Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №1
Интерполяционные полиномы приближения табличных функций.

Работу выполнил:
Нилов И.Р.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Формализация задачи интерполяции табличных функций заключается в нахождении полинома, который наилучшим образом приближает значения функции, заданные на сетке, на всем диапазоне значений независимой переменной. Для этого используется набор точек сетки и соответствующих значений функции. Цель заключается в уменьшении ошибки интерполяции. Исследование включает анализ влияния выбора количества точек сетки и типа сетки на интерполяцию.

1.2 Поставленные задачи

- Вычислить вручную на бумаге значения полинома и фактической ошибки для 3 узлов в узлах и серединах между узлами. Получить полином в каноническом виде.
- Построить на одном графике функцию, полином для 3 вариантов небольшого числа узлов (4,7,10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же полиномов. Провести линию теоретической ошибки, построенной для одного из 3х полиномов.
- Зависимость ошибки интерполяции от степени интерполяционного полинома (количества узлов). Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 3...50.
- Выбрать две точки из проверочной сетки и вычислить в них модуль разности значений функции и полинома для полиномов, построенных по разному количеству узлов.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Критерии существования и единственности интерполяционного полинома:

1. Задано конечное число узлов (n + 1)
2. Все узлы интерполяции x_i различны.

2.2 Алгоритм

Определяются базисные полиномы Лагранжа. Для заданных узлов $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ они имеют вид:

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\dots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x_i-x_{n-1})}$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$.

На основе них строится интерполяционный полином Лагранжа. Для точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-}$ он имеет вид:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \ell_i(x)$$

Подставляя выражение для $\ell_i(x)$, получаем:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \left(\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\dots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x_i-x_{n-1})} \right)$$

3 Предварительный анализ задачи

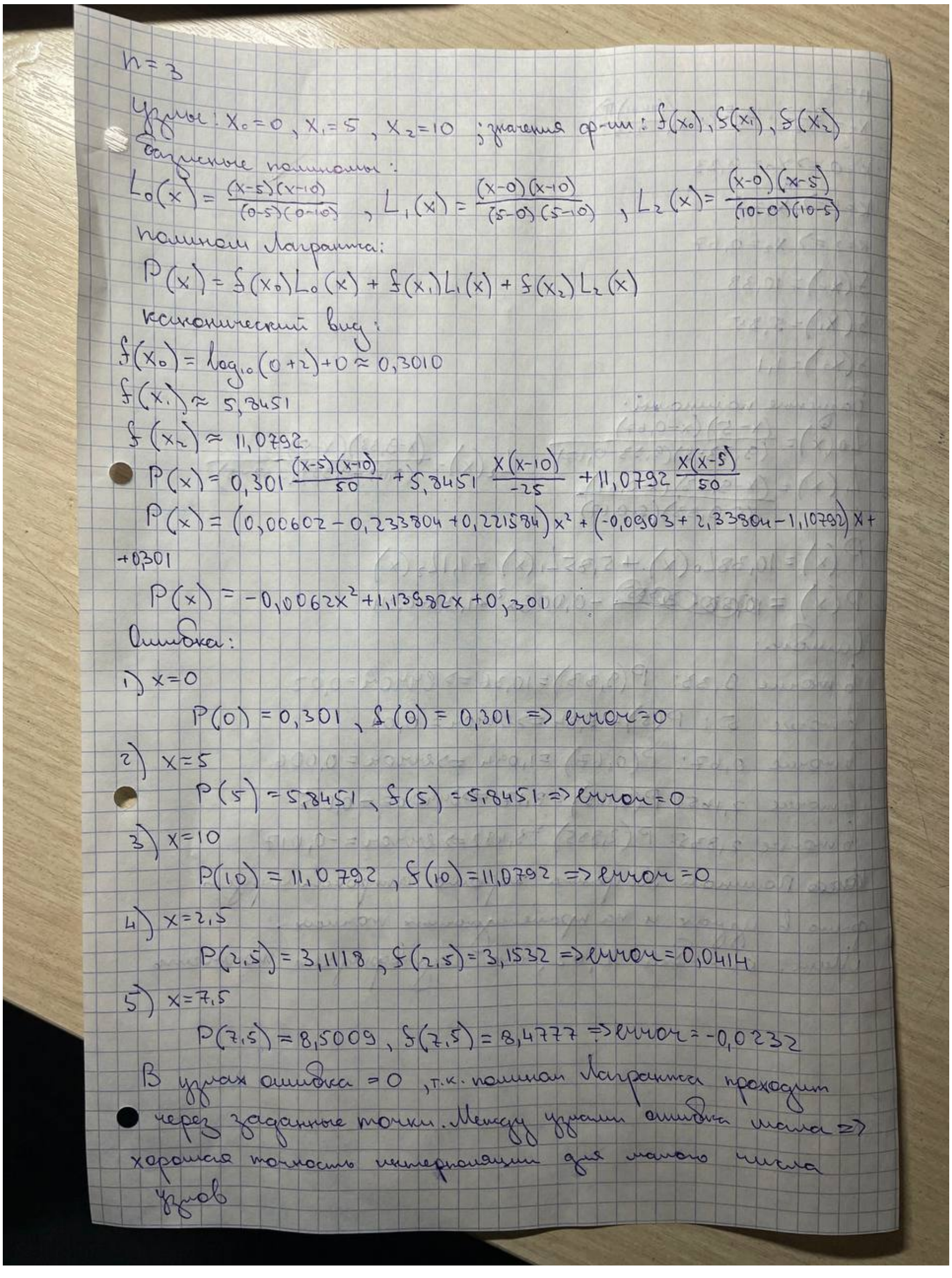
25 вариант включает в себя интерполяцию полиномом Лагранжа двух следующих функций:

$$f_1(x) = \log_{10}(x+2) + x \tag{1}$$

$$f_2(x) = x^3 - 0.1x^2 + 0.4|x| + 2 \tag{2}$$

Для интерполирования функций выбран отрезок [0, 10]. Для каждой функции строится 2 вида сетки - равномерная и Чебышевская.

