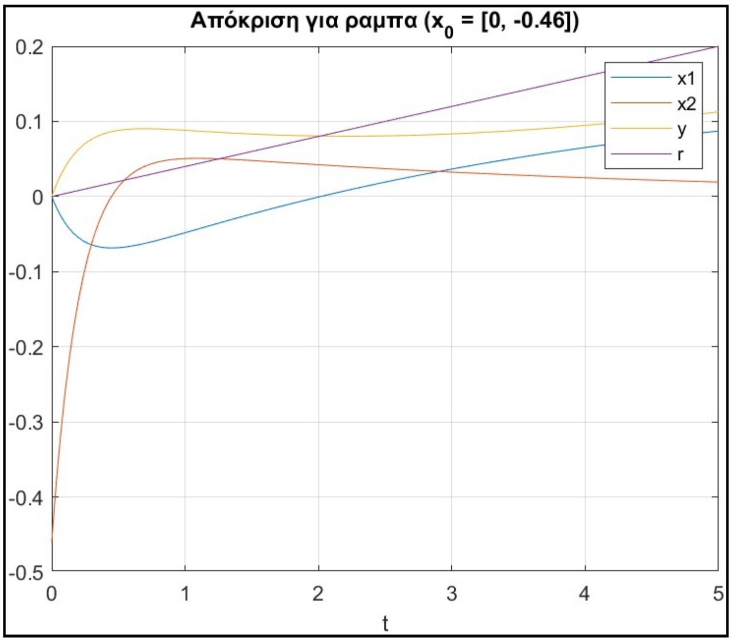


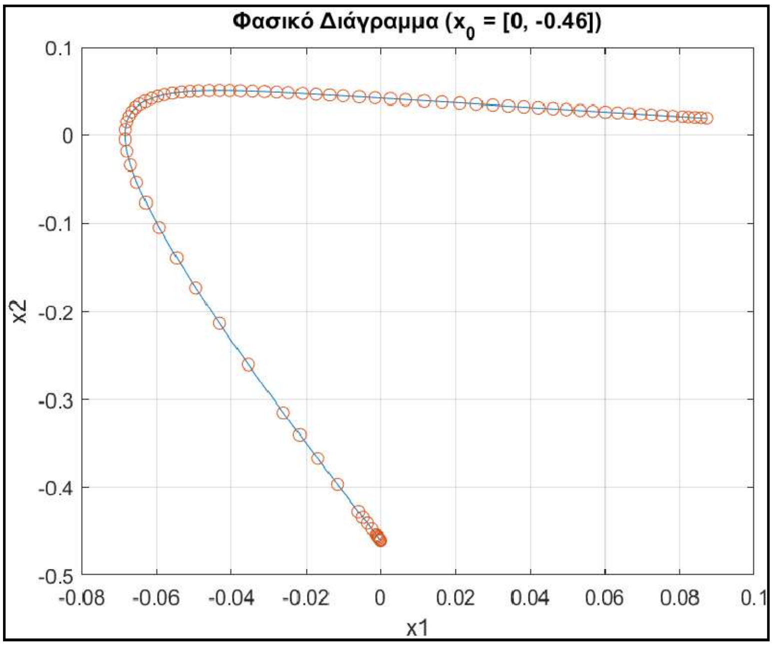
2. $\boldsymbol{y(0) = 1 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0}$



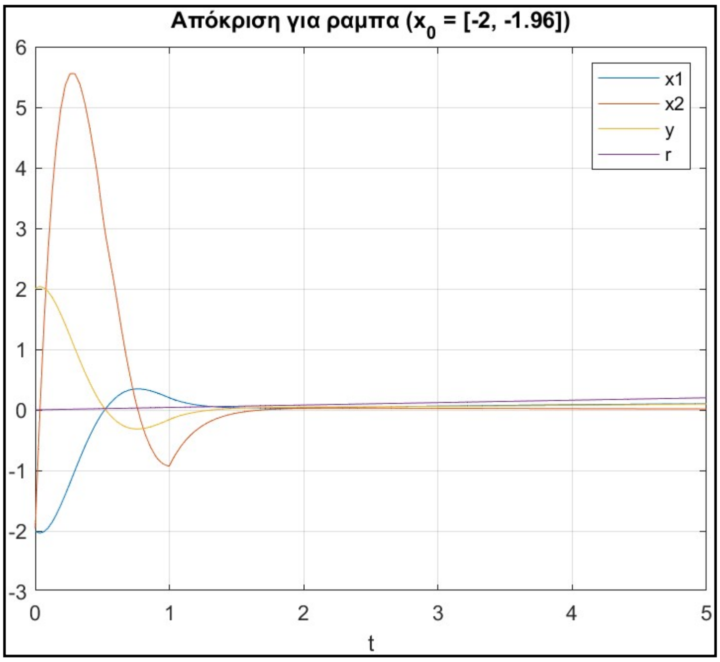


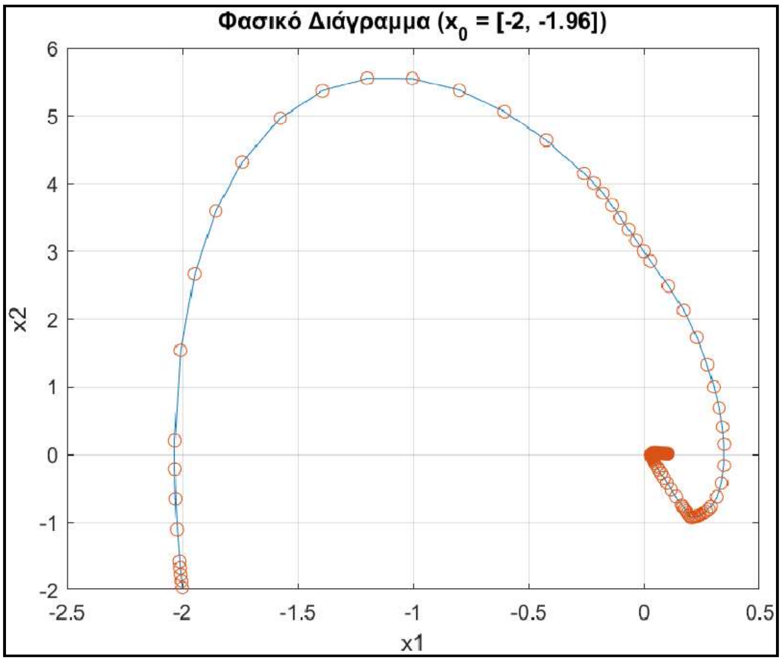
3. $y(0) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0.5$



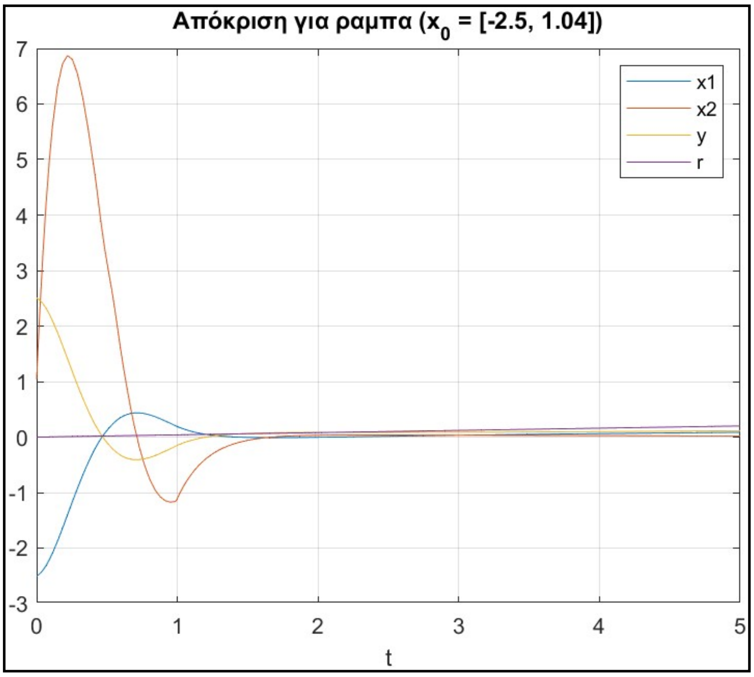


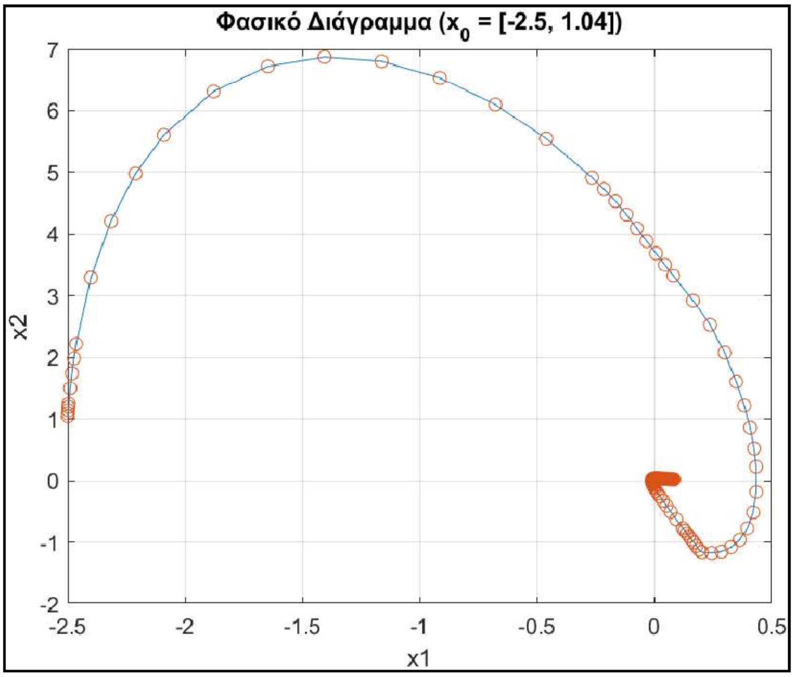
4. $y(0) = 2 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2$



