

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ & ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Εργασία 2:

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων – Μέθοδοι
Πραγματικού Χρόνου

Μέθοδος Κλίσης, Μέθοδος Lyapunov

Παπουτσή Νικολέτα

AEM: 10858

Email: **npapoutsi@ece.auth.gr**

Θέμα 1

Ερώτημα α)

Η εξίσωση του συστήματος δίνεται από:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες, παίρνουμε:

$$\Rightarrow s^2X(s) = -\frac{b}{m}sX(s) - \frac{k}{m}X(s) + \frac{1}{m}U(s)$$

Θεωρούμε:

$$a_1 = \frac{b}{m}, a_2 = \frac{k}{m}, b_1 = \frac{1}{m}$$

Επιλέγουμε φίλτρο πρώτης τάξης της μορφής:

$$\Lambda(s) = s + a_m$$

Άρα:

$$\frac{s^2}{s + a_m}X(s) = -a_1 \frac{s}{s + a_m}X(s) - a_2 \frac{1}{s + a_m}X(s) + b_1 \frac{1}{s + a_m}U(s)$$

Ομαδοποιώντας:

$$sX(s) = (a_m - a_1) \frac{s}{s + a_m}X(s) - a_2 \frac{1}{s + a_m}X(s) + b_1 \frac{1}{s + a_m}U(s)$$

Ορίζουμε:

$$\Phi = \left[-\frac{s}{s+a_m}X(s) \quad -\frac{1}{s+a_m}X(s) \quad \frac{1}{s+a_m}U(s) \right]^T$$

Και

$$\theta^* = [a_1 - a_m \quad a_2 \quad b_1]^T$$

Άρα, η φιλτραρισμένη εξίσωση γράφεται, αφού x η έξοδος του συστήματος:

$$\dot{x} = \dot{y} = (\theta^*)^T \Phi$$

Επομένως, για τη μέθοδο κλίσης χρησιμοποιούμε το εξής σύστημα αναγνώρισης ως προς μοντέλο:

$$\hat{y} = (\hat{\theta})^T \Phi$$

Ορίζουμε το σφάλμα μοντελοποίησης :

$$e(t) = \dot{y} - \hat{y} = \dot{y} - (\hat{\theta})^T \Phi$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{e}^2(t) = \frac{1}{2} (\dot{y} - (\hat{\theta})^T \Phi)^2$$

Η συνάρτηση K είναι κυρτή, οπότε κάθε τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό.

Συνεπώς ισχύει:

$$\nabla K(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta^*} = 0$$

Η μέθοδος κλίσης δίνεται από τη σχεδίαση:

$$\hat{\dot{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta})$$

Όπου,

$$\nabla K(\hat{\theta}) = (\dot{y} - (\hat{\theta})^T \Phi) (-\Phi) = -e\Phi$$

Άρα,

$$\hat{\theta} = \gamma e \Phi$$

Όπου,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+a_m} X(s) & \frac{1}{s+a_m} X(s) & \frac{1}{s+a_m} U(s) \end{bmatrix}^T$$

Στο πεδίο του χρόνου, το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από Inverse Laplace Transform:

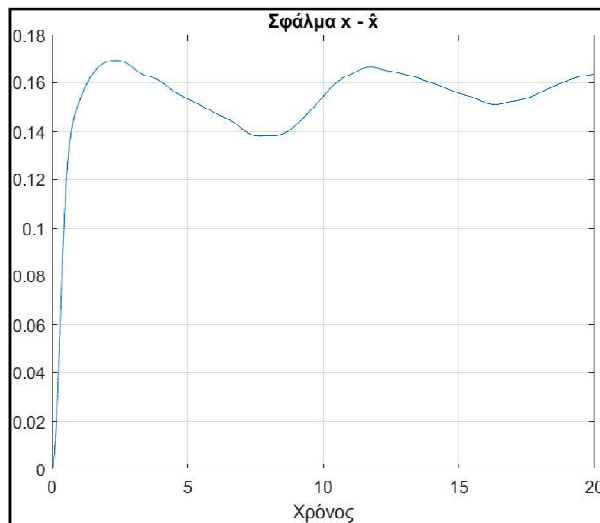
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u \\ \dot{\varphi}_1(t) = -a_m\varphi_1(t) + \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) = -a_m\varphi_2(t) + x(t) \\ \dot{\varphi}_3(t) = -a_m\varphi_3(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \gamma_1 e \varphi_1 \\ \hat{\theta}_2 = \gamma_2 e \varphi_2 \\ \hat{\theta}_3 = \gamma_3 e \varphi_3 \end{cases}$$

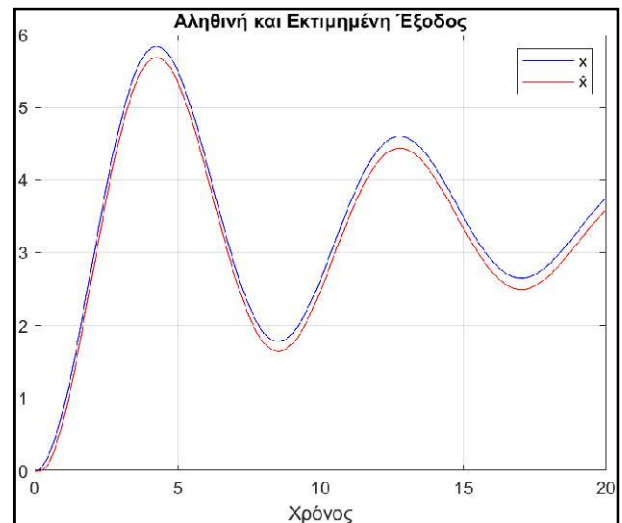
Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν οι εκτιμήσεις των m, b, k σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_3(t)}, \quad \hat{b}(t) = (a_m - \hat{\theta}_1(t)) \hat{m}(t), \quad \hat{k}(t) = \hat{\theta}_2(t) \hat{m}(t)$$

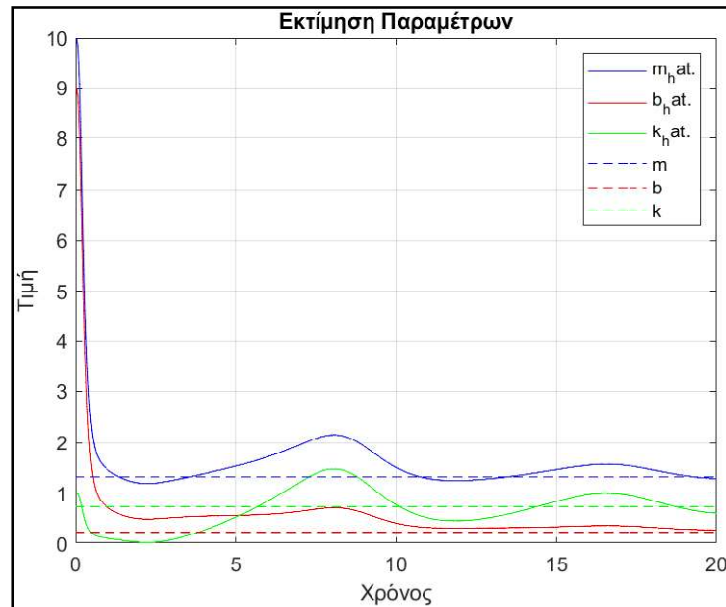
i) $u(t)=2.5$



Plot 1: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$



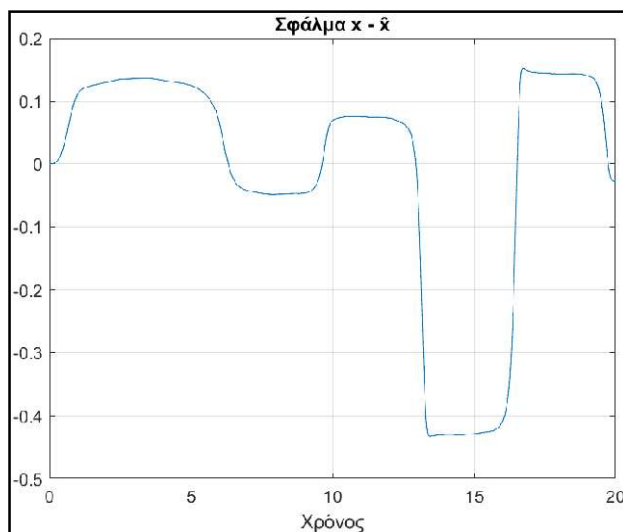
Plot 2: Διάγραμμα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$



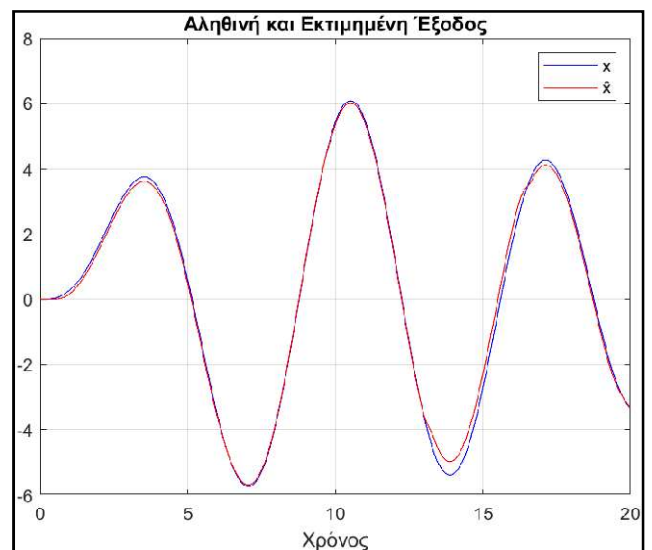
Plot 3: Εκτιμήσεις παραμέτρων

Παρατηρήσεις: Έπειτα από διάφορες δοκιμές και χωρίς μηδενικές αρχικές συνθήκες καταλήξαμε στη τιμή $\gamma=5$. Επιλέγοντας πολύ μεγάλες τιμές για το γ παρατηρείται ότι το σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$ μειώνεται σημαντικά, δηλαδή η εκτίμηση της εξόδου $\hat{x}(t)$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο $x(t)$. Ωστόσο, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων $\hat{m}, \hat{b}, \hat{k}$ δεν συγκλίνουν στην πραγματική τους τιμή αλλά παρουσιάζουν ταλαντώσεις κοντά στις πραγματικές. Τέλος, παρατηρείται ότι με τη θεωρητική ανάλυση που επιλέξαμε με φίλτρο πρώτης τάξης το σφάλμα τείνει σε μια σταθερή τιμή και δεν μηδενίζεται.

