

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ & ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Εργασία 1:

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων  
Τετραγώνων

Παπουτσή Νικολέτα

AEM: 10858

Email: [npapoutsi@ece.auth.gr](mailto:npapoutsi@ece.auth.gr)

## Θέμα 1

Ερώτημα α)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

Και

$$\dot{x}_2 = \ddot{q}(t)$$

Δίνεται η εξίσωση του εκκρεμούς με ροπή εισόδου έπειτα από γραμμικοποίηση ( $\sin(q) \approx q$  για μικρές γωνίες  $q$ ):

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t) \quad (1)$$

$$\text{Άρα, } \dot{x}_2 = \frac{1}{mL^2} [u(t) - cx_2 - mgLx_1]$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{mL^2} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$

Από μετασχηματισμό Laplace η εξίσωση (1) γράφεται:

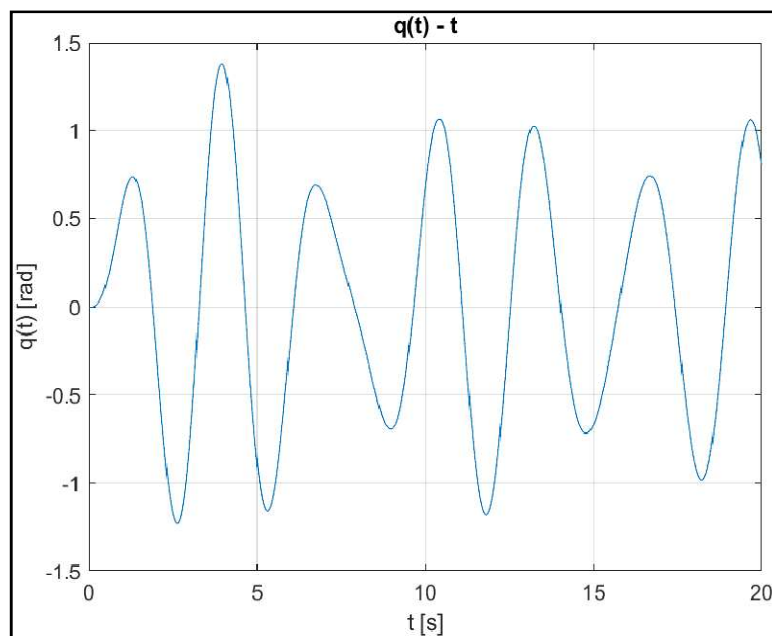
$$mL^2s^2Q(s) + csQ(s) + mgLQ(s) = U(s)$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

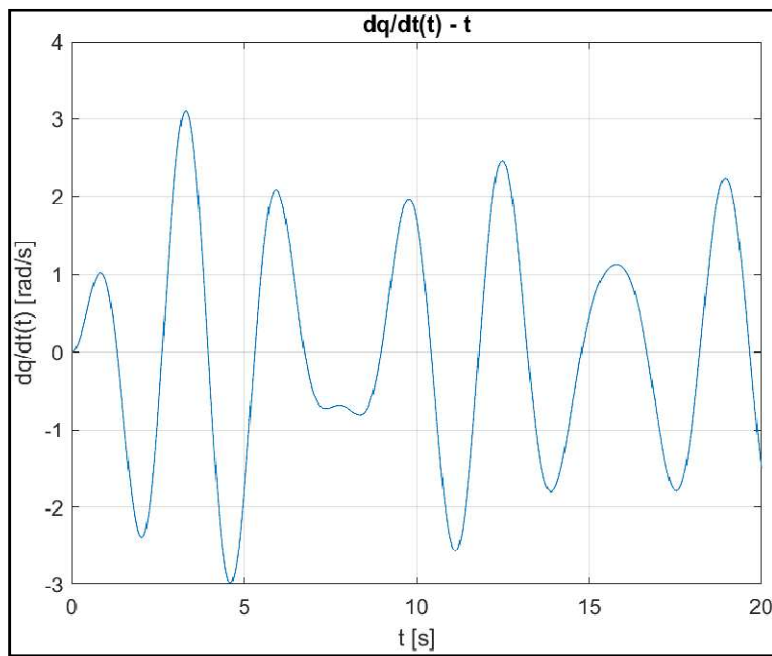
$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2s^2 + cs + mgL}$$

Ερώτημα β)

Το διάγραμμα απεικονίζει τη γωνία  $q(t)$  ( $rad$ ) συναρτήσει του χρόνου  $t$  ( $sec$ ), δηλαδή την απόκριση του συστήματος στο χρόνο.



Σχήμα 1: Απόκριση γωνίας  $q(t)$



Σχήμα 2: Απόκριση ταχύτητας  $\dot{q}$

## Θέμα 2

Ερώτημα α)

Η εξίσωση (1) :

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t)$$

Η εξίσωση (1) πρέπει να έρθει στη μορφή:

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{mL^2} [-c\dot{q}(t) - mgLq(t) + u(t)]$$

Έπειτα από μετασχηματισμό Laplace:

$$s^2q = \frac{1}{mL^2} [-csq - mgLq + u]$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο  $sq$  στο αριστερό μέρος της εξίσωσης:

$$s^2 q + sq - sq = \frac{1}{mL^2} [-csq - mgLq + u]$$

Επιλέγουμε ευσταθές φίλτρο πρώτης τάξης  $\Lambda(s) = s + 1$

$$\frac{s^2 q + sq - sq}{s + 1} = \frac{1}{mL^2} \left[ -\frac{csq}{s + 1} - \frac{mgLq}{s + 1} + \frac{u}{s + 1} \right]$$

$$\Rightarrow sq = \frac{1}{mL^2} \left[ -\frac{csq}{s + 1} - \frac{mgLq}{s + 1} + \frac{u}{s + 1} \right] + \frac{sq}{s + 1}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \left( 1 - \frac{c}{mL^2} \right) \frac{s}{s + 1} q - \frac{mgL}{mL^2} \frac{1}{s + 1} q + \frac{1}{mL^2} \frac{1}{s + 1} u$$

