Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №7
Метод конечных разностей для решения краевых задач для ОДУ 2-го порядка

Работу выполнил:
Нилов И.Р.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Задано линейное ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}$$

Где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, и $f(x)$ – функции, принадлежащие классу $C([a, b])$.

Для различных вариантов граничных условий (ГУ) метод конечных разностей 1-го порядка будет использовать аппроксимацию.

1.2 Поставленные задачи

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
- Для методов 1-4 построить график изменения шага по отрезку. Для методов 5-6 построить график зависимости числа итераций от заданной точности.
- Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.
- Внести погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в коэффициенты уравнения. Требуется вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот.

2 Алгоритм и условия применимости

Метод конечных разностей 1-го порядка основан на аппроксимации производных с помощью конечных разностей.

2.1 Алгоритм метода конечных разностей

Для задачи второго порядка, используя метод конечных разностей, мы аппроксимируем производные с использованием формул для первой и второй производной:

$$y'(x) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Задача сводится к решению системы линейных уравнений для узлов сетки. Граничные условия (ГУ) аппроксимируются с точностью 1-го порядка.

2.2 Условия применимости

Для точности метода конечных разностей с шагом h, необходимо, чтобы сетка была достаточно тонкой, чтобы обеспечить необходимую точность приближений.

3 Предварительный анализ задачи

Для выбранной задачи с граничными условиями вида:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$$

и точным решением:

$$y(x) = \cos(x)$$

будет решена краевая задача для уравнения:

$$y'' - \sin(x)y' + \cos(x)y = 1 - \cos(x)$$

с граничными условиями:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

4 Модульная структура программы

```
def build_system(a, b, alpha, beta, gamma, N, coeffs_data=None):
```

- Построение СЛАУ методом конечных разностей. Функция принимает:

- a: Левая граница интервала
- b: Правая граница интервала
- alpha: Вектор граничных условий для левой границы
- beta: Вектор граничных условий для правой границы
- gamma: Точные значения решения на границах
- N: Число разбиений
- coeffsdata: коэффициенты

Функция возвращает:

- вектор x
- матрицу A
- вектор B для СЛАУ
- coeffsdata: предварительно вычисленные коэффициенты

```
def solve_with_accuracy(a, b, alpha, beta, gamma, tol=1e-6, max_N=100000):
```

- Решение СЛАУ. Функция принимает:

- a, b: границы системы
- alpha, beta: коэффициенты граничных условий
- gamma: значения граничных условий

- tol: требуемая точность
- maxN: максимальное число разбиений

Функция возвращает:

- x: сетка по x
- y: численное решение
- N: использованное число узлов

5 Численный анализ

На основе проведённых вычислений были построены графики численных решений для различных значений шага, а также графики ошибок. Эти результаты подтверждают эффективность метода конечных разностей для данной задачи.

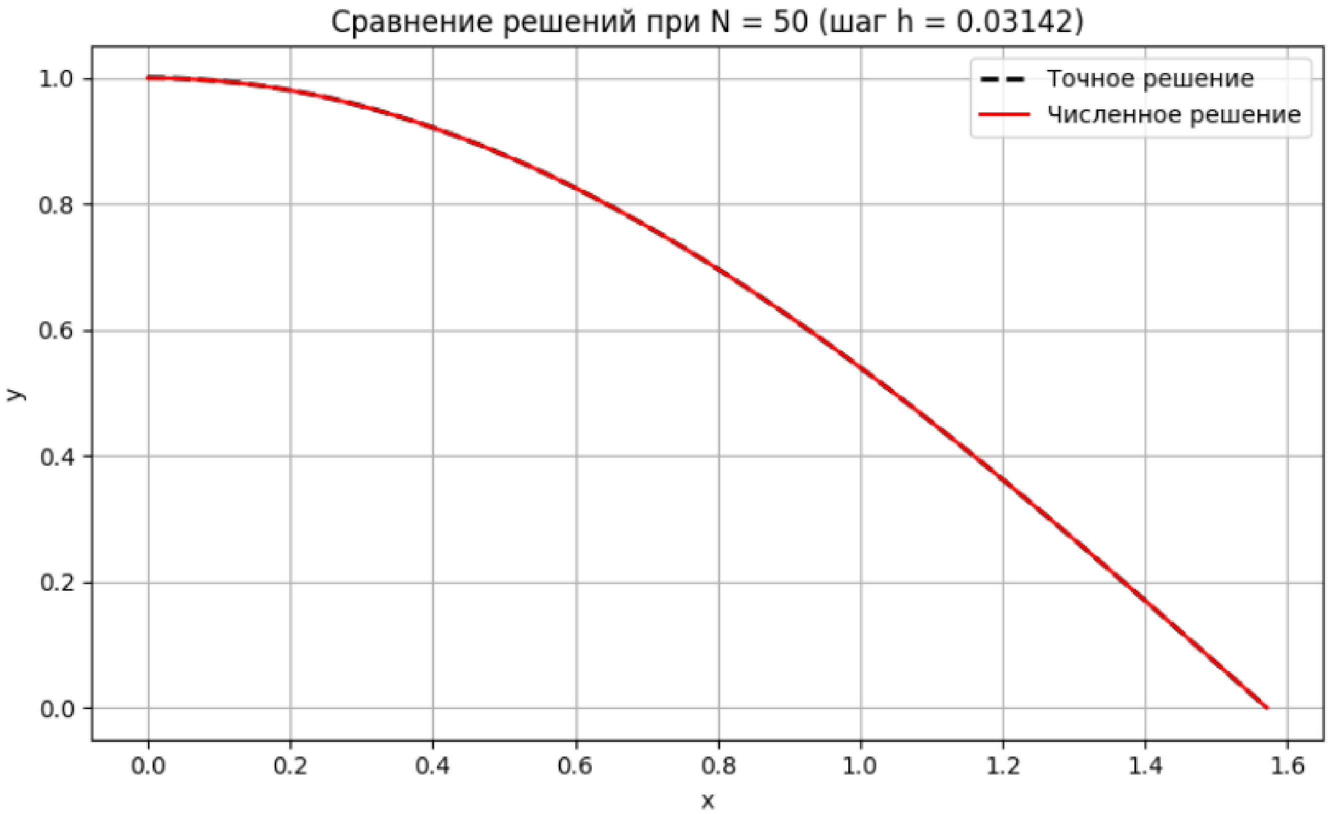

Рис. 1: График точного и численного решений для различных шагов

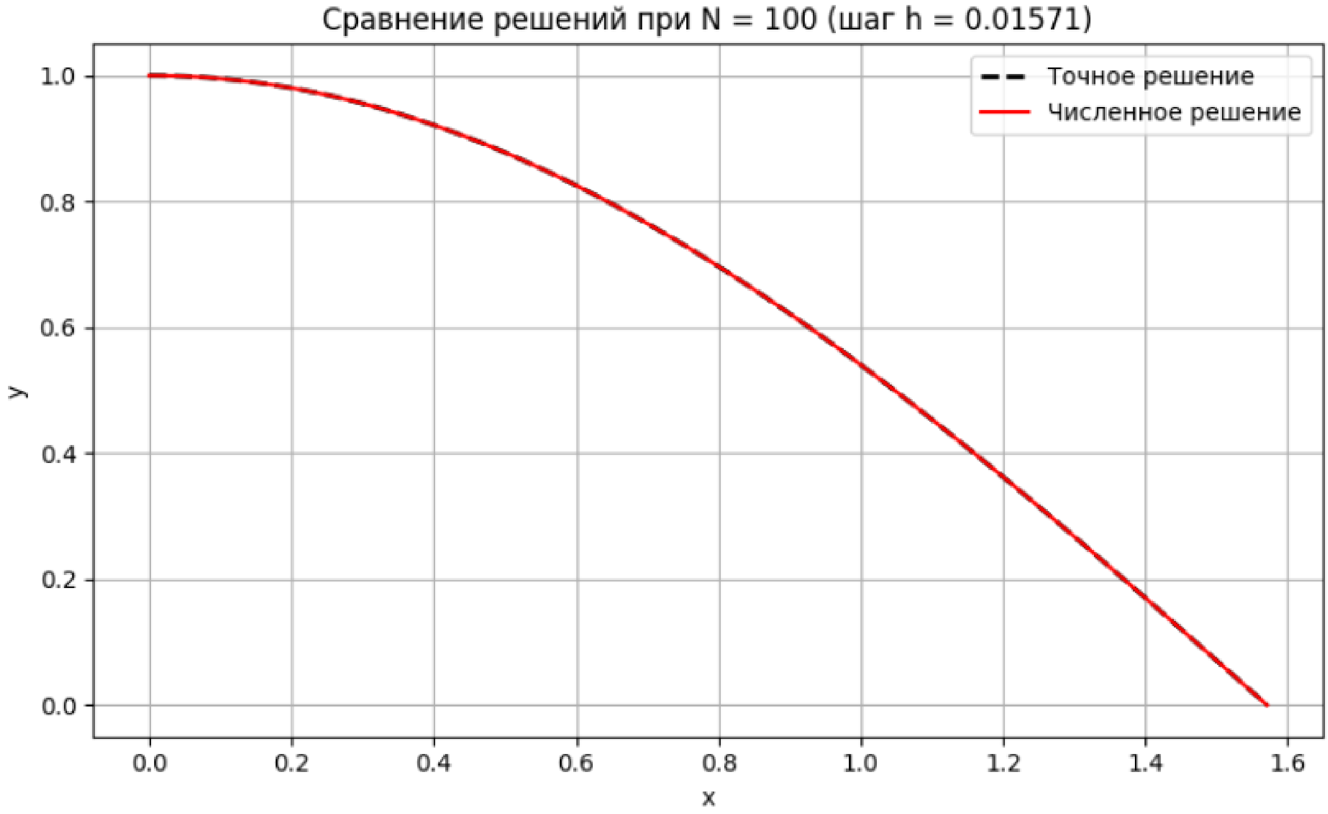

Рис. 2: График точного и численного решений для различных шагов

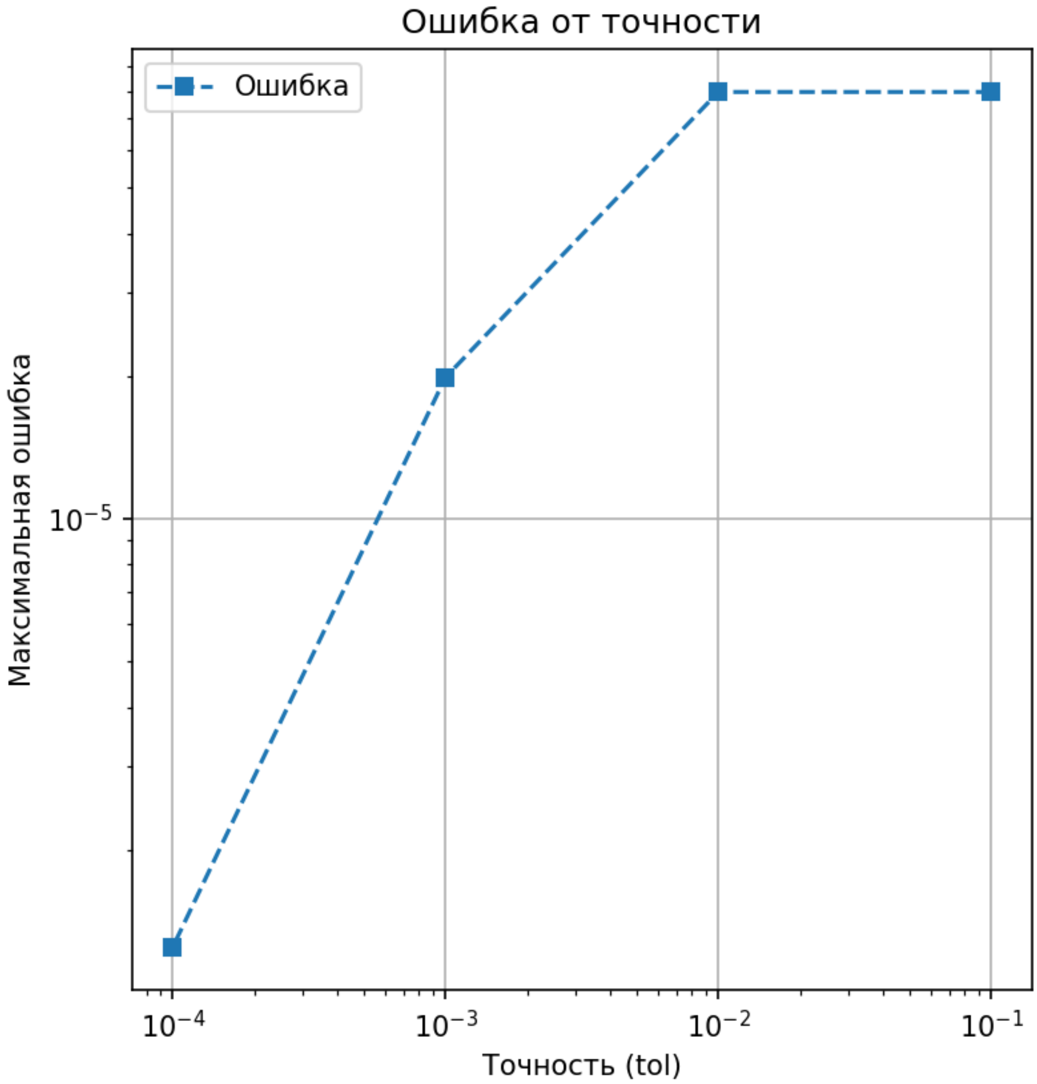

Рис. 3: График ошибки от точности

По данным графикам видно, что при разных шагах численное решение практически совпадает с точным. А также видно, что при большей точности ошибка меньше.

Также был построен график зависимости числа итераций от заданной точности.

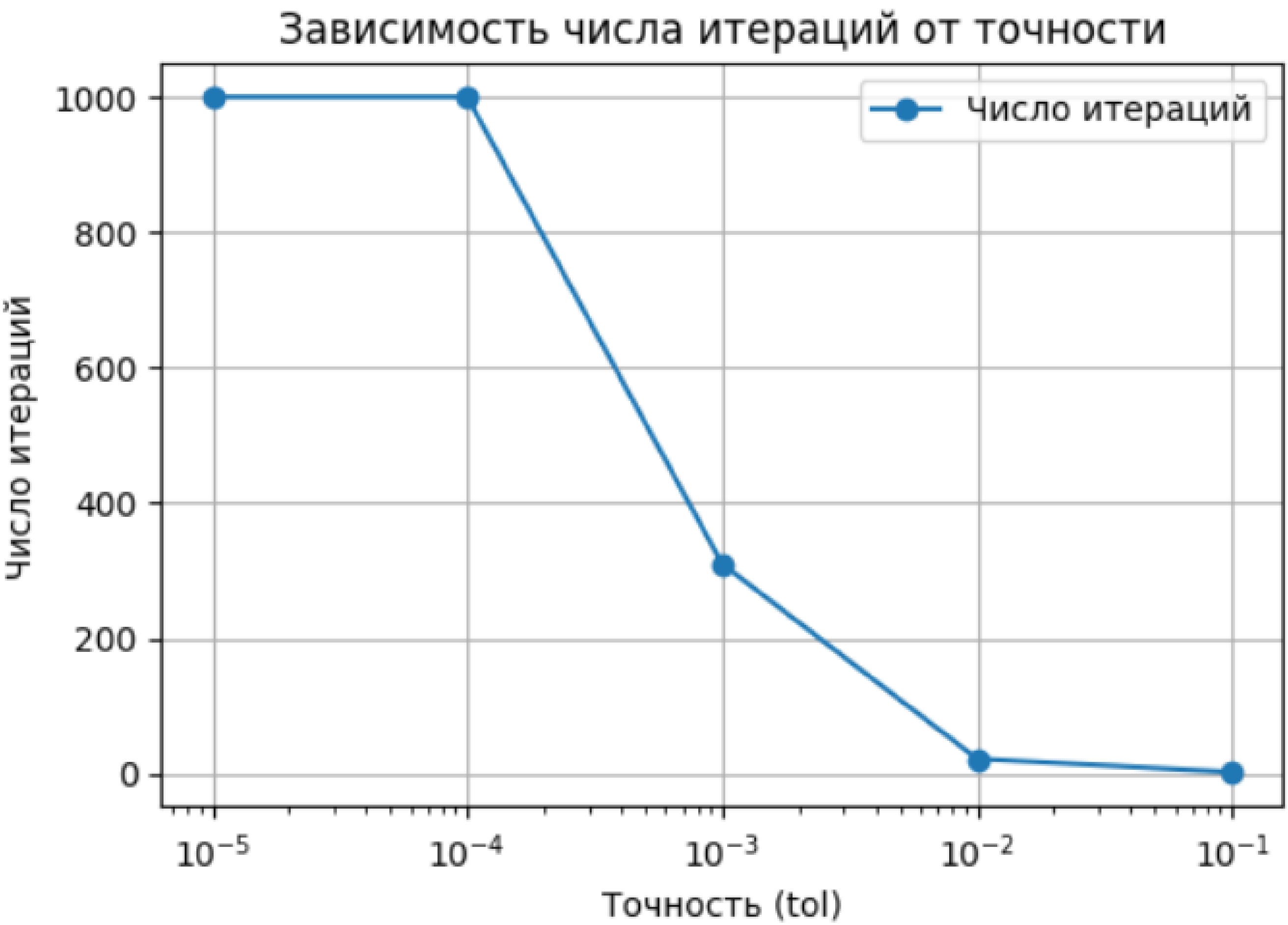

Рис. 4: График зависимости числа итераций от заданной точности

По данному графику видно, что при большей точности число итераций больше.
Был построен график зависимости ошибки от шага

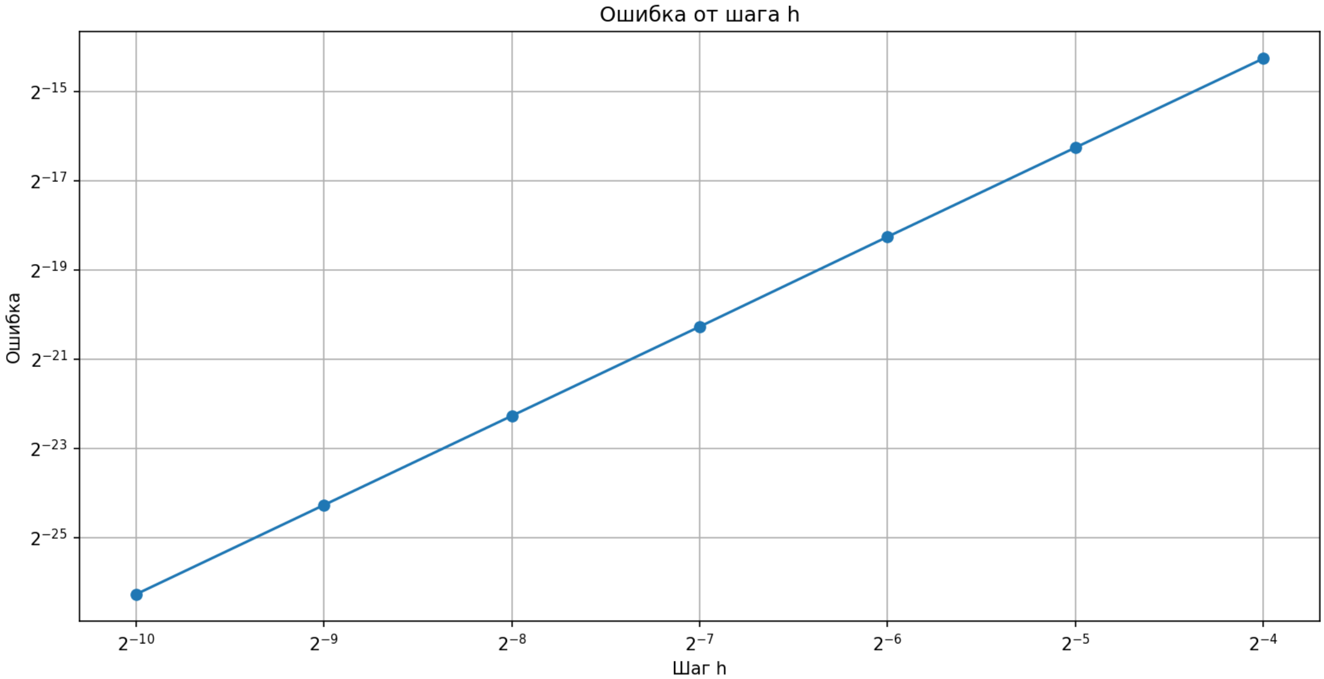

Рис. 5: График зависимости ошибки от шага интегрирования

Видно, что ошибка становится меньше, если уменьшать шаг.
Был построен график максимальной ошибки от числа разбиений

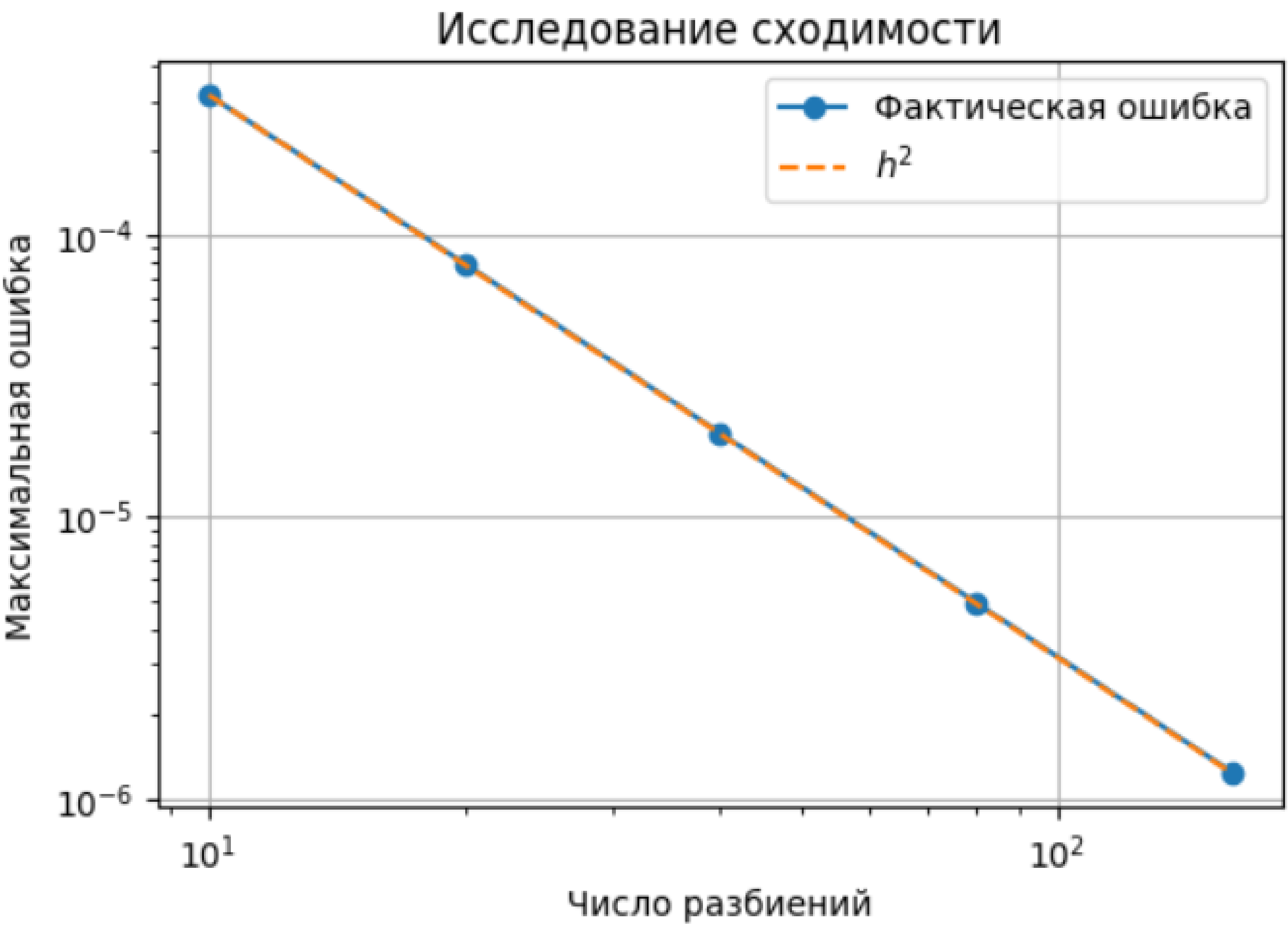

Рис. 6: График максимальной ошибки от числа разбиений

По данному графику мы видим, что у метода хорошая сходимость. Также была получена оценка порядка метода 2, что также удовлетворяет методу.

Также был построен график зависимости относительной ошибки от возмущения коэффициентов уравнения.

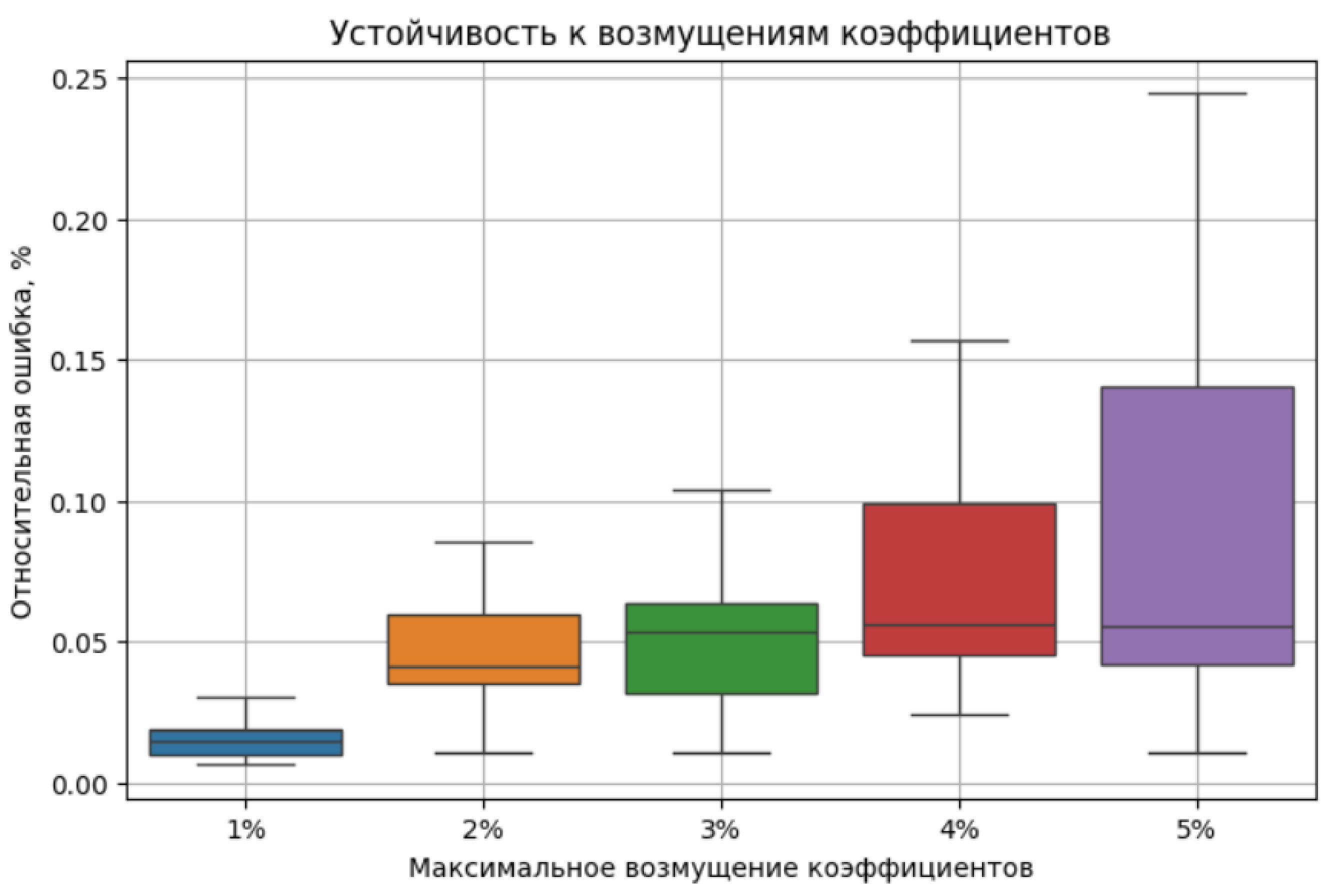

Рис. 7: График зависимости относительной ошибки от возмущения коэффициентов уравнения

По графику видно, что метод отлично устойчив к возмущениям коэффициентов.

6 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены эксперименты с методом конечных разностей 1-го порядка для решения краевых задач. Были исследованы точность метода, сходимость, а также влияние возмущений на результаты.