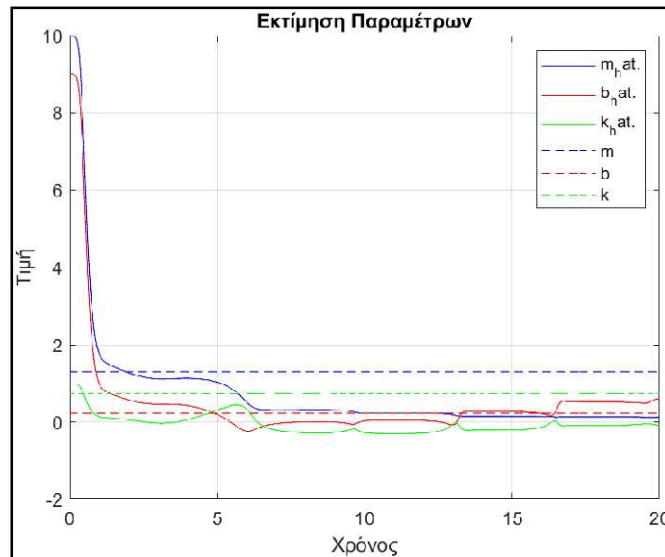
ii) $u(t)=2.5\sin(t)$



Plot 4: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$



Plot 5: Διάγραμμα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$



Plot 6: Εκτιμήσεις παραμέτρων

Για $\gamma=10$, $\vartheta(0)=[-0.1, 0.1, 0.1]$

Παρατηρήσεις: Παρατηρείται ότι το σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$ ταλαντώνεται γύρω από το 0. Δεν μηδενίζεται αλλά συγκλίνει σε μικρές τιμές. Για μεγάλα γ το σφάλμα τείνει στο μηδέν, ωστόσο οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{m} , \hat{b} , \hat{k} δεν συγκλίνουν στην πραγματική τους τιμή.

Ερώτημα β)

Για το προηγούμενο σύστημα σχεδιάζεται εκτιμητής πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων, παράλληλης και μεικτής δομής με τη μέθοδο Lyapunov.

Παράλληλη δομή

Η εξίσωση του συστήματος είναι:

$$(\Sigma): m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

Σε μορφή εξισώσεων κατάστασης:

$$x_1 = x(t), x_2 = \dot{x}(t)$$

Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u\end{aligned}$$

ορίζουμε: $\theta_1 = \frac{b}{m}$, $\theta_2 = \frac{k}{m}$, $\theta_3 = \frac{1}{m}$

Άρα.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε εκτιμώμενο σύστημα:

$$(M): \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = x_2$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\theta}_1 \hat{x}_2 - \hat{\theta}_2 \hat{x}_1 + \hat{\theta}_3 u$$

Ορίζουμε το σφάλμα μοντελοποίησης:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Όπου:

$$e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$$

Ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα:

$$e_{\theta_1}(t) = \hat{\theta}_1(t) - \theta_1(t)$$

$$e_{\theta_2}(t) = \hat{\theta}_2(t) - \theta_2(t)$$

$$e_{\theta_3}(t) = \hat{\theta}_3(t) - \theta_3(t)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2} e_1^2(t) + \frac{1}{2} e_2^2(t) + \frac{1}{2\gamma_1} e_{\theta_1}^2(t) + \frac{1}{2\gamma_2} e_{\theta_2}^2(t) + \frac{1}{2\gamma_3} e_{\theta_3}^2(t)$$

Υπολογίζουμε:

$$\dot{V}(t) = e_1(t)\dot{e}_1(t) + e_2(t)\dot{e}_2(t) + \frac{1}{\gamma_1} e_{\theta_1}(t)\dot{e}_{\theta_1}(t) + \frac{1}{\gamma_2} e_{\theta_2}(t)\dot{e}_{\theta_2}(t) + \frac{1}{\gamma_3} e_{\theta_3}(t)\dot{e}_{\theta_3}(t) \quad (1)$$

$$\dot{e}_{\theta_1}(t) = \dot{\hat{\theta}}_1(t)$$

$$\dot{e}_{\theta_2}(t) = \dot{\hat{\theta}}_2(t)$$

$$\dot{e}_{\theta_3}(t) = \dot{\hat{\theta}}_3(t)$$

Υπολογίζουμε:

$$\dot{e}_1(t) = e_2(t)$$

$$\dot{e}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t)$$

Άρα,

$$\dot{e}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t) = -\theta_1 e_2(t) - \theta_2 e_1(t) + e_{\theta_1}(t)\hat{x}_2(t) + e_{\theta_2}(t)\hat{x}_1(t) - e_{\theta_3}(t)u(t) \quad (2)$$

Από (1),(2):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_1 e_2 + e_2(-\theta_1 e_2 - \theta_2 e_1 + e_{\theta_1} \hat{x}_2 + e_{\theta_2} \hat{x}_1 - e_{\theta_3} u) + \frac{1}{\gamma_1} e_{\theta_1} \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} e_{\theta_2} \dot{\hat{\theta}}_2 + \frac{1}{\gamma_3} e_{\theta_3} \dot{\hat{\theta}}_3 \\ \Rightarrow \dot{V}(t) &= e_1 e_2 - \theta_1 e_2^2 - \theta_2 e_1 e_2 + e_2 e_{\theta_2} \hat{x}_1 + e_2 e_{\theta_1} \hat{x}_2 - e_2 e_{\theta_3} u + \frac{1}{\gamma_1} e_{\theta_1} \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} e_{\theta_2} \dot{\hat{\theta}}_2 + \frac{1}{\gamma_3} e_{\theta_3} \dot{\hat{\theta}}_3 \end{aligned}$$

Θέλουμε να μηδενίσουμε τους όρους με τα παραμετρικά σφάλματα άρα επιλέγουμε :

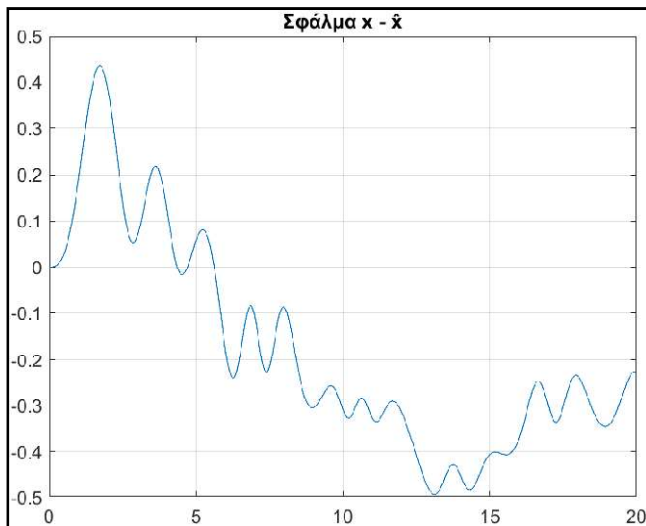
$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -\gamma_1 e_2 \hat{x}_2$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -\gamma_2 e_2 \hat{x}_1$$

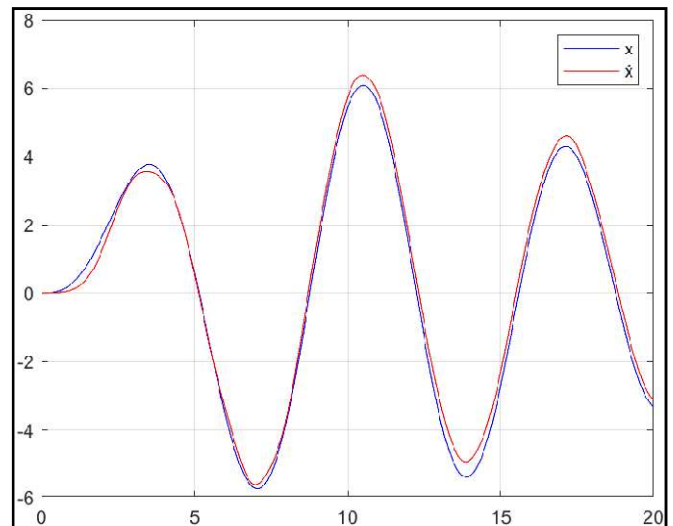
$$\dot{\hat{\theta}}_3(t) = \gamma_3 e_2 u$$

Άρα,

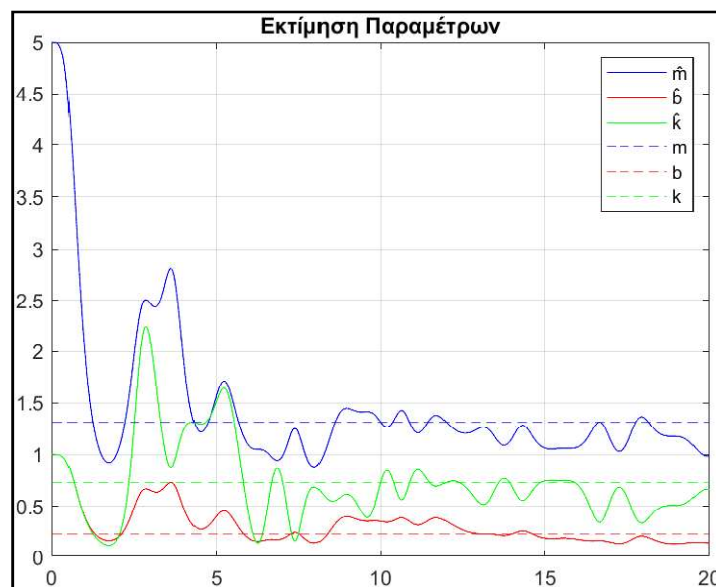
$$\dot{V}(t) = e_1 e_2 - \theta_1 e_2^2 - \theta_2 e_1 e_2$$



Plot 7: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$



Plot 8: Διάγραμμα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$



Plot 9: Εκτιμήσεις παραμέτρων

Για $\gamma=[0.1,1,1]$, $\vartheta(0)=[0.2,0.2,0.2]$

Παρατηρήσεις: Παρατηρείται ότι το σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$ ταλαντώνεται γύρω από το 0. Για μεγαλύτερο διάστημα προσομοίωσης θα φαινόταν η ταλάντωση του σφάλματος στο 0. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{m} , $\hat{\delta}$, \hat{k} τείνουν πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές.

Μεικτή δομή

Η εξίσωση του συστήματος είναι:

$$(\Sigma): m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

Σε μορφή εξισώσεων κατάστασης:

$$x_1 = x(t), x_2 = \dot{x}(t)$$

Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$$

ορίζουμε: $\theta_1 = \frac{b}{m}$, $\theta_2 = \frac{k}{m}$, $\theta_3 = \frac{1}{m}$

Θεωρούμε εκτιμώμενο σύστημα:

$$(M): \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = x_2 + \theta_{m1}(x_1(t) - \hat{x}_1(t))$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 x_1 + \hat{\theta}_3 u + \theta_{m2}(x_2(t) - \hat{x}_2(t)), \theta_{m1} > 0, \theta_{m2} > 0$$

Ορίζουμε το σφάλμα μοντελοποίησης:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Όπου:

$$e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$$

Ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα:

$$e_{\theta_1}(t) = \hat{\theta}_1(t) - \theta_1(t)$$

$$e_{\theta_2}(t) = \hat{\theta}_2(t) - \theta_2(t)$$

$$e_{\theta_3}(t) = \hat{\theta}_3(t) - \theta_3(t)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2}e_1^2(t) + \frac{1}{2}e_2^2(t) + \frac{1}{2\gamma_1}e_{\theta_1}^2(t) + \frac{1}{2\gamma_2}e_{\theta_2}^2(t) + \frac{1}{2\gamma_3}e_{\theta_3}^2(t)$$

Υπολογίζουμε:

$$\dot{V}(t) = e_1(t)\dot{e}_1(t) + e_2(t)\dot{e}_2(t) + \frac{1}{\gamma_1}e_{\theta_1}(t)\dot{e}_{\theta_1}(t) + \frac{1}{\gamma_2}e_{\theta_2}(t)\dot{e}_{\theta_2}(t) + \frac{1}{\gamma_3}e_{\theta_3}(t)\dot{e}_{\theta_3}(t) \quad (1)$$

$$\dot{e}_{\theta_1}(t) = \dot{\hat{\theta}}_1(t)$$

$$\dot{e}_{\theta_2}(t) = \dot{\hat{\theta}}_2(t)$$

$$\dot{e}_{\theta_3}(t) = \dot{\hat{\theta}}_3(t)$$

Υπολογίζουμε:

$$\dot{e}_1(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t) - \theta_{m1}e_1(t)$$

$$\dot{e}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t)$$

Άρα,

$$\dot{e}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t) = e_{\theta_1}(t)x_2(t) + e_{\theta_2}(t)x_1(t) - e_{\theta_3}(t)u(t) - \theta_{m2}e_2(t) \quad (2)$$