4 Тестовый пример



$n=3$

Узлы: $x_0=0$, $x_1=5$, $x_2=10$; значения ф-ии: $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$

базисные полиномы:

$L_0(x) = \frac{(x-5)(x-10)}{(0-5)(0-10)}$, $L_1(x) = \frac{(x-0)(x-10)}{(5-0)(5-10)}$, $L_2(x) = \frac{(x-0)(x-5)}{(10-0)(10-5)}$

полином Лагранжа:

$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

канонический вид:

$f(x_0) = \log_{10}(0+2)+0 \approx 0{,}3010$

$f(x_1) \approx 5{,}8451$

$f(x_2) \approx 11{,}0792$

$P(x) = 0{,}301\frac{(x-5)(x-10)}{50} + 5{,}8451\frac{x(x-10)}{-25} + 11{,}0792\frac{x(x-5)}{50}$

$P(x) = (0{,}00602 - 0{,}233804 + 0{,}221584)x^2 + (-0{,}0903 + 2{,}33804 - 1{,}10792)x +$
$+0{,}301$

$P(x) = -0{,}0062x^2 + 1{,}13982x + 0{,}301$

Ошибка:

1) $x=0$
$P(0)=0{,}301$, $f(0)=0{,}301 \Rightarrow error=0$

2) $x=5$
$P(5)=5{,}8451$, $f(5)=5{,}8451 \Rightarrow error=0$

3) $x=10$
$P(10)=11{,}0792$, $f(10)=11{,}0792 \Rightarrow error=0$

4) $x=2{,}5$
$P(2{,}5)=3{,}1118$, $f(2{,}5)=3{,}1532 \Rightarrow error=0{,}0414$

5) $x=7{,}5$
$P(7{,}5)=8{,}5009$, $f(7{,}5)=8{,}4777 \Rightarrow error=-0{,}0232$

В узлах ошибка = 0, т.к. полином Лагранжа проходит через заданные точки. Между узлами ошибка мала => хорошая точность интерполяции для малого числа узлов

Рис. 1: Тестовый пример (Равномерная сетка) для $f_1(x)$

$n = 3$

$$x_k = \frac{0+10}{2} + \frac{10-0}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 3}\right)$$

$k = 0 \Rightarrow x_0 = 9,33$

$k = 1 \Rightarrow x_1 = 5$

$k = 2 \Rightarrow x_2 = 0,67$

$f(x_0) = 10,38$

$f(x_1) = 5,85$

$f(x_2) = 1,1$

Базисные полиномы:

$$L_0(x) = \frac{(x-5)(x-0,67)}{(9,33-5)(9,33-0,67)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-9,33)(x-0,67)}{(5-9,33)(5-0,67)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-9,33)(x-5)}{(0,67-9,33)(0,67-5)}$$

$$P(x) = 10,38L_0(x) + 5,85L_1(x) + 1,1L_2(x)$$

$$P(x) = -0,006x^2 + 1,13x + 0,34$$

Ошибка:

в точке 9,33: $P(9,33) = 10,36 \Rightarrow$ error $= 0,02$

в точке 5: $P(5) = 5,84 \Rightarrow$ error $= 0,01$

в точке 0,67: $P(0,67) = 1,094 \Rightarrow$ error $= 0,006$

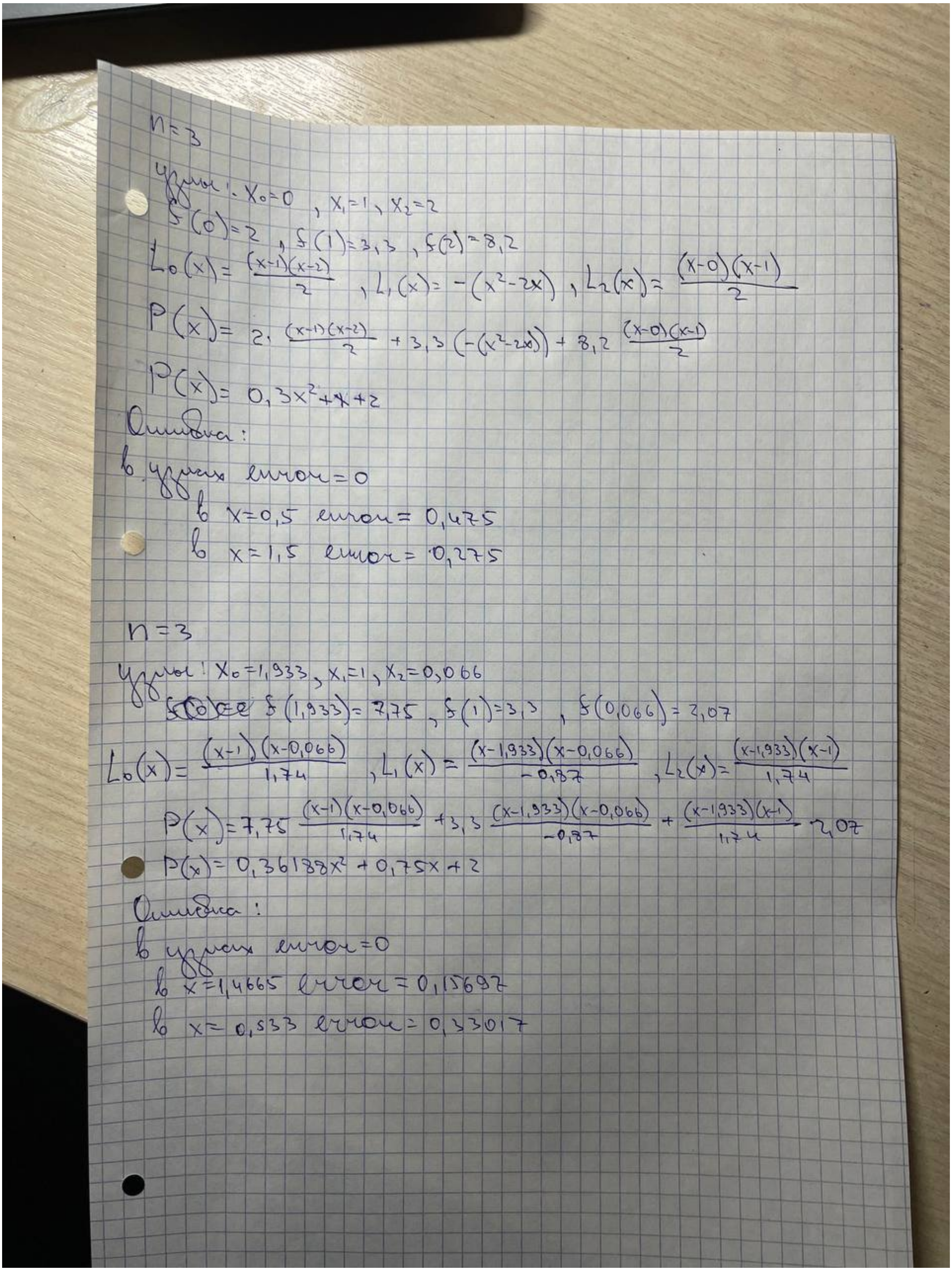
в точке 7,165: $P(7,165) = 8,17 \Rightarrow$ error $= -0,015$

в точке 2,835: $P(2,835) = 3,492 \Rightarrow$ error $= -0,017$

Полином Лагранжа хорошо аппроксимирует ф-ию в узлах и на промежуточных точках.