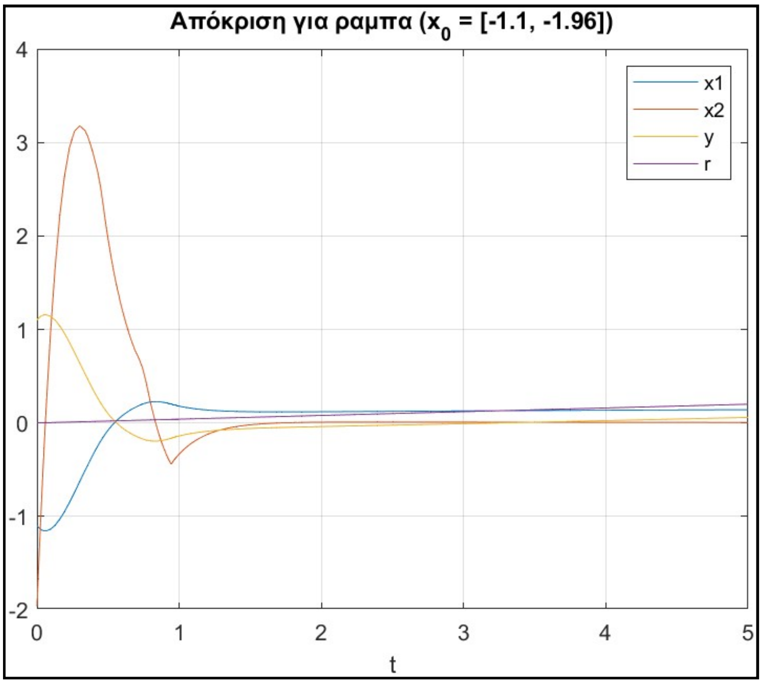


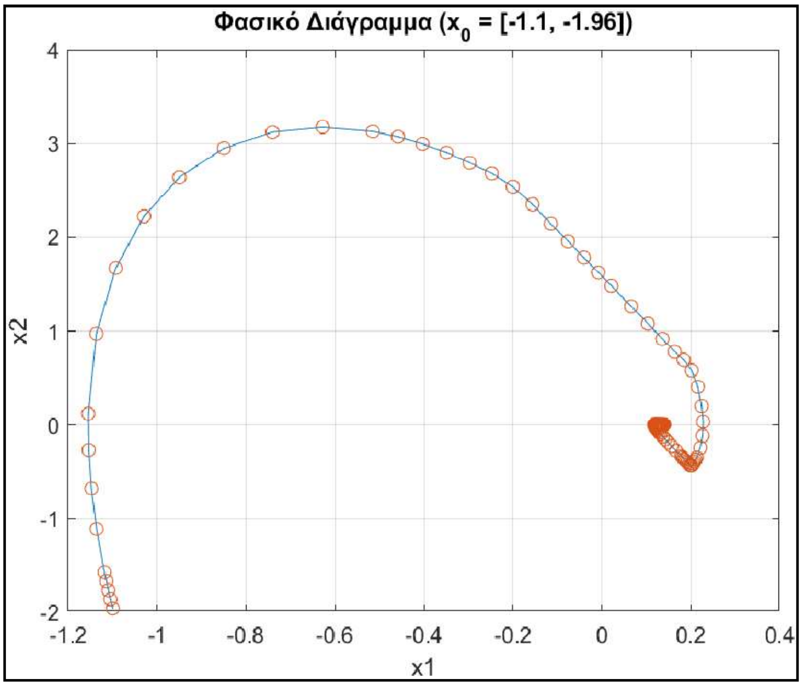
5. $\boldsymbol{y(0) = 2.5 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = -1}$





6. $\boldsymbol{y(0) = 1.1 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2}$

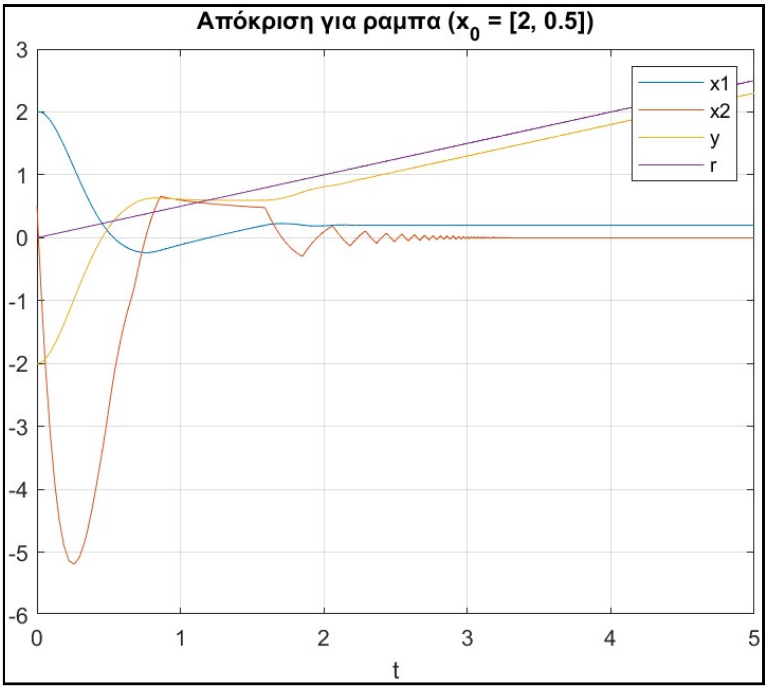


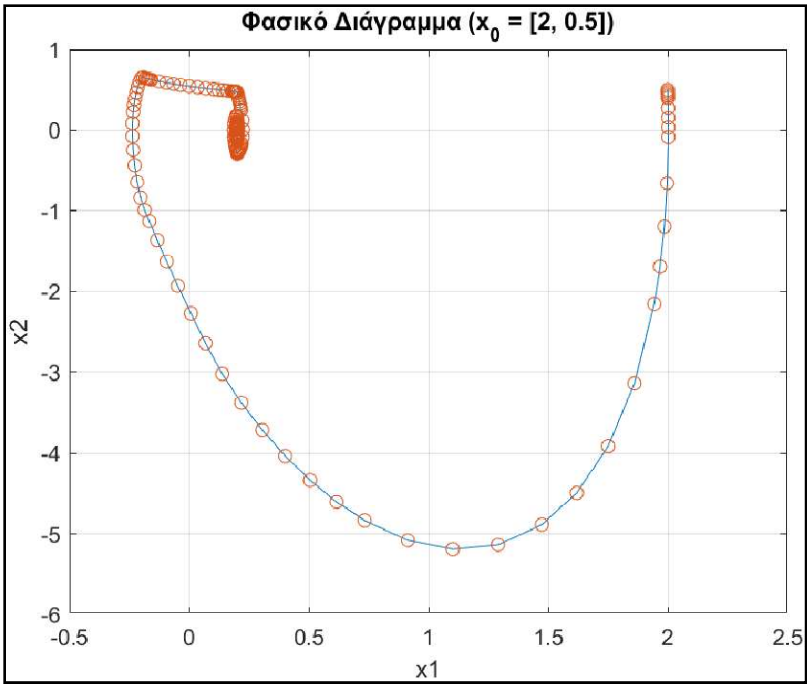


Υπολογισμός του $\left|\frac{B}{aK}\right| = \left|\frac{0.04}{5\cdot 0.05}\right| = 0.16 < e_0$, άρα βρισκόμαστε στη περιοχή $|x_1| \leq e_0$. Οπότε, το σύστημα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας (0.16,0). Έτσι, η έξοδος y δεν προσεγγίζει πλήρως την είσοδο r , αλλά με ένα στατικό σφάλμα e_{ssv}=0.16.

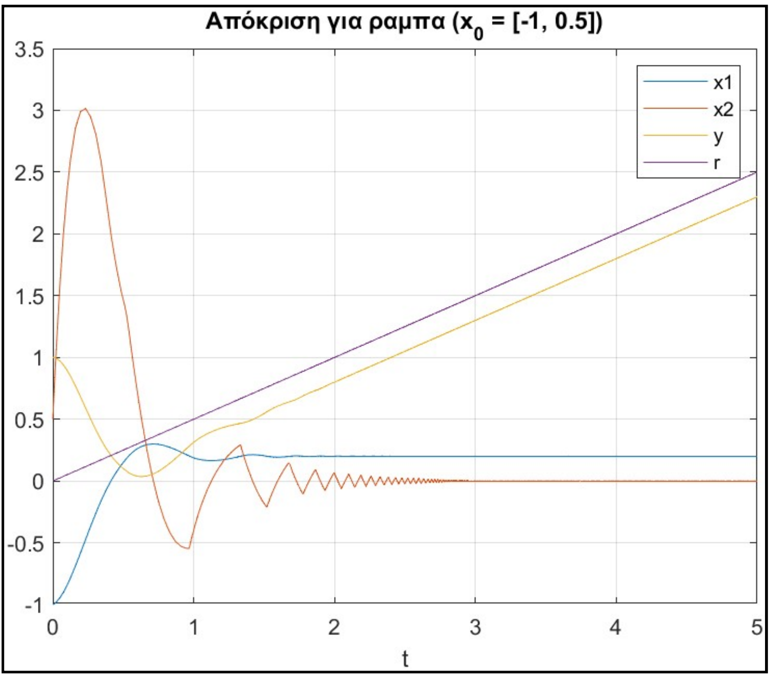
d) Για ράμπα $r_{r3}(t) = 0.5t$

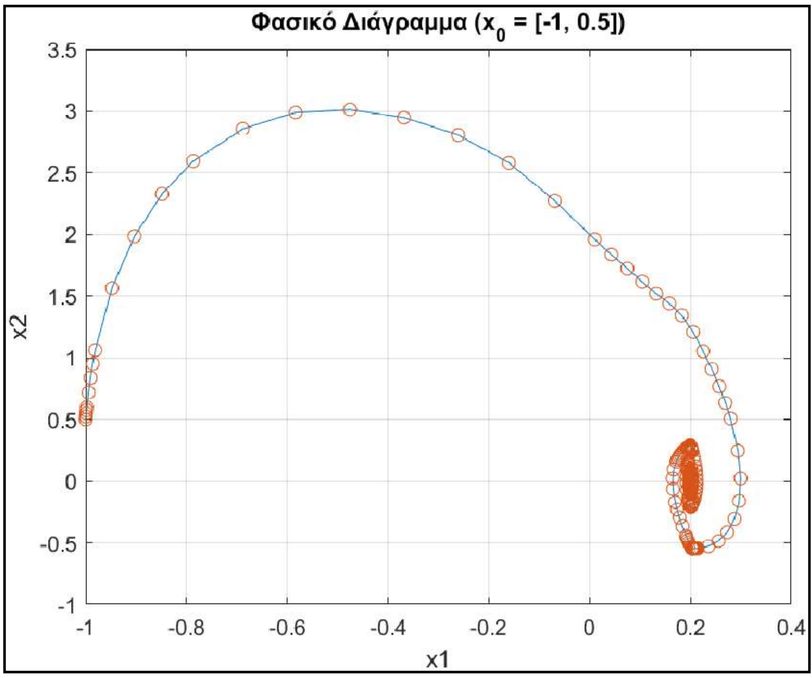
1. $\boldsymbol{y(0) = -2 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0}$



