ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ & ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Project: Εύρωστες Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου - Μέθοδοι Προβολής Επιλογή Δομής και Αξιολόγηση Μοντέλου

Παπουτσή Νικολέτα

ΑΕΜ: **10858**

Email: **npapoutsi@ece.auth.gr**

Περιεχόμενα

Θέμα 1

Ερώτημα (α)

Για την εκτίμηση των $\hat{A}$, $\hat{B}$ θα εφαρμόσουμε μεθοδολογία Lyapunov με Μεικτή Τοπολογία.

Ορίζουμε το (Μ):

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{b}_1 u + \theta_{m1}(x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21}x_1 + \hat{a}_{22}x_2 + \hat{b}_2 u + \theta_{m2}(x_2 - \hat{x}_2)$$

Ορίζουμε τα:

$$\varphi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}, \qquad \hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{12} \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota \ \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{22} \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$\dot{\hat{x}}_1 = \varphi^T \hat{\theta}_1 + \theta_{m1}(x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \varphi^T \hat{\theta}_2 + \theta_{m2}(x_2 - \hat{x}_2) \qquad ,\acute{o}\pi o\upsilon\ \theta_{m1}, \theta_{m2} > 0$$

Ορίζουμε τα σφάλματα:

$$e_{x1} = x_1 - \hat{x}_1 , \qquad e_{x2} = x_2 - \hat{x}_2$$

Και το παραμετρικό σφάλμα:

$$e_{\theta 1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1^* , \qquad e_{\theta 2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov ως : $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = \frac{1}{2}e_{x1}^2 + \frac{1}{2\gamma_1}e_{\theta 1}^2 \quad , \quad V_2 = \frac{1}{2}e_{x2}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}e_{\theta 2}^2$$

Παράγωγος της Lyapunov:

$$\dot{V}_1 = e_{x1}\dot{e}_{x1} + \frac{1}{\gamma_1}e_{\theta 1}\dot{e}_{\theta 1}$$

$$\dot{V}_2 = e_{x2}\dot{e}_{x2} + \frac{1}{\gamma_2}e_{\theta 2}\dot{e}_{\theta 2}$$

Για να εξασφαλίσουμε $\dot{V}_1, \dot{V}_2 \leq 0$, επιλέγουμε:

$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 e_{x1}\varphi \quad και\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e_{x2}\varphi$, για τις παραμέτρους που δεν έχουν περιορισμούς

Για την εισαγωγή των περιορισμών,

- Για $a_{11} \in [-3, -1]$ ορίζουμε το σύνολο $\Theta_1 = [-3, -1]$
- Για $b_2 \in [1, \infty)$ ορίζουμε το $\Theta_2 = [1, \infty)$

Θ^{in} *είναι το εσωτερικό του* Θ *και* Θ^b *το σύνορο του* Θ

Έτσι ορίζονται οι συνθήκες:

1. Για $\hat{a}_{11} \in \Theta_1^{in}$ ή $\left(\hat{a}_{11} \in \Theta_1^b \ και\ \dot{\hat{a}}_{11}^T \nabla g \leq 0\right)$

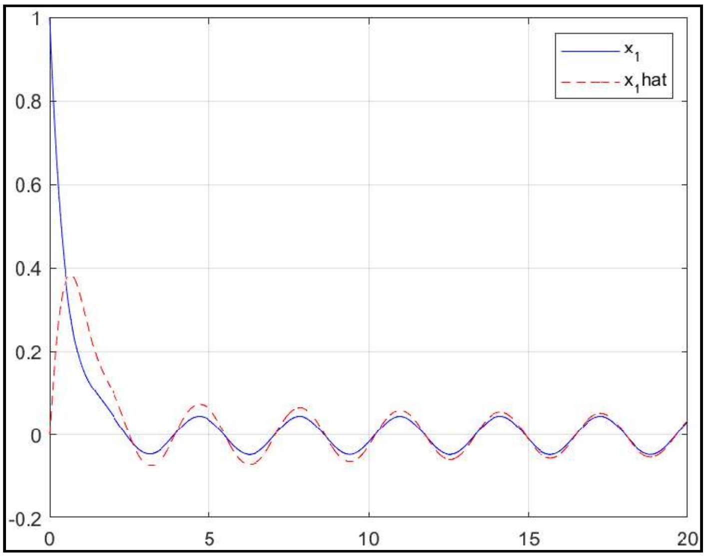
   Άρα, αν $\hat{a}_{11} = -3\ τότε\ \dot{\hat{a}}_{11} \geq 0$ και αν $\hat{a}_{11} = -1\ τότε\ \dot{\hat{a}}_{11} \leq 0$