Макс. ошибка 0,02, что подтверждает точность

Рис. 2: Тестовый пример (сетка Чебышева) для $f_1(x)$



$n=3$

узлы: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$

$f(0)=2$, $f(1)=3{,}3$, $f(2)=8{,}2$

$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$, $L_1(x)=-(x^2-2x)$, $L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{2}$

$P(x)=2\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}+3{,}3\left(-(x^2-2x)\right)+8{,}2\,\frac{(x-0)(x-1)}{2}$

$P(x)=0{,}3x^2+x+2$

Ошибка:

в узлах error $=0$

в $x=0{,}5$ error $=0{,}475$

в $x=1{,}5$ error $=0{,}275$

$n=3$

узлы: $x_0=1{,}933$, $x_1=1$, $x_2=0{,}066$

~~f(0)=2~~ $f(1{,}933)=7{,}75$, $f(1)=3{,}3$, $f(0{,}066)=2{,}07$

$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-0{,}066)}{1{,}74}$, $L_1(x)=\frac{(x-1{,}933)(x-0{,}066)}{-0{,}87}$, $L_2(x)=\frac{(x-1{,}933)(x-1)}{1{,}74}$

$P(x)=7{,}75\,\frac{(x-1)(x-0{,}066)}{1{,}74}+3{,}3\,\frac{(x-1{,}933)(x-0{,}066)}{-0{,}87}+\frac{(x-1{,}933)(x-1)}{1{,}74}\cdot 2{,}07$

$P(x)=0{,}36188x^2+0{,}75x+2$

Ошибка:

в узлах error $=0$

в $x=1{,}4665$ error $=0{,}15697$

в $x=0{,}533$ error $=0{,}33017$

Рис. 3: Тестовый пример для $\mathrm{f}_2(x)$

5 Модульная структура программы

```
def lagrange_basis(x, xt, k):
```

- функция принимает x - точку, xt - узлы интерполяции, k - индекс базисного полинома. Возвращает значение k-го базисного полинома Лагранжа в точке x.

```
def lagrange_polinom(x, xt, yt)
```

- функция принимает x - точку, xt - узлы интерполяции, yt - значение функции в узлах интерполяции.
Возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа в точке x.

6 Численный анализ

Строятся 2 вида сетки: равномерная и Чебышевская. Далее, для определенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 1000 точках (построение проверочной сетки).

Приведу графики функций и соответствующих им полиномов для 4, 7 и 10 узлов на равномерной и Чебышевской сетках, графики поточечных ошибок для каждого из случаев и графики теоретических ошибок для полиномов, построенных для 4 узлов. Теоретическая ошибка интерполяции $E(x)$ в точке x вычисляется по формуле:

$$E(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i),$$

Для второй функции не строил график теоретической ошибки, так как последняя ненулевая производная там третья.

