算法基础 hw1

Q1 1. 正确

$F_m(n) = \sum_{i=1}^{m} f_i(n) = \cancel{\quad}\ mO(g(n))$

对于 $\forall m$. 满足 $F_m(n) = mO(g(n)) = O(g(n))$

2. 错误

令 $f_i(n) = n = g(n) = O(n)$

$F(n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(n) = n^2 \neq O(n)$ 则错

3. 正确

要对 $\{f_1, \cdots\}$ 满足 $\forall i \in N^+$, $f_i(n) = o(f_{i+1}(n)) = o(g(n))$

由 $f_i(n) = o(g(n))$

~~要 $f_i(n)$ =~~ 构造 $f_2(n) \cdots$ 使 $\forall i$ $f_i(n) = o(g(n))$

可构造 $f_i(n) = \sqrt[k]{g(n)}$ $k>1$ 此时满足

又使 $f_i(n) = o(f_{i+1}(n))$

构造 $f_{i+1}(n) = \sqrt[k]{f_i(n)}$ $k>1$

则若 $f_{i+1}(n) = \sqrt[k]{f_i(n) g(n)}$ 时成立

即存在. 正确。

4. 错误

$f(n) + g(n) = \Omega(h(n))$

使 $f(n)$ 和 $g(n)$ 可以在特定 n 值下取到 0. ~~而~~ 但满足 ~~和~~ $= \Omega(h(n))$

即可.

不妨 $f(n)+g(n)=n(\sin(n\pi+\frac{\pi}{4})+2\sqrt{2})$

$=n(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin n\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos n\pi+\sqrt{2})$

~~$=n(\sqrt{2}\sin n\pi+$~~

$=\frac{\sqrt{2}n}{2}(\sin n\pi+1)+\frac{\sqrt{2}n}{2}(\cos n\pi+1)$

令 $\Omega(h(n))=\Theta(n)$

则 $f(n)+g(n)=\Omega(h(n))$

但可以取到 n 值使 $f(n), g(n)\notin\Omega(h(n))$

5.

Q2 $\begin{cases} A(0,n)=n+1 & n\geq 0 \\ A(m+1,0)=A(m,1) & m\geq 0 \\ A(m+1,n+1)=A(m,A(m+1,n)) & m,n\geq 0 \end{cases}$

(1) 递归. 由 $A(0,n)=n+1\geq 1$.

一般情况下 $A(m,n)\geq 1$.

当 $m=0$ $A(0,n)=n+1$

当 $m\neq 0$ $A(m,n)$ 进入递归

假设 $m=k$ 递归可以从 $A(0,n)$ 终止.