2. Για $\hat{b}_2 \in \Theta_1^{in}$ ή $\hat{b}_2 = 1\ και\ \dot{\hat{b}}_2 \geq 0$

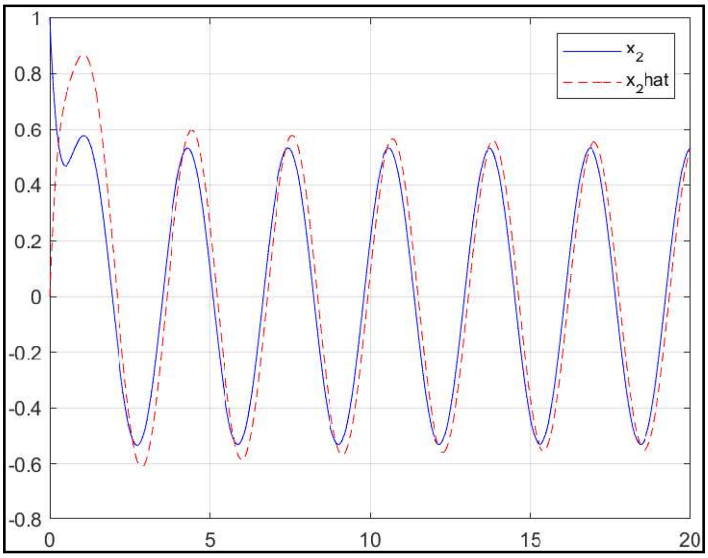
Επομένως,

$$\dot{\hat{a}}_{11} = \begin{cases} \gamma_1 e_{x1} x_1 & , αν\ ικανοποιείται\ η\ συνθήκη\ 1 \\ 0 & , \qquad αλλού \end{cases}$$

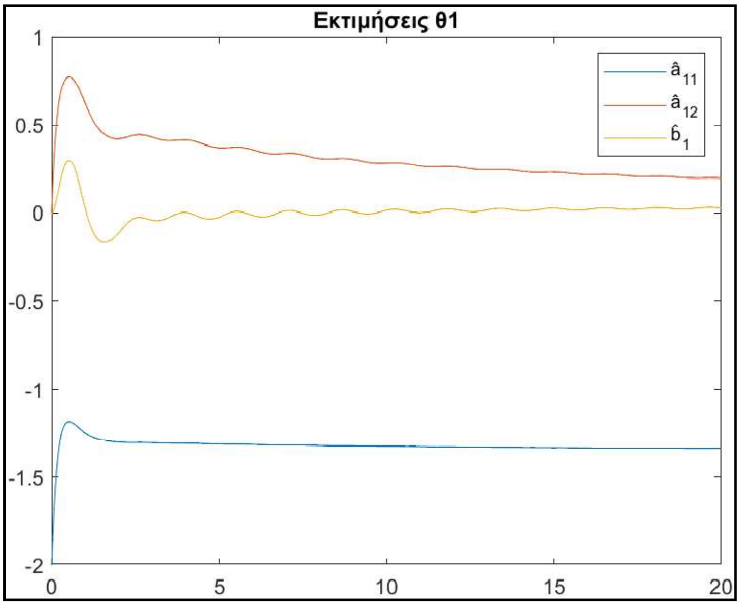
$$\dot{\hat{b}}_2 = \begin{cases} \gamma_2 e_{x2} u & , αν\ ικανοποιείται\ η\ συνθήκη\ 2 \\ 0 & , \qquad αλλού \end{cases}$$