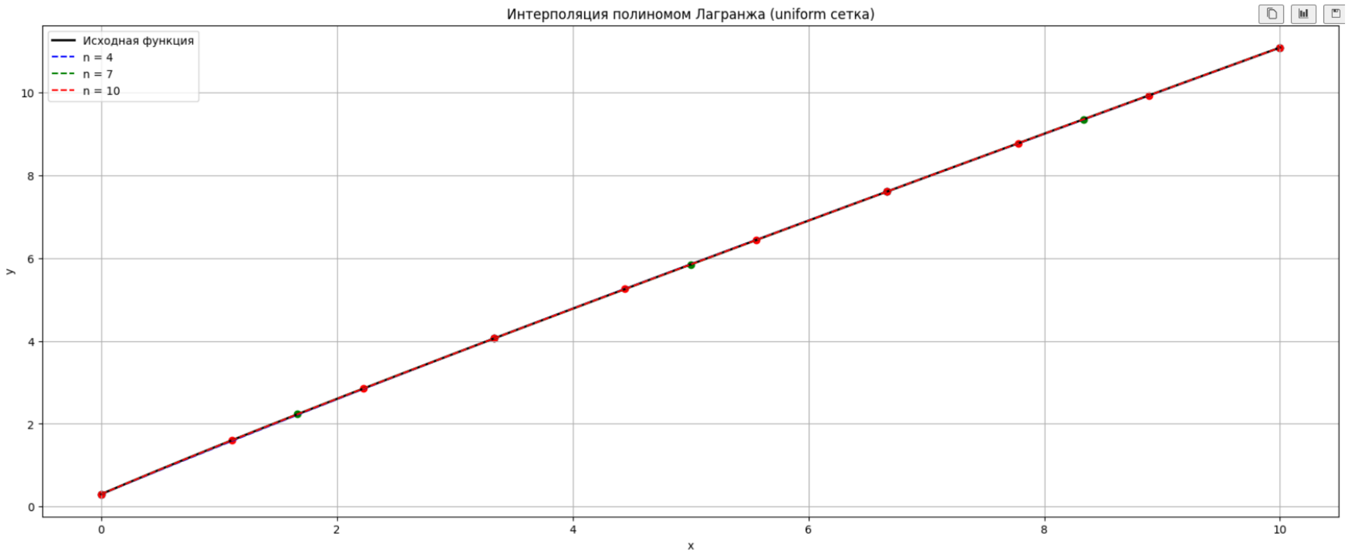


Рис. 4: Исследование (Равномерная сетка) для функции $f_1(x)$

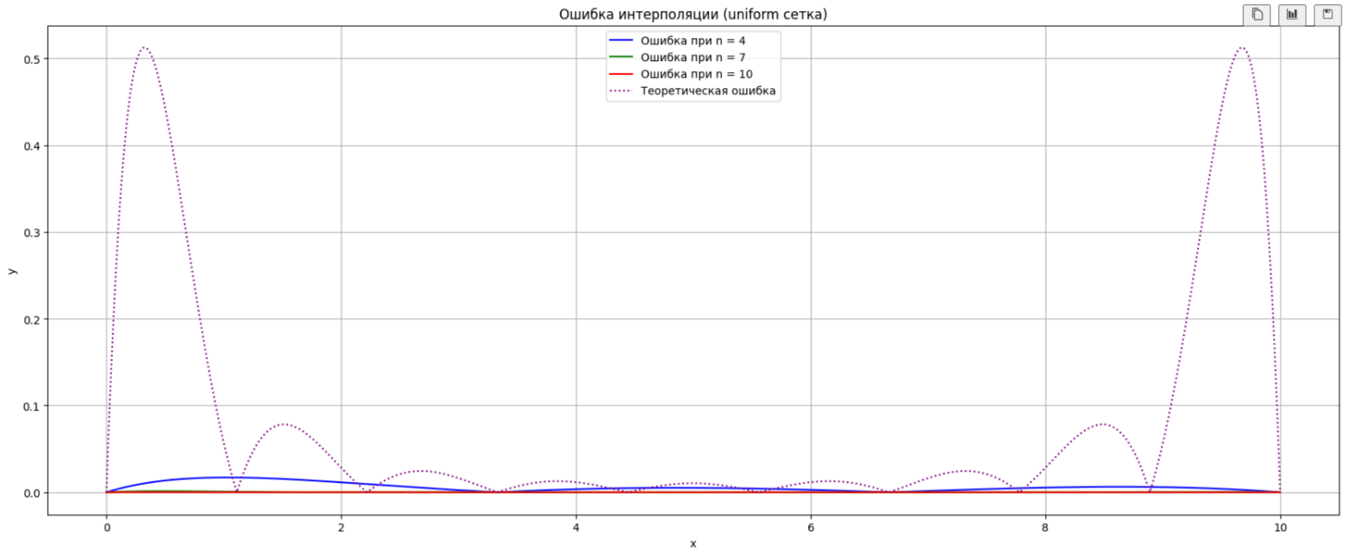


Рис. 5: Ошибка интерполяции (Равномерная сетка) для функции $f_1(x)$

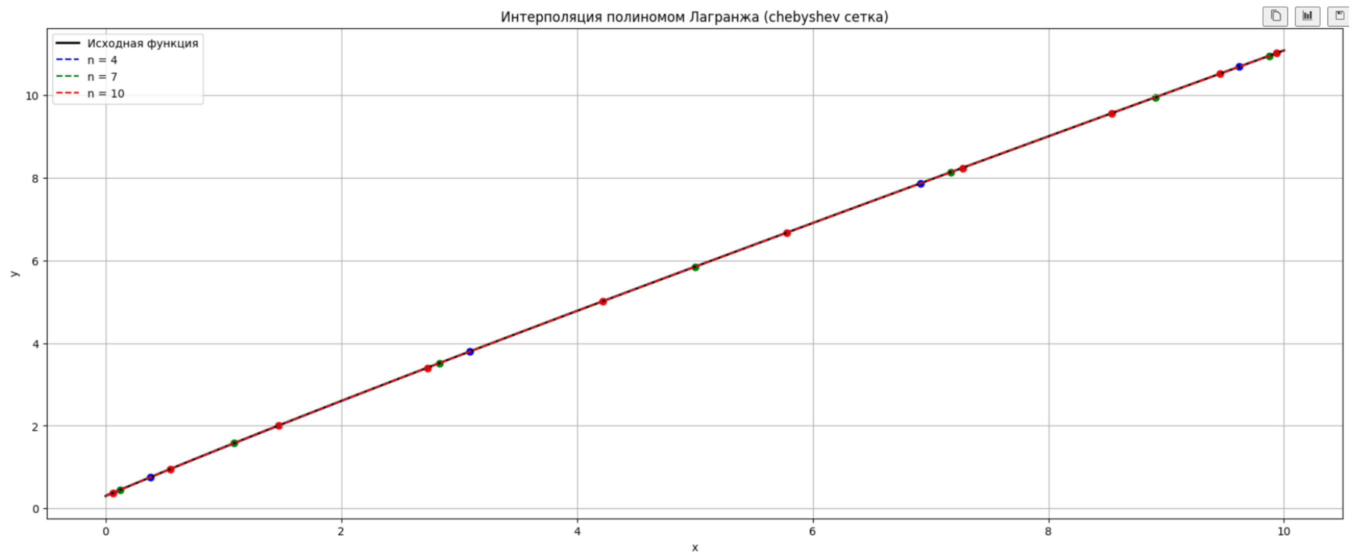


Рис. 6: Исследование (сетка Чебышева) для функции $f_1(x)$

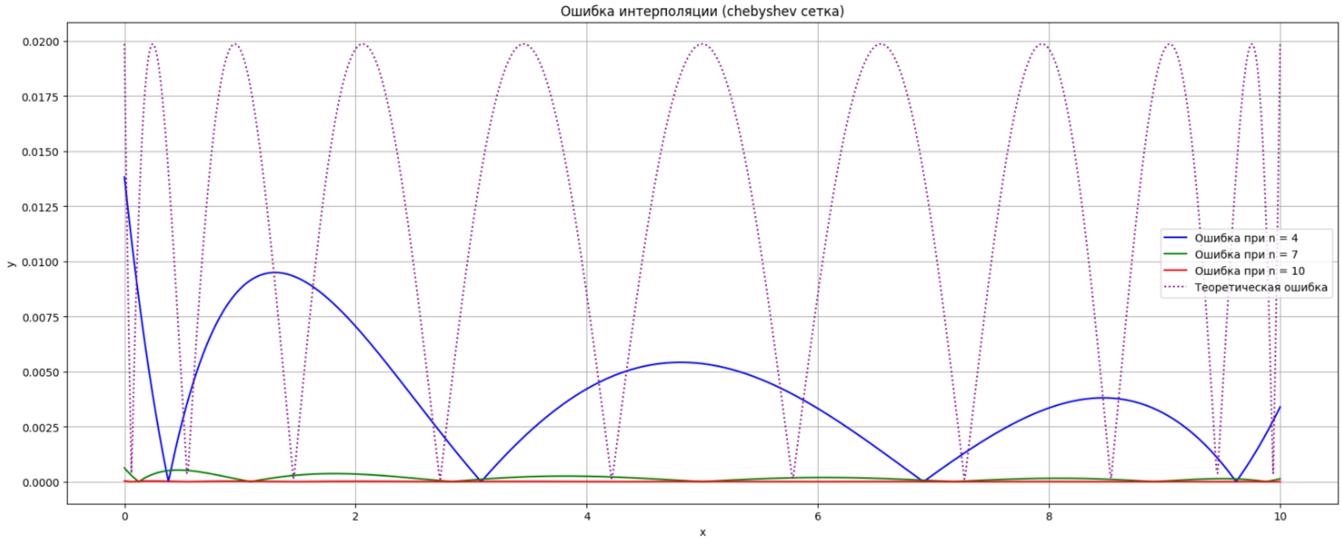


Рис. 7: Ошибка интерполяции (сетка Чебышева) для функции $f_1(x)$

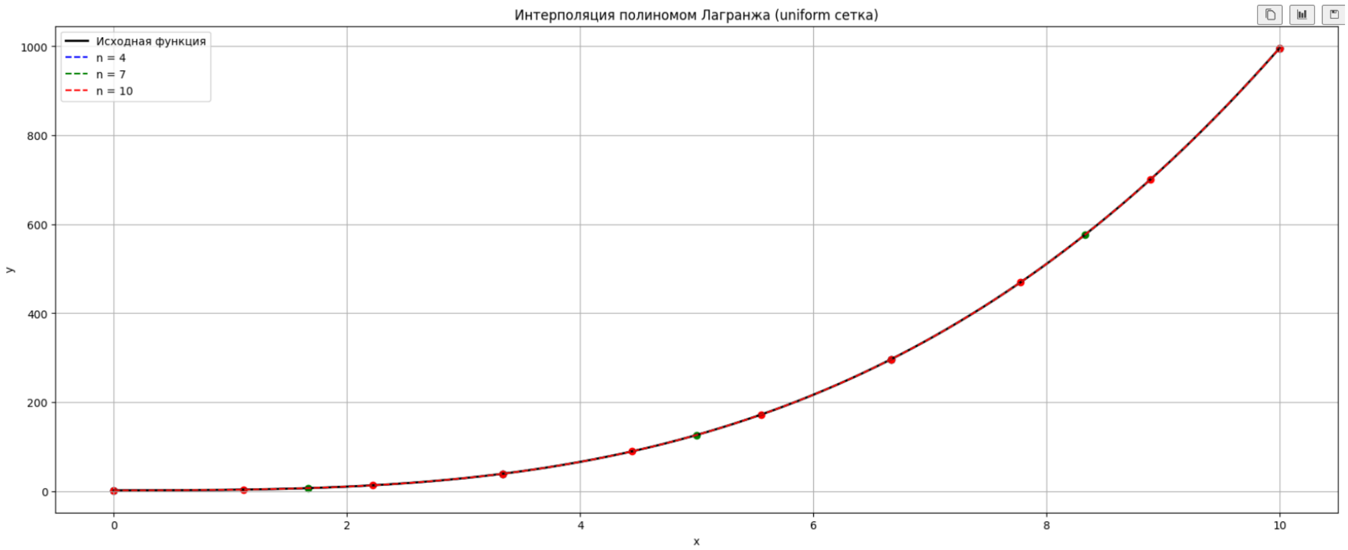


Рис. 8: Исследование (Равномерная сетка) для функции $f_2(x)$