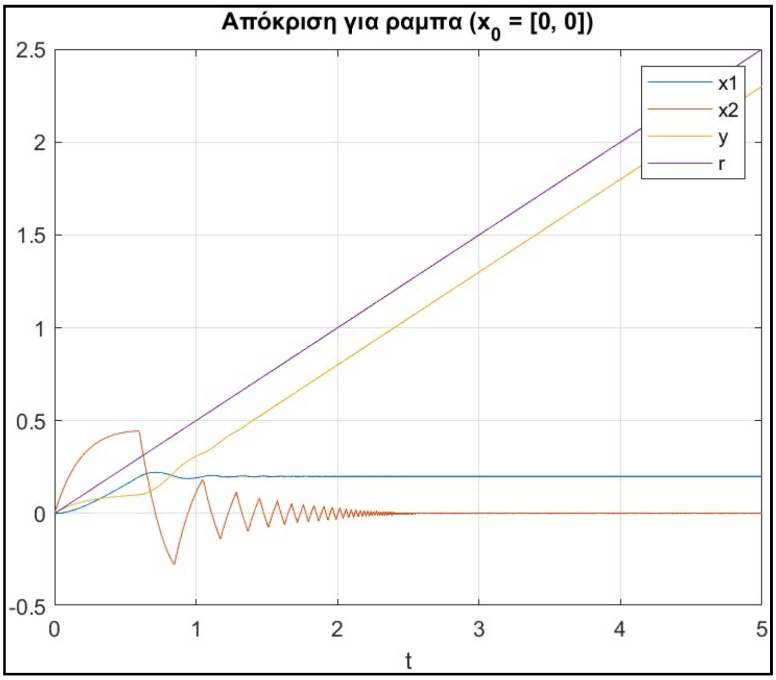


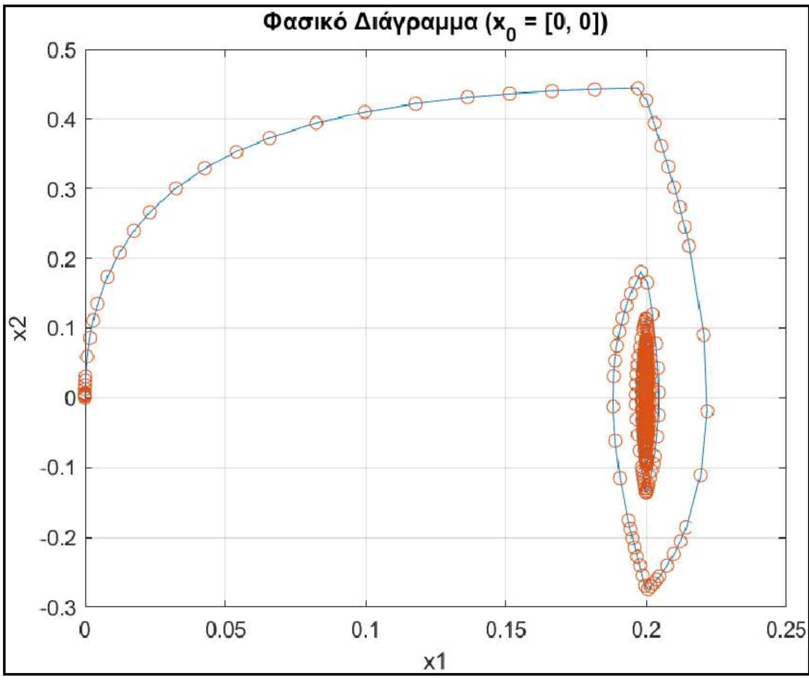
2. $\boldsymbol{y(0) = 1 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 0}$



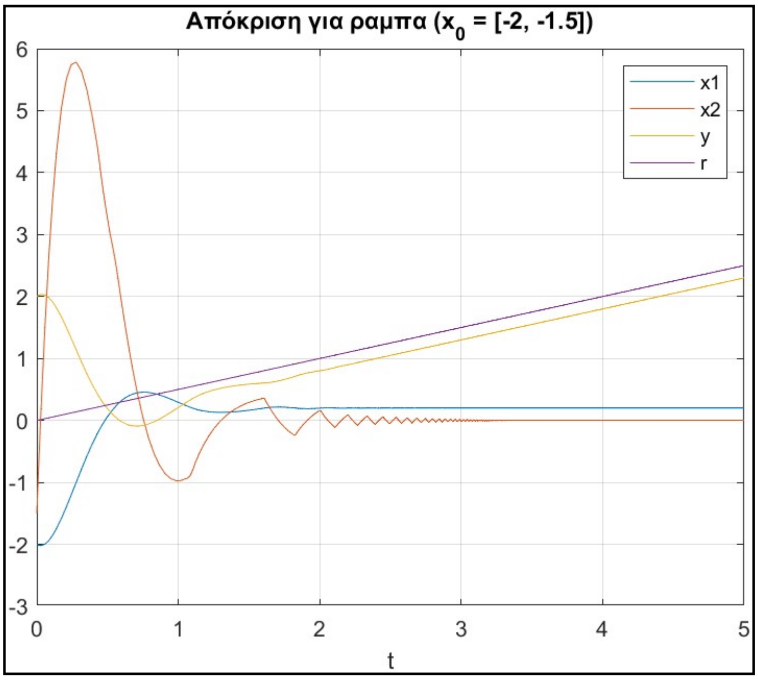


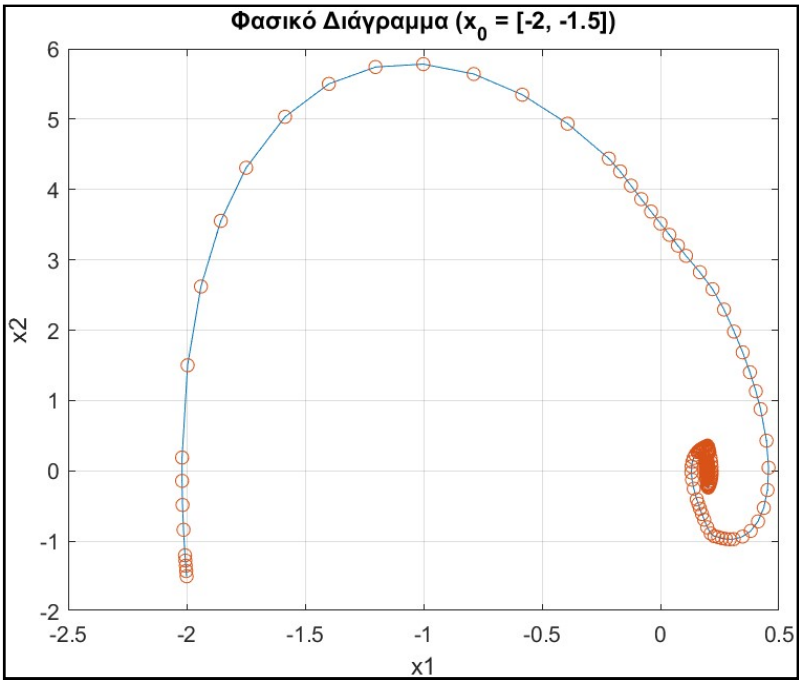
3. $y(0) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 0.5$



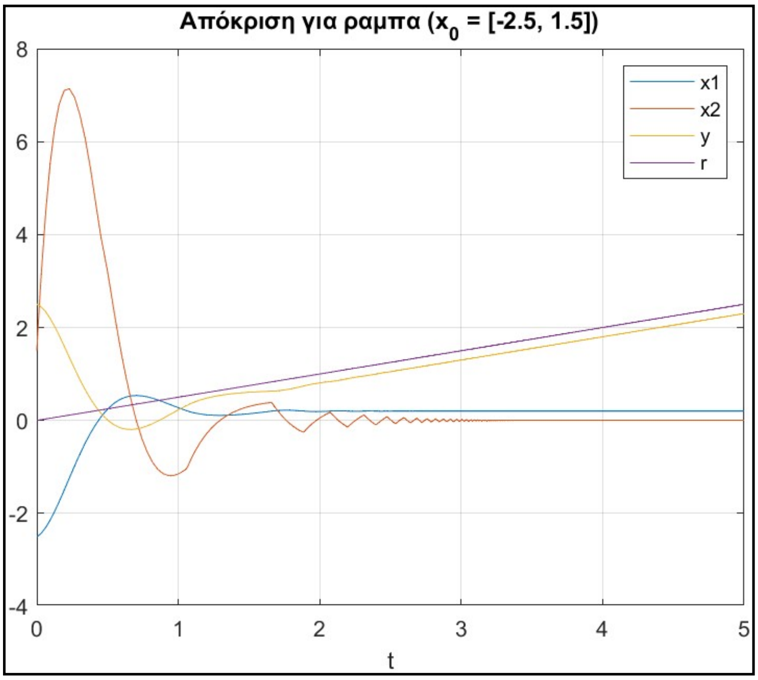


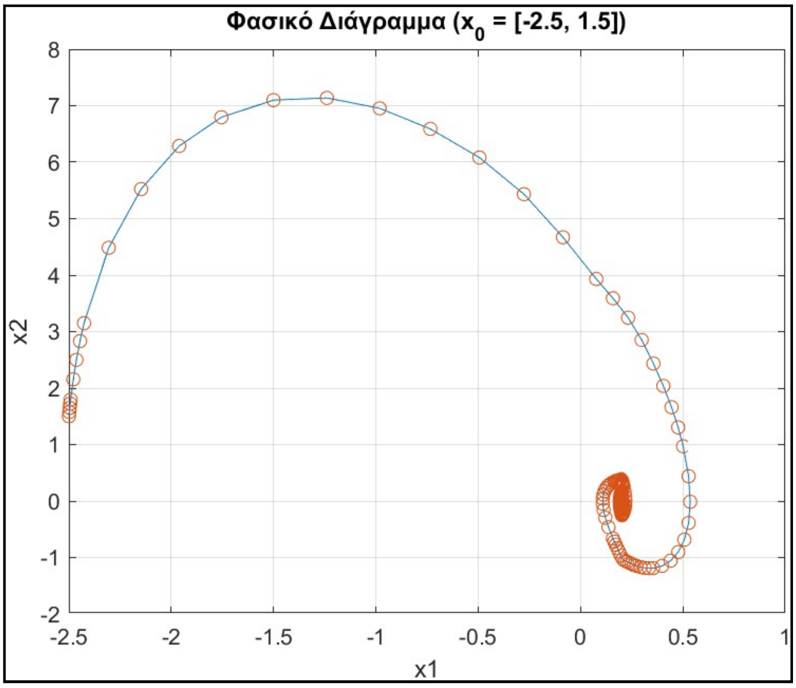
4. $y(0) = 2 \ \kappa\alpha\iota \ \dot{y}(0) = 2$



