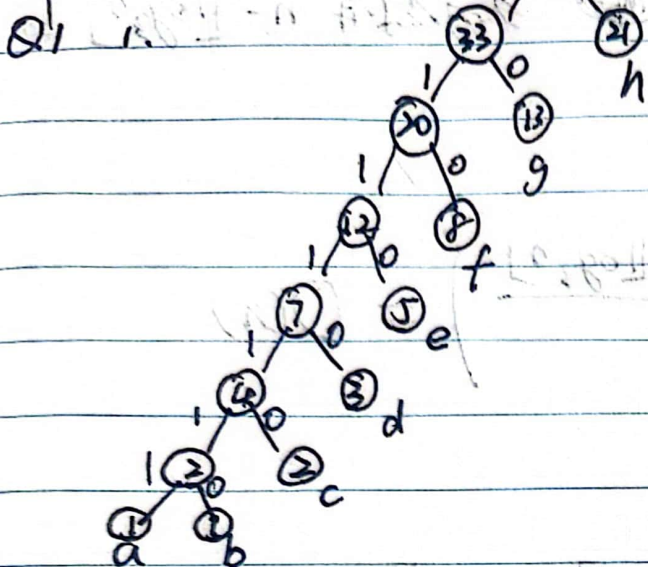


# 算法基础 hws



a: 1111111

b: 1111110

c: 111110

d: 11110

e: 1110

f: 110

g: 10

h: 0

2.  $n$  个字符  $a, a_2, a_3, \dots, a_n$

$a: \underbrace{111 \dots 1}_{n-1}$

$a_{n-1}: 10$

$a_2: \underbrace{111 \dots 10}_{n-2}$

$\dots a_n: 0$

$a_3: \underbrace{111 \dots 10}_{n-3}$

证若  $n=k-1$  时有  $\sum_{i=1}^{k-1} F_i < F_{k+1}$

当  $n=k$  时

$$\sum_{i=1}^k F_i = \sum_{i=1}^{k-1} F_i + F_k < F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$$

即对  $n$  有  $\sum_{i=1}^n F_i < F_{n+2}$

则可得哈夫曼树如上, 则编码为以上形式



Q2 前  $n$  个数中有 ~~至多~~  $\lfloor \log_3 n \rfloor$  个 3 的幂 ~~其他~~ 其余数有  $n - \lfloor \log_3 n \rfloor$

$$\text{代价: } (3^{\lfloor \log_3 n \rfloor} - 1) + (n - \lfloor \log_3 n \rfloor)$$

则摊还代价为  $O\left(\frac{3^{\lfloor \log_3 n \rfloor} - 1 + n - \lfloor \log_3 n \rfloor}{n}\right) = O(1)$   
每个操作。

Q3 一共可能出现 256 个字符，即  $2^8$ ，最大哈夫曼树高为 8 (按设计) ~~即最长~~ 即 ~~最短~~ 哈夫曼编码对应的最短长度为 8 ~~最长~~

下证其为这样的哈夫曼树。

由最大频率低于最小频率的两倍。设最小频率的前两个字符  $a, b$ 。则一定  $a.\text{chance} + b.\text{chance} = \max\{\text{all characters}\}$   
即所有新节点均  $< a+b$  (权值)，则构建哈夫曼树时  
所有节点均为同高度的叶结点。即为上述哈夫曼树。

此时除了每个字符对应的编码可能不同以外，~~其~~ 平均代价  
哈夫曼编码代价 = 8 位固定长度编码代价。





Q4 总代价 为  $\sum_{i=1}^n a_i \times \text{depth}_i$  ( $a_i$  为  $i$  节点的权值,  $\text{depth}_i$  为  $i$  节点深度)

~~又~~ 又

又对于所有非叶节点有  $a_i = a_{i.\text{left}} + a_{i.\text{right}}$

则对所有内部结点的频率统计和, 即对不同  $\text{depth}$  的叶统计了  $\text{depth}$  次

即  $\sum_{i=1}^n a_i \times \text{depth}_i$  相等.

Q5 5角  $a$  个, 2角  $b$  个, 1角  $c$  个, 5分  $d$  个, 2分  $e$  个, 1分  $f$  个

$$n = 50a + 20b + 10c + 5d + 2e + f$$

有  $2 = 1 + 1$  则  $f \leq 1$ . 否则用 2 分硬币搭配 1 分硬币 (可能为 0)

$5 = 2 + 2 + 1$  则  $e \leq 2$ . ~~否则用 5 分和 1 分搭配~~  
否则用 5 分, 2 分, 1 分搭配

~~10 = 5 + 5~~ 则  $d \leq 1$  否则用 1 角和 5 分搭配

$20 = 10 + 10$  则  $c \leq 1$  否则用 2 角和 1 角搭配

$50 = 20 + 20 + 10$  则  $b \leq 2$  否则用 5 角, 2 角, 1 角搭配

又考虑到  $e = 2, f = 1$  时可以用五分, 则  $e + f \leq 2$



2/5 字法:

$$f < 2$$

$$2e + f < 5$$

$$5d + 2e + f < 10$$

$$10c + 5d + 2e + f < 20$$

$$20b + 10c + 5d + 2e + f < 50$$

$$\begin{cases} a = \frac{n}{50} \\ b = \frac{n - 50a}{20} \\ c = \frac{n - 50a - 20b}{10} \end{cases}$$

$$d = \frac{n - 50a - 20b - 10c}{5}$$

$$e = \frac{n - 50a - 20b - 10c - 5d}{2}$$

$$f = n - 50a - 20b - 10c - 5d - 2e$$

从最大面值开始找，到2角，1角... 至找完。





2. 由  $50 \geq 2 \times 20$

$20 \geq 2 \times 10$

$10 \geq 2 \times 5 \Rightarrow c^{k+1} \geq 2 \times c^k$

$5 \geq 2 \times 2$

$2 \geq 2 \times 1$

又由于  $c^0, c^1, c^2, \dots, c^k$  中  $c > 1$  即  $c \geq 2$ .

满足  $c^{k+1} \geq 2 \times c^k$  即大额钱  $c^i$  ~~一定不能~~ 一定至少需要  
2张较小额钱  $c^{i-1}$  来代替.

适合用1. 类似的贪心算法找到最优解

3. 5角 2角 1分

找6角零. 贪心算法 5角 1分 1分 1分 11张

~~找~~ 最少 2角 2角 2角 <sup>10个</sup> 3张