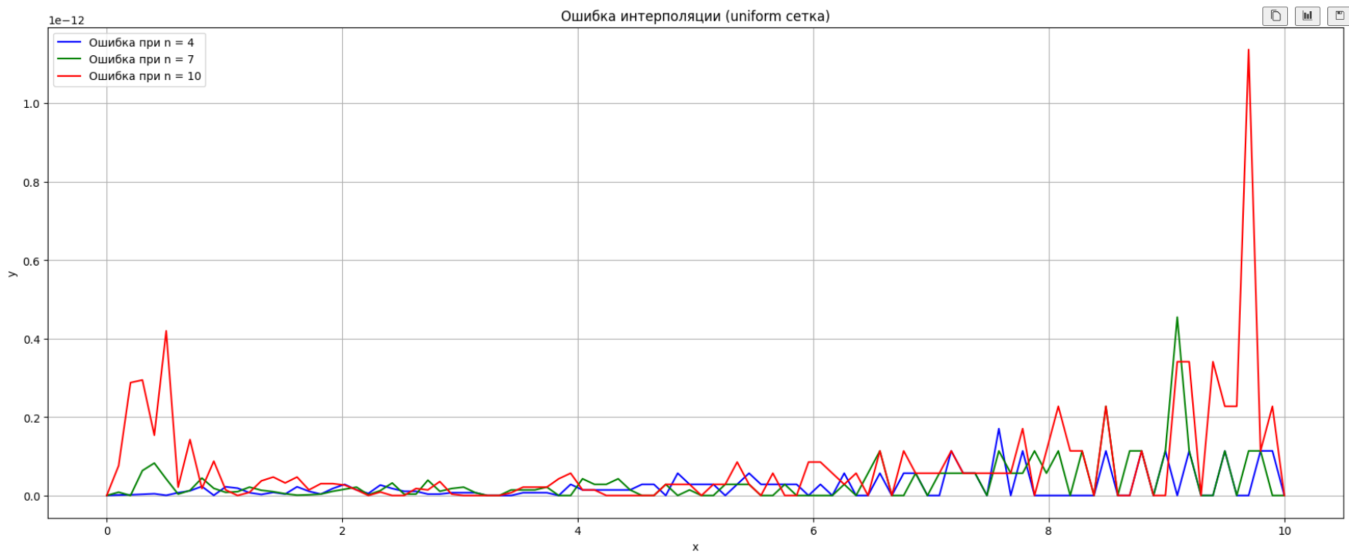


Рис. 9: Ошибка интерполяции (Равномерная сетка) для функции $f_1(x)$

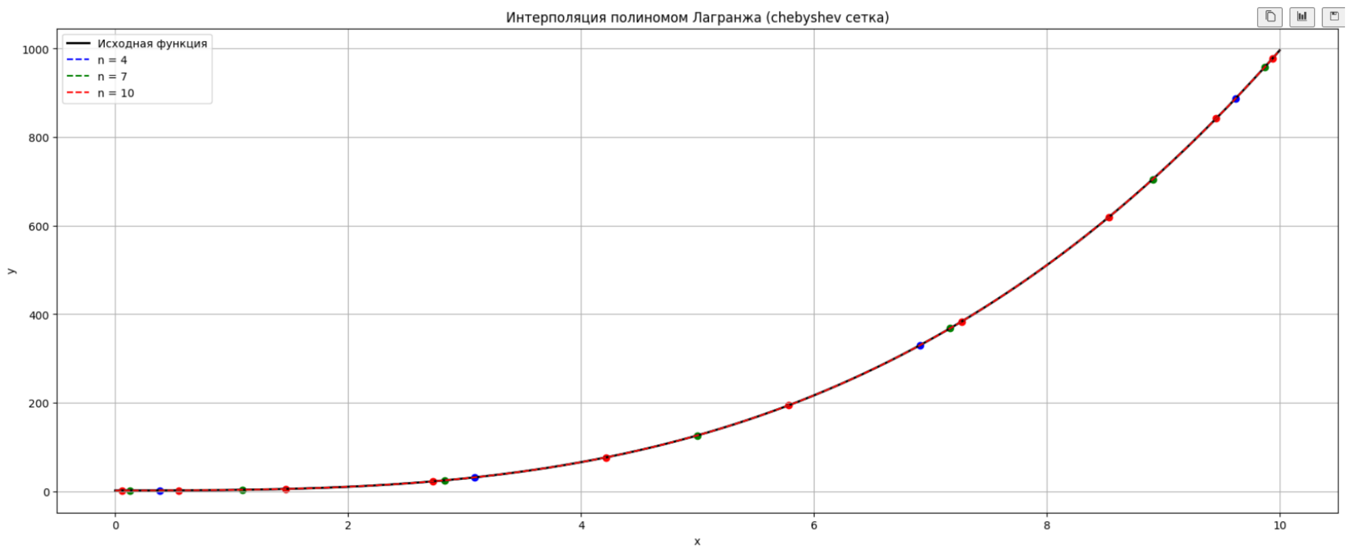


Рис. 10: Исследование (сетка Чебышева) для функции $f_2(x)$

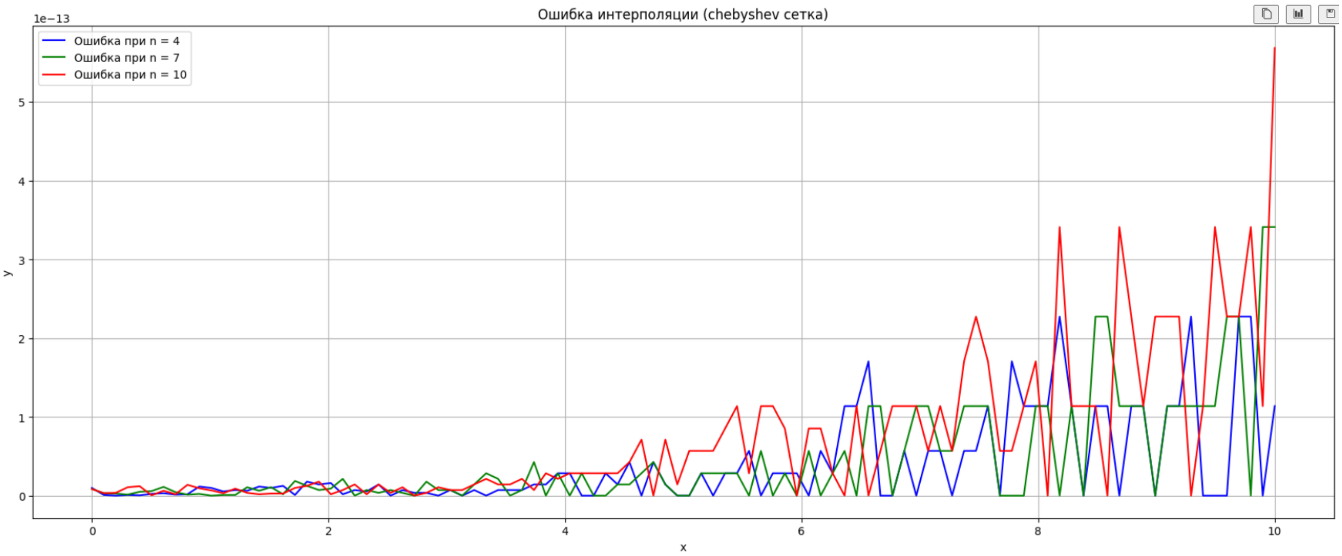


Рис. 11: Ошибка интерполяции (сетка Чебышева) для функции $f_1(x)$

Далее приведу графики зависимости максимальной ошибки от числа узлов для разных полиномов, построенных на разных сетках и соответствующих разным функциям, также