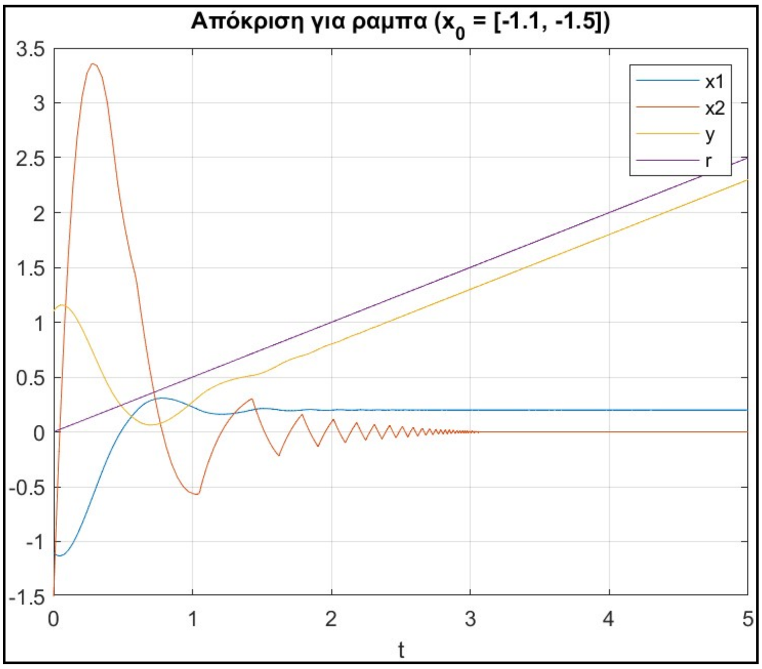


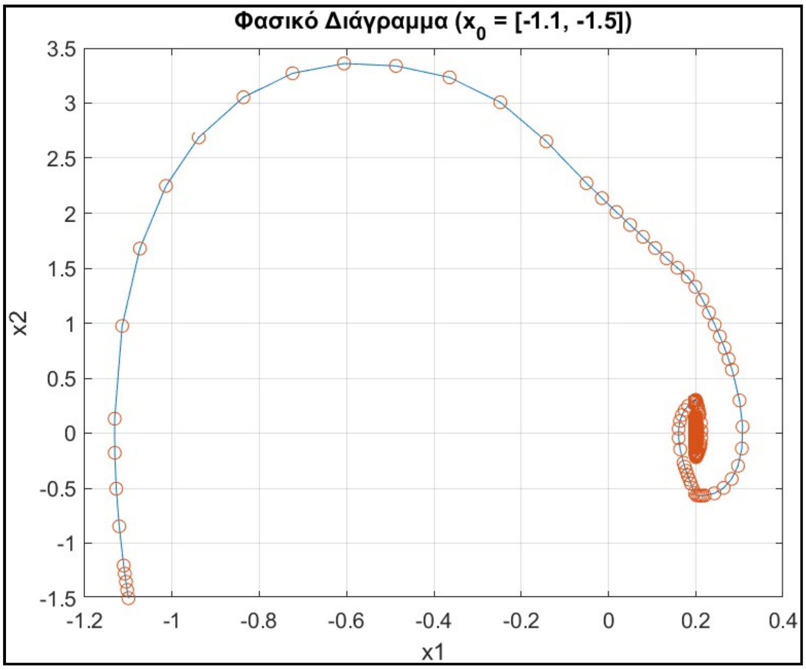
5. $y(0) = 2.5 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = -1$





6. $y(0) = 1.1 \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{y}(0) = 2$





Υπολογισμός του $\left|\frac{B}{K}\right| = \left|\frac{0.5}{5}\right| = 0.1 <$ e$_0$ και $\left|\frac{B}{aK}\right| = \left|\frac{0.5}{0.05\cdot 5}\right| = 2 >$ e$_0$ Οπότε, το σύστημα δεν έχει σημείο ισορροπίας σε καμία από τις περιοχές. Ωστόσο, οι καταστάσεις δείχνουν ταλάντωση γύρω από το $x_1 \to e_0 = 0.2$ και $x_2 \to 0$.

Τμήμα Β

Ερώτημα 1

i. Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος δίνονται ως:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + g(x) + u(x)$$

όπου $g(x) = x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

Το γραμμικοποιημένο σύστημα :

$$\dot{x} = Ax + bg(x) \Rightarrow \dot{x} = Ax$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγχουμε την ευστάθεια του πίνακα A:

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s + 1$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο , άρα ο πίνακας A είναι ευσταθής.

Η συνάρτηση Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x$$

όπου P η λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$A^T P + PA = -Q$$

όπου $Q = 0.2I \ \ \kappa\alpha\iota \ P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$.

Λύνοντας:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\dots}{\Rightarrow} \ P = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη συνάρτηση Lyapunov.

Η παράγωγος της $V(x)$:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V} = (\ Ax + bg(x)\ )^T P x + x^T P (Ax + bg(x)\ )$$

$$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x + 2 x^T P b g(x)$$

με αντικατάσταση από εξίσωση Lyapunov:

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 x^T P b g(x)$$

Επειδή ο Q είναι θετικά ορισμένος πίνακας ($Q = 0.2I$) , ισχύει $\lambda_{min}(Q)\|x\|^2 \leq x^T Q x$.

Επίσης, για τον όρο $2x^T Pbg(x)$ προκύπτει από :

- $g(x) = x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$
- $\|b\| = 1$

Επομένως :

$$|2x^T Pbg(x)| \leq 2\|x\|^3 \|P\|$$

Θέλουμε $\dot{V} < 0$ ώστε να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια στο σημείο ισορροπίας (0,0).

Επομένως, αφού:

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q)\|x\|^2 + 2\|x\|^3 \|P\|$$

προκύπτει:

$$-\lambda_{min}(Q)\|x\|^2 + 2\|x\|^3 \|P\| < 0$$

ή

$$\|x\| < \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|}$$

Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές:

- $\lambda_{min}(Q) = 0.2$

- $\|P\| = \lambda_{max}(P)$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - P = \begin{bmatrix} \lambda - 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & \lambda - 0.3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 0.5\lambda + 0.05.$$

Λύνοντας την εξίσωση:

$$\lambda_{max} = \frac{0.5 + \sqrt{0.05}}{2}$$

Άρα,

$$\|x\| < \frac{0.2}{0.5 + \sqrt{0.05}} = 0.2764$$

<u>Εκτίμηση του πεδίου έλξης</u>

Η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = 0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 = c$$

η οποία αντιστοιχεί σε έλλειψη με κέντρο στο (0,0).

Για να παραμένει η έλλειψη εντός του κύκλου $\|x\| < 0.2764$, πρέπει το μήκος του μεγαλύτερου άξονα να ισούται με 0.2764.

Το μήκος του μεγαλύτερου άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$b = \sqrt{\frac{2c}{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}}$$

Όπου A = 0.2 , B = - 0.2 , C = 0.3.

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$b = \sqrt{\frac{2c}{0.2764}}$$

Θέλουμε b=0.2764 άρα τελικά:

$$c = \frac{b^2 \cdot 0.2764}{2} = 0.01057$$

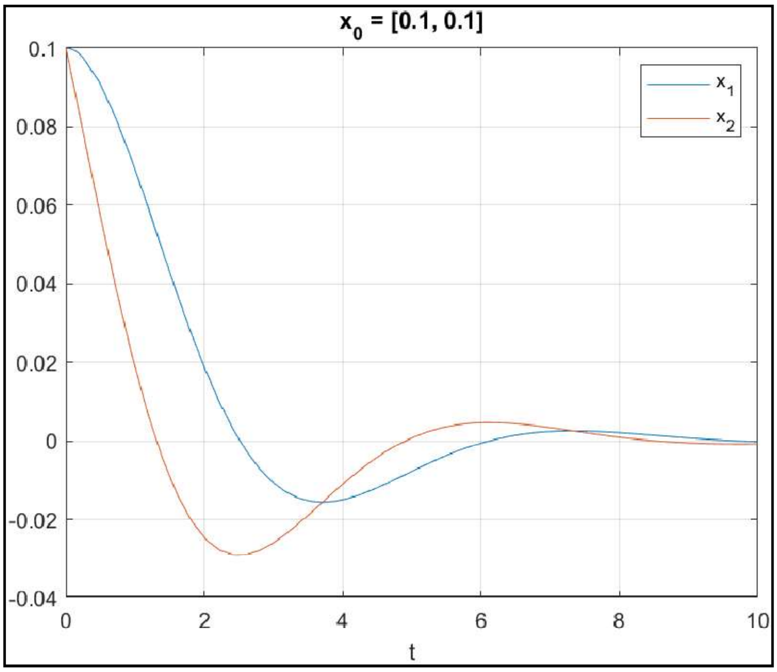
Το πεδίο έλξης είναι η περιοχή :

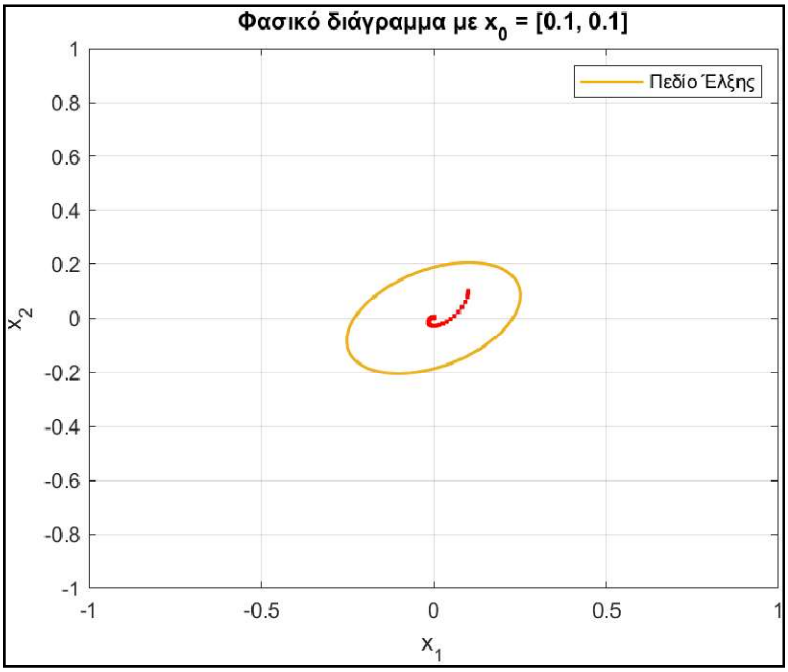
$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^2: \quad V(x) < c\}$$

Άρα, το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και το εκτιμώμενο πεδίο έλξης S_a είναι μια έλλειψη γύρω από το (0,0) με ακτίνα μέγιστου άξονα 0.2764.