Από (1),(2):

$$\dot{V}(t) = e_1(e_2 - \theta_{m1}e_1) + e_2(e_{\theta_1}x_2 + e_{\theta_2}x_1 - e_{\theta_3}u - \theta_{m2}e_2) + \frac{1}{\gamma_1}e_{\theta_1}\dot{e}_{\theta_1} + \frac{1}{\gamma_2}e_{\theta_2}\dot{e}_{\theta_2} + \frac{1}{\gamma_3}e_{\theta_3}\dot{e}_{\theta_3}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(t) = -\theta_{m1}e_1^2 - \theta_{m2}e_2^2 + e_{\theta_1}\left(\frac{1}{\gamma_1}\dot{\hat{\theta}}_1(t) + e_2x_2\right) + e_{\theta_2}\left(\frac{1}{\gamma_2}\dot{\hat{\theta}}_2(t) + e_2x_1\right) + e_{\theta_3}\left(\frac{1}{\gamma_3}\dot{\hat{\theta}}_3(t) - e_2u\right)$$

Θέλουμε να μηδενίσουμε τους όρους με τα παραμετρικά σφάλματα άρα επιλέγουμε :

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -\gamma_1 e_2 x_2$$

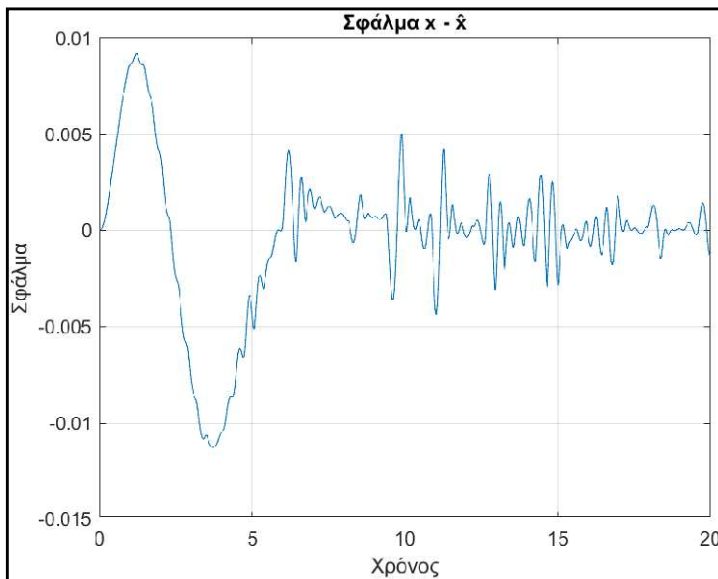
$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -\gamma_2 e_2 x_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3(t) = \gamma_3 e_2 u$$

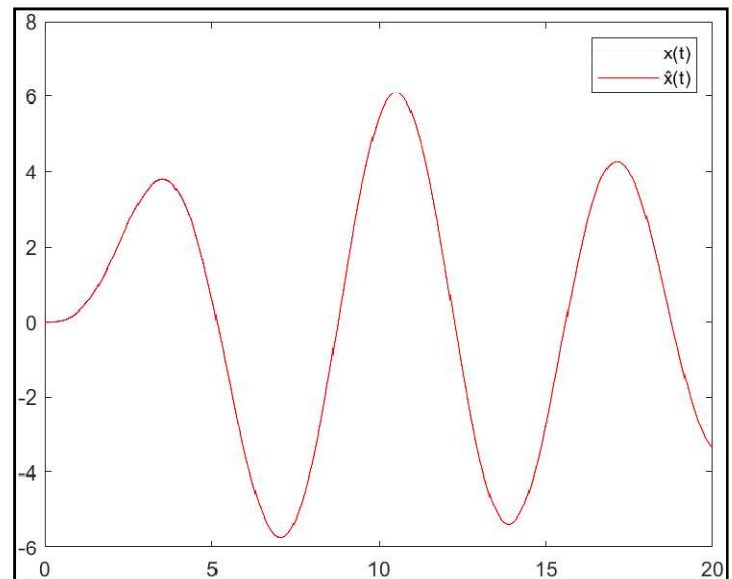
Άρα,

$$\dot{V}(t) = -\theta_{m1}e_1^2 - \theta_{m2}e_2^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

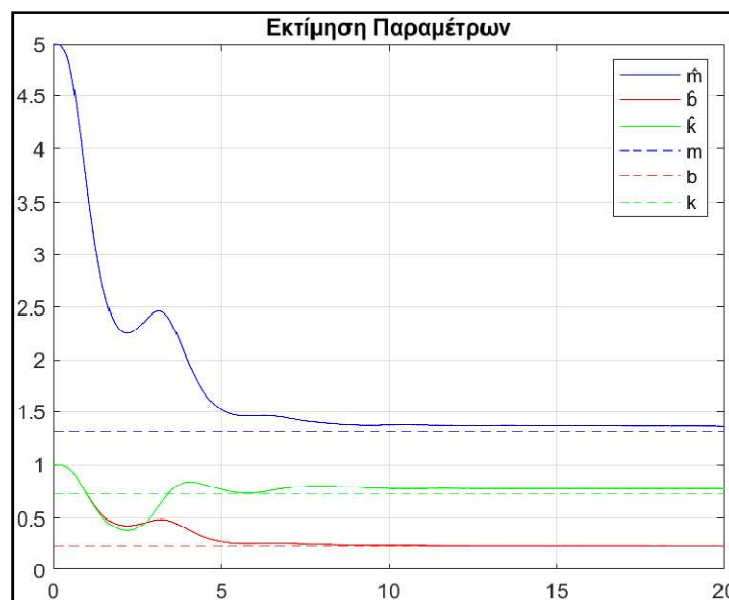
Επομένως, είναι αρνητικά ημιορισμένη οπότε όλα τα σήματα είναι φραγμένα.



Plot 10: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$



Plot 11: Διάγραμμα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$



Plot 12: Εκτιμήσεις παραμέτρων

Για $\gamma=[0.1,0.5,1]$, $\vartheta(0)=[0.2,0.2,0.2]$, $\vartheta_m=[10,10]$

Παρατηρήσεις: Παρατηρείται ότι το σφάλμα εκτίμησης $e(t)$ παραμένει πολύ κοντά στο 0. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων $\hat{m}, \hat{b}, \hat{k}$ συγκλίνουν προς τις πραγματικές τους τιμές. Παράλληλα, μέσω δοκιμών φάνηκε ότι για μεγαλύτερες τιμές των βημάτων γ , το σφάλμα παραμένει κοντά στο 0, ενώ οι εκτιμήσεις εμφανίζουν μικρές ταλαντώσεις γύρω από τις πραγματικές τιμές. Σε κάθε περίπτωση η ακρίβεια της εξόδου παραμένει σταθερή και οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου x και της εκτίμησης \hat{x} ταυτίζονται.

Σε σύγκριση με τη παράλληλη δομή, όπου οι εκτιμήσεις εμφανίζουν έντονες ταλαντώσεις γύρω από τις πραγματικές τιμές. Στη μεικτή δομή το μοντέλο καταφέρνει να εκτιμήσει τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων πιο σταθερά και αποτελεσματικά. Τέλος, το σφάλμα εκτίμησης στη μεικτή δομή παραμένει σχεδόν μηδενικό, ενώ για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο στη παράλληλη δομή πρέπει να αυξήσουμε αρκετά τα βήματα γ , με συνέπειες όμως στις εκτιμήσεις παραμέτρων.

Ερώτημα γ)

Ορίζεται η μετρούμενη έξοδος:

$$y(t) = x(t) + \eta(t), \text{ όπου } \eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

και το σφάλμα δίνεται από τη σχέση:

$$e = x + \eta - \hat{x}$$

$$(Π-Τ): \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma e \hat{x} = -\gamma x \hat{x} - \gamma x \eta + \gamma \hat{x}^2$$

$$(Μ-Τ): \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma e x = -\gamma (x + \eta - \hat{x})(x + \eta) = -\gamma (x^2 + \eta x + \eta^2 - \hat{x}x - \hat{x}\eta)$$

Παράλληλη δομή:

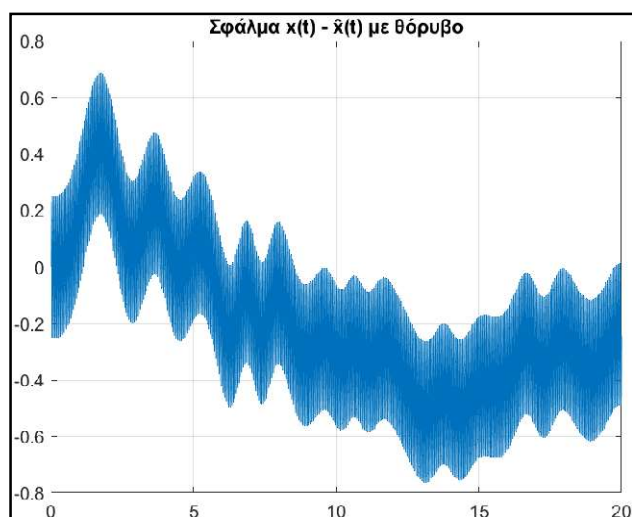
$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -\gamma_1 e_2 \hat{x}_2$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -\gamma_2 e_2 \hat{x}_1$$

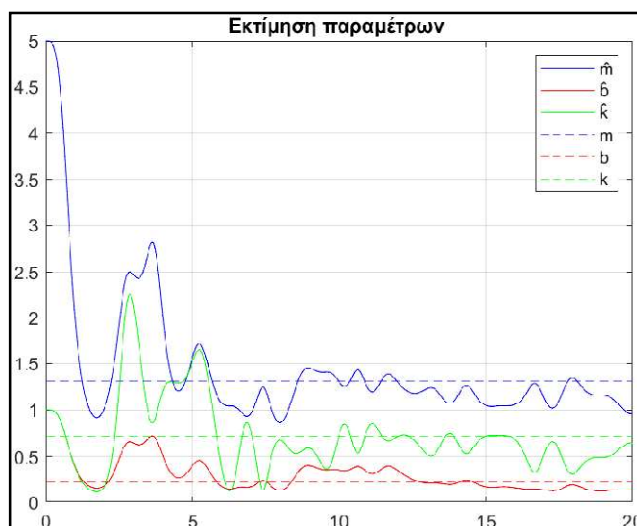
$$\dot{\hat{\theta}}_3(t) = \gamma_3 e_2 u$$

Στη παράλληλη δομή, δεν υπάρχει άμεσα το μετρήσιμο σήμα x_1 στο οποίο προστίθεται θόρυβος και όλα τα σήματα προέρχονται από την εκτίμηση. Επομένως, η προσθήκη θορύβου δεν επηρεάζει άμεσα τον εκτιμητή.