Για τη γραμμική παραμετροποίηση η εξίσωση έρχεται στη μορφή  $\dot{q} = \theta_\lambda^T \zeta$ , όπου:

$$\theta^* = \left[ \frac{c}{mL^2} - 1 \quad -\frac{mgL}{mL^2} \quad \frac{1}{mL^2} \right]^T = [\theta_1^* \quad \theta_2^* \quad \theta_3^*]^T,$$

$$\theta_1^* = \left[ \frac{c}{mL^2} - 1 \right]^T, \theta_2^* = \left[ \frac{mgL}{mL^2} \right]^T, \theta_3^* = \left[ \frac{1}{mL^2} \right]^T$$

Όπου,

$$\theta_\lambda = [(\theta_1^*)^T - \lambda^T \quad (\theta_2^*)^T - \lambda^T \quad \theta_3^{*T}]^T = \left[ \frac{c}{mL^2} - 2 \quad \frac{mgL}{mL^2} - 1 \quad \frac{1}{mL^2} \right]^T$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \left[ -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} q \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u \right]^T = \left[ -\frac{[s \quad 1]}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T \\ &= \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} q \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T \end{aligned}$$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$  θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων η οποία θα εφαρμοστεί στο γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο

$$\dot{q} = \theta_\lambda^T \zeta$$

Παίρνοντας  $N$  στο πλήθος μετρήσεις κατασκευάζονται οι πίνακες :

$$\dot{Q} = [\dot{q}(1) \quad \dot{q}(2) \quad \dots \quad \dot{q}(N)]^T$$

$$Z = \begin{bmatrix} \zeta_1(1) & \zeta_2(1) & \zeta_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_1(N) & \zeta_2(N) & \zeta_3(N) \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι της μορφής:

$$V = \left| \frac{e}{2} \right|^2 = \left| \frac{\dot{Q} - Z\theta_\lambda}{2} \right|^2$$

Και ψάχνουμε αυτό το  $\theta_\lambda$  που ελαχιστοποιεί την  $V$ , δηλαδή :

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta_\lambda} V$$

Παραγωγίζοντας την  $V$  ως προς  $\theta_\lambda$  και εξισώνοντας με μηδέν προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta_\lambda} \right|_{\theta_\lambda = \theta_0} = 0 \Rightarrow \theta_0 (Z^T Z) = \dot{Q}^T Z \Rightarrow \theta_0^T = \dot{Q}^T Z (Z^T Z)^{-1}$$

## Προσομοιώσεις

Για το ερώτημα (α) , υλοποιείται στο MATLAB διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων  $m, L$  και  $c$  του συστήματος μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Αρχικά , πραγματοποιείται προσομοίωση με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων και είσοδο  $u(t) = 4\sin(2t)$ . Στη συνέχεια γίνεται δειγματολήψια με

περίοδο  $T_s = 0.1 [sec]$  ώστε να δημιουργηθούν τα σήματα που θα χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σύμφωνα με τη θεωρητική ανάλυση παραπάνω του συστήματος  $\dot{q} = \theta_\lambda^T \zeta$  με χρήση του εκτιμητή:

$$\hat{\theta} = \dot{q}^T Z (Z^T Z)^{-1}$$

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$mL^2 = \frac{1}{\hat{\theta}_3}, c = (1 - \hat{\theta}_1)mL^2, m = -\frac{\hat{\theta}_2}{g} \frac{1}{\hat{\theta}_3 L}$$

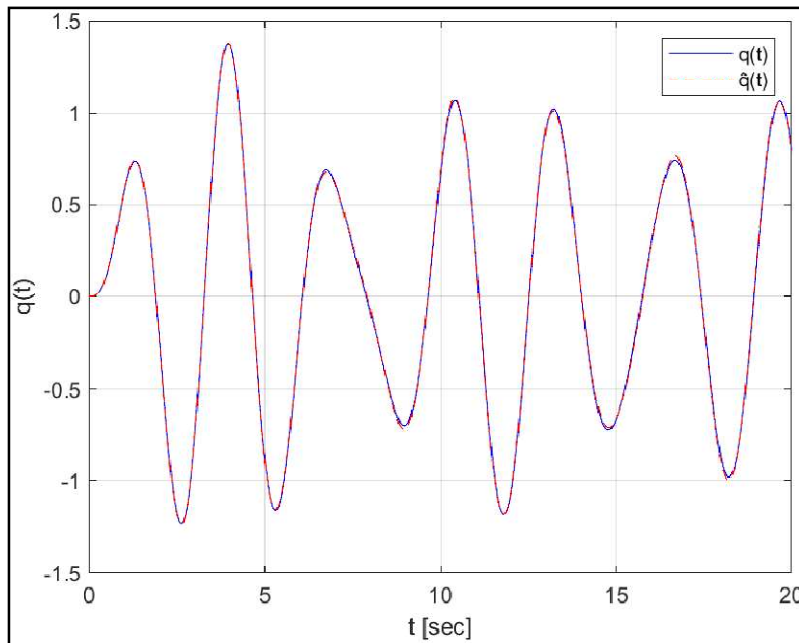
Παρατίθενται τα διαγράμματα των  $q$  και  $\hat{q}$  καθώς και το διάγραμμα του σφάλματος  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  συναρτήσει του χρόνου.

Παρατηρείται πως το σφάλμα είναι της τάξεως του  $10^{-3} \sim 10^{-2}$  και για αυτό οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου είναι σχεδόν πανομοιότυπες.