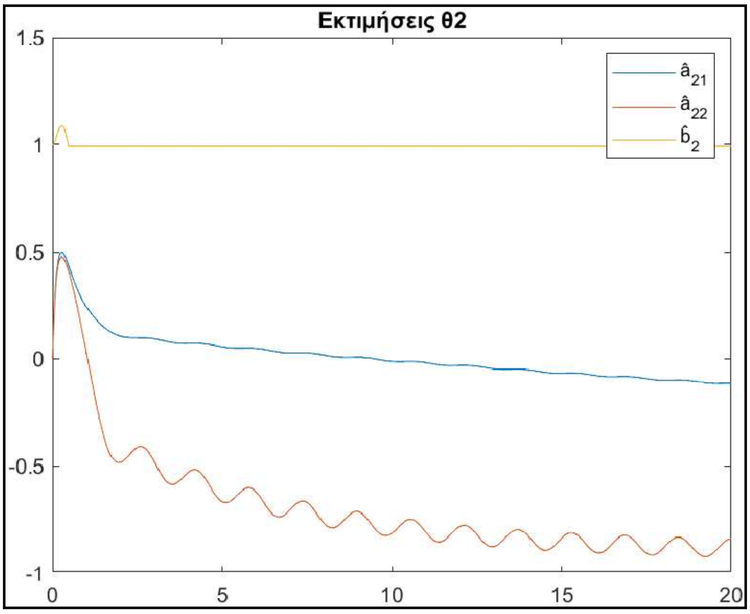
Plot 1: Διάγραμμα $x_1(t)$ $και$ $\hat{x}_1(t)$



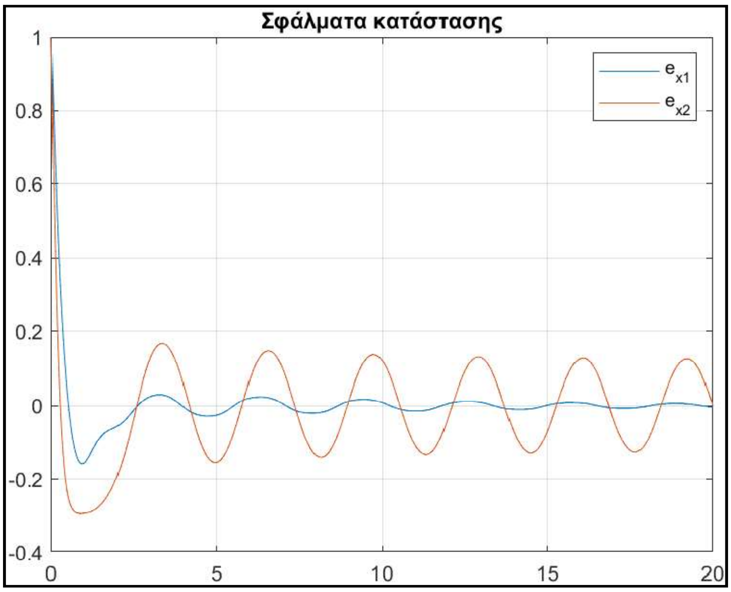
Plot 2: Διάγραμμα $x_2(t)$ $και$ $\hat{x}_2(t)$



Plot 3: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_1



Plot 4: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_2



Plot 5: Διάγραμμα σφαλμάτων κατάστασης e_{x1} , e_{x2}

Ερώτημα (β)

Το σύστημα είναι το :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + \omega(t)$$

Όπου , $\|\omega(t)\| \leq \overline{\omega}$, $\forall t \geq 0$

Ορίζουμε:

$$\dot{x}_1 = \varphi^T(t)\theta_1^* + \omega_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi^T(t)\theta_2^* + \omega_2(t)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \qquad \varphi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}, \qquad \theta_1^* = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{12} \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \theta_2^* = \begin{bmatrix} \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{22} \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε εκτιμήσεις των καταστάσεων,

$$\dot{\hat{x}}_1 = \varphi^T\hat{\theta}_1 + \theta_{m1}(x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \varphi^T\hat{\theta}_2 + \theta_{m2}(x_2 - \hat{x}_2) \qquad ,\acute{o}\pi o\upsilon\; \theta_{m1}, \theta_{m2} > 0$$

Ορίζουμε τα σφάλματα:

$$e_{x1} = x_1 - \hat{x}_1 \,, \qquad e_{x2} = x_2 - \hat{x}_2$$

Και το παραμετρικό σφάλμα:

$$e_{\theta 1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1^* \,, \qquad e_{\theta 2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov ως :

$$V = \frac{1}{2} e_{x1}^2 + \frac{1}{2\gamma_1} e_{\theta 1}^2 + \frac{1}{2} e_{x2}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} e_{\theta 2}^2$$

Παράγωγος της Lyapunov:

$$\dot{V} = e_{x1}\dot{e}_{x1} + \frac{1}{\gamma_1} e_{\theta 1}\dot{e}_{\theta 1} + e_{x2}\dot{e}_{x2} + \frac{1}{\gamma_2} e_{\theta 2}\dot{e}_{\theta 2}$$