Στην παράλληλη τοπολογία, οι νόμοι προσαρμογής βασίζονται αποκλειστικά σε εκτιμώμενες καταστάσεις \hat{x}_1, \hat{x}_2 και όχι στις μετρούμενες τιμές του σήματος x_1 , το οποίο υπόκειται σε θόρυβο. Συνεπώς, ο εκτιμητής παραμέτρων δεν επηρεάζεται άμεσα από προσθήκη θορύβου στο x_1 , σε αντίθεση με τη μεικτή δομή. Για τον λόγο αυτό, δεν εξετάζεται η επίδραση του πλάτους του θορύβου στην ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων στην παράλληλη τοπολογία.



Plot 13: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$



Plot 14: Εκτίμηση παραμέτρων

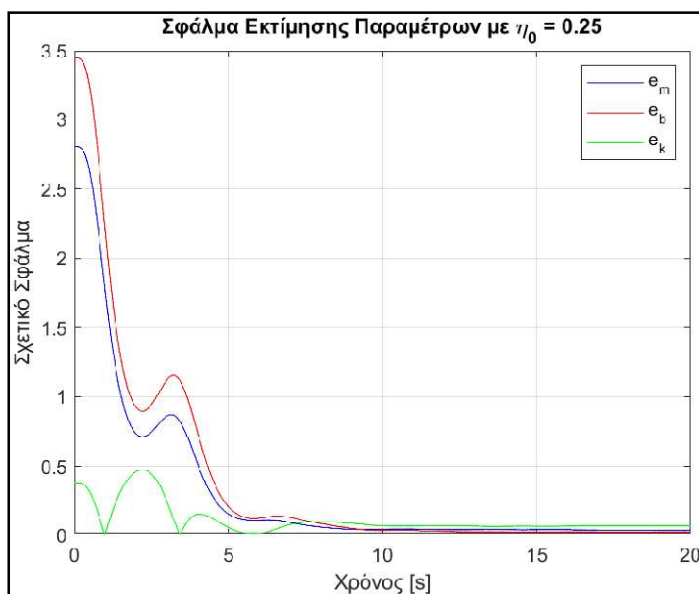
Μεικτή δομή:

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -\gamma_1 e_2 x_2$$

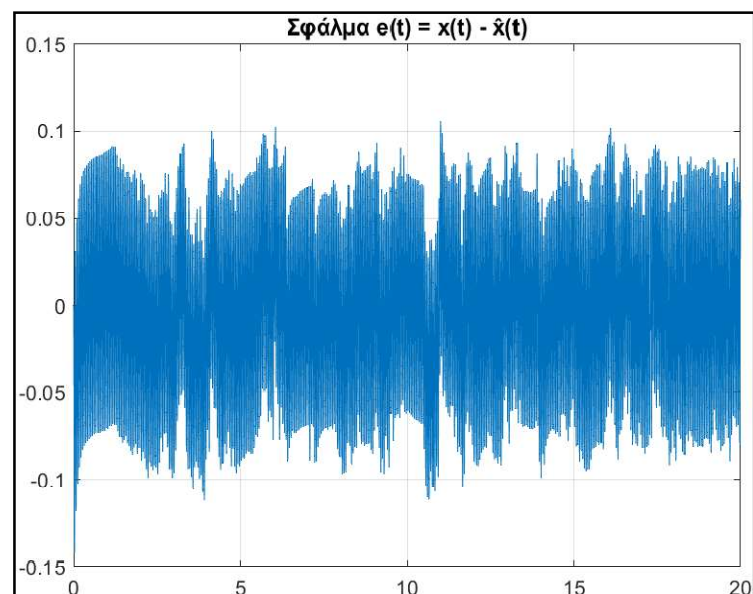
$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -\gamma_2 e_2 x_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3(t) = \gamma_3 e_2 u$$

Το σήμα x_1 θα επηρεάσει άμεσα την εκτίμηση της παραμέτρου $\hat{\theta}_2$.
Επιπλέον, ο θόρυβος η θα εμφανιστεί στο τετράγωνο.

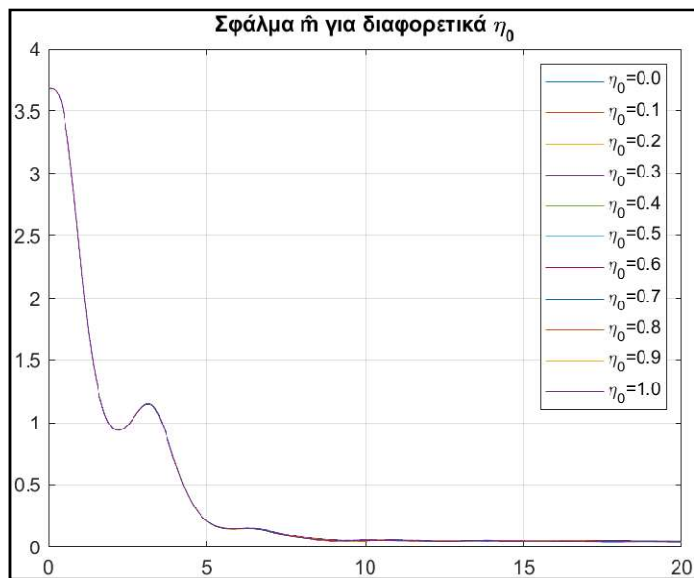


Plot 15: Σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων

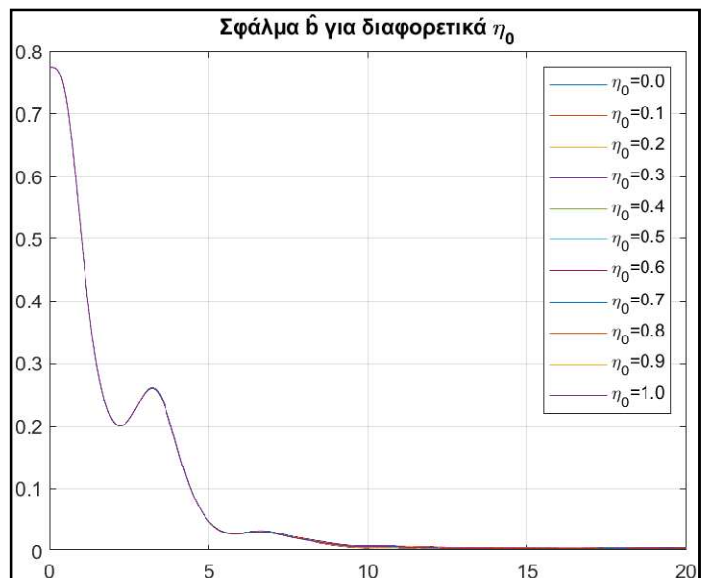


Plot 16: Σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$

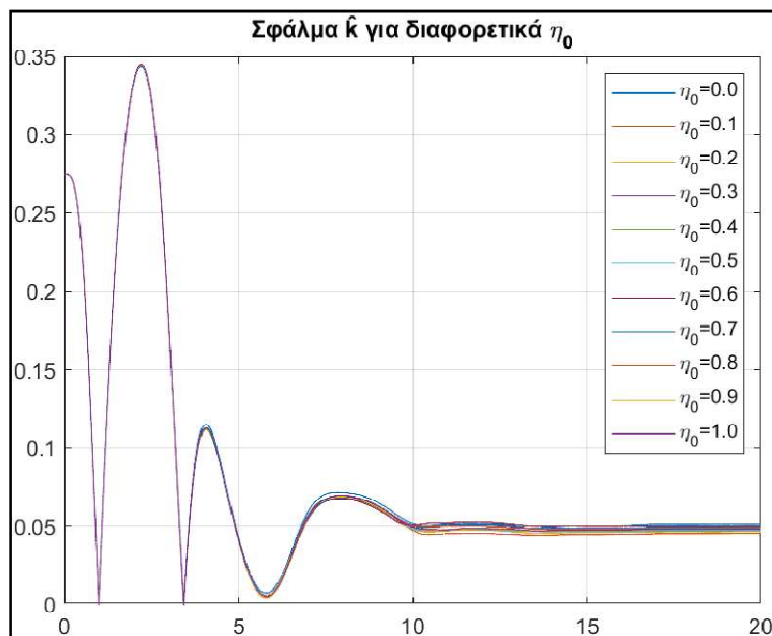
Παρατηρήσεις: Το σφάλμα μοντελοποίησης αυξάνεται από την επίδραση του θορύβου σε τάξη μεγέθους ~ 0.1 . Ενώ, το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων μας δείχνει πως δεν υπάρχει απόκλιση των παραμέτρων από τις πραγματικές τιμές καθώς τείνει στο 0.



Plot 17: Σφάλμα εκτίμησης παραμέτρου $\hat{\eta}$



Plot 18: Σφάλμα εκτίμησης παραμέτρου $\hat{\delta}$



Plot 19: Σφάλμα εκτίμησης παραμέτρου $\hat{\kappa}$

Παρατηρήσεις: Για πολύ μεγάλα πλάτη θορύβου η_0 οι εκτιμήσεις των παραμέτρων αποκλίνουν από τις πραγματικές τιμές.

Θέμα 2

Ερώτημα α)

Η εξίσωση του συστήματος είναι:

$$\ddot{r}(t) = -a_1 \dot{r}(t) - a_2 \sin(r(t)) + a_3 \dot{r}^2(t) \sin(2r(t)) + bu(t) + d(t)$$

Μετατρέπουμε σε σύστημα καταστάσεων:

$$x_1(t) = r(t), \quad x_2(t) = \dot{r}(t)$$

Το σύστημα γίνεται:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2(t) - a_2 \sin(x_1(t)) + a_3 x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) + bu(t) + d(t)$$

Σκοπός είναι η γωνία να πάει στο 0 στο $\frac{\pi}{10}$ και να επιστρέψει στο 0. Άρα επιλέγεται ομαλή τροχιά αναφοράς:

$$r_d(t) = \frac{\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi t}{20}\right), t \in [0, 20]$$

Σχεδιάζουμε τον ελεγκτή:

$$z_1(t) = \frac{r(t) - r_d(t)}{\varphi(t)}, \quad a(t) = -k_1 T(z_1(t)), \quad T(z_1(t)) = \ln\left(\frac{1 + z_1}{1 - z_1}\right)$$

$$z_2(t) = \frac{\dot{r}(t) - a(t)}{\rho}, \quad u(t) = -k_2 T(z_2(t)), \quad T(z_2(t)) = \ln\left(\frac{1 + z_2}{1 - z_2}\right)$$

όπου,

$$\varphi(t) = (\varphi_0 - \varphi_\infty)e^{-\lambda t} + \varphi_\infty, \quad \varphi_0 > \varphi_\infty > 0 \text{ και } \varphi_0 \gg |r(0) - r_d(0)|$$

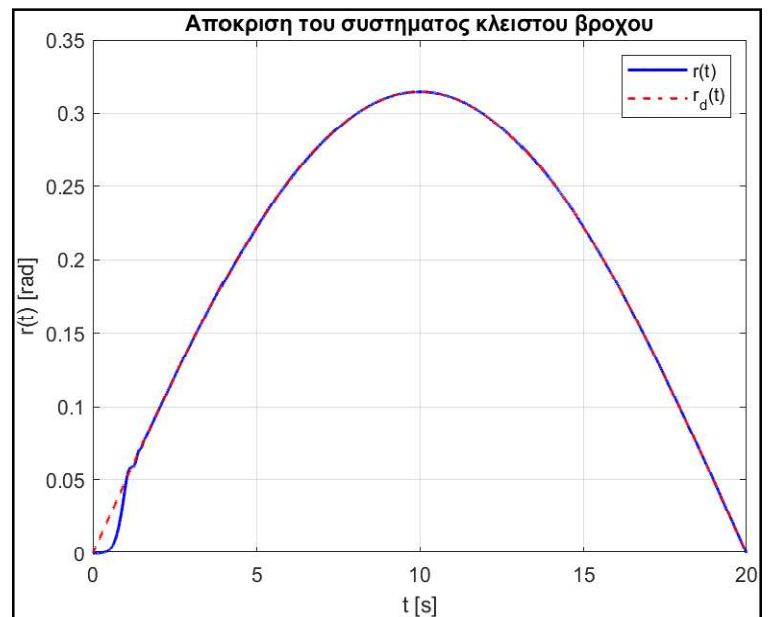
Για επιβεβαίωση της ορθής υλοποίησης:

$$|r(t) - r_d(t)| < \varphi(t) \text{ και } |\dot{r}(t) - a(t)| < \rho, \forall t \geq 0$$