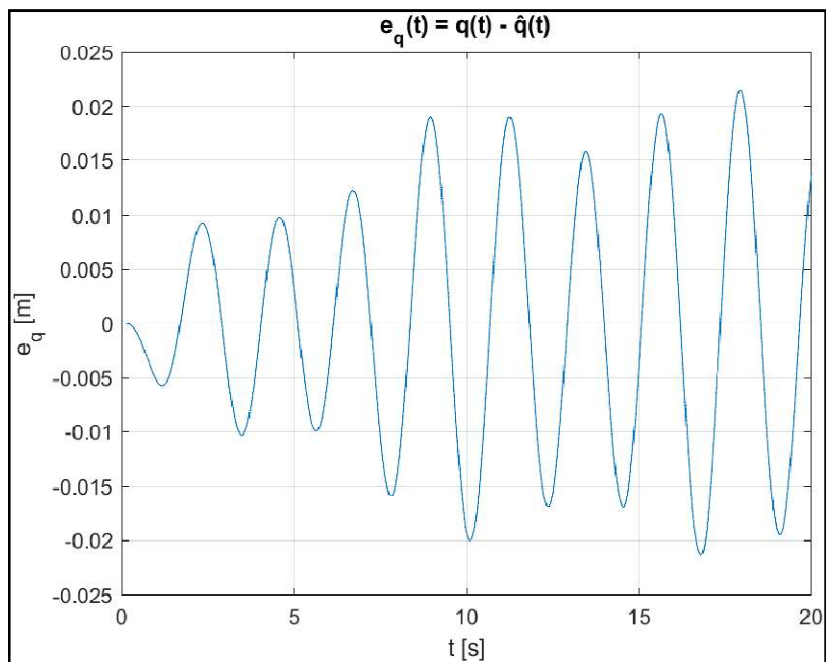
Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα, αφού για την συγκεκριμένη επιλογή του φίλτρου οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές.

Εκτιμήσεις παραμέτρων $\hat{m} = 0.7474 \text{ kg}$ $\hat{L} = 1.2454 \text{ m}$ $\hat{c} = 0.1497 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}$
--

Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται έχουν προκύψει επιλέγοντας χρόνο εκτέλεσης  $20 \text{ sec}$  και δειγματοληψία κάθε  $10^{-1} \text{ sec}$ .



Σχήμα 3: Σύγκριση πραγματικής και εκτιμώμενης απόκρισης  $q(t)$



Σχήμα 4: Σφάλμα μεταξύ της πραγματικής γωνίας  $q(t)$  και της εκτιμώμενης απόκρισης  $\hat{q}(t)$



Ερώτημα β)

Η εξίσωση (1) πρέπει να έρθει στη μορφή:

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{mL^2} [-c\dot{q}(t) - mgLq(t) + u(t)]$$

Για τη γραμμική παραμετροποίηση η εξίσωση έρχεται στη μορφή  $\ddot{q} = (\theta^*)^T \Delta$ , όπου:

$$\theta^* = \left[ \frac{c}{mL^2} \quad \frac{mgL}{mL^2} \quad \frac{1}{mL^2} \right]^T = [\theta_1^* \quad \theta_2^* \quad \theta_3^*]^T, \theta_1^* = \left[ \frac{c}{mL^2} \right]^T,$$

$$\theta_2^* = \left[ \frac{mgL}{mL^2} \right]^T, \theta_3^* = \left[ \frac{1}{mL^2} \right]^T \text{ και } \Delta = [-\dot{q} \quad -q \quad u]^T$$

Στη συνέχεια επιλέγεται το ευσταθές φίλτρο  $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$ ,  $\lambda = [2 \quad 1]^T$  και φιλτράροντας την  $\ddot{q} = (\theta^*)^T \Delta$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \lambda_1 \dot{q} + \lambda_2 q = -(\theta_1^* - \lambda_1) \dot{q} - (\theta_2^* - \lambda_2) q + \theta_3^* u$$

$$\Rightarrow s^2 q + s \lambda_1 q + \lambda_2 q = -(\theta_1^* - \lambda_1) s q - (\theta_2^* - \lambda_2) q + \theta_3^* u$$

$$\Rightarrow (s^2 + s \lambda_1 + \lambda_2) q = -(\theta_1^* - \lambda_1) s q - (\theta_2^* - \lambda_2) q + \theta_3^* u$$

$$\Rightarrow q = -(\theta_1^* - \lambda_1) s \frac{q}{\Lambda(s)} - (\theta_2^* - \lambda_2) \frac{q}{\Lambda(s)} + \theta_3^* \frac{u}{\Lambda(s)}$$

Άρα, φτάνουμε στη μορφή  $q = \theta_\lambda^* \varphi$ ,

$$\theta_\lambda^* = [(\theta_1^*)^T - \lambda_1^T \quad (\theta_2^*)^T - \lambda_2^T \quad \theta_3^{*T}]^T$$

Και

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[ -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u \right]^T = \left[ -\frac{[s \quad 1]}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T \\ &= \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} q \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T \end{aligned}$$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$  θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων η οποία θα εφαρμοστεί στο γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο

$$q = \theta_{\lambda}^T \varphi$$

Παίρνοντας  $N$  στο πλήθος μετρήσεις κατασκευάζονται οι πίνακες :

$$Q = [q(1) \quad q(2) \quad \dots \quad q(N)]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι της μορφής:

$$V = \left| \frac{e}{2} \right|^2 = \left| \frac{Q - \Phi \theta_{\lambda}}{2} \right|^2$$

Και ψάχνουμε αυτό το  $\theta_{\lambda}$  που ελαχιστοποιεί την  $V$ , δηλαδή :

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta_{\lambda}} V$$

Παραγωγίζοντας την  $V$  ως προς  $\theta_{\lambda}$  και εξισώνοντας με μηδέν προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta_{\lambda}} \right|_{\theta_{\lambda} = \theta_0} = 0 \Rightarrow \theta_0 (\Phi^T \Phi) = Q^T \Phi \Rightarrow \theta_0^T = Q^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

## Προσομοιώσεις

Για το ερώτημα (β) , υλοποιείται στο MATLAB διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων  $m, L$  και  $c$  του συστήματος μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Αρχικά , πραγματοποιείται προσομοίωση με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων και είσοδο  $u(t) = 4\sin(2t)$ .

Στη συνέχεια γίνεται δειγματοληψία με περίοδο  $T_s = 0.1 \text{ [sec]}$  ώστε να δημιουργηθούν τα σήματα που θα χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση.