Για να εξασφαλίσουμε $\dot{V}_1, \dot{V}_2 \leq 0$, επιλέγουμε:

Σχεδίαση με σ-τροποποίηση, αφού το σφάλμα πόλωσης έχει άγνωστο άνω όριο :

$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 e_{x1}\varphi - \gamma_1 \sigma \hat{\theta}_1 \; \kappa\alpha\iota \; \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e_{x2}\varphi - \gamma_2 \sigma \hat{\theta}_2$, για τις παραμέτρους που δεν έχουν περιορισμούς

Για τις παραμέτρους που έχουν περιορισμούς θα τροποποιήσουμε τη μέθοδο σε συνδυασμό με τη μέθοδο της προβολής ως εξής:

Για την εισαγωγή των περιορισμών,

- Για $a_{11} \in [-3, -1]$ ορίζουμε το σύνολο $\Theta_1 = [-3, -1]$
- Για $b_2 \in [1, \infty)$ ορίζουμε το $\Theta_2 = [1, \infty)$

$$\Theta^{in} \; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \; \tau o \; \varepsilon\sigma\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{o} \; \tau o\upsilon \; \Theta \quad \kappa\alpha\iota \quad \Theta^b \; \tau o \; \sigma\acute{\upsilon}\nu o\rho o \; \tau o\upsilon \; \Theta$$

Έτσι ορίζονται οι συνθήκες:

3. Για $\hat{a}_{11} \in \Theta_1^{in}$ ή $\left(\hat{a}_{11} \in \Theta_1^b \;\; \kappa\alpha\iota \; \dot{\hat{a}}_{11}^T \nabla g \leq 0\right)$

Άρα, αν $\hat{a}_{11} = -3 \; \tau\acute{o}\tau\varepsilon \; \dot{\hat{a}}_{11} \geq 0$ και αν $\hat{a}_{11} = -1 \; \tau\acute{o}\tau\varepsilon \; \dot{\hat{a}}_{11} \leq 0$

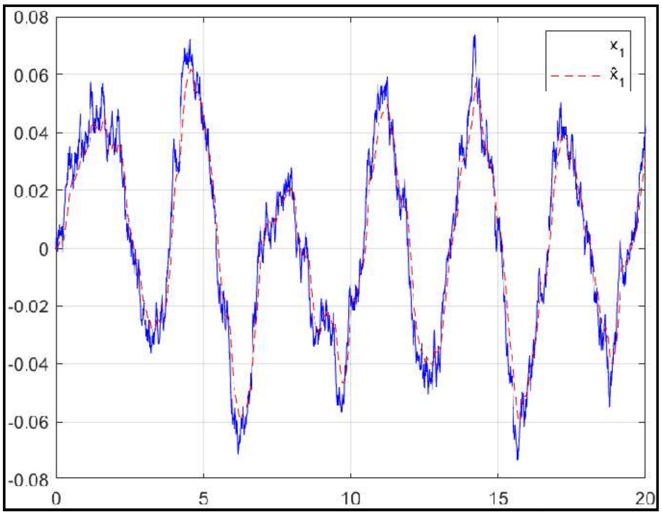
4. Για $\hat{b}_2 \in \Theta_1^{in}$ ή $\hat{b}_2 = 1$ $και$ $\dot{\hat{b}}_2 \geq 0$

Επομένως,

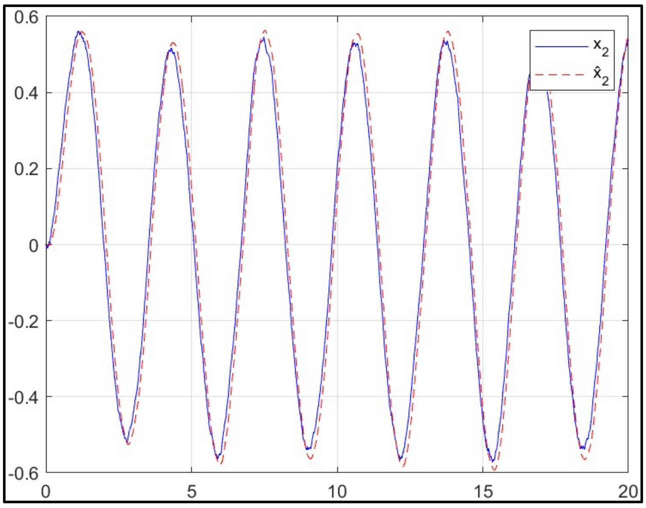
$$\dot{\hat{a}}_{11} = \begin{cases} \gamma_1 e_{x1}\, x_1 - \gamma_1 \sigma \hat{a}_{11} & , αν\ ικανοποιείται\ η\ συνθήκη\ 1 \\ 0 & , \qquad αλλού \end{cases}$$