приведу графики зависимости ошибки в двух выбранных точках от количества узлов.

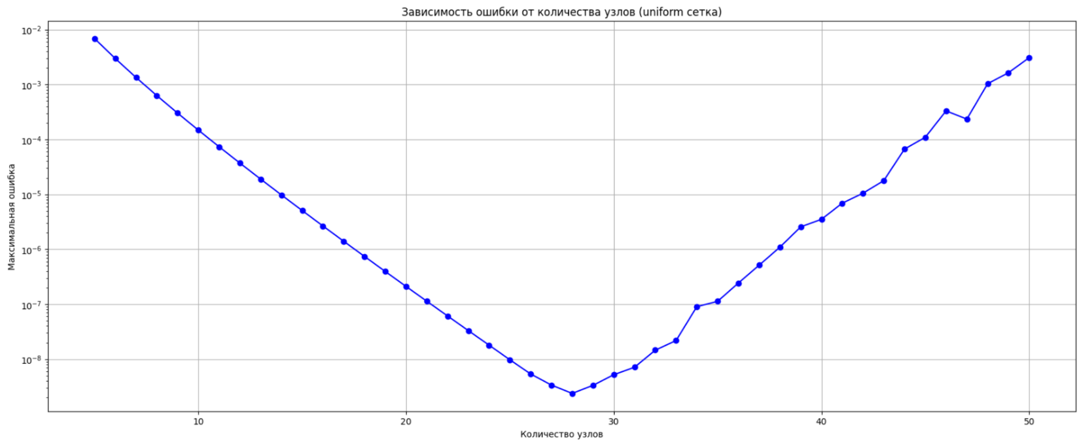


Рис. 12: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов (Равномерная сетка) для $f_1(x)$

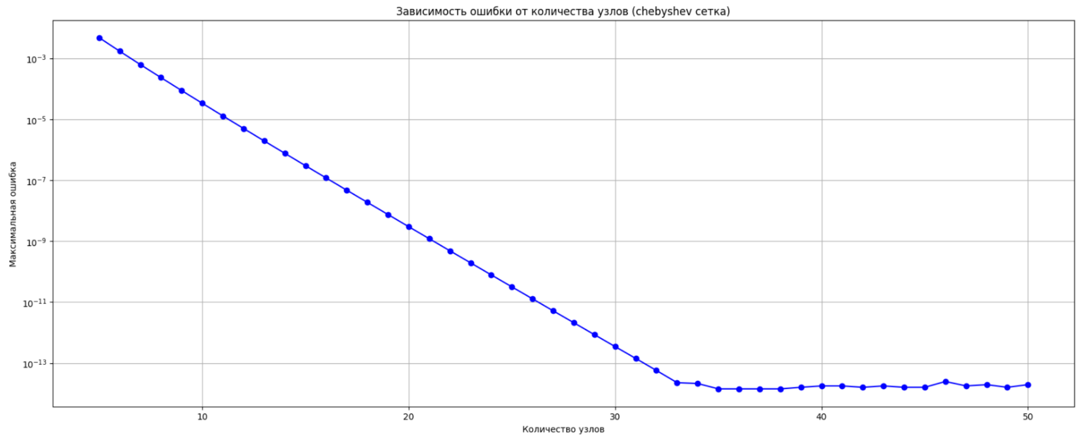


Рис. 13: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов (сетка Чебышева) для $\mathrm{f}_1(x)$

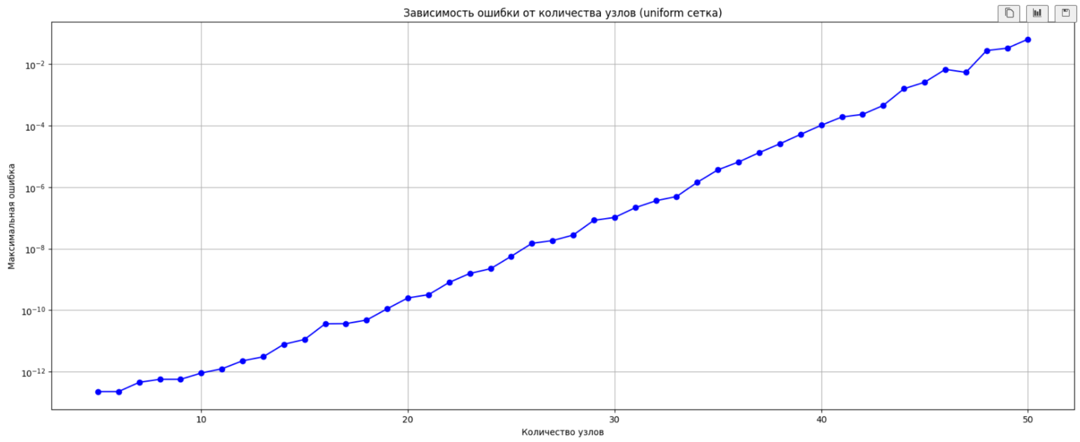


Рис. 14: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов (Равномерная сетка) для $\mathrm{f}_2(x)$