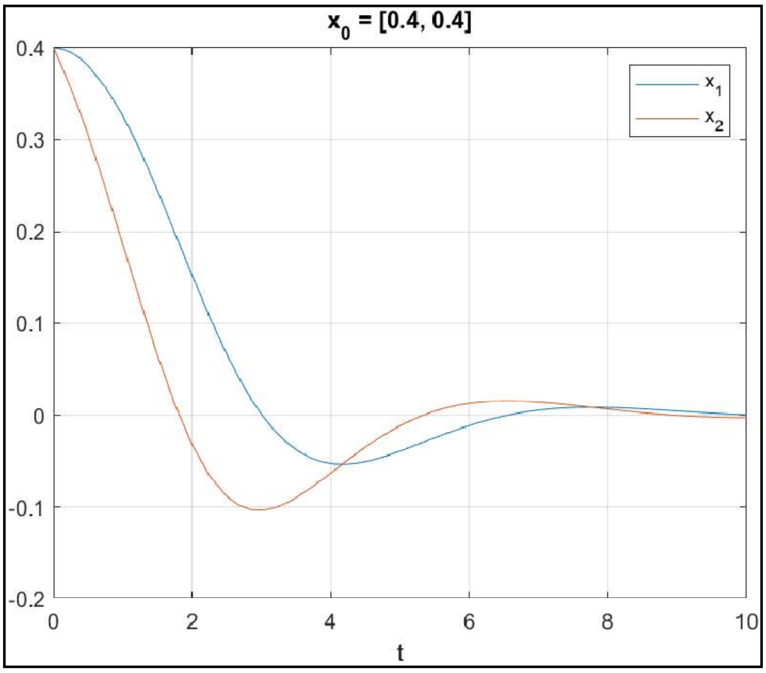
<u>Προσομοιώσεις</u>:

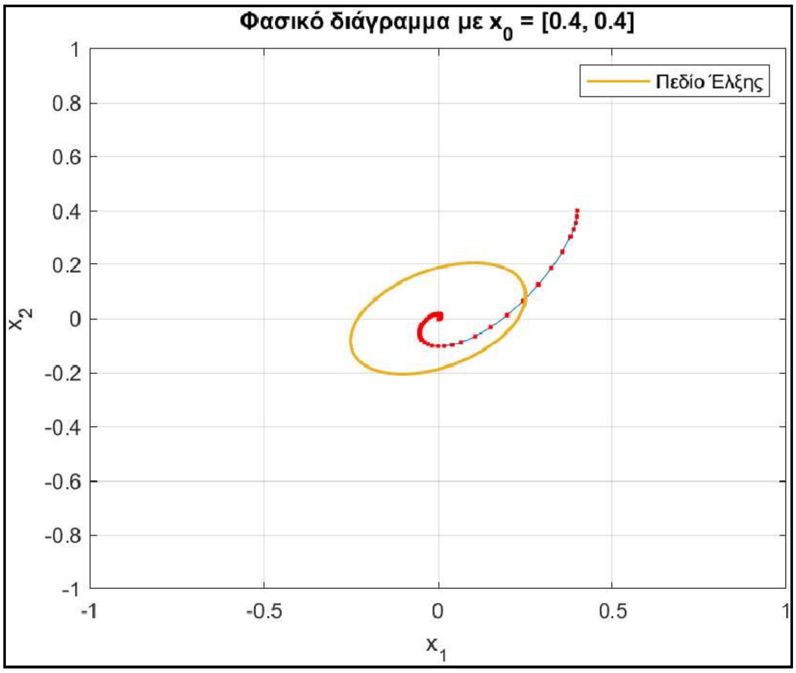
1. $\mathbf{x_1(0) = [0.1 \quad 0.1]^T}$



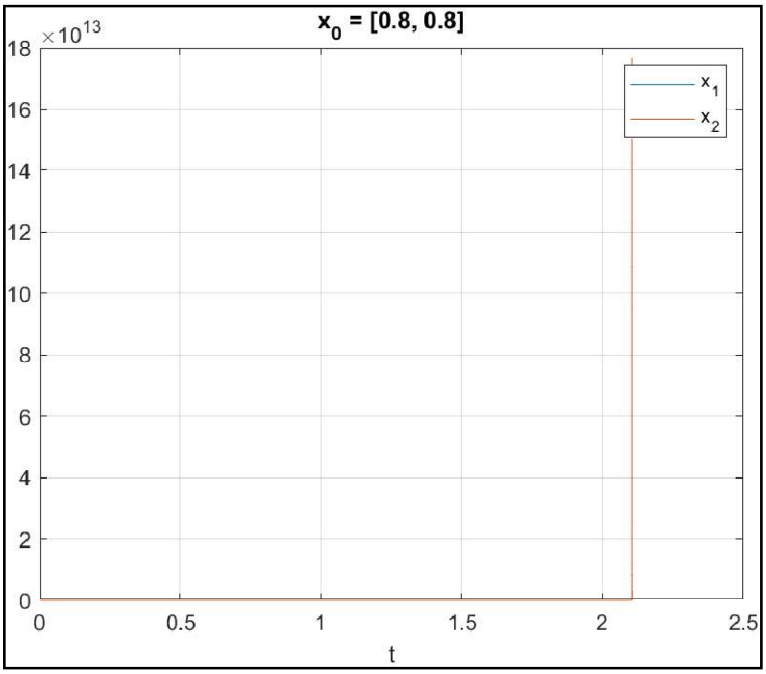


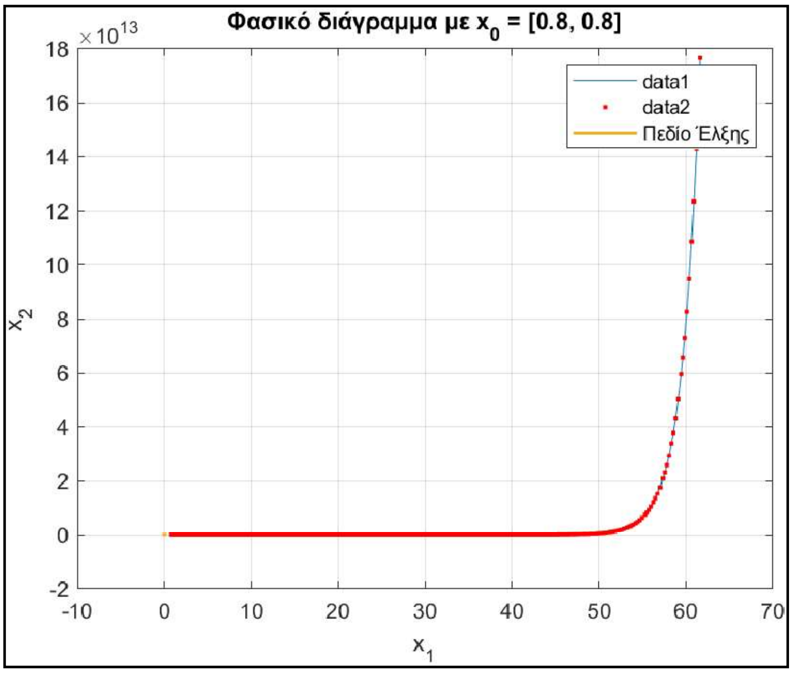
2. $\mathbf{x_2(0) = [0.4 \quad 0.4]^T}$



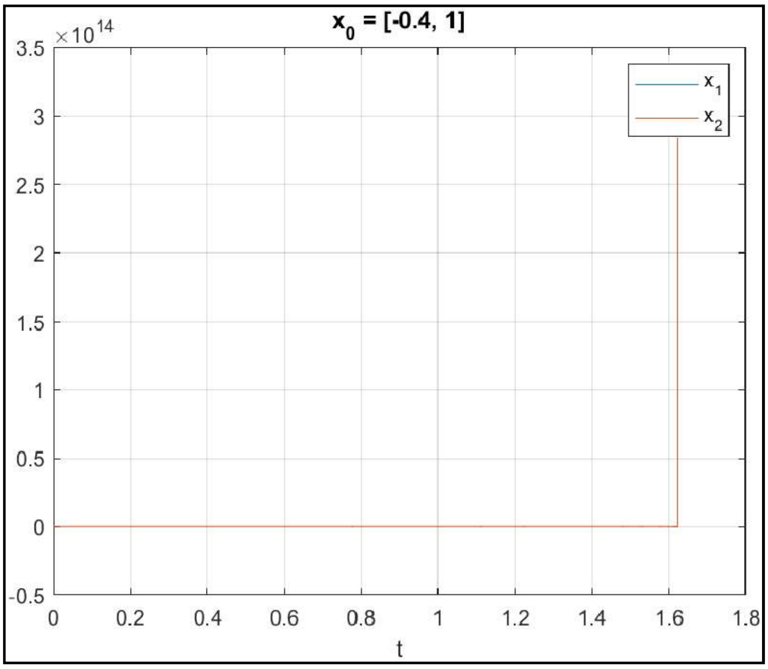


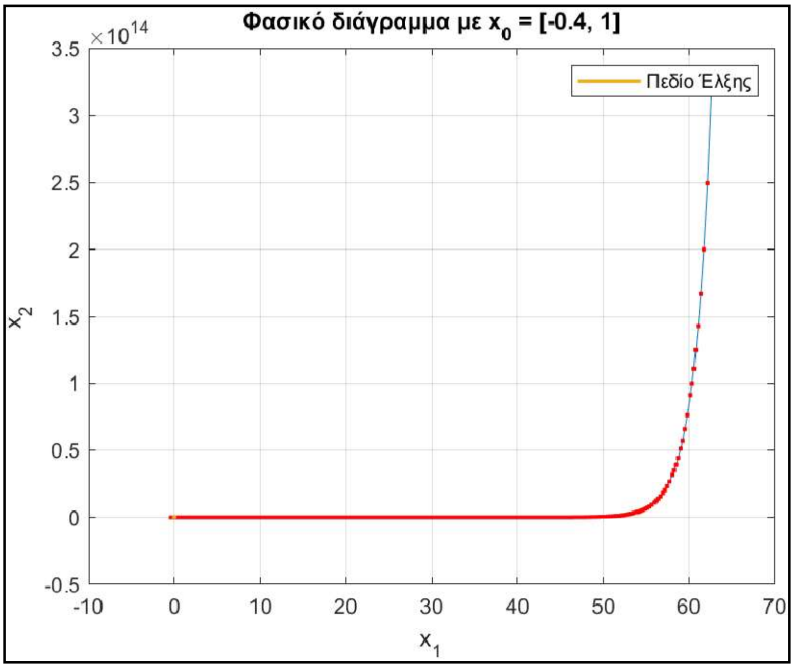
3. $\mathbf{x_3(0) = [0.8 \quad 0.8]^T}$





4. $\mathbf{x_4(0) = [-0.4 \quad 1]^T}$





- Για $\mathbf{x_1(0) = [0.1 \quad 0.1]^T}$

Το $\mathrm{V(x) = c}$ $=0.003 < 0.01057$, άρα η τροχιά είναι φθίνουσα και το σύστημα συγκλίνει στο (0,0), όπως φαίνεται.

- Για $\mathbf{x_2(0) = [0.4 \quad 0.4]^T}$

Το $\mathrm{V(x) = c}$ $=0.048 > 0.01057$, άρα βρίσκεται εκτός της εκτιμώμενης περιοχής πεδίου έλξης, ωστόσο η συμπεριφορά του συστήματος είναι φθίνουσα. Η εκτίμηση του πεδίου έλξης από τη σχέση $\mathrm{V(x) < c}$ εγγυάται τη σύγκλιση εντός της περιοχής.

- Για $\mathbf{x_3(0) = [0.8 \quad 0.8]^T}$

Το $\mathrm{V(x) = c}$ $=0.192 > 0.01057$, το σημείο εκκίνησης εκτός του πεδίου έλξης και βρίσκεται σε τροχιά που δεν είναι φθίνουσα.