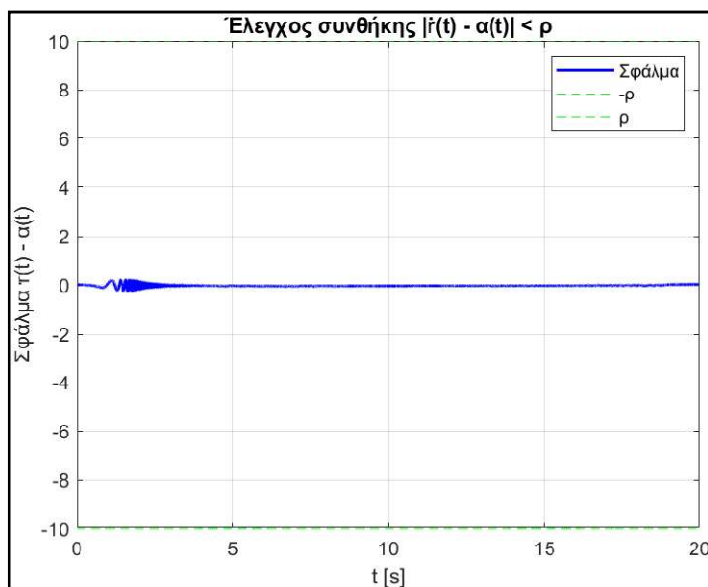
Περιπτώσεις για μελέτη του συστήματος.

1)

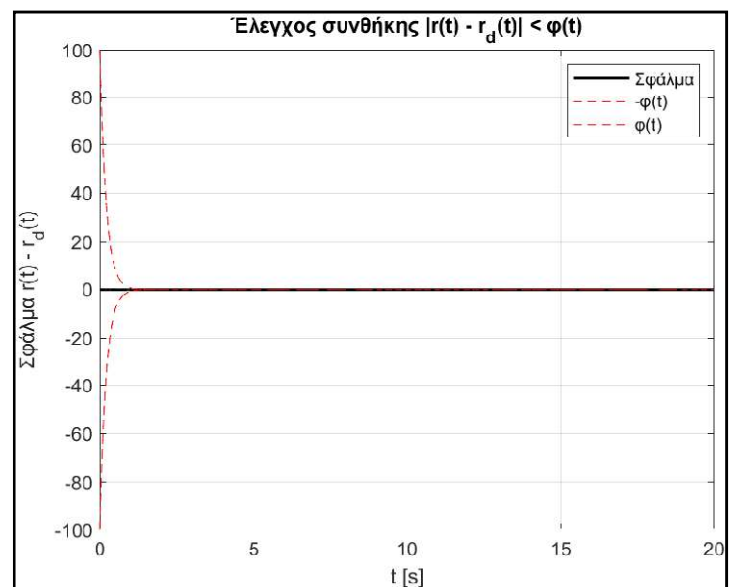
φ_0	100
φ_∞	0.01
λ	5
ρ	10
k_1	10
k_2	20



Plot 20: Απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου



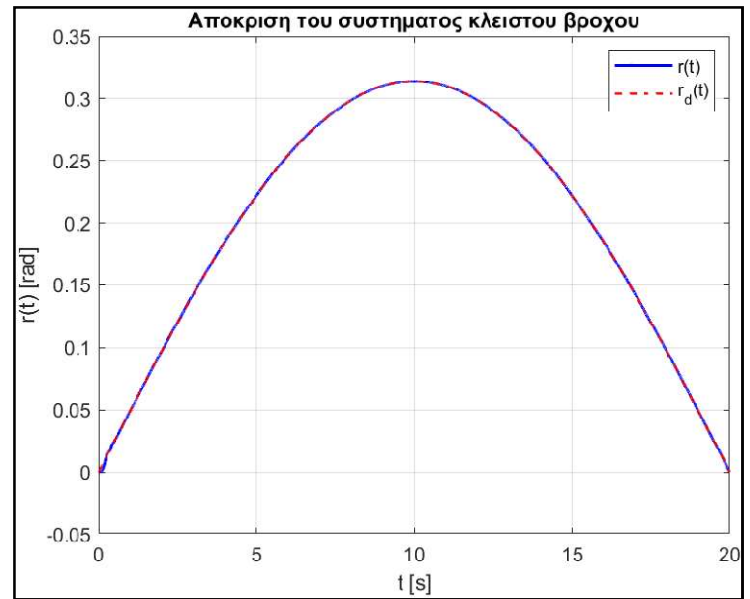
Plot 21: Διάγραμμα σφάλματος



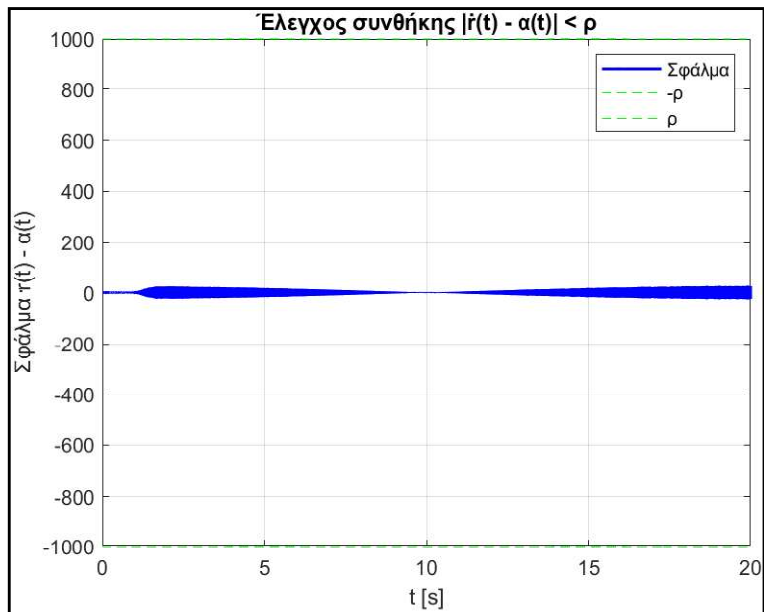
Plot 22: Έλεγχος συνθήκης

2)

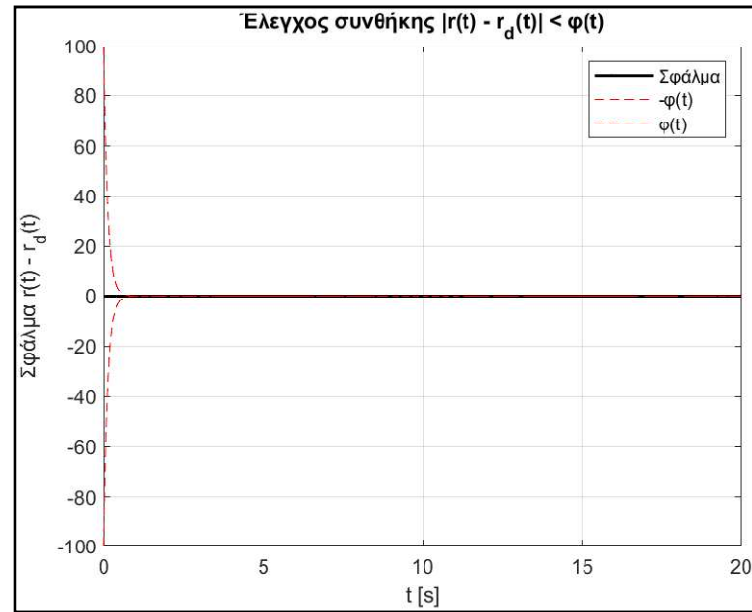
φ_0	100
φ_∞	0.001
λ	8
ρ	1000
k_1	1000
k_2	2000



Plot 23: Απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου



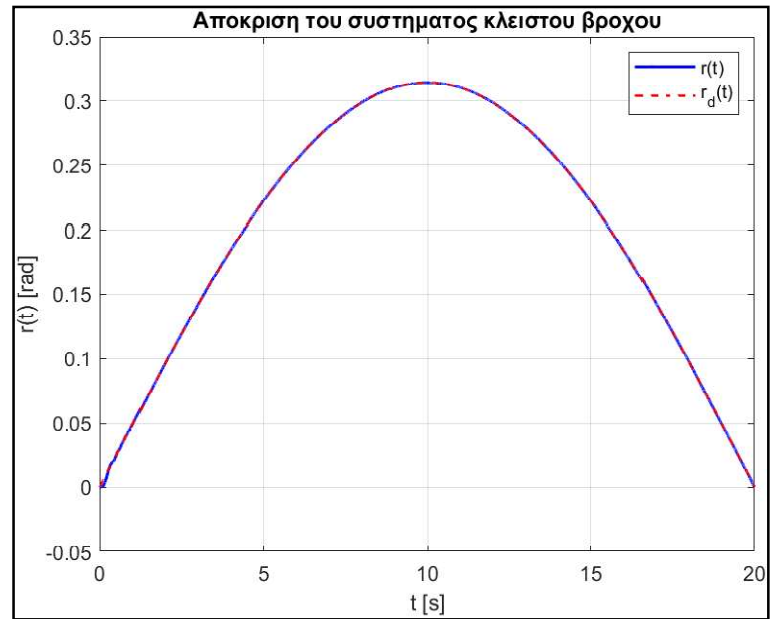
Plot 24: Διάγραμμα σφάλματος



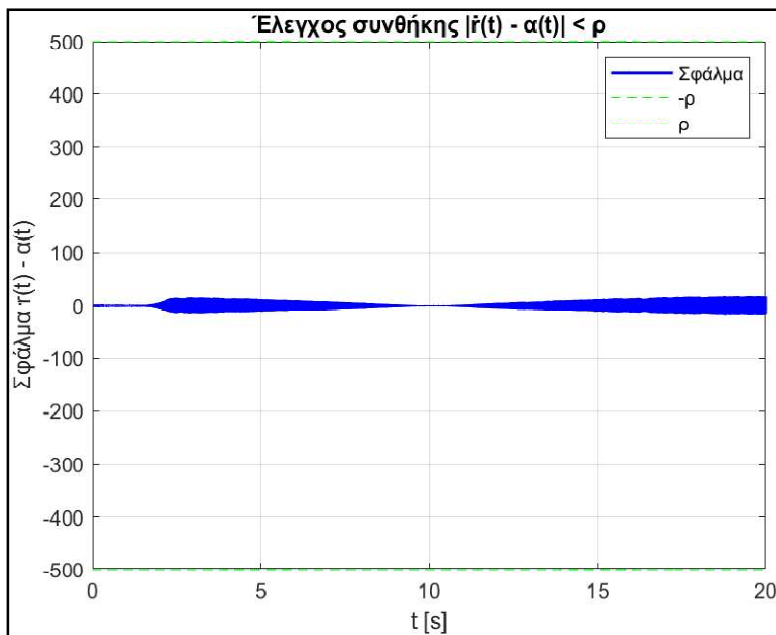
Plot 25: Έλεγχος συνθήκης

3)