Ορίζεται ευσταθές φίλτρο δεύτερης τάξης  $\Lambda(s) = s^2 + 2s + 1$ . Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σύμφωνα με τη θεωρητική ανάλυση παραπάνω του συστήματος  $q = \theta_\lambda^T \varphi$  με χρήση του εκτιμητή:

$$\hat{\theta} = q^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν από τις σχέσεις:

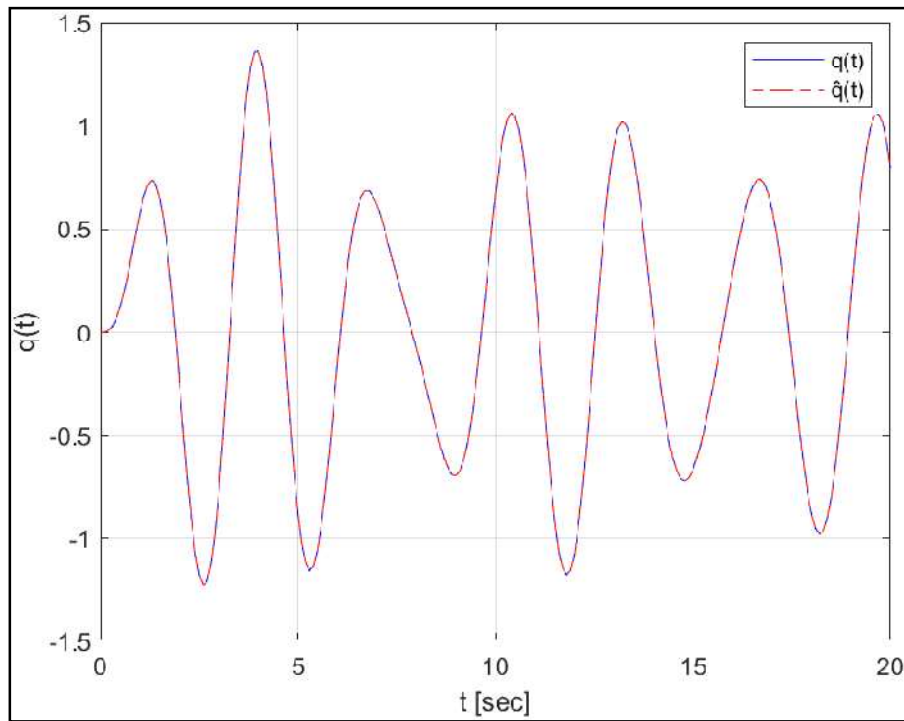
$$mL^2 = \frac{1}{\hat{\theta}_3}, c = (\hat{\theta}_1 + \lambda_1)mL^2, mgL = (\hat{\theta}_2 + \lambda_2)mL^2$$

Παρατίθενται τα διαγράμματα των  $q$  και  $\hat{q}$  καθώς και το διάγραμμα του σφάλματος  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  συναρτήσει του χρόνου.

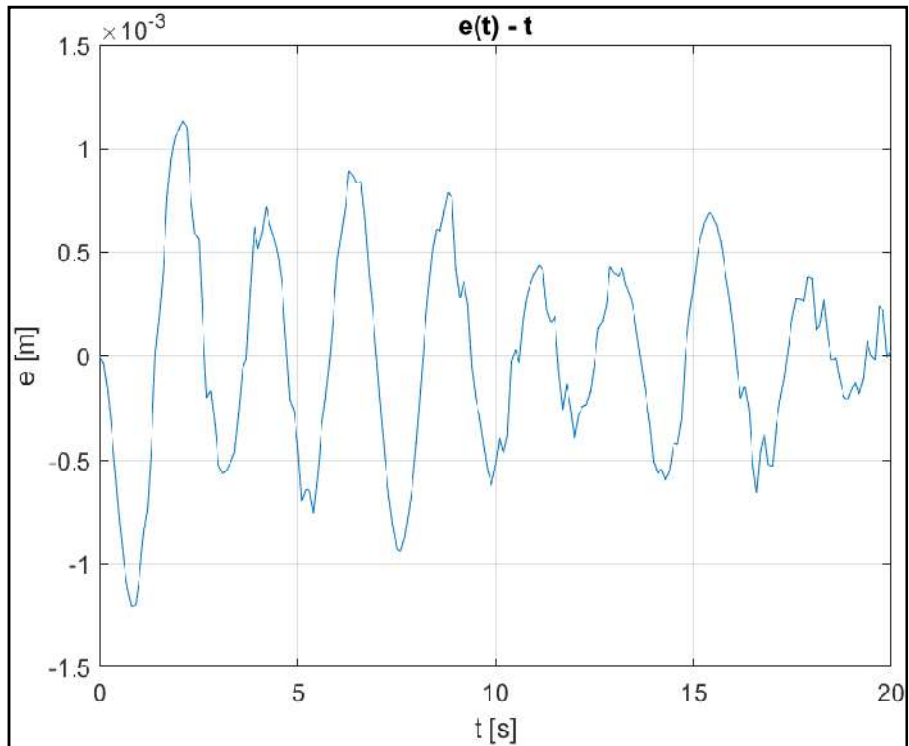
Παρατηρείται πως το σφάλμα είναι της τάξεως  $10^{-3}$  και για αυτό οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου είναι σχεδόν πανομοιότυπες.

Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα, αφού για την συγκεκριμένη επιλογή του φίλτρου οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές.

Εκτιμήσεις παραμέτρων
$\hat{m} = 0.7474 \text{ kg}$
$\hat{L} = 1.2463 \text{ m}$
$\hat{c} = 0.1416 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$