$$\dot{\hat{b}}_2 = \begin{cases} \gamma_2 e_{x2} u - \gamma_2 \sigma \hat{b}_2 & , αν\ ικανοποιείται\ η\ συνθήκη\ 2 \\ 0 & , \qquad αλλού \end{cases}$$

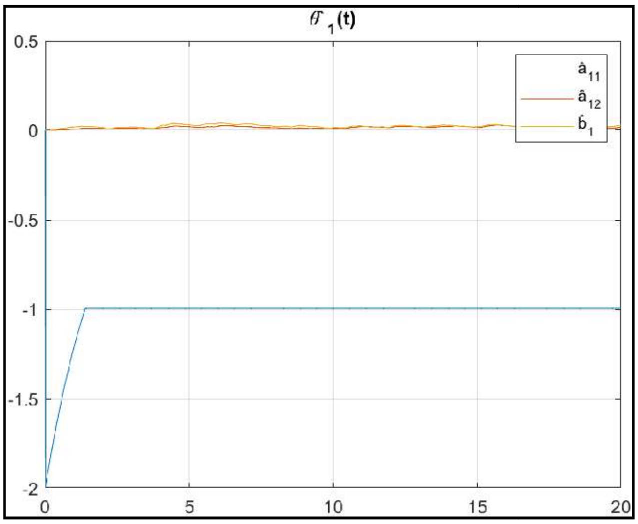
- Για άνω όριο $\overline{\omega}$ = 0.5



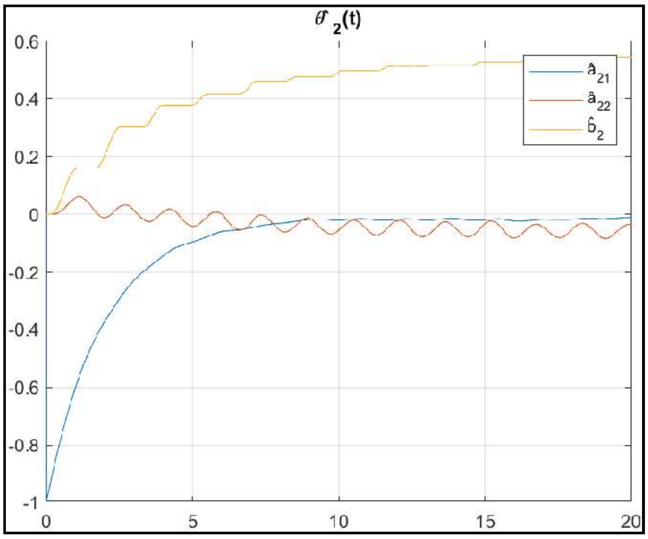
Plot 6: Διάγραμμα $x_1(t)$ $και$ $\hat{x}_1(t)$



