

# Fizyka - Wzory

## 1. Iloczyn wektorowy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

## 2. Prędkość wektorowa:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

## 3. Prędkość średnia:

$$v_{\text{sr}} = \frac{x_{\text{całk}}}{t_{\text{całk}}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

## 4. Prędkość chwilowa:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

## 5. Przyspieszenie:

$$\vec{a}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad a_s = \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

## 6. Ruch jednostajny prostoliniowy:

$$\vec{a} = \vec{0} \implies \vec{v} = \overrightarrow{const} \implies \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$$

6.1 Dla ruchu wzdłuż osi  $x$

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

## 7. Ruch zmienny wzdłuż prostej:

$$\vec{a} = \overrightarrow{const} \implies \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

## 8. I zasada dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_w = \vec{0} \iff \vec{v} = \overrightarrow{const}$$

## 9. II zasada dynamiki Newtona:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

## 10. Pęd:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

## 11. III zasada dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

## 12. Rzut poziomy:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H - \frac{gt^2}{2}$$

$$t = t_c \text{ dla } y = 0$$

$$H - \frac{gt^2}{2} = 0$$

$$H = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[ \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}} = s \right]$$

$$x = z \text{ dla } y = 0$$

$$z = v_0 \cdot t = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[ \frac{m}{s} \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}} = \frac{m}{s} \cdot s = m \right]$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot 1 \cdot t^{1-1} = v_0 = \text{const}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{2} 2t = -gt \left[ \frac{m}{s^2} s = \frac{m}{s} \right]$$

13. **Rzut pionowy:**

$$y(t) = 0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt$$

$$t = t_c \text{ dla } y = 0 \rightarrow v_0 t_c = \frac{g}{2} t_c^2$$

14. **Rzut ukośny:**

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$$

$$t = t_c \text{ dla } y = 0$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}, \quad v_0 \cdot t_c \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t_c^2}{2} = 0$$

$$t_c \left( v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t_c}{2} \right) = 0 \Rightarrow t_c = 0 \quad \vee \quad t_c = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$z = x(t_c) \longrightarrow z - \text{zasieg}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \Rightarrow x(t_c) = v_0 \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$y = H_{max} \text{ dla } t = t_{wzn}$$

$$H_{max} = y(t_{wzn}) = v_0 \cdot t_{wzn} \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t_{wzn}^2}{2} =$$

$$v_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot \left( \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

15. **II zasada dynamiki w postaci pędowej:**

$$\overrightarrow{F_{zew}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\Downarrow$

$$\overrightarrow{F_{zew}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \overrightarrow{const}$$

$$\vec{p}_{pocz} = \vec{p}_{końc}$$

$$\vec{p}_{pocz} = \vec{0}, \quad \vec{p}_{końc} = m_1 \cdot \vec{v}_1 - m_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$$

16. **Energia:**

16.1 Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

## 16.2 Energia potencjalna

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

## 16.3 W pobliżu pow. Ziemi

$$E_p = mgh$$

## 16.4 Siła elektrostatyczna (Coulomba)

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

## 16.5 Siła sprężystości

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

## 16.6 Energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_{koi} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}$$

$$E_{ko} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$E_{ko} = \frac{I \omega^2}{2}$$

## 17. Praca:

$$W = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta W_i = F_i \cdot \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta x$$

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$x = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$x = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$$

$$W = F \cdot x = m \cdot a \cdot x = m \left( \frac{v - v_0}{t} \right) \left( \frac{v + v_0}{2} \right) t = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$W = E_k - E_{k_0} \longrightarrow$  Równoważność pracy i energii

18. **Moc:**

$$P_r = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \circ d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v}$$

19. **Tarcie:**

$$T_k = \mu_k \cdot N$$

$$\mu_s \geq \mu_k$$

$$T_s = -F$$

$$0 < T_s < T_{\text{smax}}$$

$$T_{\text{smax}} = \mu_s \cdot N$$

Dla małych prędkości obiektu (wzór Stokesa):

$F = 6\pi\eta rv \longrightarrow$  Siła oporu kuli o promieniu  $r$

$\eta \rightarrow$  lepkość płynu,  $v \rightarrow$  prędkość poruszającego się obiektu

Dla dużych prędkości obiektu (wzór Newtona):

$F = C_x \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot S$ ,  $\rho \rightarrow$  gęstość płynu,  $S \rightarrow$  powierzchnia obiektu