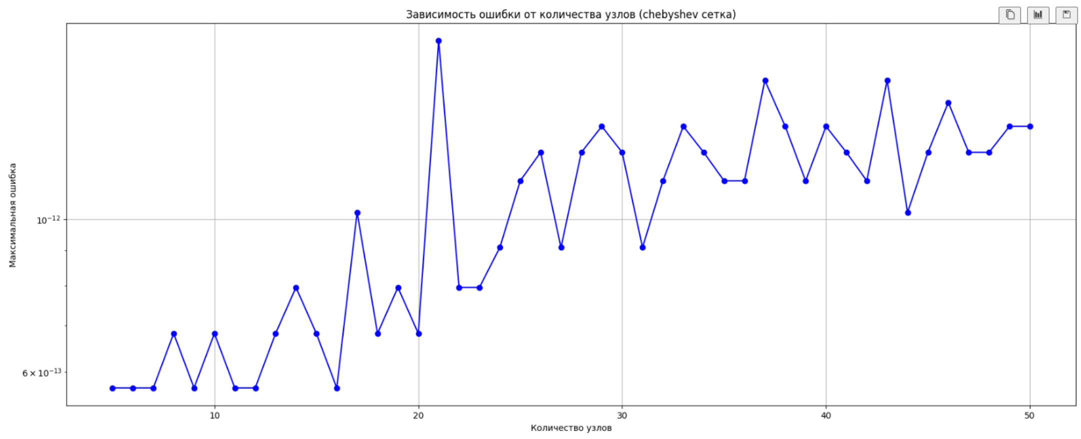


Рис. 15: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов (сетка Чебышева) для $\mathrm{f}_2(x)$

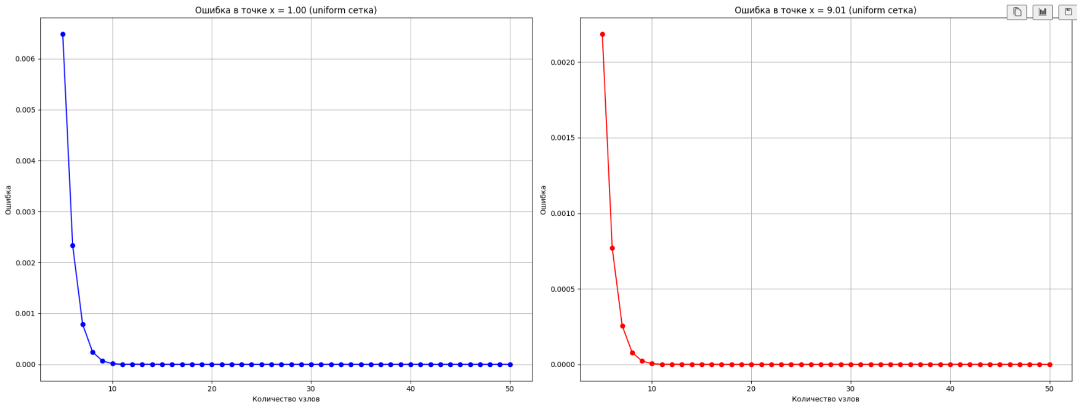


Рис. 16: Зависимость ошибки в выбранных точках от количества узлов для $f_1(x)$

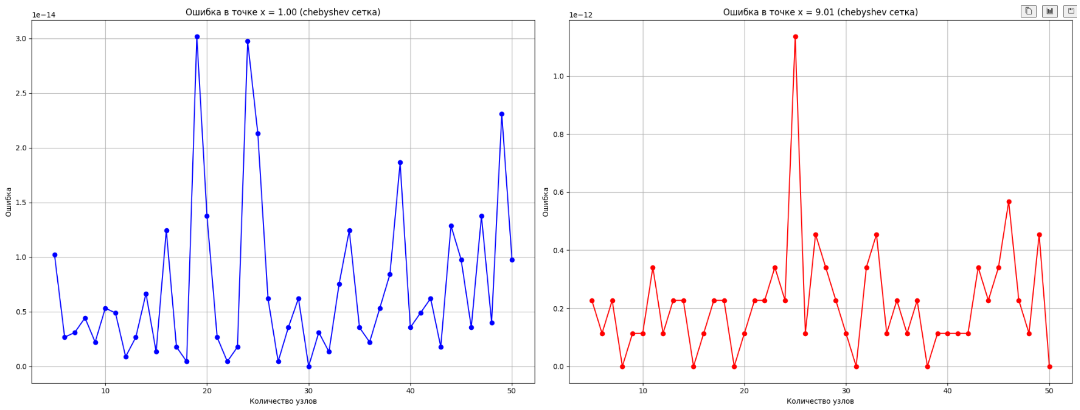


Рис. 17: Зависимость ошибки в выбранных точках от количества узлов для $f_2(x)$

Дополнительное исследование: исследование зависимости ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных. В значение функции в точках сетки для построения полинома вносятся возмущения. Возмущения вносятся в каждую точку случайно. Требуется вычислить относительную ошибку по всему отрезку для каждого значения максимального возмущения. Эксперимент выполнялся 20 раз, строился график типа боксплот.

Далее приведу графики зависимости ошибки интерполяционного полина при возмущении данных для двух функций на равномерной сетке и сетке Чебышева.

