

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №1
Приближение табличных функций сплайнами и МНК.

Работу
выполнил:
Нилов И.Р.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Формулировка задачи и ее формализация	3
1.1	Формализация задачи	3
1.2	Поставленные задачи	3
2	Алгоритм и условия применимости	3
2.1	Условия применимости	3
2.2	Алгоритм	3
3	Предварительный анализ задачи	4
4	Тестовый пример	4
5	Модульная структура программы	6
6	Численный анализ	7
7	Выводы	9

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Формализация задачи интерполяции табличных функций сплайнами заключается в построении кусочно-заданной функции, которая наилучшим образом приближает значения заданной функции. Для этого используется набор точек сетки и соответствующих значений функции. На каждом промежутке между узловыми точками находим полином определенной степени, коэффициенты которого определяются с помощью точек сетки и значений функции в этих точках.

1.2 Поставленные задачи

- Вычислить вручную на бумаге значения сплайна и фактической ошибки для 3 узлов в узлах и серединах между узлами. Получить сплайн в каноническом виде.
- Построить на одном графике функцию, сплайн для 3 вариантов небольшого числа узлов (5,7,10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же сплайнов.
- Зависимость ошибки интерполяции от количества узлов. Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 3...100.
- Построить график зависимости максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка, в интервал изменения производной включить точное значение производной и точку 0.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Критерии существования и единственности интерполяционного сплайна:

1. Для построения сплайна степени k необходима минимум $k + 1$ точка.
2. x_i должны быть попарно различны.

2.2 Алгоритм

Делаем интерполяцию квадратичным сплайном, узлы интерполяции которого совпадают с узлами сплайна (одна сетка).

На каждом промежутке сплайн представляет из себя полином второй степени

$$S_{[x_{i-1}, x_i]} = g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (1)$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i , таких, чтобы сплайн был интерполяционным нужно потребовать для g_i ряд условий:

$$\begin{cases} g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ g_i(x_i) = y_i \\ g'_i(x_{i-1}) = d_0 \end{cases} \quad (2)$$

где d_0 - значение производной на левом крае отрезка интерполяции.

Из этих условий можно получить рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов a, b, c на каждом интервале:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2} \quad (3)$$

$$b_{i+1} = b_i + 2a_i h_i, b_0 = d_0 \quad (4)$$

$$c_i = y_i \quad (5)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$.

3 Предварительный анализ задачи

25 вариант включает в себя интерполяцию квадратичным сплайном двух следующих функций:

$$f(x) = \lg(x + 2) + x \quad (6)$$

$$g(x) = x^3 - 0.1x^2 + 0.4|x| + 2 \quad (7)$$

Для интерполирования функций выбран отрезок $[-1.5, 1.5]$.

4 Тестовый пример

$$f(x) = \lg(x+2) + x, \quad [-1,5; 1,5], \quad n=5$$

$$x_i = \{-1,5; -0,75; 0; 0,75; 1,5\}$$

$$f(x_1) = -1,801$$

$$f(x_2) = -0,6531$$

$$f(x_3) = 0,301$$

$$f(x_4) = 1,1893$$

$$f(x_5) = 2,0461$$

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i, \quad c_i = f(x_i)$$

$$S_i(x_i) = f(x_i), \quad S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad S'_0(x_0) = 0$$

1) узн. 1: $[-1,5; -0,75]$: $c_0 = -1,801$

$$S'_0(-1,5) = 0 \Rightarrow b_0 = 0, \quad S_0(-0,75) = f(-0,75) \Rightarrow$$

$$a_0(-0,75+1,5)^2 + 0 + (-1,801) = -0,6531 \Rightarrow a_0 = 2,0407$$

$$S_0(x) = 2,0407(x+1,5)^2 - 1,8010$$

$$S_0(x) = 2,0407x^2 + 6,1221x + 2,7906$$

2) узн. 2: $[-0,75; 0]$: $c_1 = -0,6531$

$$S'_0(-0,75) = 3,0611, \quad S'_1(-0,75) = b_1 = 3,0611$$

$$S_1(0) = f(0) \Rightarrow a_1 = -2,3835$$

Рис. 1: Тестовый пример для функции $f(x)$

$$S_1(x) = -2,3835(x+0,75)^2 + 3,0611(x+0,75) - 0,6531$$

$$S_1(x) = -2,3835x^2 - 0,5142x + 0,3012$$

3) интервал: $[0; 0,75]$: $C_2 = 0,301$

$$S_1'(0) = -0,5141, \quad S_2'(0) = b_2 = -0,5141$$

$$S_2(0,75) = f(0,75) \Rightarrow a_2 = 2,2642$$

$$S_2(x) = 2,2642x^2 - 0,5141x + 0,3010$$

4) интервал: $[0,75; 1,5]$: $C_3 = 1,1893$

$$S_2'(0,75) = 2,8822, \quad S_3'(0,75) = b_3 = 2,8822$$

$$S_3(1,5) = f(1,5) \Rightarrow a_3 = -2,3216$$

$$S_3(x) = -2,3216x^2 + 6,3646x - 2,2782$$

Проверка:

$$- |f(-1,125) - S_0(-1,125)| = |-1,183 - (-1,5143)| = 0,3313$$

$$- |f(0,375) - S_2(0,375)| = |0,7506 - 0,4270| = 0,3236$$

Рис. 2: Тестовый пример для функции $f(x)$

5 Модульная структура программы

```
def nodes(a, b, n, f):
```

- функция принимает a и b - границы отрезка, n - количество точек, f - функция, возвращает $xnodes$ - сетку и $ynodes$ - сеточную функцию.

```
spline(x_nodes, y_nodes, init)
```

- функция принимает сетку, сеточную функцию и значение производной функции на левом

крае отрезка интерполяции, возвращает список квадратичных функций, которые образуют сплайн.

6 Численный анализ

Вычисляется сетка, состоящая из n точек, строится $n-1$ квадратичная функция. Далее вычисляются значения каждой квадратичной функции в 100 точках, принадлежащих соответствующему промежутку.

Приведу графики функций и соответствующих им сплайнов для 6, 8 и 10 узлов соответственно и графики поточечных ошибок для каждого из случаев.

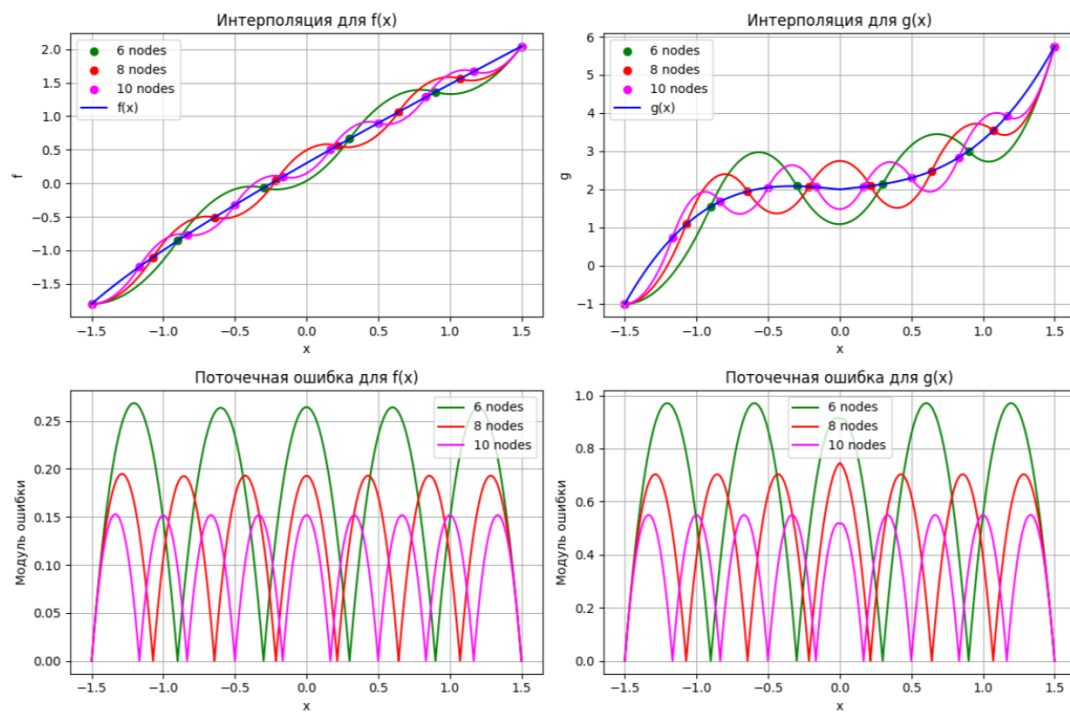


Рис. 3: Исследование интерполяции квадратичными сплайнами

Далее приведу графики зависимости максимальной ошибки интерполяции квадратичными сплайнами от числа узлов для обеих функций.