$C_x \rightarrow$  współczynnik oporu płynu zależny od kształtu obiektu

## 20. Siły:

$$\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}_u$$

$$\overrightarrow{F_{\text{bezwł}}} = -m \overrightarrow{a_{\text{ukł odn}}}$$

$$\overrightarrow{F_{\text{całk}}} = \overrightarrow{F_{\text{oddz}}} + \overrightarrow{F_{\text{bezwł}}}$$

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$F_{od} = m \cdot a_d$$

$$F_{od} = m \cdot a_d \frac{mv^2}{R}$$

$$F_{od} = m \cdot a_d = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \longrightarrow \text{Siła Coriolisa}$$

### 20.1 Oddziaływanie grawitacyjne:

Wzór Newtona

$$F = G \frac{m \cdot M}{r^2}, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

20.2 Wzór uwzględniający informację o zwrocie i kierunku siły w miejscu wskazanym przez wektor  $\vec{r}$

$$\vec{F} = G \frac{m \cdot M}{r^3} \vec{r}$$

### 20.3 Siła grawitacji na powierzchni Ziemi

$$F = mg, g = 9.81 \text{m/s}^2$$

### 20.4 Oddziaływanie elektromagnetyczne

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \longrightarrow \text{prawo Coulomba}$$

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \longrightarrow \text{siła Lorentza}$$

## 20.5 Siła wyporu

$$\vec{F}_w = -\rho V \vec{g}$$

## 20.6 Siła sprężystości

$$F = E \cdot \frac{S}{L_0} \cdot \Delta L$$

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

## 21. Środek masy układu ciał:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, y_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, z_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$\Downarrow$

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \vec{r}_s = \frac{\int r dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int r dm$$

$$m x_s = \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

### 21.1 Pierwsze różniczkowanie

$$m \frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{dx_i}{dt}, m v_{sx} = \sum_{i=1}^N m_i v_{xi}$$



## 21.2 Drugie różniczkowanie

$$m \frac{dv_{sx}}{dt} = ma_{sx} = \sum_{i=1}^N m_i a_{xi}$$

## 21.3 Po uwzględnieniu II zasady dynamiki

$$ma_{sx} = \sum_{i=1}^N m_i a_{xi} = \sum_{i=1}^N F_{xi}$$

Analogicznie robimy dla osi y i z

$\Downarrow$

$$m \vec{a}_s = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$m \vec{a}_s = \sum \vec{F}_{zi} \longrightarrow \text{Równanie ruchu}$$

## 22. Ruch obrotowy punktu materialnego:

$$s = \Delta\phi \cdot r \longrightarrow \text{droga kątowa}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \longrightarrow \text{prędkość kątowa}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \longrightarrow \text{prędkość liniowa punktu A}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow \text{przyspieszenie kątowe}$$

### 22.1 Przyspieszenie styczne i dośrodkowe

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_s = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{a}_s| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r}$$

### 23. Moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \vec{r} \longrightarrow \text{ramię siły}$$

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \vec{M} = 0$$

$$M = rF \sin \alpha = r_{\perp} \cdot F$$

### 24. Moment bezwładności:

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int r^2 dm$$

#### 24.1 Twierdzenie Steinera

$$I = I_0 + md^2$$

#### 24.2 II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$F_i = \Delta m_i a_i = \Delta m_i \varepsilon r_i$$

$$M = \sum_{i=1}^n r_i F_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \varepsilon r_i^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$M = I \cdot \varepsilon$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

### 25. Moment pędu:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}$$

$$\text{Dla całej bryły: } L = \sum_{i=1}^n r_i \Delta m_i v_i$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$L = \sum_{i=1}^n r_i \Delta m_i \omega r_i = \omega \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = I \omega$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{\parallel} = I_{\perp} \vec{\omega}_{\perp} + I_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel}$$

$$I_{\perp} = m r^2, I_{\parallel} = \frac{1}{2} m r^2$$

25.1 II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

25.2 Zasada zachowania pędu

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ jeżeli } \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{const}$$

$$L = L' \text{ tzn. } I \omega = I' \omega'$$

$$I > I' \Rightarrow \omega' > \omega$$

25.3 Elipsoida bezwładności bryły sztywnej względem jej środka masy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}}, b = \frac{1}{\sqrt{I_y}}, c = \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

## 26. Precesja bąka:

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times m\vec{g}| = rmg \sin \alpha$$

$r \longrightarrow$  wektor położenia środka masy przy zetknięciu z podłożem

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

$$d\Phi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{Mdt}{L \sin \alpha}$$

$$\omega_p = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{M}{L \sin \alpha} = \frac{mgr \sin \alpha}{L \sin \alpha} = \frac{mgr}{L}$$