Σχήμα 5: Σύγκριση πραγματικής και εκτιμώμενης απόκρισης  $q(t)$

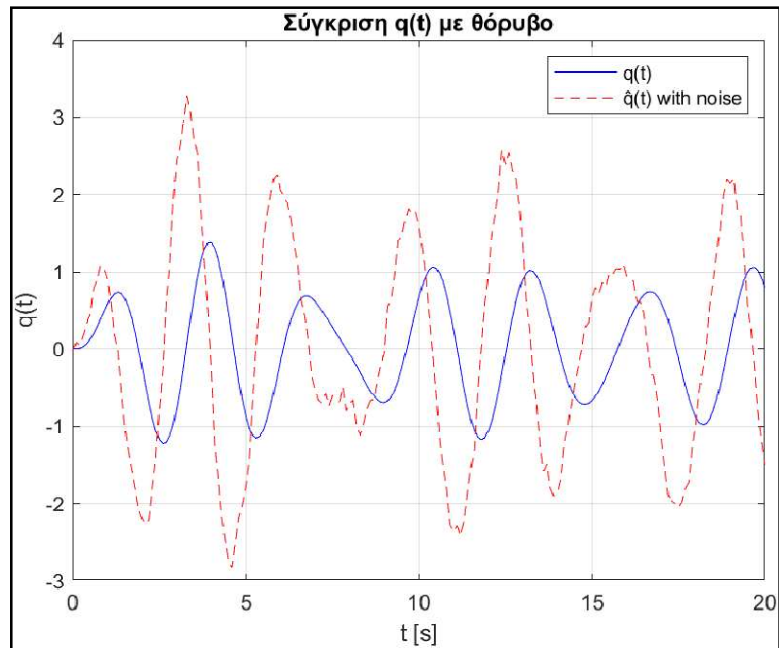


Σχήμα 6: Σφάλμα μεταξύ της πραγματικής γωνίας  $q(t)$  και της εκτιμώμενης απόκρισης  $\hat{q}(t)$

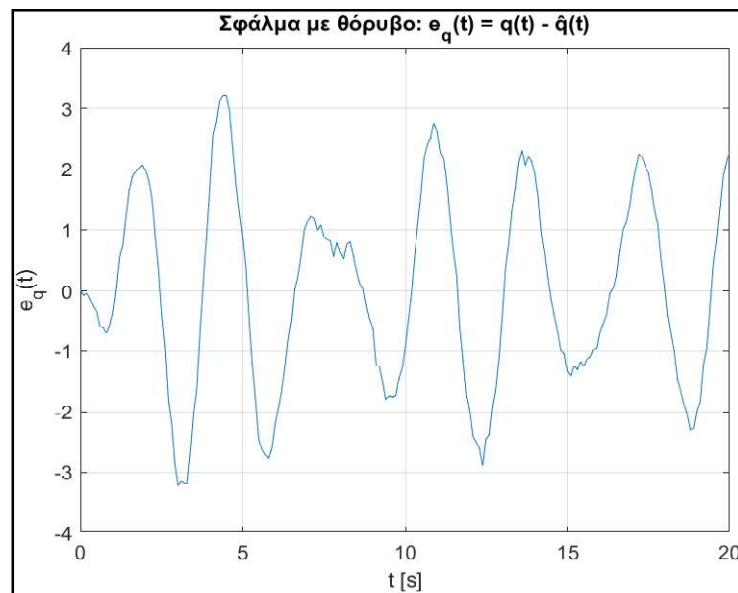
### Θέμα 3

Ερώτημα α)

Για τα δεδομένα του ερωτήματος α) του Θέματος 2



Σχήμα 7: Σύγκριση πραγματικής και εκτιμώμενης απόκρισης  $q(t)$  με προσθήκη θορύβου



Σχήμα 8: Σφάλμα μεταξύ της πραγματικής γωνίας  $q(t)$  και της εκτιμώμενης απόκρισης  $\hat{q}(t)$  μετά την προσθήκη θορύβου

### Παρατηρήσεις:

Με την προσθήκη λευκού γκαουσιανού θορύβου στα δεδομένα μέτρησης  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  και της εισόδου  $u(t)$  με διακύμανση 0.1 παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις σε σχέση με τις πραγματικές τιμές και τις εκτιμήσεις χωρίς θόρυβο. Το σφάλμα εξόδου  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  είναι αρκετά μεγάλο ( $\pm 3.5$ ), όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις δεν ταυτίζονται και παρατηρούνται αποκλίσεις.

Άρα, η μέθοδος είναι ευαίσθητη στον θόρυβο, ειδικότερα αν προστεθεί και στην έξοδο και στην είσοδο.

Εκτιμήσεις χωρίς θόρυβο

$\hat{m} = 0.7474 \text{ kg}$

$\hat{L} = 1.2454 \text{ m}$

$\hat{c} = 0.1497 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

Εκτιμήσεις με θόρυβο

$\hat{m} \text{ (noisy)} = 0.7873 \text{ kg}$

$\hat{L} \text{ (noisy)} = 1.2856 \text{ m}$

$\hat{c} \text{ (noisy)} = 0.2078 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