当 $m=k+1$ 时 $A(k+1,n)$

$n=0$ 时 $A(k+1,0)=A(k,1)$，由假设,可以终

$n\neq 0$ 时 假设 $n=t$ 时可以终止

当 $n=t+1$ 时 $A(k+1,t+1)$

$=A(k,A(k+1,t))$

由假设 $A(k+1,t)$ 终止,设为 i

$=A(k,i)$ 由假设 终止

则终止。

(2) ~~证 $A(m+1,n)>A(m,n)$~~

~~对于 $A(m,n)$，当 $m=0$ $A(0,n)=n+1$~~

~~当 $m=k$~~

~~对于 $A(m+1,n)$ 当 $n=0$ $A(m+1,0)=A(m,1)$~~

先证 $A(m,n+1)>A(m,n)$

对 $A(m,n+1)$ 当 $m=0$ $A(0,n+1)=n+2>n+1=A(0,n$

当 $m=k+1$, $k\geq 0$

$A(k+1,n+1)=A(k,A(k+1,n))$

下证 $A(m,n)>m+n$

当 $m=0$ $A(0,n)=n+1>n$

假设 $m=k$ 时成立 $A(k,n)>k+n$

$m=k+1$ 时 $A(k+1,n)$ 当 $n=0$ $A(k+1,0)=A(k,1)>k+1$

假设 $n=t$ 成立 $A(k+1,t)>k+1+t$

$n=t+1$ 时 $A(k+1,t+1)=A(k,A(k+1,t))$

$\cancel{>k+A(k+1,t)}$

$\cancel{=k+A(k,1)>2k+1}$

$>k+A(k+1,t)>k+k+1+t=2k+t+1$

$>k+t+2.$

综上 $A(m,n)>m+n$

继续证明：$A(k+1,n+1) = A(k, A(k+1,n)) > k + A(k+1,n)$

$\geq A(k+1,n)$,

综上. $A(m,n+1) > A(m,n)$

证 $A(m+1,n) > A(m,n)$

当 $n=0$ $A(m+1,0) > A(m,1) > A(m,0)$ （由首证）

当 $n=t+1$. $A(m+1,t+1) = A(m, A(m+1,t))$

$> A(m, m+1+t) \geq A(m,t+1)$

综上 $A(m+1,n) > A(m,n)$

3) $\alpha(x) = w(1)$

由 $A(0,n) = n+1 \geq 1$, 令 $x \geq 1$ 取 $x_1 < x_2$

$A(\alpha(x_1), \alpha(x_2)) \leq x_1 < x_2$

$\alpha(x_1) \leq \alpha(x_2)$ 则 $\alpha(x)$ 单调

Q3 (1) 1. $T(n)=3T(\frac{n}{2})+n^2$ $T(n)=\Theta(n^2)$

2. $T(n)=4T(\frac{n}{2})+n^2$ $T(n)=\Theta(n^2\log n)$

3. $T(n)=T(\frac{n}{2})+2^n$ $T(n)=\Theta(2^n)$

4. $T(n)=2^nT(\frac{n}{2})+n^n$ 2^n不是const

5. $T(n)=16T(\frac{n}{4})+n$ $T(n)=\Theta(n^2)$

6. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n$ $T(n)=\Theta(n\lg^2 n)$

7. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$

$\log_2^2=1$ 对于 $\forall\varepsilon>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n}{\lg n}}{n^{1-\varepsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{\lg n}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n}{\lg n}}{n^{1+\varepsilon}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\varepsilon}\lg n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n}{\lg n}}{n\lg^k n}=0 \quad k>0$$

则 $f(n)\notin O(n^{1-\varepsilon})$

$\notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$

$\notin \Theta(n\lg^k n)$

8. $T(n)=2T(\frac{n}{4})+n^{0.51}$ $T(n)=\Theta(n^{0.51})$

9. $T(n)=0.5T(\frac{n}{2})+\frac{1}{n}$ $0.5<1$

10. $T(n)=16T(\frac{n}{4})+n!$ $T(n)=\Theta(n!)$

11. $T(n)=\sqrt{2}\,T(\frac{n}{2})+\lg n$ $T(n)=\Theta(n^{\frac{1}{2}})$

12 $T(n)=3T(\frac{n}{2})+n$ $T(n)=\Theta(n^{\log_2 3})$

13 $T(n)=3T(\frac{n}{3})+\sqrt{n}$ $T(n)=\Theta(n)$

14 $T(n)=4T(\frac{n}{2})+cn$ $T(n)=$ $\Theta(n^2)$

15 $T(n)=3T(\frac{n}{4})+n\lg n$ $T(n)=\Theta(n\lg n)$

16 $T(n)=3T(\frac{n}{3})+\frac{n}{2}$ $T(n)=\cancel{\Theta(n\lg n)}$ $\Theta(n)$

17 $T(n)=6T(\frac{n}{3})+n^2\lg n$ $T(n)=\Theta(n^2\lg n)$

18 $T(n)=4T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$ $T(n)=\Theta(n^2)$

19 $T(n)=64T(\frac{n}{8})-n^2\lg n$ $-n^2\lg n<0$

20 $T(n)=7T(\frac{n}{3})+n^2$ $T(n)=\Theta(n^2)$

21 $T(n)=4T(\frac{n}{2})+\lg n$ $T(n)=\Theta(n^2)$

22 $T(n)=T(\frac{n}{2})+n(2-\cos n)$, $T(n)=\Theta(n)$

23. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n\lg\lg n$ 同了

24. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n(\lg\lg n)^{\gamma}$ 同了

25. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n(\lg\lg\lg n)^{s}}{\lg n\lg\lg n}$ 同了

(2) 7. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$

$e=(1,-1),\ m=1$

$T(n)=\frac{n}{\lg n}\lg n\lg\lg n=n\lg\lg n$

23. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n\lg\lg n$

$e=(1,1,1)\quad m=2$

$T(n)=n\lg n\lg\lg n\lg n=n\lg^2 n\lg\lg n$

24 $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n(\lg\lg n)^r\quad r\neq 0$

$e=(1,0,r)\quad m=2$

$T(n)=n(\lg\lg n)^r\lg n\quad r\neq 0$

25. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n}\quad s\neq 0$

$e=(1,-1,-1,s)\quad m=3$

$$T(n)=\begin{cases} n(\lg\lg\lg n)^s\lg n\lg\lg n\lg n\lg\lg n\lg\lg\lg n & s>-1 \\ \frac{n(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n}\lg n\lg\lg n\lg\lg\lg n\lg\lg\lg\lg n & s=-1 \\ n & s<-1 \end{cases}$$