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

## 27. Drgania harmoniczne:

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi)$$

A - amplituda, k - współczynnik sprężystości,  $\omega_0$  - częstość kołowa drgań,  $\Phi$  - początkowa faza drgań

### 27.1 Prędkość oscylatora harmonicznego

$$v(t) = \frac{dx}{dt} A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Phi)$$

### 27.2 Przyspieszenie oscylatora harmonicznego

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \Phi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t) \Rightarrow \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

### 27.3 Wychylenie

$$x(t) = A \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \Phi \right)$$

### 27.4 Okres drgań własnych

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

### 27.5 Częstotliwość

$$f = \frac{1}{T}$$

### 27.6 Energia potencjalna sprężystości

$$W = \vec{F} \circ \vec{x} = Fx \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta x$$

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = \int_0^x F \cdot dx = \int_0^x (k \cdot x) \cdot dx = \frac{k \cdot x^2}{2} \Big|_0^x = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

$$W = \Delta E \Rightarrow E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

### 27.7 Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \cdot (A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Phi))^2$$

$\Downarrow$

$$E_k = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \Phi)$$

## 27.8 Energia całkowita

$$\begin{aligned}
 E_c &= E_p + E_k = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \Phi) = \\
 &= \frac{k \cdot A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \Phi) + \frac{k \cdot A^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \Phi) \Rightarrow E_c = \frac{k \cdot A^2}{2}
 \end{aligned}$$

## 27.9 Siła ciężkości

$F_s = m \cdot g \cdot \sin \Theta \longrightarrow$  Składowa styczna siły ciężkości

$F_r = m \cdot g \cdot \cos \Theta \longrightarrow$  Składowa radialna siły ciężkości

Dla małych kątów ( $< 10^\circ$ )  $\sin \Theta \approx \Theta$

$$\sin \Theta = \frac{x}{l} \implies \Theta = \frac{x}{l}$$

$$F_s = -mg\Theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

$$x = \frac{mg}{l} = m\omega_0^2 \Rightarrow \frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tabela 1: Drgania harmoniczne - wahadło fizyczne

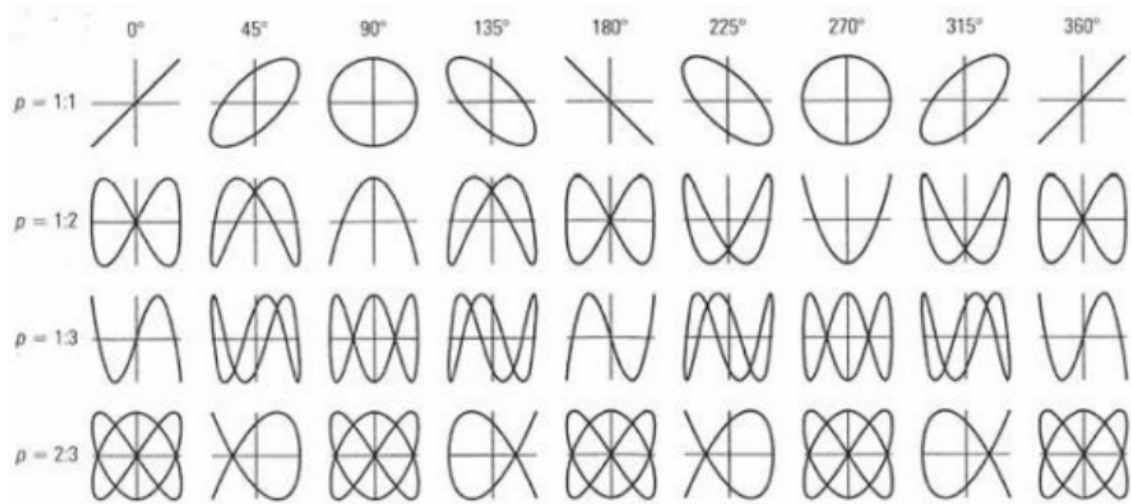
Punkt materialny	Bryła sztywna
$F = -kx$	$M - K\alpha$
$F = ma$	$M = I\varepsilon$
$k = m\omega_0^2$	$K = I\omega_0^2$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$

$$M = F_s l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha$$

$$K = mgl$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$



Rysunek 1: Krzywe Lissajous

## 27.10 Składanie drgań równoległych

- Ta sama częstotliwościach ale różna faza i amplituda

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

- Różne częstości

**Twierdzenie Fouriera:**

$$x(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)]$$

- Podobna częstość (dudnienia)

$$A[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

### 27.11 Drgania tłumione

$$F_t = -bv$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx$$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$F_t \longrightarrow$  siła oporu proporcjonalna do prędkości ciała i przeciwnie do niej skierowana

$A_0 e^{-\beta t} \longrightarrow$  amplituda

$k \longrightarrow$  współczynnik sprężystości

$\omega_0 \longrightarrow$  częstość kołowa drgań

$\omega \longrightarrow$  częstość oscylatora tłumionego

$\varphi \longrightarrow$  początkowa faza drgań

$b \longrightarrow$  współczynnik oporu

$\beta \longrightarrow$  współczynnik tłumienia

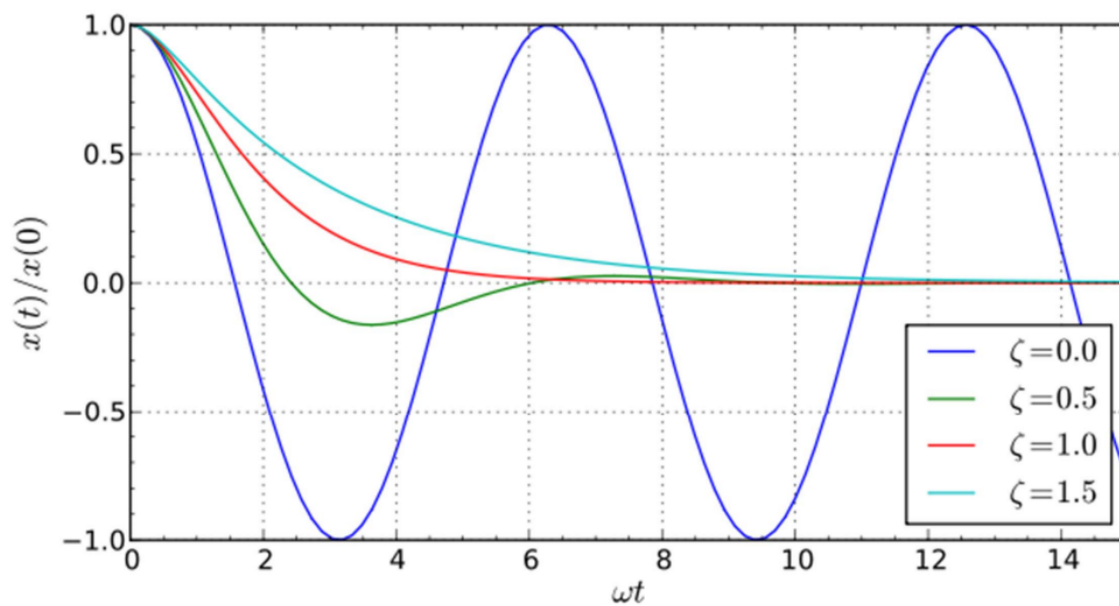
### 27.12 Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$



### 27.13 Względny współczynnik tłumienia

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}$$



Rysunek 2: Drgania tłumione

### 27.14 Drgania wymuszone

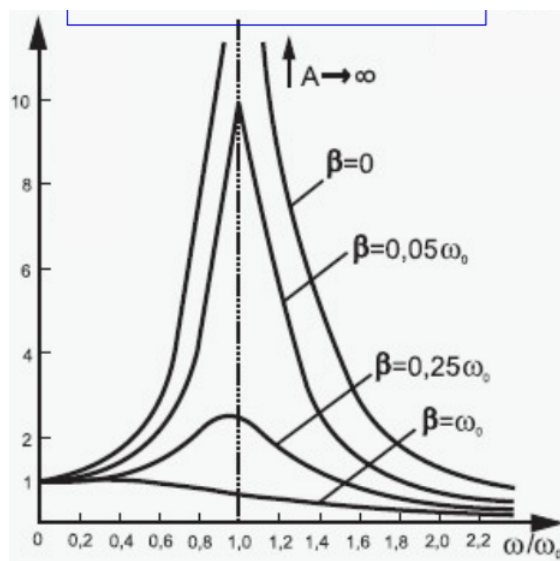
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan \left( -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

28. **Fale:**



Rysunek 3: Drgania wymuszone



Rysunek 4: Fala kulista oraz płaska

## 28.1 Równanie fali

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

## 28.2 Prędkość fali

$$V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Tabela 2: Drgania harmoniczne - wahadło fizyczne