- Για $\mathbf{x_4(0) = [-0.4 \quad 1]^T}$

Το $\mathrm{V(x) = c}$ $=0.412 > 0.01057$, συνεπώς και πάλι το σύστημα αποκλίνει για μεγάλες αρχικές συνθήκες. Οι τιμές των x_1 και x_2 γίνονται πολύ μεγάλες με αποτέλεσμα η προσομοίωση να τερματίζεται ii.

a) Νόμος ελέγχου u(x) για θ =0.5

Οι εξισώσεις του συστήματος:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + g(x) + u(x)$$

όπου $g(x) = x_1x_2 + \theta x_2^2 = x_1x_2 + 0.5x_2^2$

Επιλέγουμε :

$$u(x) = -g(x) - v$$

όπου $v = -k_1x_1 - k_2x_2$ ένας γραμμικός ελεγκτής.

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - v = -x_1 + k_1x_1 + k_2x_2 = (k_1 - 1)x_1 + k_2x_2$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{x} = Ax + bv$$

όπου $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \kappa\alpha\iota \quad$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\dot{x} = \tilde{A}x$$

όπου

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{bmatrix} s + 1 & -1 \\ -(k_1 - 1) & s - k_2 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει το πολυώνυμο $s^2 + (1 - k_2)s + (-k_2 - k_1 + 1)$

Θέλουμε διπλή ιδιοτιμή λ=-3 δηλαδή χαρακτηριστική εξίσωση $s^2 + 6s + 9$. Συγκρίνοντας τους συντελεστές προκύπτει:

$$k_1 = -3 \quad \kappa\alpha\iota \quad k_2 = -5$$

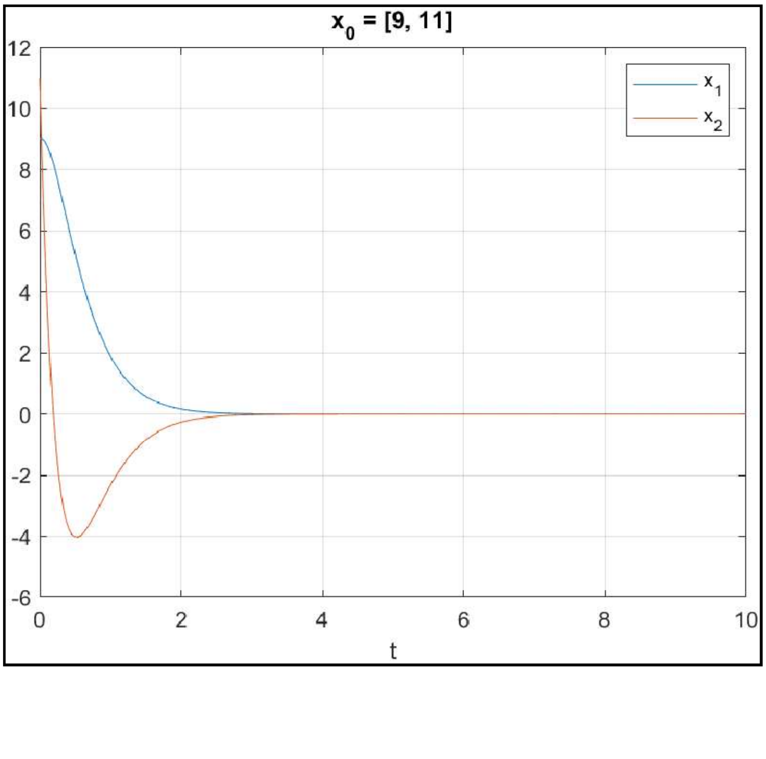
Οπότε, ο νόμος ελέγχου είναι :

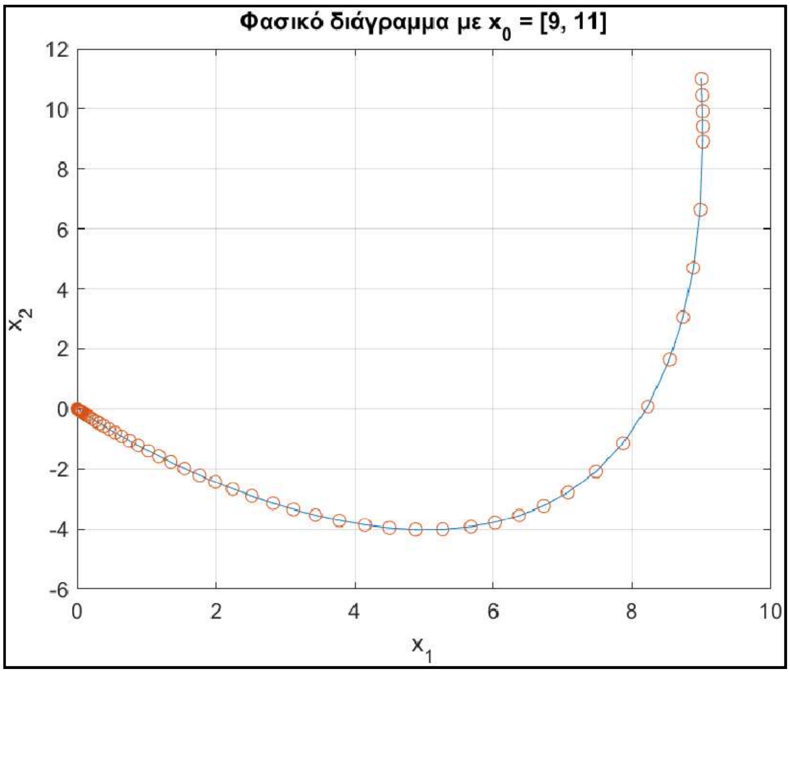
$$u(x) = -x_1 x_2 - 0.5x_2^2 + 3x_1 + 5x_2$$

Επομένως, το σύστημα έχει διπλή ιδιοτιμή στο -3 , είναι γραμμικό και έχει ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας στο (0,0).

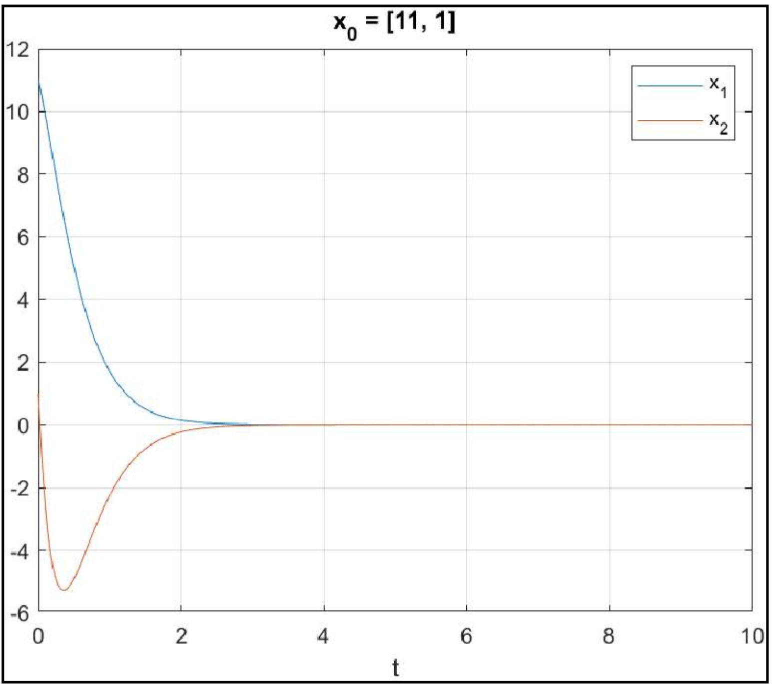
<u>Προσομοιώσεις για θ=0.5</u>

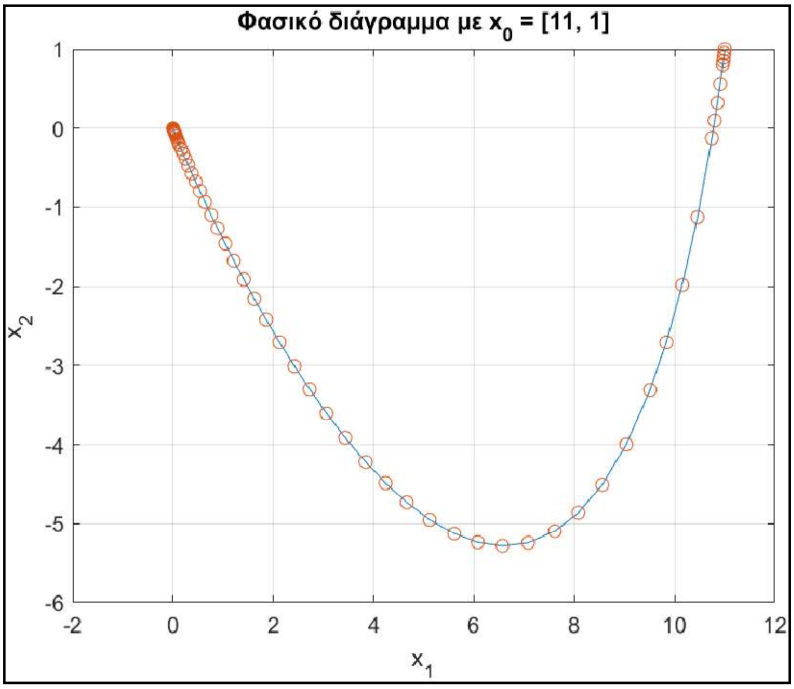
I. Για $\mathbf{x_5(0)} = [\mathbf{9} \quad \mathbf{11}]^{\mathbf{T}}$





II. Για $\mathbf{x_6(0)} = [\mathbf{11 \;\; 1}]^{\mathbf{T}}$





Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού όλες οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας (0,0).

b) Νόμος ελέγχου u(x) για θ =1

Με την ανάλυση του προηγούμενου ερωτήματος, όπου θ=1 ο νόμος ελέγχου γίνεται:

$$u(x) = -x_1 x_2 - x_2^2 - 3x_1 - 5x_2$$

Οι εξισώσεις του συστήματος:

$$\dot{x}_1 = \; -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \; -x_1 - v = \; -x_1 + g(x) + u(x) = -4x_1 - 5x_2 - 0.5x_2^2$$

Τα σημεία ισορροπίας :

$$\dot{x}_1 = 0 \qquad \kappa\alpha\iota \quad \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -4x_1 - 5x_1 - 0.5x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1(9 + 0.5x_1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad \text{ή} \quad x_1 = -18$$

Άρα, υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας: το (0,0) και το (-18,-18).

Για την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη καθώς $V(x) > 0$ παντού, $V(0,0) = 0$.

Υπολογίζουμε:

$$\dot{V} = 4x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = 4x_1(-x_1 + x_2) + x_2(-4x_1 - 5x_2 - 0.5x_2^2)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2 - 0.5x_2^3$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -4x_1^2 - 5x_2^2 - 0.5x_2^3$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -4x_1^2 - 0.5x_2^2(x_2 + 10)$$

Η $\dot{V}$ είναι αρνητική για όλα τα $x_2 > -10$ κάτι που δείχνει ότι το (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο c της $V(x) = c$ ώστε η $\dot{V}$ να είναι αρνητική. Αντικαθιστούμε: $x_2 = -10$

$$2x_1^2 + 50 = c$$

Για να εξασφαλίσουμε αρνητική $\dot{V}$ απαιτείται $x_1 = 0$,οπότε c = 50.