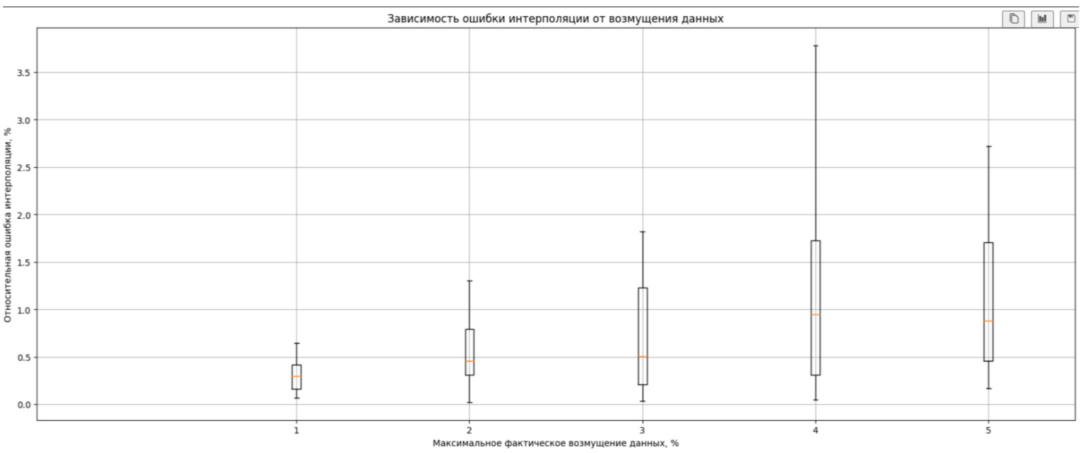


Рис. 18: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для $f_1(x)$

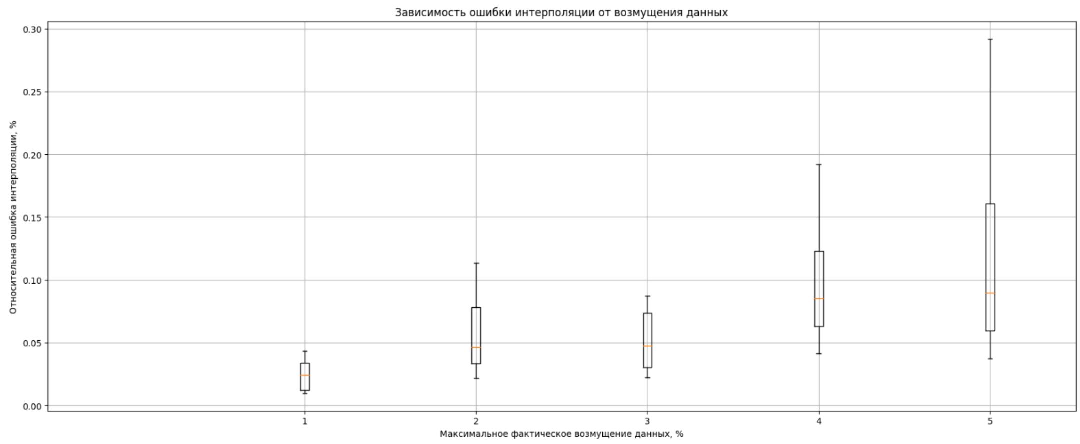


Рис. 19: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для $\mathrm{f}_1(x)$

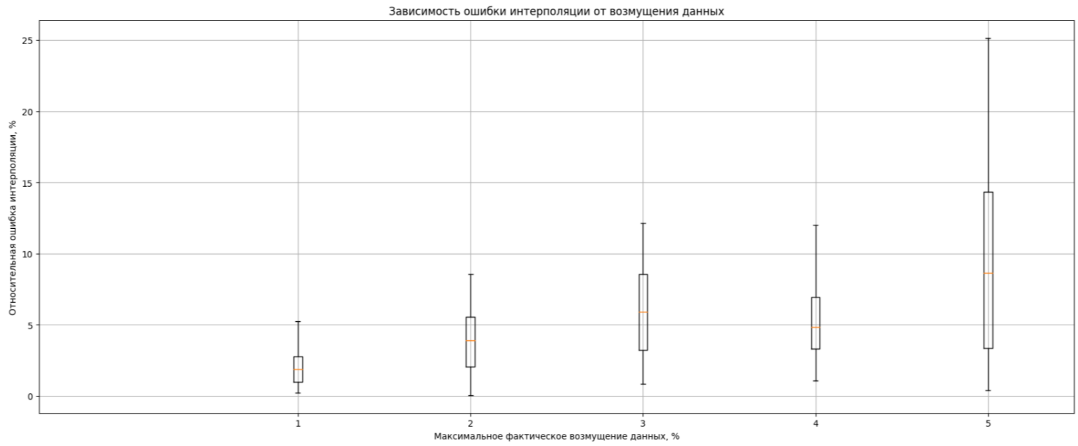


Рис. 20: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для $\mathrm{f}_2(x)$

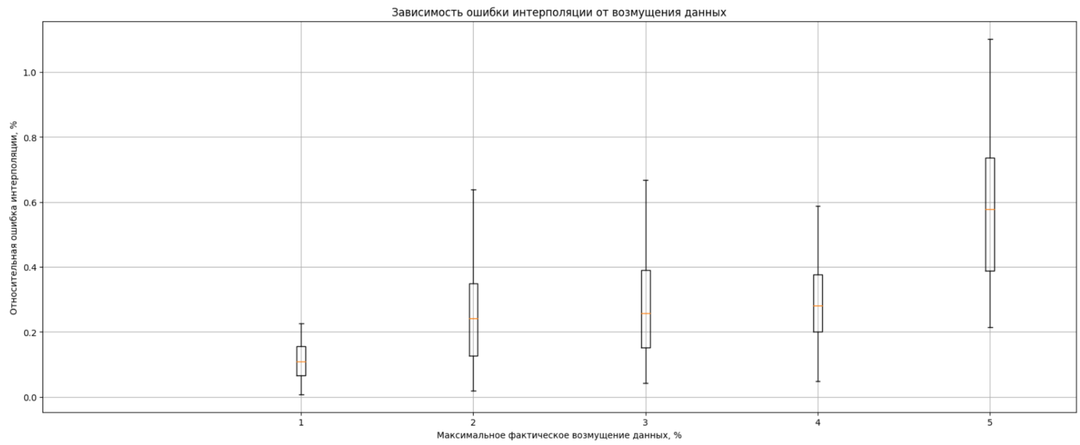


Рис. 21: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для $\mathrm{f}_2(x)$

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы особенности интерполяции полиномом Лагранжа на равномерной и Чебышевской сетках . На основе проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. **Точность интерполяции:**
    - На равномерной сетке с увеличением числа узлов точность интерполяции возрастает, однако вблизи краёв отрезка наблюдается рост ошибки даже с увеличением количества узлов.
    - На сетке Чебышева ошибка интерполяции распределяется более равномерно по всему отрезку, что подтверждает её преимущество для уменьшения максимальной ошибки.
2. **Зависимость ошибки от числа узлов:**
    - Для обеих сеток с увеличением числа узлов максимальная ошибка интерполяции уменьшается, однако на равномерной сетке этот процесс менее устойчив.
    - На сетке Чебышева сходимость интерполяционного полинома к исходной функции происходит быстрее, что подтверждается графиками зависимости максимальной ошибки от числа узлов.
3. **Влияние возмущения данных:** на равномерной сетке возмущения данных приводят к более значительным ошибкам по сравнению с сеткой Чебышева, однако для сетки Чебышева можно наблюдать существенные выбросы для максимального возмущения 5%.