	<b>Ciało stałe</b>	<b>Ciecz</b>	<b>Gaz</b>
Fala podłużna	$V_f = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$V_f = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	$V_f = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}$
Fala poprzeczna	$V_f = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	-	-

$\rho \longrightarrow$  gęstość

$E \longrightarrow$  moduł Younga

$G \longrightarrow$  moduł sztywności

$K \longrightarrow$  moduł ścisłości cieczy

$p \longrightarrow$  ciśnienie

$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$

### 28.3 Prędkość grupowa

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

### 28.4 Prawo załamania

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

### 28.5 Interferencja fal

$$\Psi_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\Psi_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

### 28.6 Fala stojąca

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_1 = A \sin(kx - \omega t) \\ + \\ \Psi_2 = A \sin(kx - +\omega t) \end{array} \right\} \implies \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

## 28.7 Maksima interferencyjne

$$d \cdot \sin \alpha = n \cdot \lambda$$

## 28.8 Minima interferencyjne

$$d \cdot \sin \alpha = 2(n - 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$d \longrightarrow$  odległość pomiędzy szczelinami  
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

## 28.9 Kąt Brewstera

$$\tan \alpha_B = n$$

$\alpha \longrightarrow$  kąt padania światła

$n \longrightarrow$  współczynnik załamania dielektryka

## 28.10 Efekt Dopplera

- Źródło zbliża się do obserwatora

$$\lambda_o = \lambda_z - v_z T, \lambda = \frac{v}{f}, T = \frac{1}{f_z}$$

$$\frac{v}{f_o} = \frac{v}{f_z} - \frac{v_z}{f_z} \Rightarrow f_o = f_z \frac{v}{v - v_z}$$

- Źródło oddala się od obserwatora

$$\lambda_o = \lambda_z + v_z T, \lambda = \frac{v}{f}, T = \frac{1}{f_z}$$

$$\frac{v}{f_o} = \frac{v}{f_z} + \frac{v_z}{f_z} \Rightarrow f_o = f_z \frac{v}{v + v_z}$$

$v \longrightarrow$  prędkość fali

$v_o \longrightarrow$  prędkość obserwatora

$v_z \longrightarrow$  prędkość źródła

### 28.11 Natężenie dźwięku

$$I = \frac{P}{S}$$

$$I_0 = 10^{-12} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

### 28.12 Próg bólu

$$I_B = 1 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

### 28.13 Poziom natężenia dźwięku

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} [db]$$

## 29. Mechanika płynów:

### 29.1 Ciśnienie

$$p = \frac{F_N}{S} \left[ 1Pa = \frac{1N}{1m^2} \right]$$

$F_N \longrightarrow$  wartość składowej normalnej siły

1 bar = 10<sup>5</sup> Pa

1 tor [Tr] = 1 mm Hg = 133 Pa

1 atmosfera techniczna (at) = 1  $\frac{kg}{cm^2}$  = 98066,5 Pa

1 atmosfera fizyczna (atm) = 760 Tr = 101325 Pa

1 psi ( $\frac{lunt}{in^2}$ ) = 6894,76 Pa

$$0,1MPa \approx 1at \approx 1bar = 10mH_2O$$

### 29.2 Ciśnienie cieczy

$$F_2 = F_1 + mg$$

$$F_1 = p_1 S, F_2 = p_2 S, m = \rho S(h_1 - h_2)$$

$$p_2 S = p_1 S + \rho g S(h_1 - h_2)$$

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2)$$

### 29.3 Prasa hydrauliczna

$$\Delta p = \frac{F_{\text{wej}}}{S_{\text{wej}}} = \frac{F_{\text{wyj}}}{S_{\text{wyj}}}$$

$$V = S_{\text{wej}}y_{\text{wej}} = S_{\text{wyj}}y_{\text{wyj}}$$

$$W = F_{\text{wyj}}y_{\text{wyj}} = F_{\text{wej}} \frac{S_{\text{wyj}}}{S_{\text{wej}}} y_{\text{wej}} \frac{S_{\text{wej}}}{S_{\text{wyj}}} = F_{\text{wej}}y_{\text{wej}}$$

### 29.4 Napięcie powierzchniowe

$$\sigma \frac{W}{S}$$

## 30. Dynamika płynów

### 30.1 Równanie ciągłości

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$\Delta x_1 S_1 = \Delta x_2 S_2$$

$$\frac{\Delta x_1 S_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x_2 S_2}{\Delta t}$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}$$

$$\rho = \text{const}$$

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 = \text{const}$$

### 30.2 Równanie Bernoulli'ego

$$W = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

$$W = (p_1 - p_2)V = \left( \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \right) - \left( \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right)$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2$$