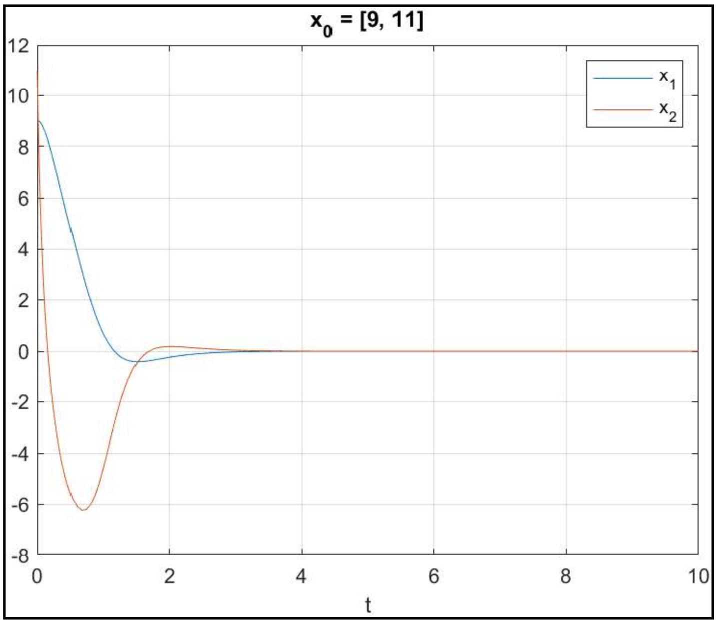
Το πεδίο έλξης είναι η περιοχή:

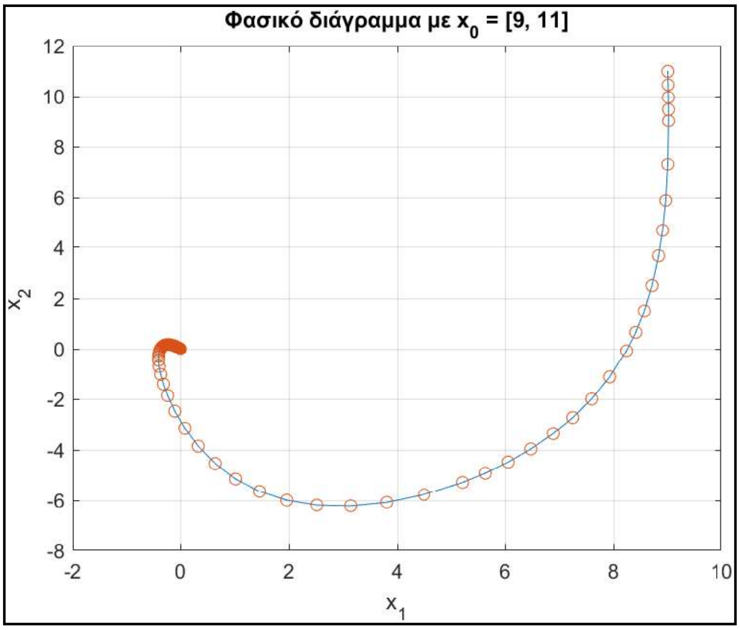
$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^2: \quad V(x) < 50\,, x_2 > -10\,\}$$

Άρα, το σημείο ισορροπίας (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για κάθε τροχιά εντός του πεδίου έλξης S_a.

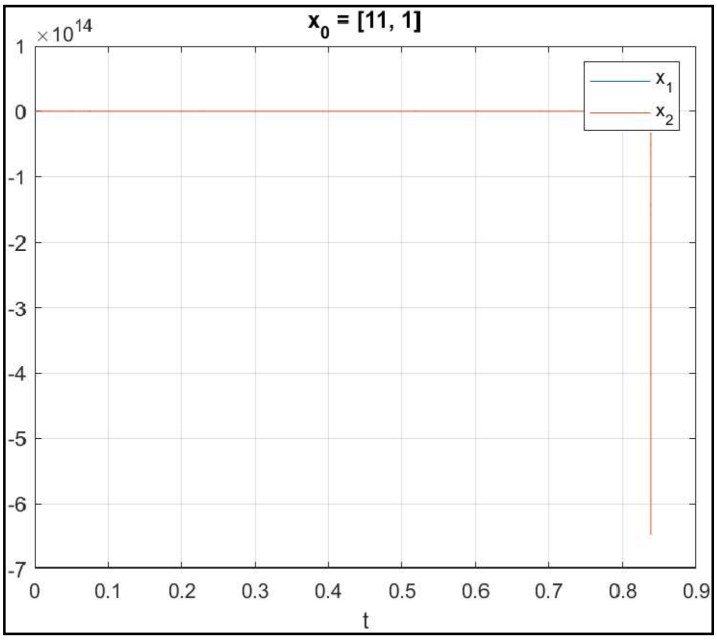
Προσομοιώσεις για θ=1

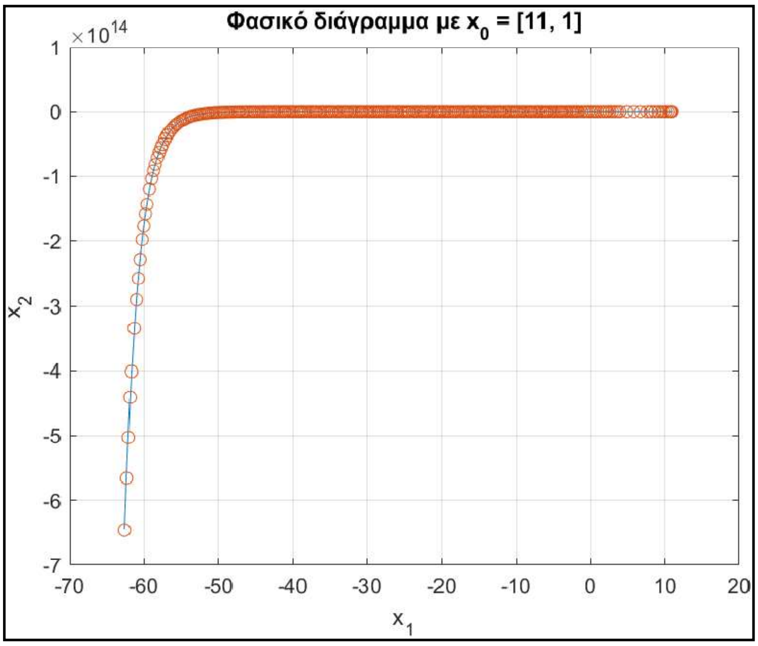
I. Για $\mathbf{x_5(0)} = [\mathbf{9} \quad \mathbf{11}]^{\mathbf{T}}$





II. Για $\mathbf{x_6(0)} = [\mathbf{11} \quad \mathbf{1}]^{\mathbf{T}}$





- $V(x_0) = 2(9)^2 + \frac{1}{2}(11)^2 = 222.5$ αυτή η τιμή είναι μεγαλύτερη, οπότε το σημείο [9,11] δεν ανήκει στο πεδίο έλξης. Ωστόσο, παρατηρείται ασυμπτωτική ευστάθεια και συγκλίνει στο (0,0).
- Αντίθετα, για το [11,1] το οποίο επίσης δεν ανήκει στο πεδίο έλξης($V(x_0) = 242.5$), πράγματι το σύστημα αποκλίνει και είναι ασταθές.

iii. Ο πίνακας A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Με:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textit{και η εξίσωση Lyapunov}: \; A^T P + PA = -Q$$

Όπου:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\dots}{\Rightarrow} P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός.

Ένας ελεγκτής $u(x) = -x_1 x_2 - \hat{\theta} x_2^2$, ώστε να εμφανιστεί στις εξισώσεις καταστάσεων το $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$.

Πράγματι :

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + g(x) + u(x) = -x_1 + \theta x_2^2 - \hat{\theta} x_2^2$$

Για τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = x^T P x + \tilde{\theta}(t)^2$$

Η παράγωγος της:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = (Ax + bg(x) + bu)^T P x + x^T P(Ax + bg(x) + bu) + 2(\theta - \hat{\theta})\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P b g(x) + 2u b^T P x + 2(\theta - \hat{\theta})\dot{\tilde{\theta}}$$

- $b^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$

Άρα, $b^T P x = -2x_1 + 5x_2 = x^T P b$

Αντικαθιστώντας και τον ελεγκτή u(x) στην παρακάτω σχέση προκύπτει:

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2\big(g(x) + u(x)\big)(-2x_1 + 5x_2) + 2(\theta - \hat{\theta})\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^T Q x + 2\big(x_1x_2 + \theta x_2^2 - x_1x_2 - \hat{\theta}x_2^2\big)(-2x_1 + 5x_2) + 2(\theta - \hat{\theta})\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^T Q x + 2(\theta - \hat{\theta})x_2^2(-2x_1 + 5x_2) + 2(\theta - \hat{\theta})\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^T Q x + 2(\theta - \hat{\theta})(-2x_1x_2^2 + 5x_2^3 + \dot{\tilde{\theta}})$$

Η παράγωγος της $\tilde{\theta}$ ισούται με :

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα γνωστά στοιχεία:

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2(\theta - \hat{\theta})(-2x_1x_2^2 + 5x_2^3 - \dot{\hat{\theta}})$$

Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι η $\dot{V} \leq 0$. Οπότε, επιλέγουμε κατάλληλο $\dot{\hat{\theta}}$ ώστε να μηδενίσουμε τον όρο $-2x_1x_2^2 + 5x_2^3$.

Άρα:

$$\dot{\hat{\theta}} = -2x_1x_2^2 + 5x_2^3 \qquad \kappa\alpha\iota \quad \dot{\tilde{\theta}} = 2x_1x_2^2 - 5x_2^3$$

Πράγματι η $\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, οπότε το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Επιπλέον, όλες οι καταστάσεις $x_1, x_2, \tilde{\theta}$ είναι φραγμένες, αφού η παράγωγος της V είναι αρνητική, άρα V φθίνουσα.