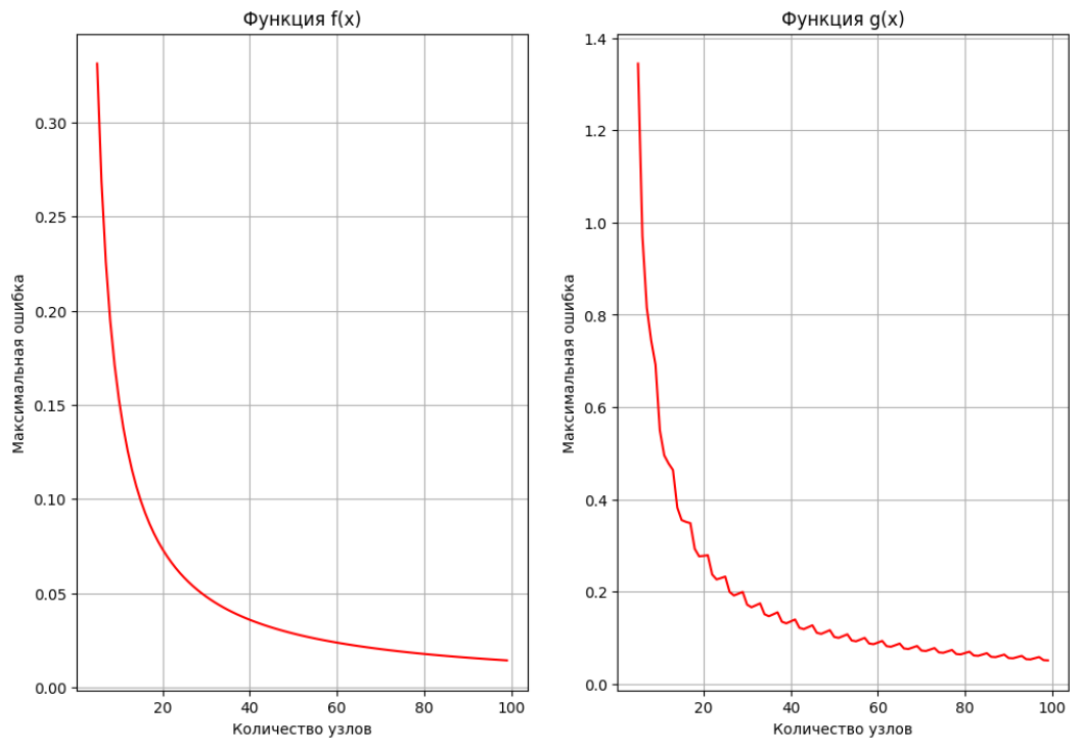


Рис. 4: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов

Приведу графики, полученные в результате исследования.

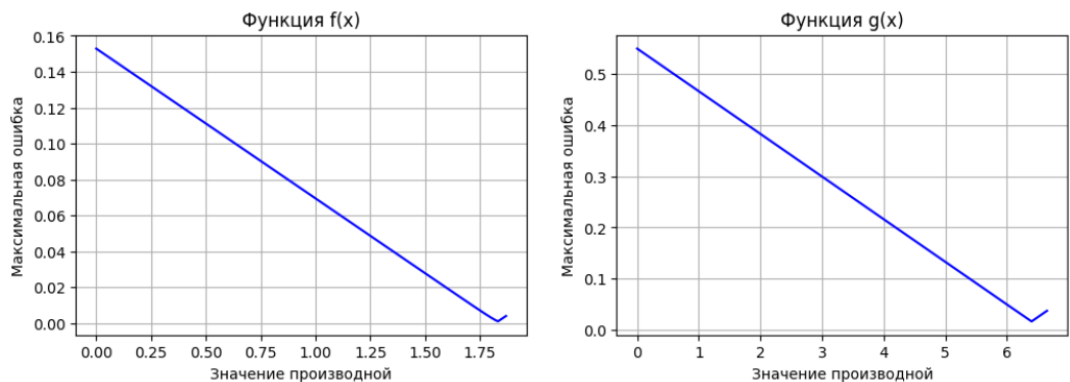


Рис. 5: Зависимость максимальной ошибки в зависимости от значения производной на левом крае отрезка

Дополнительное исследование: исследование зависимости ошибки интерполяции при возмущении данных. В значение функции в точках сетки вносятся возмущения максимальной величины 1%, 2%, 3%, 4%, 5%. Возмущения вносятся в каждую точку случайно. Требуется вычислить относительную ошибку по всему отрезку для каждого значения максимального возмущения. Эксперимент выполнялся 20 раз, строился график типа боксплот.

Далее приведу графики зависимости ошибки интерполяционного полина при возмущении данных для двух функций.