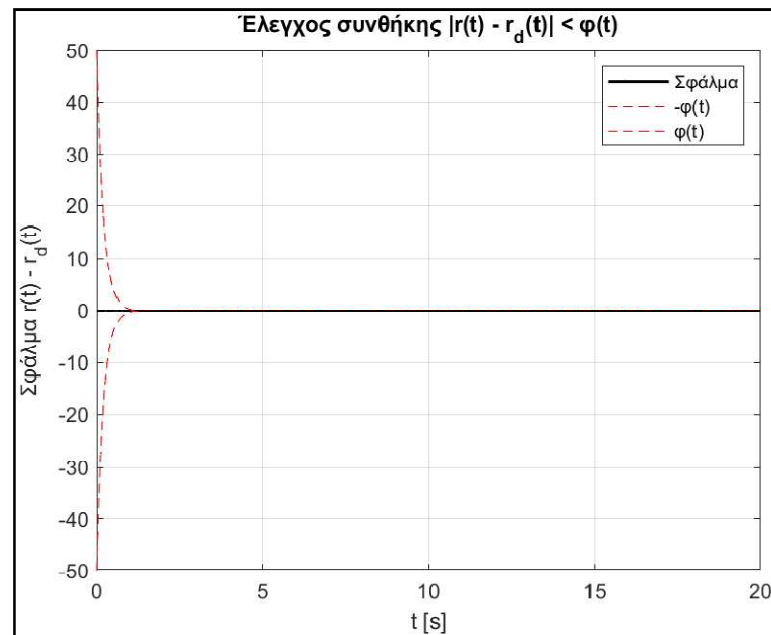
φ_0	50
φ_∞	0.001
λ	5
ρ	500
k_1	500
k_2	1000



Plot 26: Απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου



Plot 27: Διάγραμμα σφάλματος



Plot 28: Έλεγχος συνθήκης

Ερώτημα β)

Το σύστημα μας είναι:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2(t) - a_2 \sin(x_1(t)) + a_3 x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) + bu(t)$$

Επιλέγοντας τον παρακάτω εκτιμητή προκύπτει:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = x_2(t) + \theta_{m1}(x_1(t) - \hat{x}_1(t))$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = -\hat{a}_1 x_2(t) - \hat{a}_2 \sin(x_1(t)) + \hat{a}_3 x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) + \hat{b}u(t) + \theta_{m2}(x_2(t) - \hat{x}_2(t))$$

Ορίζουμε τα σφάλματα μοντελοποίησης και τα παραμετρικά σφάλματα:

$$e_{x1} = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \quad e_{x2} = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$$

$$e_{a1} = \hat{a}_1 - a_1, \quad e_{a2} = \hat{a}_2 - a_2, \quad e_{a3} = \hat{a}_3 - a_3, \quad e_b = \hat{b} - b$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2} e_{x1}^2 + \frac{1}{2} e_{x2}^2 + \frac{1}{2\gamma_1} e_{a1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} e_{a2}^2 + \frac{1}{2\gamma_3} e_{a3}^2 + \frac{1}{2\gamma_4} e_b^2$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov:

$$\dot{V}(t) = e_{x1} \dot{e}_{x1} + e_{x2} \dot{e}_{x2} + \frac{1}{\gamma_1} e_{a1} \dot{e}_{a1} + \frac{1}{\gamma_2} e_{a2} \dot{e}_{a2} + \frac{1}{\gamma_3} e_{a3} \dot{e}_{a3} + \frac{1}{\gamma_4} e_b \dot{e}_b$$

Όπου,

$$\dot{e}_{x1} = -\theta_{m1} e_{x1}$$

$$\dot{e}_{x2} = -\theta_{m2} e_{x2} + e_{a1} x_2(t) + e_{a2} \sin(x_1(t)) - e_{a3} x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) - e_b u(t)$$

Επομένως, η παράγωγος γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\theta_{m1} e_{x1}^2 + -\theta_{m2} e_{x2}^2 + \left(\frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{a}}_1 + x_2 e_{x2} \right) e_{a1} + \left(\frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{a}}_2 + \sin(x_1(t)) e_{x2} \right) e_{a2} + \left(\frac{1}{\gamma_3} \dot{\hat{a}}_3 - x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) e_{x2} \right) e_{a3} \\ & + \left(\frac{1}{\gamma_4} \dot{\hat{b}} - u(t) e_{x2} \right) e_b \end{aligned}$$

Επιλέγουμε:

$$\dot{\hat{a}}_1 = -\gamma_1 x_2 e_{x2}$$

$$\dot{\hat{a}}_2 = -\gamma_2 \sin(x_1(t)) e_{x2}$$

$$\dot{\hat{a}}_3 = \gamma_3 x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) e_{x2}$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_4 u(t) e_{x2}$$

Άρα, γίνεται:

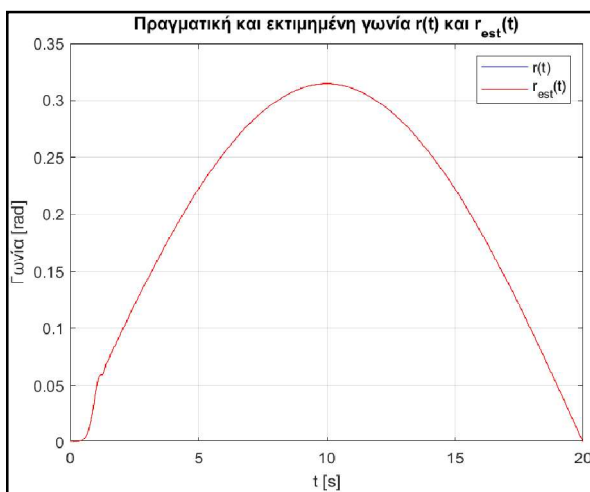
$$\dot{V}(t) = -\theta_{m1} e_{x1}^2 + -\theta_{m2} e_{x2}^2 \leq 0$$

Η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη άρα όλα τα σήματα είναι φραγμένα και το σύστημα ευσταθές.

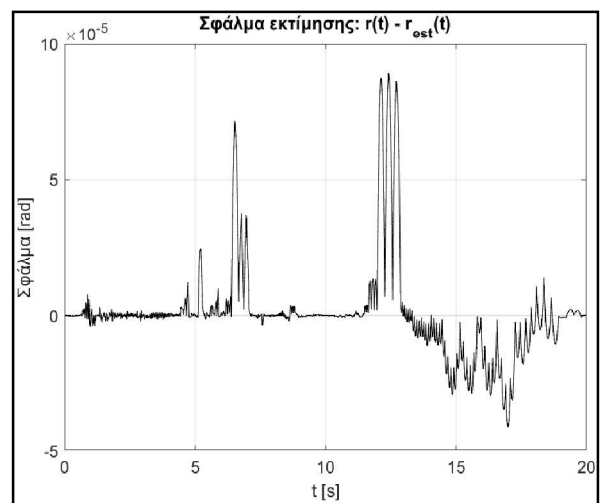
1)

φ_0	100
φ_∞	0.01
λ	5
ρ	10
k_1	10
k_2	20

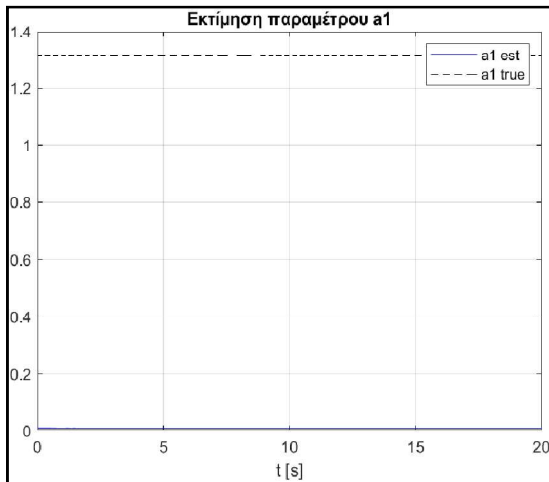
$$\gamma = [10, 10, 1, 5]$$



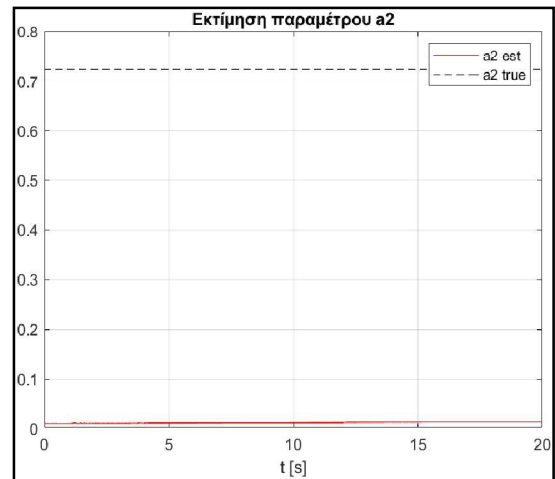
Plot 29: Διάγραμμα $r(t)$ και $\hat{r}(t)$



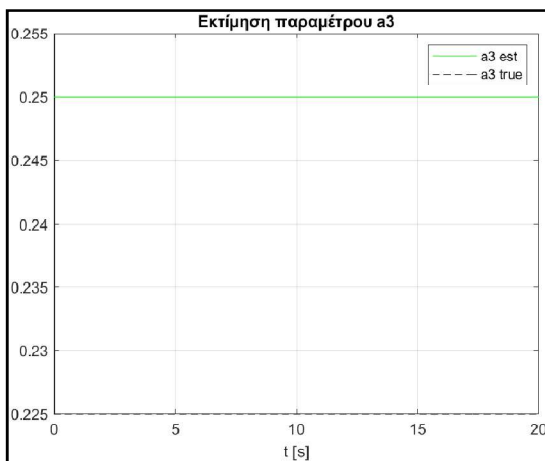
Plot 30: Σφάλμα εκτίμησης



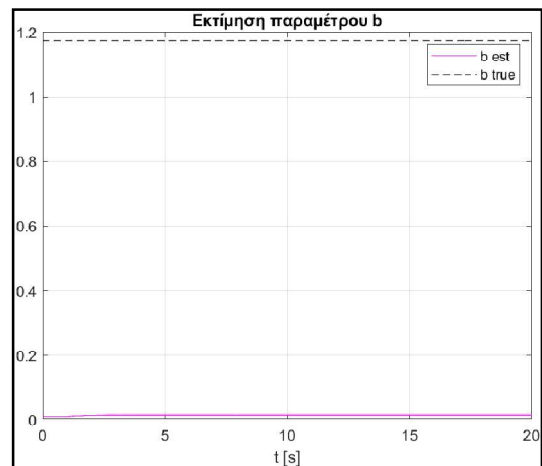
Plot 31: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_1



Plot 32 : Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_2



Plot 33: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_3



Plot 34 : Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_4

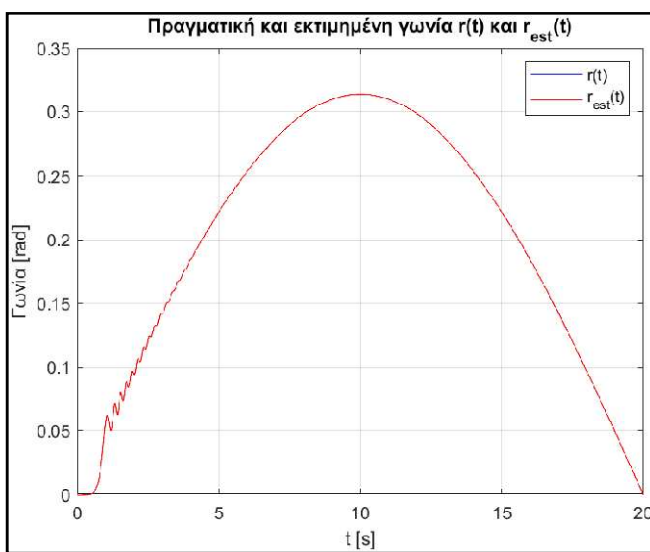
Παρατηρήσεις:

Η εκτίμηση της εξόδου ακολουθεί την πραγματική όπως φαίνεται από το διάγραμμα σφάλματος που είναι πολύ κοντά στο 0. Ωστόσο, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων παρουσιάζουν απόκλιση από τις πραγματικές τιμές τους. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη της συνθήκης επιμένουσας διέγερσης, η οποία είναι απαραίτητη για την πλήρη εκτίμηση των παραμέτρων σε εκτιμητές Lyapunov.