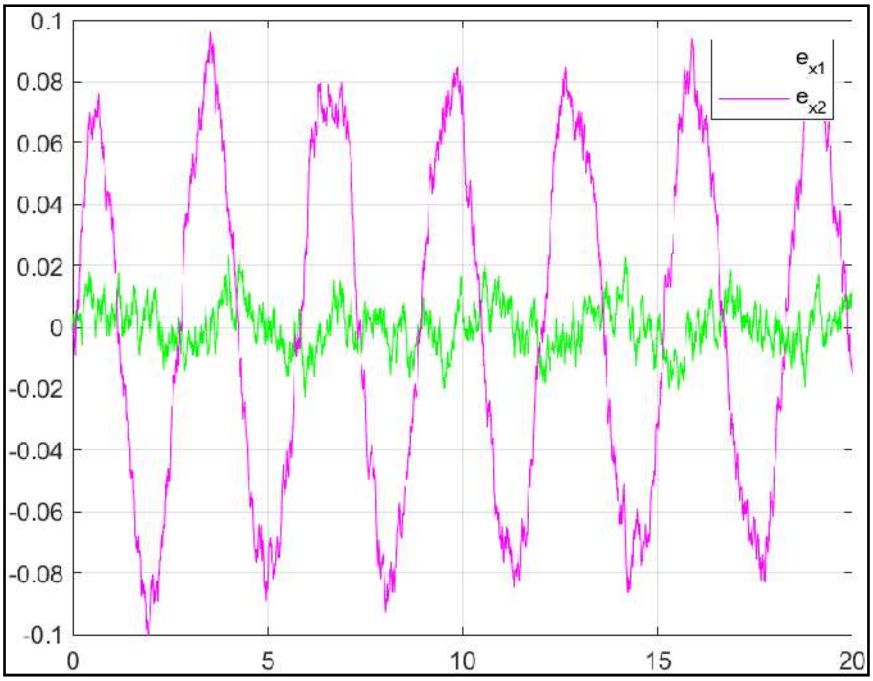
Plot 7: Διάγραμμα $x_2(t)$ $και$ $\hat{x}_2(t)$