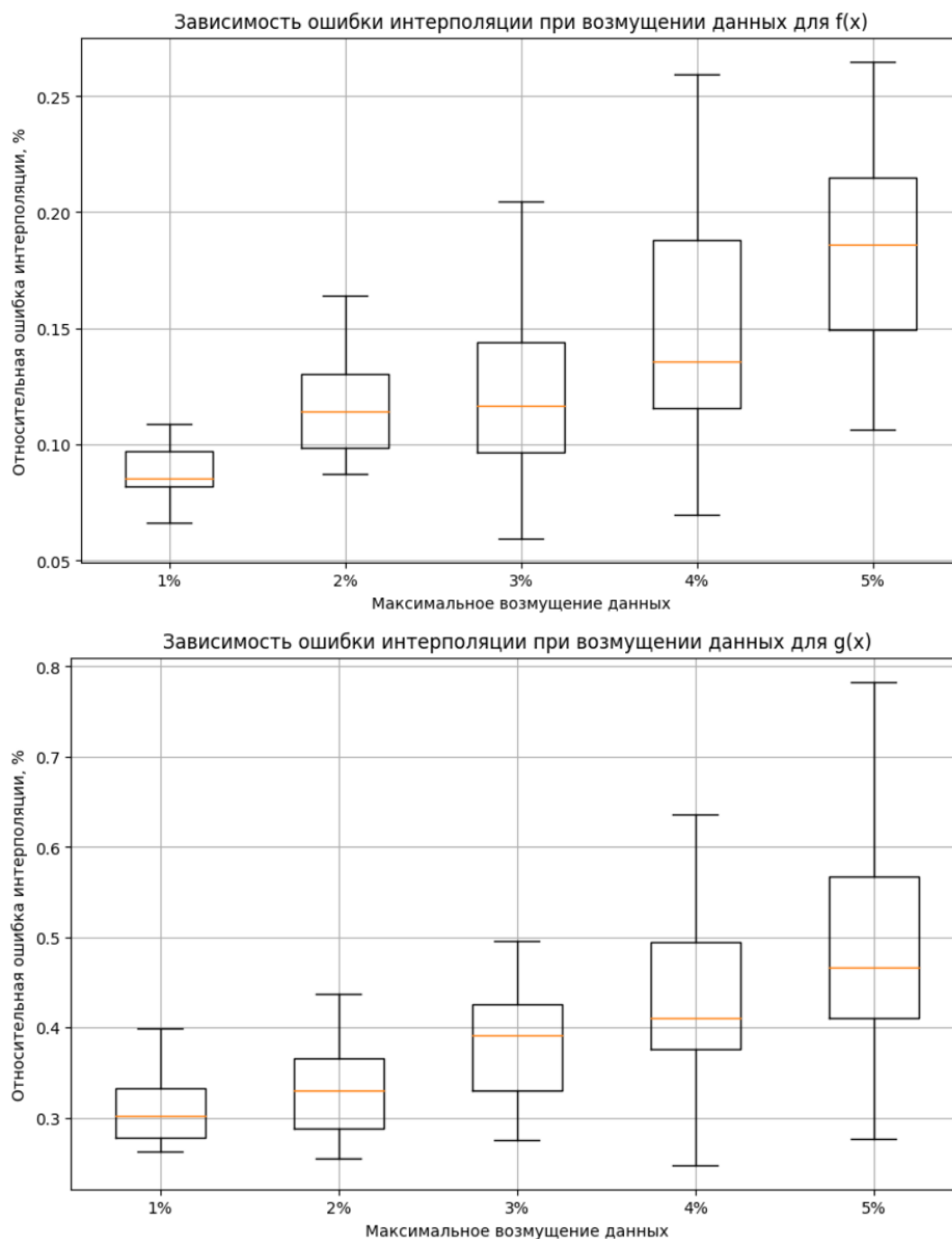


Рис. 6: Зависимость ошибки интерполяции при возмущении данных

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы особенности интерполяции квадратичным сплайном. На основе проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. **Зависимость максимальной ошибки от числа узлов:** С ростом числа узлов максимальная ошибка интерполяции монотонно убывает. На графике зависимости максимальной ошибки интерполяции от числа узлов для функции $g(x)$ заметны небольшие осцилляции, это связано с видом функции, т.к на аналогичном графике для функции $f(x)$ мы подобного не наблюдаем.

2. **Зависимость максимальной ошибки от значения производной на левом крае отрезка интерполяции:** С приближением значения производной на левом крае отрезка интерполяции к точному значению максимальная ошибка интерполяции убывает по линейному закону. Это говорит нам о важности правильного выбора граничных условий для квадратичного сплайна.
3. **Влияние возмущения данных:** Исследование проводилось для интерполяции на 20 узлах. На каждом интервале интерполяции вычислялась абсолютная ошибка в 100 точках. В результате эксперимента можно сделать вывод, что возмущение узловых значений функции приводит к увеличению максимальной абсолютной ошибки интерполяции. При увеличении уровня возмущения возрастает разброс ошибок (что отражается в увеличении высоты коробок и размаха усов на boxplot-графиках), а также увеличивается медианное значение максимальной ошибки.