Επομένως,

$$V(t) \leq V(0) \;\; \forall t \geq 0$$

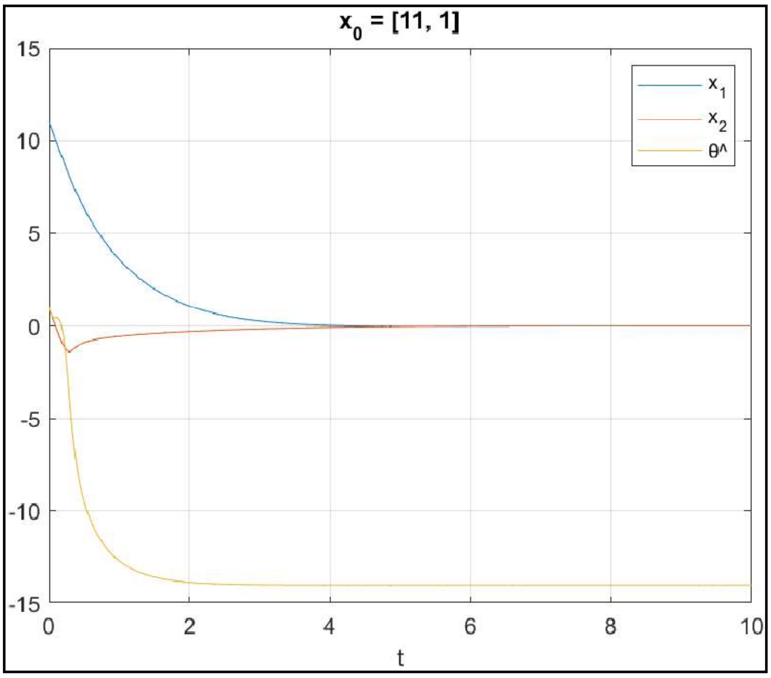
Αν αποδείξουμε ότι η δεύτερη παράγωγος της V είναι φραγμένη τότε διασφαλίζεται η ασυμπτωτική σύγκλιση των x_1, x_2 στο 0.

$$\ddot{V} = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 8\tilde{\theta}x_2^3$$

Η $\ddot{V}$ είναι φραγμένη, αφού $x_1, x_2, \tilde{\theta}$ είναι φραγμένες. Άρα, η $\dot{V}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και τα x_1, x_2 συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0. Ωστόσο, η $\tilde{\theta}$ αν και φραγμένη, μπορεί να μην συγκλίνει στο μηδέν.

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες $V, \dot{V}$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι καταστάσεις x_1, x_2 συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0, δηλαδή το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Όμως, η παράμετρος $\tilde{\theta}$ παραμένει φραγμένη αλλά όχι ότι συγκλίνει στο 0.

Προσομοίωση για $\mathbf{x_7(0)} = [\mathbf{11} \;\; \mathbf{1}]^{\mathrm{T}}$ και $\boldsymbol{\hat{\theta}(0)} = \mathbf{1}$



<u>Ερώτημα 2</u>

Το σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{x} = Ax + b(g(x) + u)$$

όπου A είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ και g(x) είναι η μη γραμμικότητα , με φράγμα: $|g(x)| \leq 2\|x\|^2$.

Επιλέγουμε μια συνάρτηση Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x$$

όπου:

$$Q = I \text{ ένας θετικά ορισμένος πίνακας}$$

$$\text{και ο } P \text{ επιλέγεται μέσω εξίσωσης Lyapunov}:$$

$$A^T P + PA = -Q$$

Λύνοντας:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\dots}{\Rightarrow} P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Η παράγωγος της $V(x)$:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V} = (Ax + bg(x) + bu)^T P x + x^T P (Ax + bg(x) + bu)$$

$$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x + 2x^T P b (g(x) + u)$$

με αντικατάσταση από εξίσωση Lyapunov:

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P b (g(x) + u)$$

Θέλουμε να εξασφαλίσουμε $\dot{V} \leq 0$. Ο πρώτος όρος $-x^T Q x$ είναι αρνητικός. Ο δεύτερος όρος $2x^T P b(g(x) + u)$ εξαρτάται από τον ελεγκτή που θα επιλέξουμε.

Για να εξασφαλίσουμε ότι $\dot{V} \leq 0$:

$$|g(x)| \leq 2\|x\|^2,$$

οπότε:

$$2|g(x)||b^T P x| \leq 4\|x\|^2 |b^T P x|$$

Άρα, η παράγωγος γίνεται:

$$\dot{V} \leq= -x^T Q x + 4\|x\|^2 |b^T P x| + 2ub^T P x$$

Θέλουμε :

$$2ub^T P x = -4\|x\|^2 |b^T P x|$$

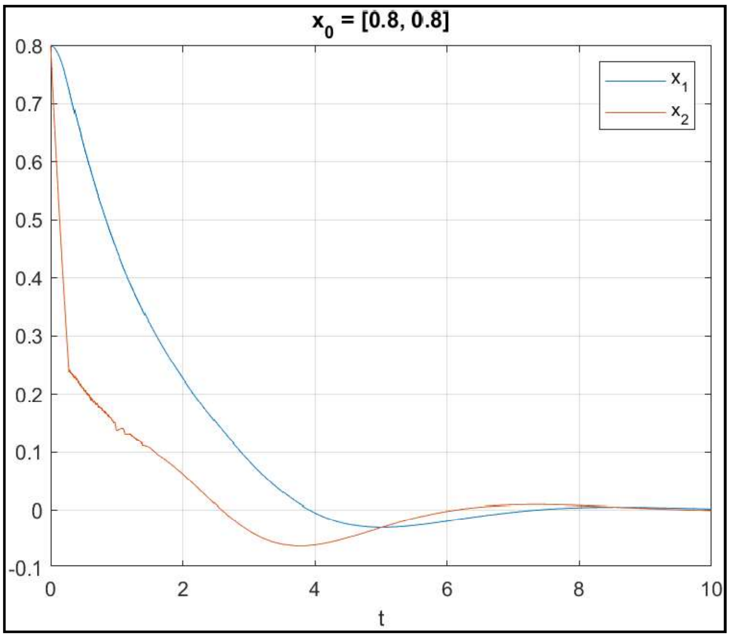
$$\Rightarrow u = -2 \frac{x^T P b}{|x^T P b|} \|x\|^2$$

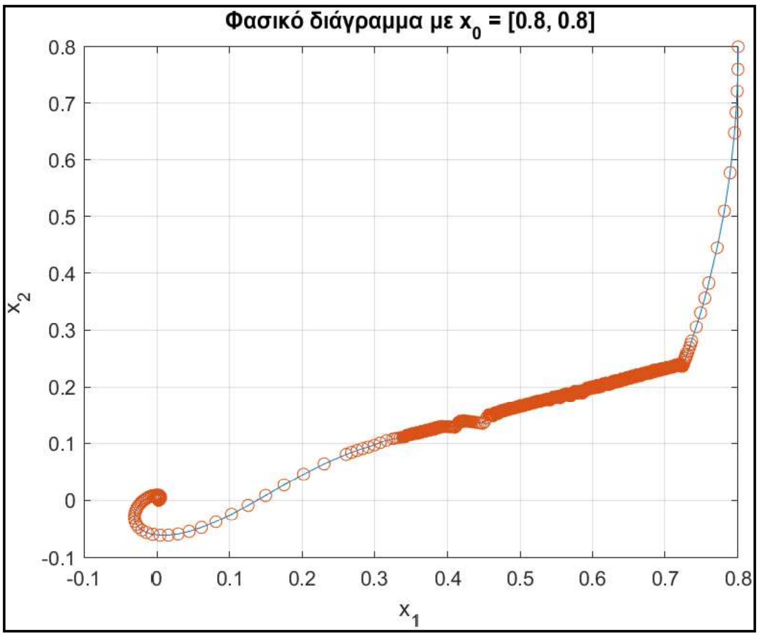
Με τον παραπάνω ελεγκτή, η παράγωγος γίνεται :

$$\dot{V} = -x^T Q x$$

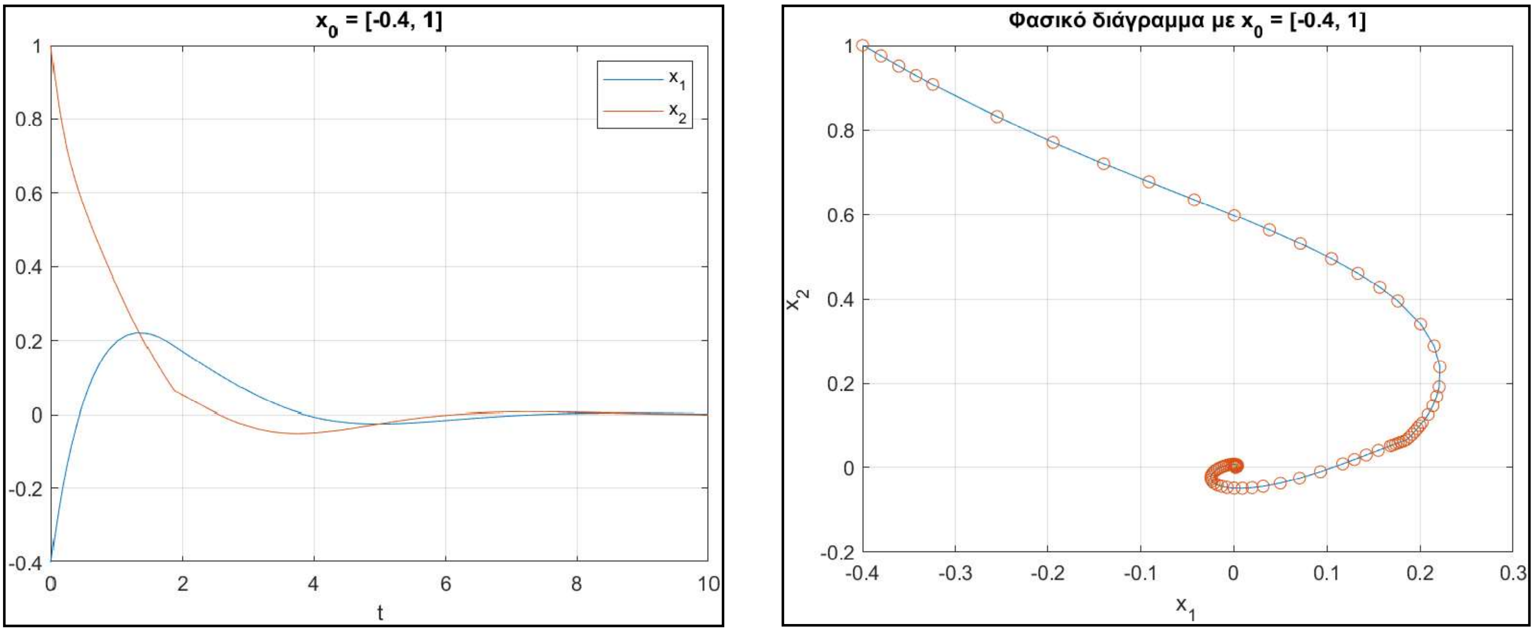
Άρα, η παράγωγος της V είναι αρνητικά ορισμένη και η αρχή των αξόνων (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

I. <u>Προσομοίωση για $\mathbf{x_3(0) = [0.8 \;\; 0.8]^T}$</u>





II. Προσομοίωση για $\mathbf{x_4(0)} = [\mathbf{-0.4} \quad \mathbf{1}]^{\mathbf{T}}$



Η χρονική απόκριση που απεικονίζεται δείχνει ότι το σύστημα συγκλίνει στο μηδέν. Αυτό επιβεβαιώνει την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, όπως αναμενόταν για τον ελεγκτή που σχεδιάσαμε.