Plot 8: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_1

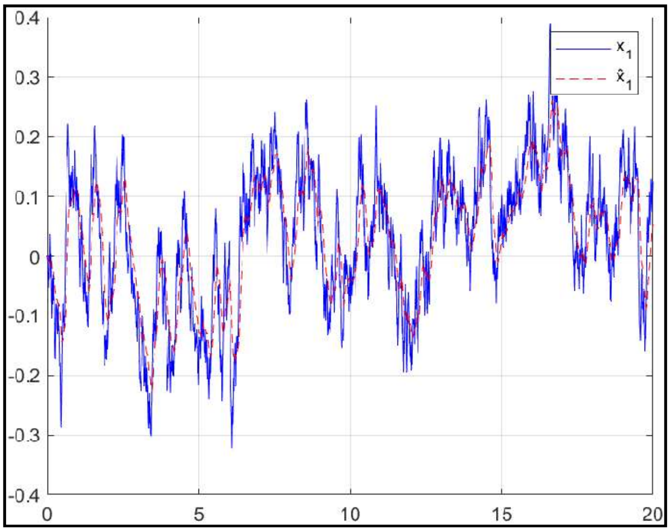


Plot 9: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_2

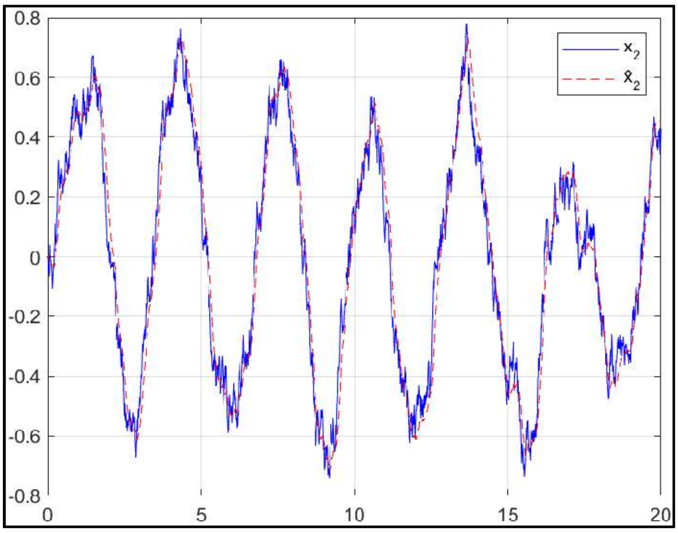


Plot 10: Διάγραμμα σφαλμάτων κατάστασης e_{x1} , e_{x2}

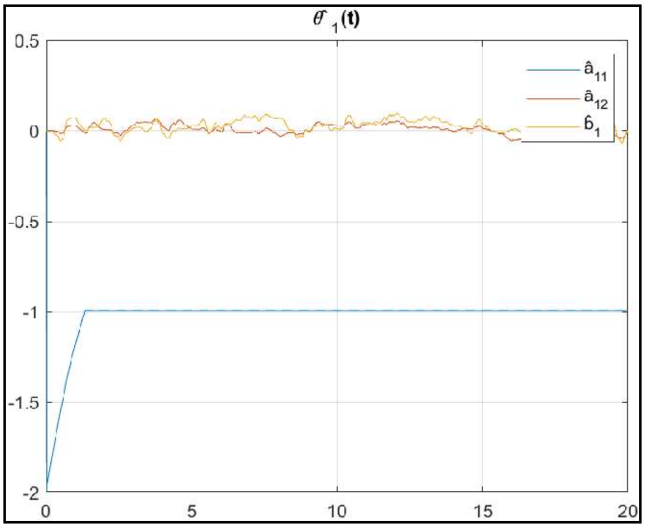
- Για άνω όριο $\overline{\omega}$ = 5



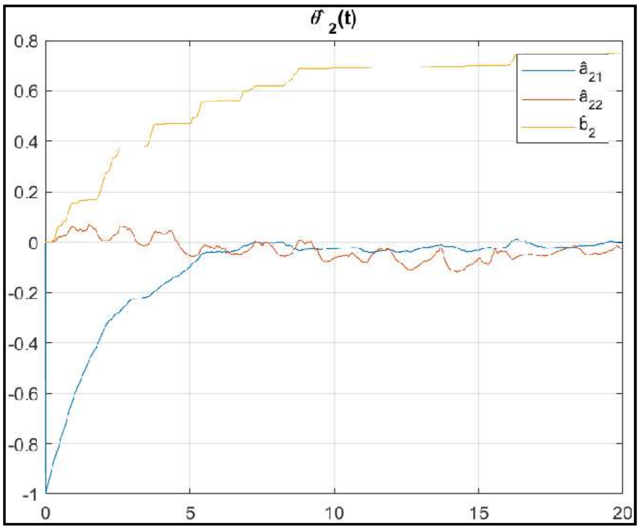
Plot 11: Διάγραμμα $x_1(t)$ $\kappa\alpha\iota$ $\hat{x}_1(t)$



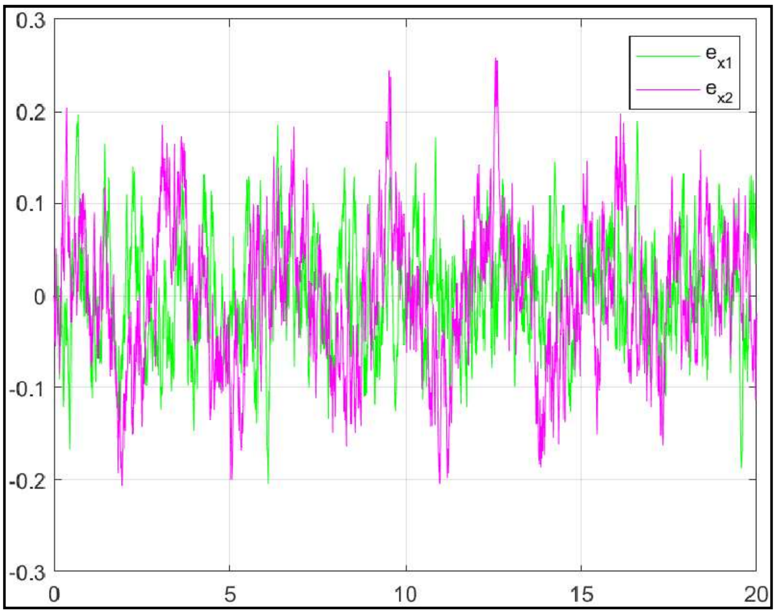
Plot 12: Διάγραμμα $x_2(t)$ $\kappa\alpha\iota$ $\hat{x}_2(t)$



Plot 13: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_1



Plot 14: Διάγραμμα εκτιμήσεων θ_2



Plot 15: Διάγραμμα σφαλμάτων κατάστασης e_{x1} , e_{x2}

Παρατηρήσεις:

Για το σφάλμα πόλωσης ω υποθέτουμε διάφορες τιμές του για το άγνωστο άνω όριο του .

Όπως παρατηρείται, για μικρότερες τιμές του $\overline{\omega}$, η ακρίβεια εκτίμησης των καταστάσεων είναι καλύτερη και τα σφάλματα κατάστασης μικρότερα. Με τη μέθοδο σ-τροποποίηση και προβολή εξασφαλίζεται η ευστάθεια των παραμέτρων εντός περιορισμών. Αν και δεν υπάρχει ασυμπτωτική σύγκλιση αποδεικνύεται πως όλα τα σφάλματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα.