Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №5
Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты.

Работу выполнил:
Нилов И.Р.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация **3**

1.1 Формализация задачи . . . 3

1.2 Поставленные задачи . . . 3

2 Алгоритм и условия применимости **3**

2.1 Условия применимости . . . 3

2.2 Алгоритм . . . 3

3 Предварительный анализ задачи **3**

4 Тестовый пример **3**

5 Модульная структура программы **4**

6 Численный анализ **5**

7 Выводы **8**

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Найди численное решение ОДУ с заданной точностью ϵ на заданном отрезке с заданным начальным условием.

1.2 Поставленные задачи

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
- Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
- Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.
- Внести погрешность 1, 2, 3, 4, 5 процентов в начальное условие, вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Правая часть ОДУ должна быть достаточно гладкой, желательно должна иметь непрерывные производные до 4-го порядка включительно.

2.2 Алгоритм

Один шаг метода делаем по формулам:

$$\mathrm{K}_1 = h * f(x_k, y_k)$$
$$\mathrm{K}_2 = h * f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})$$
$$\mathrm{K}_3 = h * f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2})$$
$$\mathrm{K}_4 = h * f(x_k + h, y_k + K_3)$$
$$\mathrm{y}_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

3 Предварительный анализ задачи

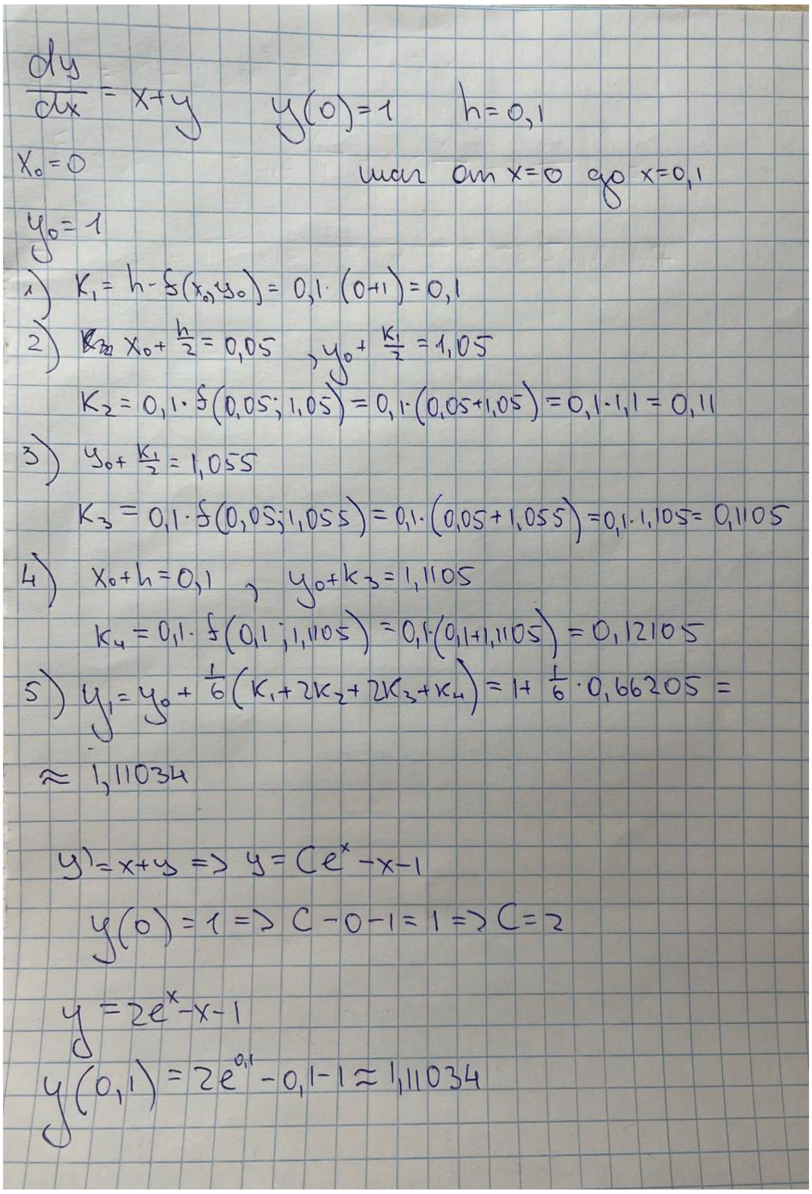
25 вариант включает в себя решение следующего ОДУ:

$$y = x\left(y' - x\cos(x)\right)$$

а отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. При этом известно точное решение:

$$y = x\sin(x)$$

4 Тестовый пример



$$\frac{dy}{dx} = x+y \qquad y(0)=1 \qquad h=0,1$$

$x_0 = 0$ шаг от $x=0$ до $x=0,1$

$y_0 = 1$

1) $K_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot (0+1) = 0,1$

2) $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05$, $y_0 + \frac{K_1}{2} = 1,05$

$K_2 = 0,1 \cdot f(0,05; 1,05) = 0,1 \cdot (0,05+1,05) = 0,1 \cdot 1,1 = 0,11$

3) $y_0 + \frac{K_2}{2} = 1,055$

$K_3 = 0,1 \cdot f(0,05; 1,055) = 0,1 \cdot (0,05 + 1,055) = 0,1 \cdot 1,105 = 0,1105$

4) $x_0 + h = 0,1$, $y_0 + k_3 = 1,1105$

$k_4 = 0,1 \cdot f(0,1; 1,1105) = 0,1 \cdot (0,1 + 1,1105) = 0,12105$

5) $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,66205 =$

$\approx 1,11034$

$y' = x+y \Rightarrow y = Ce^x - x - 1$

$y(0) = 1 \Rightarrow C - 0 - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$

$y = 2e^x - x - 1$

$y(0,1) = 2e^{0,1} - 0,1 - 1 \approx 1,11034$

Рис. 1: Тестовый пример для h=0.1

5 Модульная структура программы

```
def runge_kutta_4(f, x0, y0, h, xend):
```

- шаг метода Рунге-Кутта 4-го порядка Функция принимает: f - функцию правой части ОДУ, x0 - текущее значение x, y0 - текущее значение y, h - длину шага Функция возвращает: значение в следующей точке

```
def adapt_rk(f, x0, y0, xend, tol=1e-6, hinit=0.1):
```

- функция принимает: f - функцию правой части ОДУ, x0 - начальное значение x, y0 - начальное значение y, xend - конец интервала, tol - допустимую погрешность, hinit - начальный шаг Функция возвращает: массив значений x, y, массив использованных шагов интегрирования

```
def runge_kutta_4(f, x0, y0, h, xend):
```

- функция принимает: f - функцию правой части ОДУ, solution - функция точного решения, x0 - начальное значение x, y0 - начальное значение y при x = x0, xend - конечное значение x, tols - массив значений допустимых погрешностей функция: строит график зависимости максимальной ошибки от заданной точности

6 Численный анализ

В ходе выполенения лабораторной работы было проведено исследование работы метода. Были построены графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Также были построены графики ошибок на отрезке для этих решений.

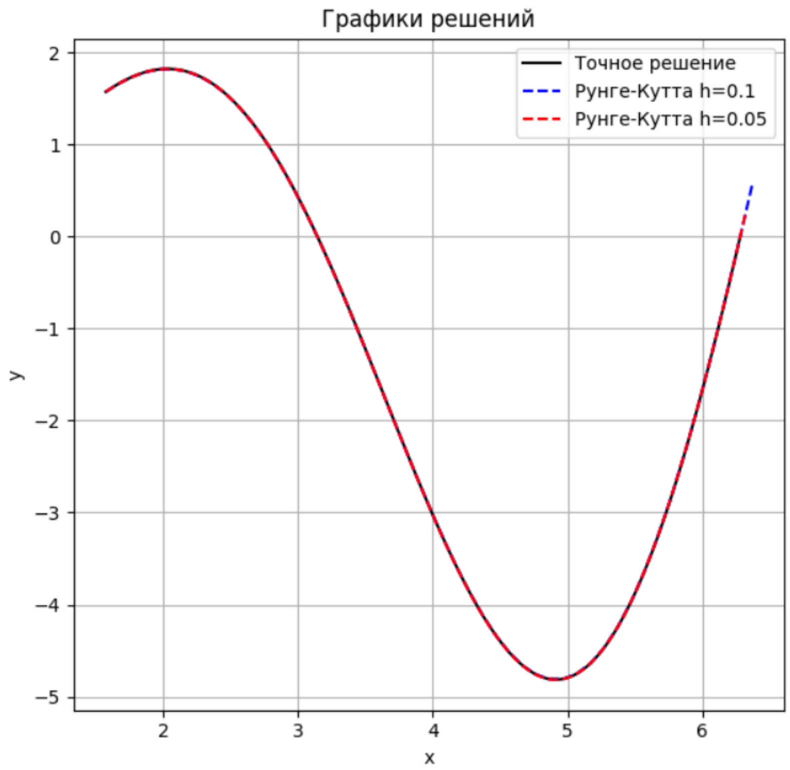


Рис. 2: Графики численных решений для фиксированных значений шага на отрезке

Ниже представлены графики ошибок на отрезке для этих решений.

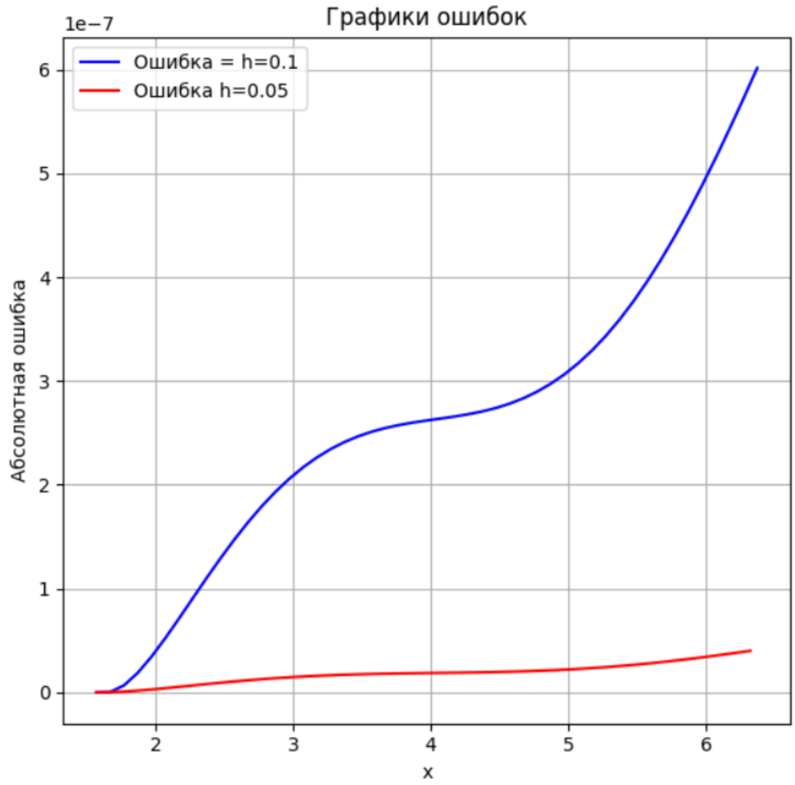


Рис. 3: Графики ошибок на отрезке для решений

По этим графикам видно, что для меньшего значения фиксированного шага получается более точное решение ОДУ.

Далее было проведено исследование точности метода. Заданная точность достигалась на каждом шаге по правилу Рунге. Ниже приведён график изменения шага по отрезку.

Рис. 4: Изменение шага по отрезку

Далее был построен график зависимости фактической погрешности от заданной точности. Набор точностей: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}$.

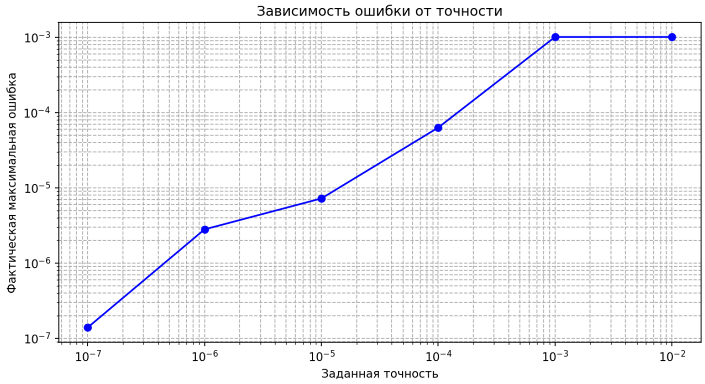


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

По данному графику видно, что в методе достигается заданная точность, причём фактическая ошибка на несколько порядков меньше заданной точности.

Далее было проведено исследование сходимости метода. Был построен график зависимости фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, при построении была использована логарифмическая шкала по основанию 2.

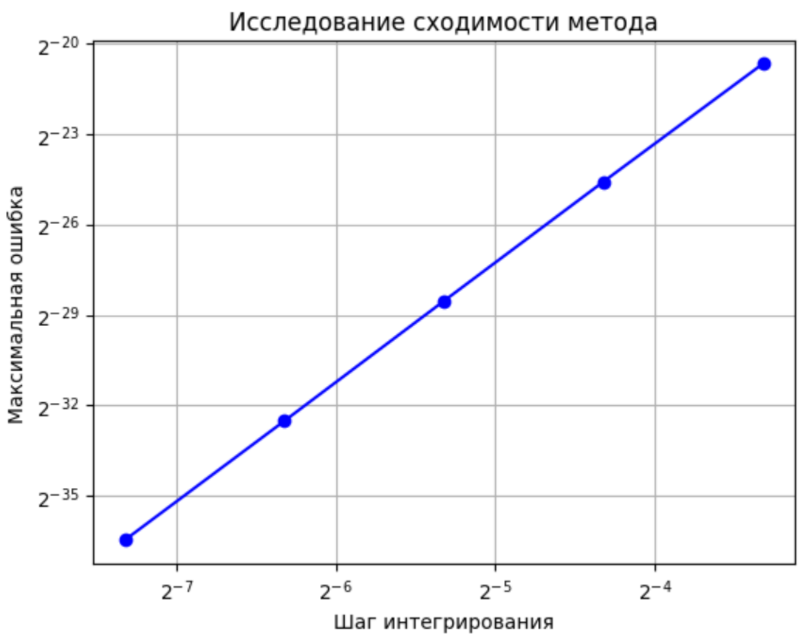


Рис. 6: Зависимость фактической ошибки от факсированной длины шага

С помощью метода ployfit() библиотеки NumPy был вычислен порядок метода ≈ 3.95.

Дополнительное исследование. Была внесена погрешность 1, 2, 3, 4, 5 процентов в начальное условие. Была вычислена относительная ошибка для каждого значения максимального возмущения и построен график. Эксперимент выполнялся 20 раз, строился график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

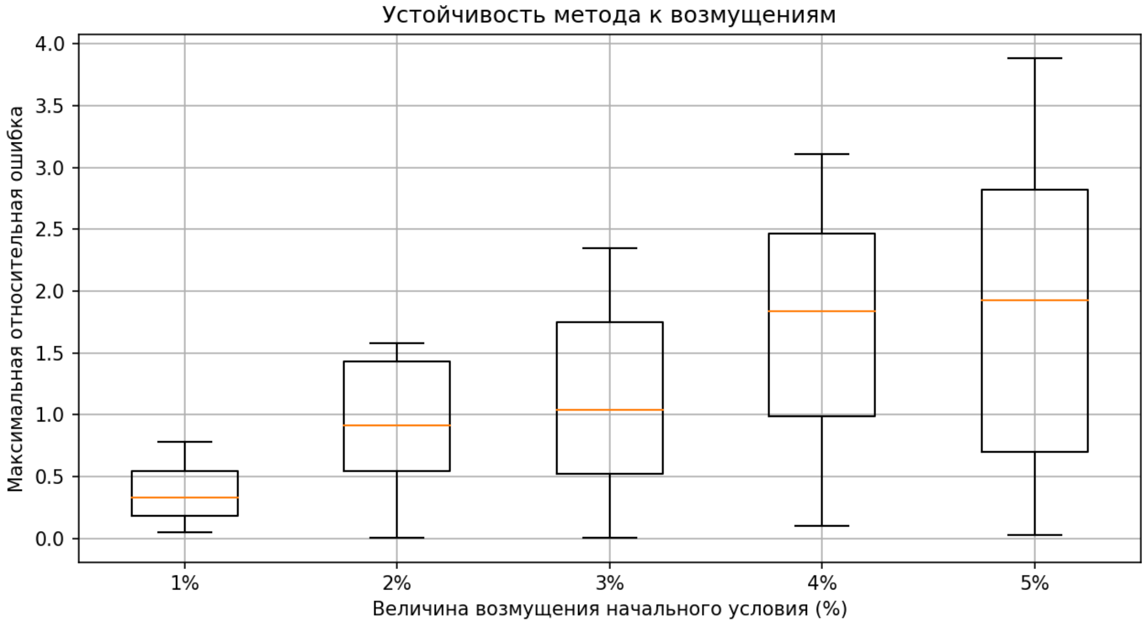


Рис. 7: Относительная ошибка решения от величины возмущения начального условия

Исследование устойчивости метода показало, что относительная ошибка увеличивается с ростом возмущения начального условия, однако метод остаётся стабильным при изменении начального значения в пределах до 5 процентов.

7 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования метода Рунге-Кутты 4-го порядка. В результате исследований были построены графики решений для двух различных фиксированных значений шага на отрезке, был построен график точного решения для сравнения. Анализируя полученные графики, можно сказать о том, что с уменьшением значения шага, решение становится более точным.

Также были построены зависимости фактической ошибки от заданной точности и длины шага от координаты.

В качестве дополнительного исследования была исследована зависимость относительной ошибки решения от величины возмущения начального условия.