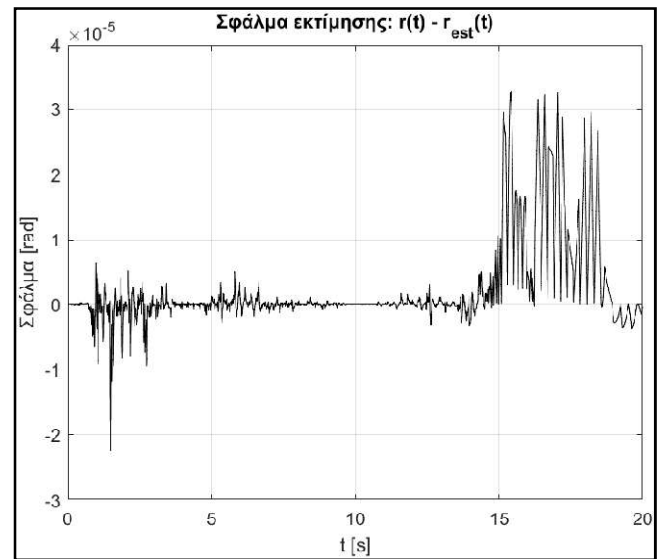
2)

φ_0	100
φ_∞	0.01
λ	8
ρ	100
k_1	10
k_2	20

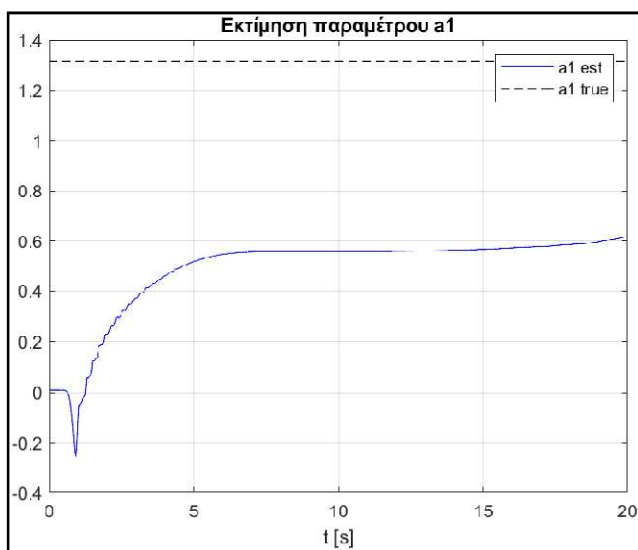
$\gamma=[1800,900,1400,600]$



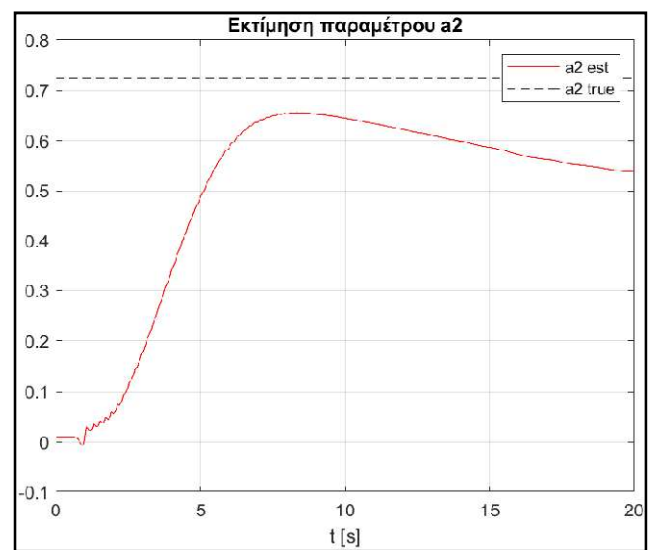
Plot 35: Διάγραμμα $r(t)$ και $\hat{r}(t)$



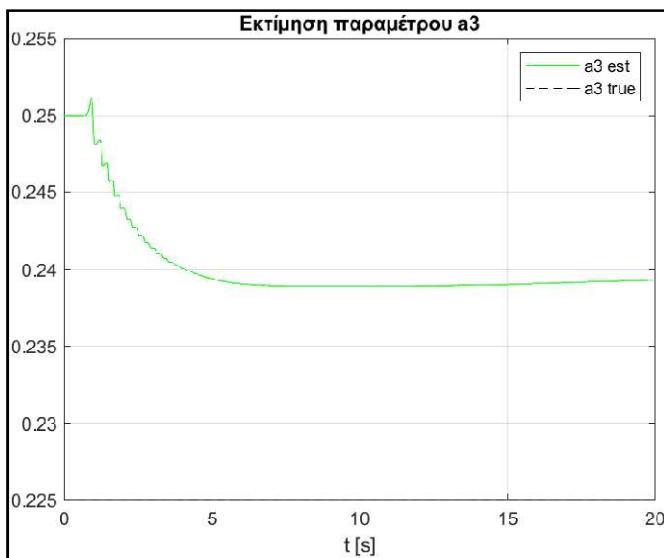
Plot 36: Σφάλμα εκτίμησης



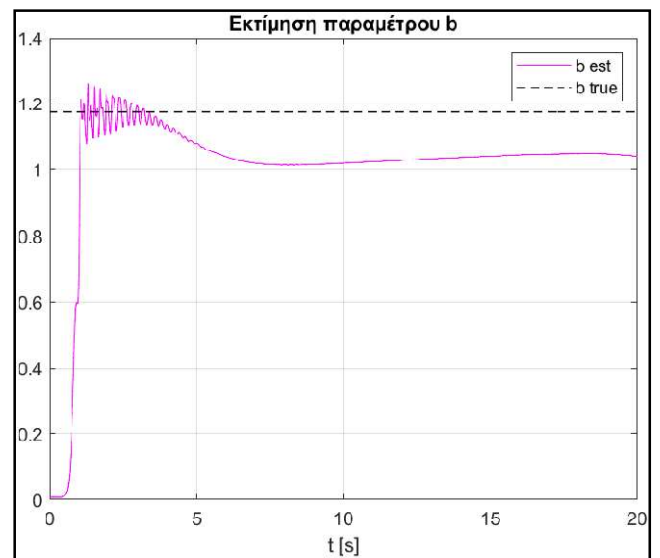
Plot 37: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_1



Plot 38: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_2



Plot 39: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_3



Plot 40: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_4

Παρατηρήσεις:

Η εκτιμώμενη έξοδος ακολουθεί την πραγματική έξοδο ωστόσο εμφανίζεται κάποια απόκλιση στην επιθυμητή τροχιά. Το σφάλμα μοντελοποίησης $e(t)$ που ταλαντώνεται γύρω από το 0 και συγκλίνει τελικά, επιβεβαιώνει την ευστάθεια του εκτιμητή με τη συνάρτηση Lyapunov. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Ωστόσο, για τις διαφοροποιήσεις στις παραμέτρους του ελεγκτή και για να επιτευχθεί ικανοποιητική εκτίμηση των παραμέτρων, απαιτείται επιλογή πολύ μεγάλων βημάτων γ .

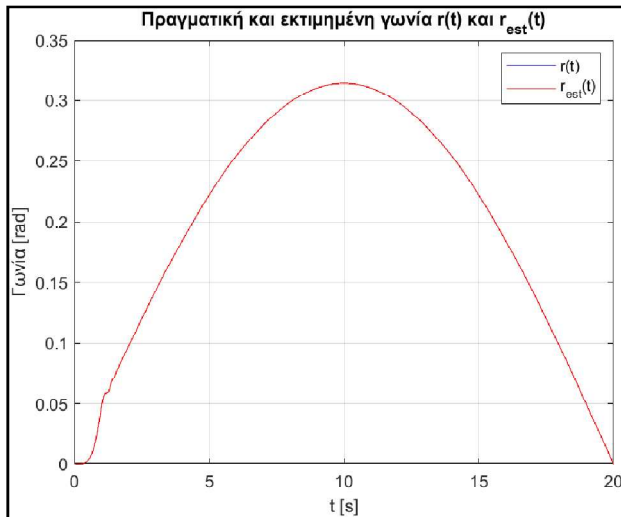
Ερώτημα γ)

Εισάγουμε στο σύστημα διαταραχές: $d(t) = 0.15\sin(0.5t)$ για $t \geq 0$

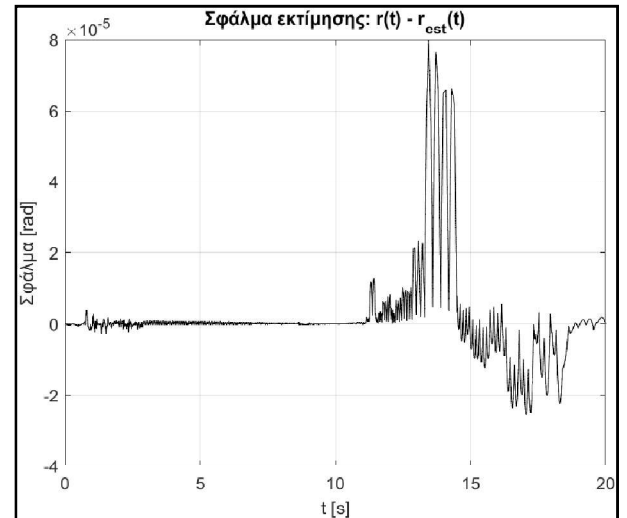
1)

