hw3 PB21111733 牛东源

第三次作业

4.1 证明式 $f(x,y)\exp[j2\pi(u_0x+v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$ 和式

$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\exp[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N]$ 成立。

4.2 证明 f(x) 的自相关函数的傅里叶变换就是 f(x) 的功率谱 $|F(u)|^2$ 。

4.3 证明离散傅里叶变换和反变换都是周期函数（为简便可以用 1-D 函数为例）。

4.1

① 右式 $= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{N}+\frac{(v-v_0)y}{N}\right)}$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{\frac{j2\pi(u_0x+v_0y)}{N}} \times e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow f(x,y)e^{\frac{j2\pi(u_0x+v_0y)}{N}}.$$

② 右式 $= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$

$$\times\ e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{N}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{u(x-x_0)}{N}+\frac{v(y-y_0)}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x-x_0,y-y_0)e^{-j2\pi\left(\frac{u(x-x_0)}{N}+\frac{v(y-y_0)}{N}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow f(x-x_0,y-y_0)$$

4.2 $F^*(u) \times F(u) = f(x) \circ f(x)$

$\parallel$

$|F(u) \times F(u)| = |F(u)|^2$

即 $f(x) \circ f(x) \Longleftrightarrow |F(u)|^2$

4.3 ① $F(u+N) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi\left(\frac{(u+N)x}{N}\right)}$

$= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)} \cdot e^{-j2\pi \frac{Nx}{N}}$

$= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}$

$= F(u)$

② $f(x+N) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi \frac{u(x+N)}{N}}$

$= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi \frac{ux}{N}} \times e^{j2\pi \frac{Nu}{N}}$

$= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi \frac{ux}{N}} = f(x)$