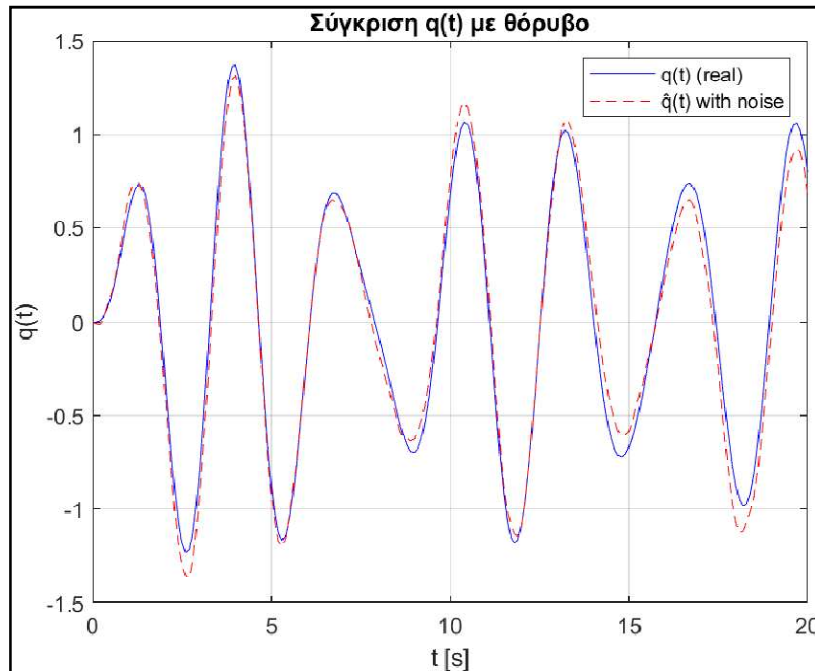
Απόκλιση

$\Delta m = 0.0398$

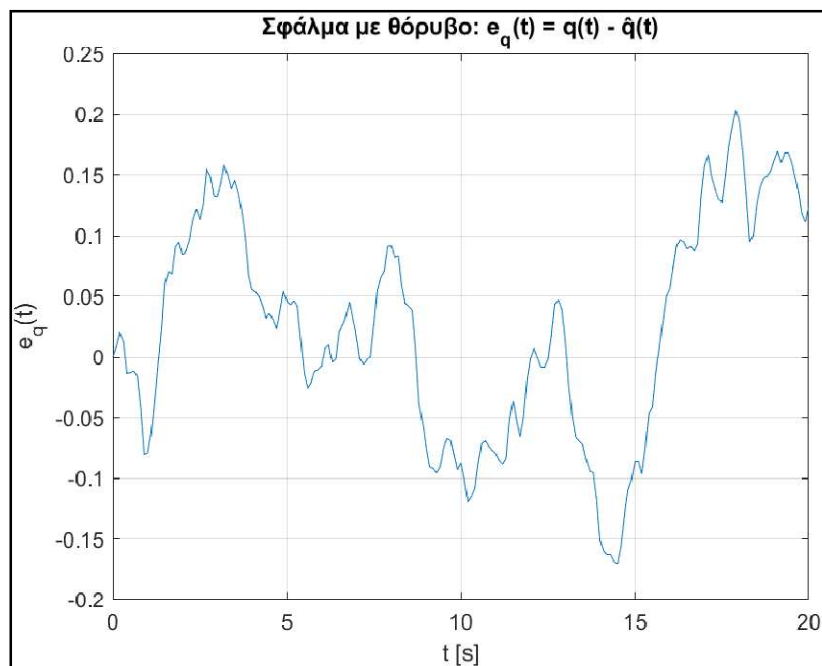
$\Delta L = 0.0403$

$\Delta c = 0.0581$

### Για τα δεδομένα του ερωτήματος β) του Θέματος 2



Σχήμα 9: Σύγκριση πραγματικής και εκτιμώμενης απόκρισης  $q(t)$  με προσθήκη θορύβου



Σχήμα 10: Σφάλμα μεταξύ της πραγματικής γωνίας  $q(t)$  και της εκτιμώμενης απόκρισης  $\hat{q}(t)$

### Παρατηρήσεις:

Με την προσθήκη λευκού γκαουσιανού θορύβου στα δεδομένα μέτρησης  $q(t)$  και της εισόδου  $u(t)$  με διακύμανση 0.1 παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις σε σχέση με τις πραγματικές τιμές και τις εκτιμήσεις χωρίς θόρυβο. Το σφάλμα εξόδου  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  παραμένει μικρό ( $\pm 0.2$ ), όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Παρότι υπάρχει θόρυβος, το εκτιμώμενο σήμα παραμένει πολύ κοντά στο πραγματικό.

Άρα, η μέθοδος παραμένει αποτελεσματική και δεν παρουσιάζει σημαντική απόκλιση στις εκτιμήσεις των παραμέτρων.

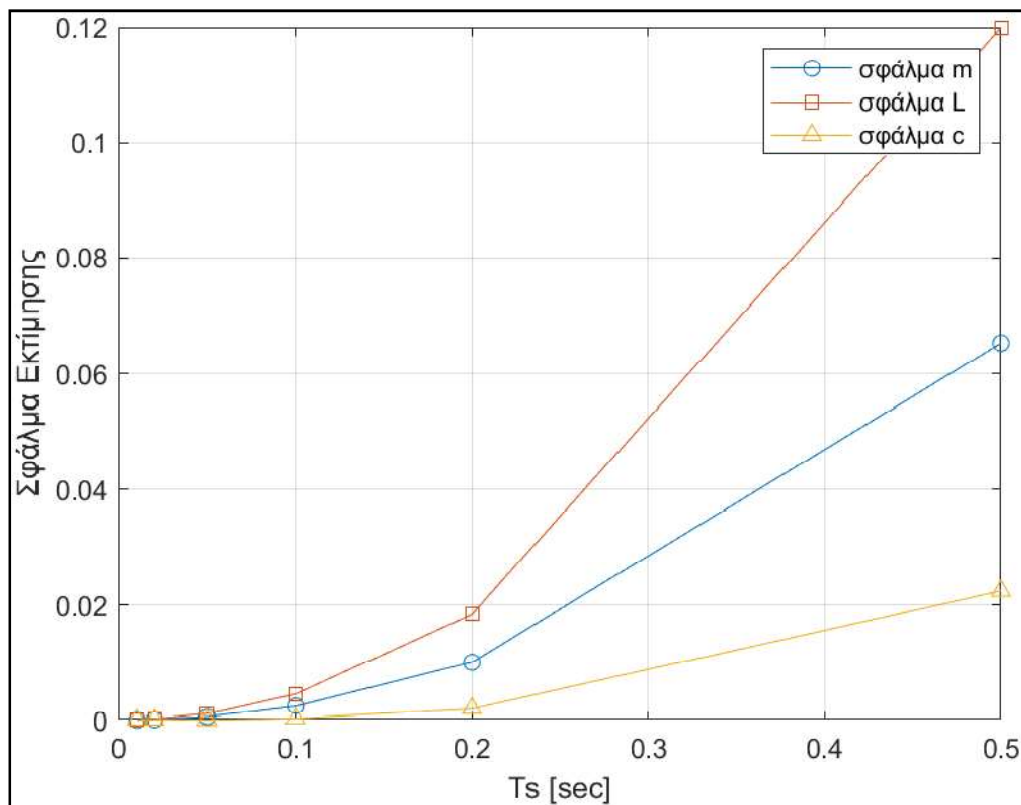
Το φιλτράρισμα των σημάτων μέσω του  $\Lambda(s)$  επιτρέπει στην παράγωγο και στα υπόλοιπα μεγέθη του συστήματος να υπολογίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς ο θόρυβος δεν ενισχύεται όπως θα συνέβαινε αν εφαρμοζόταν απευθείας παραγωγή. Με αυτόν τον τρόπο, ακόμα και όταν εισάγεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος στα σήματα, το φίλτρο λειτουργεί που βελτιώνει τη σχέση σήματος προς