φ_0	100
φ_∞	0.01
λ	5
ρ	10
k_1	10
k_2	20

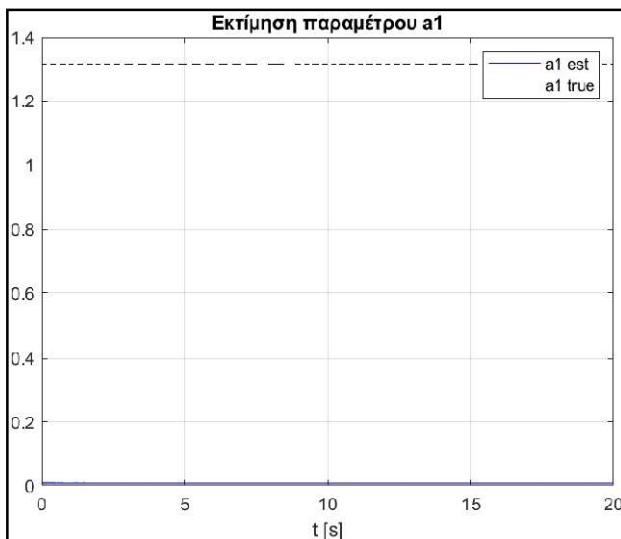
$$\gamma = [10, 10, 1, 5]$$



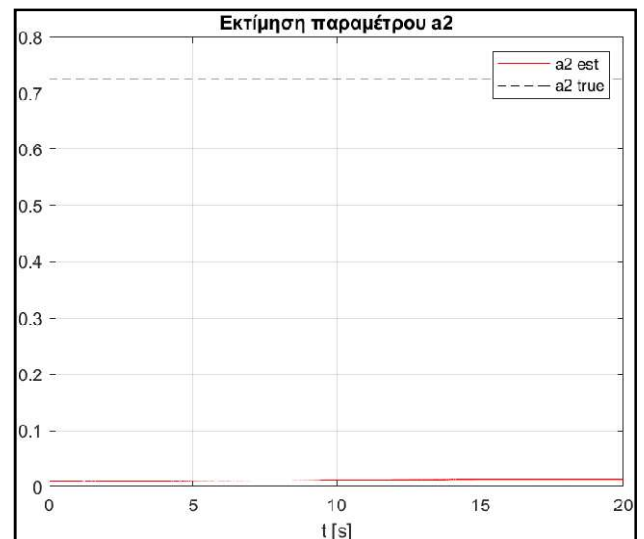
Plot 41: Διάγραμμα $r(t)$ και $\hat{r}(t)$



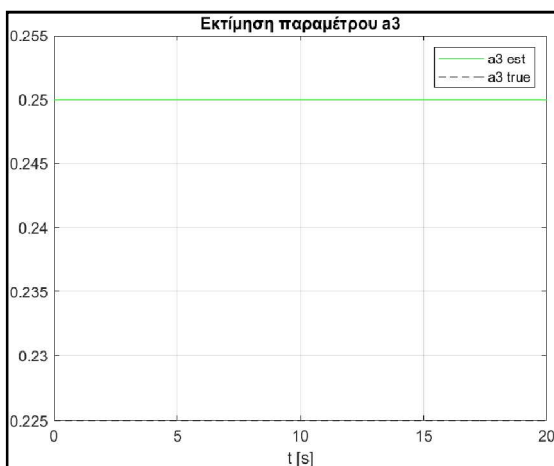
Plot 42: Σφάλμα εκτίμησης



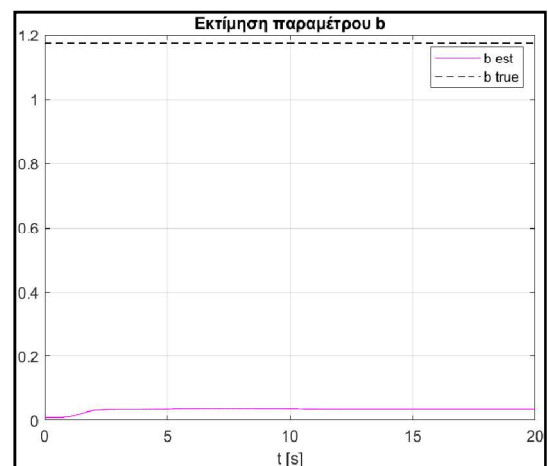
Plot 43: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_1



Plot 44: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_2



Plot 45: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_3



Plot 46: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_4

Παρατηρήσεις:

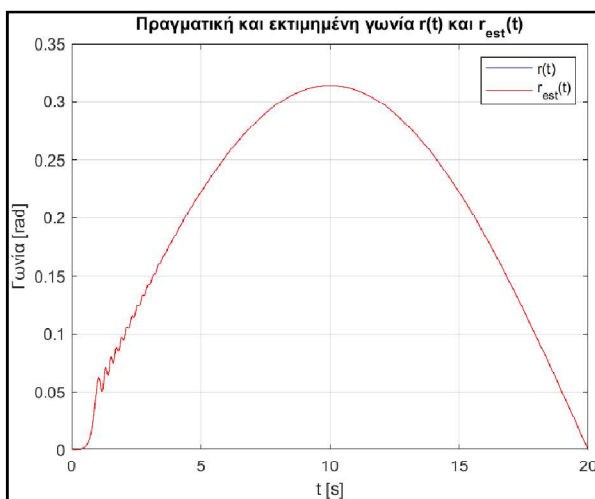
Συγκρίνοντας με την προσομοίωση χωρίς διαταραχές, παρατηρούμε ότι η εισαγωγή διαταραχών επηρεάζει αρνητικά την ακρίβεια της εκτίμησης των παραμέτρων. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις αποκλίνουν από τις πραγματικές τους τιμές.

Το σφάλμα εκτίμησης, σε αντίθεση με την περίπτωση χωρίς διαταραχές, δεν συγκλίνει σε τιμή κοντά στο μηδέν, αλλά αποκλίνει και παρουσιάζει ταλαντώσεις. Ωστόσο. Λόγω του ελεγκτή η τροχιά εξακολουθεί να ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά.

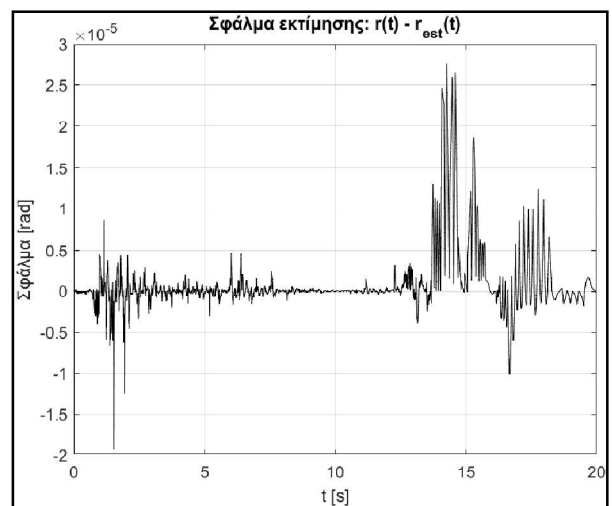
2)

φ_0	100
φ_∞	0.01
λ	8
ρ	100
k_1	10
k_2	20

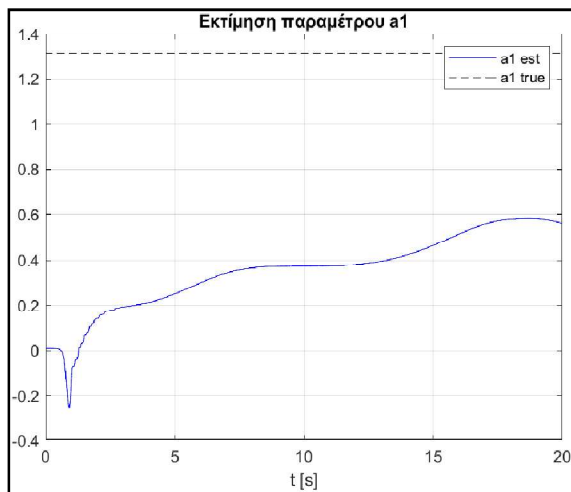
$$\gamma=[1800,900,1400,600]$$



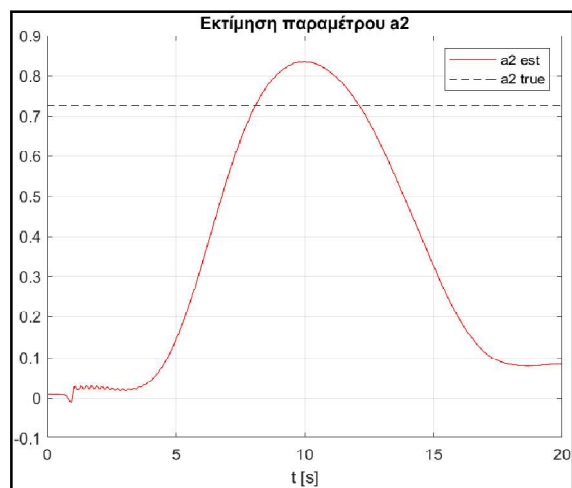
Plot 47: Διάγραμμα $r(t)$ και $\hat{r}(t)$



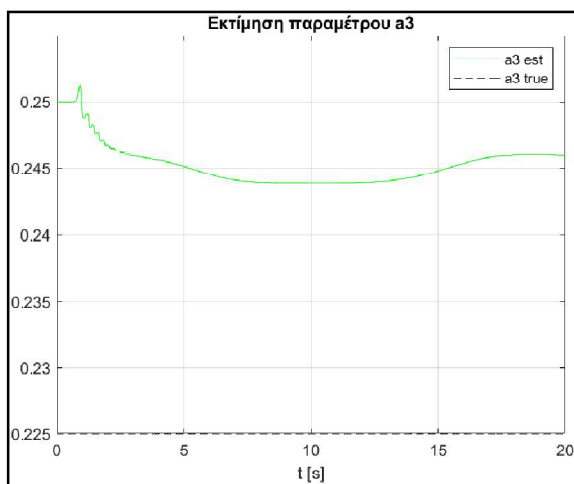
Plot 48: Σφάλμα εκτίμησης



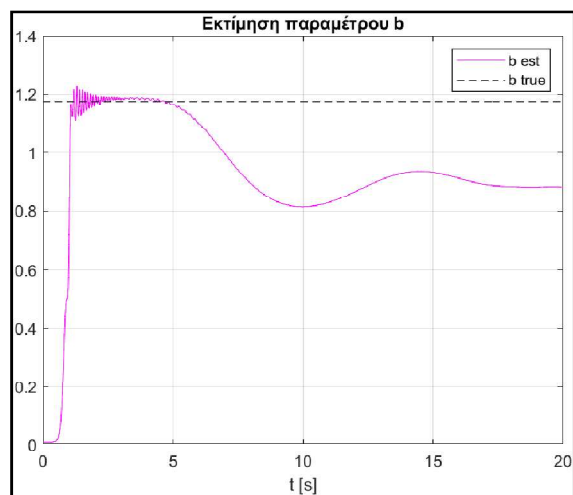
Plot 49: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_1



Plot 50: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_2



Plot 51: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_3



Plot 52: Εκτίμηση παραμέτρου \hat{a}_4

Παρατηρήσεις:

Σε αυτή τη περίπτωση φαίνεται πιο έντονα η επίδραση των εξωτερικών διαταραχών στο σύστημα. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές τους τιμές. Η ύπαρξη διαταραχών επηρεάζει τη σταθερότητα και την ακρίβεια του εκτιμητή. Ωστόσο, με τη κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων γ_i , $i=1,2,3,4$, των παραμέτρων του ελεγκτή και των θ_{m1} , θ_{m2} οι εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων μπορούν να συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Το σφάλμα εκτίμησης $e(t)$ εξακολουθεί να συγκλίνει στο 0, γεγονός που επιβεβαιώνει την ευστάθεια του εκτιμητή. Τέλος, όπως διακρίνεται και στα διαγράμματα η εκτίμηση της παραμέτρου \hat{a}_2 που σχετίζεται με τον όρο $\sin(x_1(t))$, εμφανίζει τη μεγαλύτερη απόκλιση από την πραγματική τιμή σε σχέση με τις υπόλοιπες παραμέτρους.