### 30.3 Lepkość płynów

$$F = \eta \frac{dv}{dr} S$$

$F \longrightarrow$  siła oporu przy ruchu warstw płynu względem siebie  
 $dv \longrightarrow$  względna prędkość trących o siebie równoległych warstw płynu  
 $dr \longrightarrow$  odległość między warstwami  
 $S \longrightarrow$  pole powierzchni warstw  
 $\eta \longrightarrow$  współczynnik lepkości dynamicznej płynu (lepkość płynu)

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dr}$$

### 30.4 Siła oporu ośrodka

#### Wzór Stokesa

$$F_o = 6\pi\eta Rv$$

$$\rho_{\text{ciecz}} V g + 6\pi\eta R v_g = m g \Rightarrow v_g = \frac{2R^2 g (\rho_{\text{kulka}} - \rho_{\text{ciecz}})}{9\eta}$$

## 31. Termodynamika:

$$T_C = (T - 273, 15)^\circ C \implies \Delta T_C [^\circ C] = \Delta T [K]$$

### 31.1 Ciepło pobrane (oddane)

$$Q = mc_2 \Delta T$$

$$Q = mc_{\text{przem}}$$

$c_w \longrightarrow$  ciepło właściwe

$C = c_w \cdot m \longrightarrow$  pojemność cieplna

$c_{\text{przem}} \longrightarrow$  ciepło przemiany

### 31.2 Przewodzenie ciepła

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$\frac{dQ}{dt} \longrightarrow$  strumień ciepła

$\lambda \longrightarrow$  współczynnik przewodnictwa cieplnego

$A \longrightarrow$  pole powierzchni

$\frac{dT}{dx} \longrightarrow$  gradient temperatury

### 31.3 Rozszerzalność cieplna ciał stałych

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

### 31.4 Rozszerzalność cieplna cieczy

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T$$

### 31.5 Promieniowanie cieplne

#### **Prawo Kirchhoffa**

$$\frac{E(\lambda, T)}{A(\lambda, T)} = \varepsilon(\lambda, T)$$

$\varepsilon(\lambda, T) \longrightarrow$  Stała uniwersalna, jednakowa dla wszystkich ciał

#### **Prawo Stefana-Boltzmann**

$$\varepsilon_T = \sigma T^4$$

$\varepsilon_T \longrightarrow$  moc emitowana przez jednostkę powierzchni ciała

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

#### **Prawo Wienna**

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

$$b = 2898 \cdot 10^{-3} \mu m \cdot K \longrightarrow \text{Stała Wienna}$$

### 31.6 Praca

$$W = -p \cdot \Delta V$$

$p \longrightarrow$  ciśnienie

$\Delta V \longrightarrow$  zmiana objętości

$$W = \int dW = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

## 32. Pierwsza zasada termodynamiki:

$$\Delta U = \Delta Q + W$$



$Q > 0 \longrightarrow$  ciepło dostarczone do układu

$Q < 0 \longrightarrow$  ciepło oddawane przez układu

$W > 0 \longrightarrow$  praca wykonywana nad układem przez siły zewnętrzne

$W < 0 \longrightarrow$  praca wykonana przez układ

### 33. Druga zasada termodynamiki:

$$Q_{\text{pobr}} = W + Q_{\text{odd}}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{pobr}}} = \frac{Q_{\text{pobr}} - Q_{\text{odd}}}{Q_{\text{pobr}}}$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$S = k \cdot \ln \Omega$$

### 34. Kinetyczna teoria gazów:

#### 34.1 Równanie van der Waalsa

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

$p \longrightarrow$  ciśnienie

$v \longrightarrow$  objętość podzielona przez liczbę moli ( $v = \frac{V}{n}$ )

$T \longrightarrow$  temperatura w skali bezwzględnej

$R \longrightarrow$  stała gazowa,  $R = 8,31 \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$

$a \longrightarrow$  poprawka uwzględniająca występowanie się międzycząsteczkowe

$b \longrightarrow$  poprawka uwzględniająca objętość własną cząsteczek

#### 34.2 Izotermy dla gazu rzeczywistego van der Waalsa

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$$

$$V_k = 3b$$

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}$$

$$p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}$$

$$a = 3p_k V_k^2, b = \frac{V_k}{3}$$