Εκτιμήσεις χωρίς θόρυβο	
$m^*$	$= 0.7474 \text{ kg}$
$L^*$	$= 1.2463 \text{ m}$
$c^*$	$= 0.1416 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$
Εκτιμήσεις με θόρυβο	
$m^* \text{ (noisy)}$	$= 0.7644 \text{ kg}$
$L^* \text{ (noisy)}$	$= 1.2885 \text{ m}$
$c^* \text{ (noisy)}$	$= 0.1346 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$
Απόκλιση	
$\Delta m$	$= 0.0169$
$\Delta L$	$= 0.0422$
$\Delta c$	$= 0.0070$

θόρυβο (SNR) και προστατεύει τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων από λανθασμένες εκτιμήσεις. Αν το φίλτρο ήταν πιο «αδύναμο» (π.χ. πρώτης τάξης με μικρή απόσβεση) – όπως στο ερώτημα α)- οι εκτιμήσεις θα είχαν πολύ μεγάλη απόκλιση.

Ερώτημα β)

Για τα δεδομένα του ερωτήματος α) του Θέματος 2



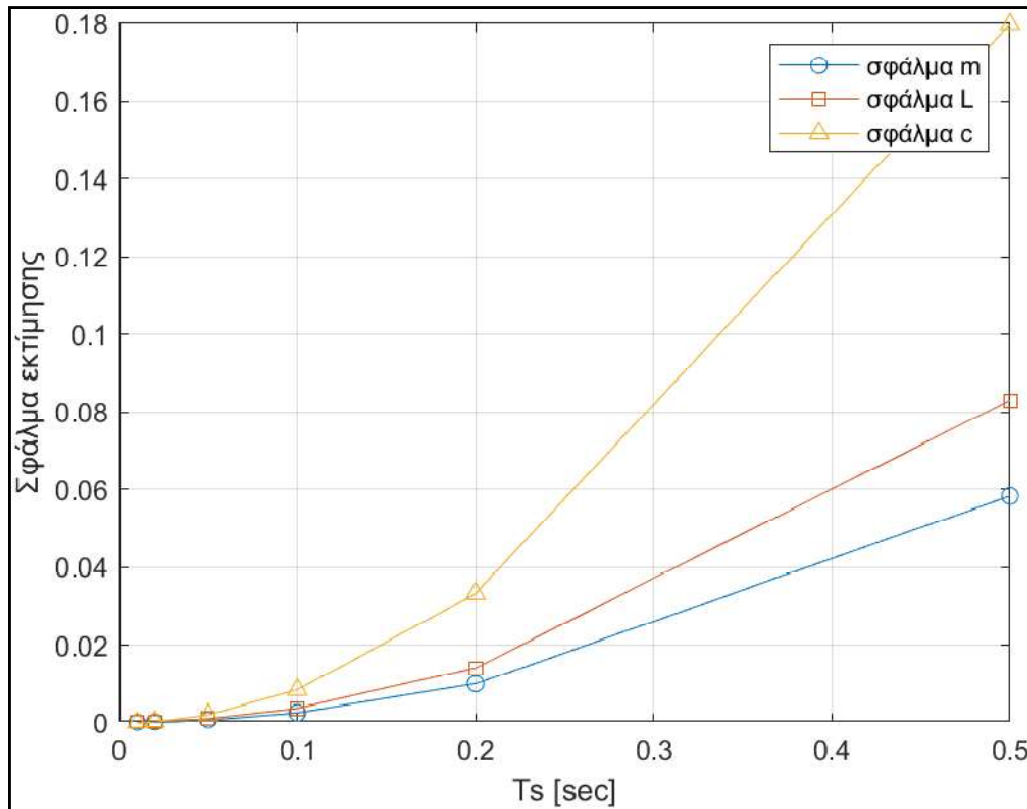
Σχήμα 11: Επίδραση της μεταβολής της περιόδου δειγματοληψίας ( $T_s$ ) στις εκτιμώμενες παραμέτρους

Παρατηρείται ότι καθώς η περίοδος δειγματοληψίας αυξάνεται (δηλαδή όσο λιγότερα δείγματα λαμβάνονται ανά δευτερόλεπτο), το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων αυξάνεται σημαντικά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η πληροφορία για τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος χάνεται ή αλλοιώνεται με χαμηλή δειγματοληψία.



Ειδικά για παραμέτρους που εξαρτώνται από παραγώγους (π.χ.  $m$  και  $c$ ), η εκτίμηση είναι ευαίσθητη στον ρυθμό δειγματοληψίας, αφού επηρεάζεται από το πόσο καλά εκφράζεται η κίνηση του συστήματος στο διακριτό χρόνο.

### Για τα δεδομένα του ερωτήματος β) του Θέματος 2

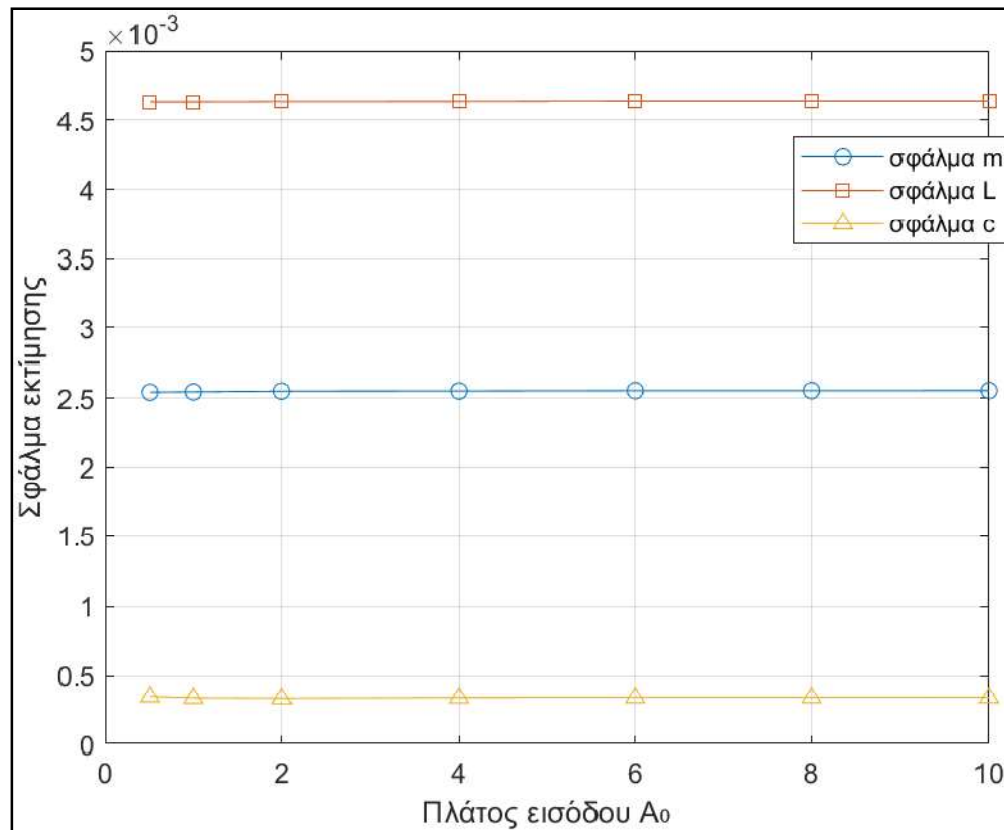


Σχήμα 12: Επίδραση της μεταβολής της περιόδου δειγματοληψίας ( $T_s$ ) στις εκτιμώμενες παραμέτρους

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περίοδος δειγματοληψίας, τα σφάλματα αυξάνονται σημαντικά, γιατί χάνεται πληροφορία. Επιπλέον, το σφάλμα αυξάνεται πιο απότομα σε σχέση με το 2α) λόγω της διαφορετικής παραμετροποίησης. Επειδή, χρησιμοποιείται φίλτρο δεύτερης τάξης, τα σήματα φιλτράρονται πιο έντονα λόγω της τάξης του φίλτρου, οπότε η απώλεια πληροφορίας όταν αυξάνεται η περίοδος δειγματοληψίας  $T_s$  είναι μεγαλύτερη.

Ερώτημα γ)

Για τα δεδομένα του ερωτήματος α) του Θέματος 2



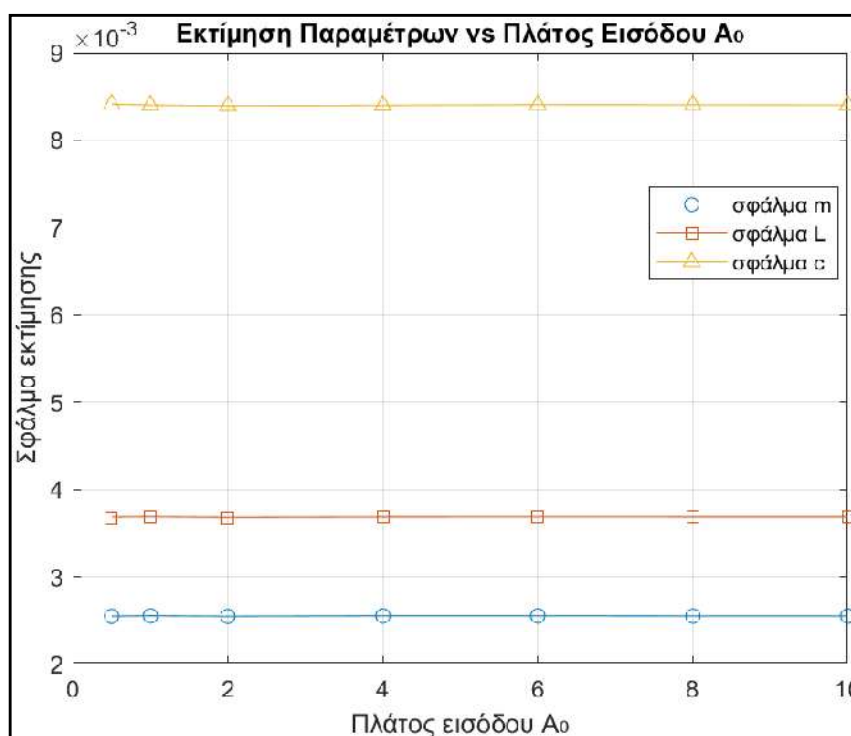
Σχήμα 13: Επίδραση της μεταβολής του πλάτους εισόδου  $A_0$  στις εκτιμώμενες παραμέτρους

Από το γράφημα παρατηρείται ότι η μεταβολή του πλάτους της εισόδου  $A_0$  δεν επηρεάζει σημαντικά την ακρίβεια των εκτιμώμενων παραμέτρων. Το σφάλμα παραμένει σχεδόν σταθερό και μικρό για όλες τις τιμές του  $A_0$  κάτι που υποδηλώνει ότι το μοντέλο είναι ανθεκτικό στην επιλογή πλάτους εισόδου, τουλάχιστον εντός των ορίων που μελετήθηκαν.

Ωστόσο, θεωρητικά:

Για πολύ μικρό  $A_0$ , το σύστημα μπορεί να αποκρίνεται ασθενώς, γεγονός που οδηγεί σε μικρότερη "ενεργή πληροφορία" και μικρότερο SNR ειδικά παρουσία θορύβου, με αποτέλεσμα μειωμένη ακρίβεια εκτίμησης. Για πολύ μεγάλο  $A_0$ , ενδέχεται να παραβιαστεί η υπόθεση γραμμικότητας που χρησιμοποιήθηκε κατά την παραμετροποίηση του μοντέλου (π.χ. προσέγγιση  $\sin(q) \approx q$ ).

Για τα δεδομένα του ερωτήματος β) του Θέματος 2



Σχήμα 14: Επίδραση της μεταβολής του πλάτους εισόδου  $A_0$  στις εκτιμώμενες παραμέτρους

Σε αντίθεση με το 2α, εδώ παρατηρείται μεγαλύτερο σφάλμα εκτίμησης, ειδικά για την παράμετρο της απόσβεσης  $\hat{c}$ . Το φίλτρο δεύτερης τάξης φαίνεται να επηρεάζει περισσότερο την ακρίβεια καθώς "κρύβει" μέρος της πληροφορίας.