量子计算作业

PB21111733 **牛庆源**

习题 3.1

> The *fidelity F* of two quantum states $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ is defined by $F \equiv |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$. It is a measure of the distance between the two quantum states: We have $0 \leq F \leq 1$, with $F = 1$ when $|\psi_1\rangle$ coincides with $|\psi_2\rangle$ and $F = 0$ when $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ are orthogonal. Show that $F = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, with α the angle between the Bloch vectors corresponding to the quantum states $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$.

解答:

任何纯量子态可以用 *Bloch* 球表示为

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

其中 θ 是极角， ϕ 是方位角。

对于 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ ，设为

$$|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}|0\rangle + e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}|1\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle + e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle$$

内积为

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + e^{i(\phi_2-\phi_1)}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}$$

则保真度 *fidelity F*为

$$F \equiv |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$$

计算，展开

$$F = \left(\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + \cos(\phi_2-\phi_1)\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)^2 + \left(\sin(\phi_2-\phi_1)\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)^2$$

由 *Bloch* 矢量间的夹角 α 为

$$\cos\alpha = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2-\phi_1)$$

且半角公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$$

代入验证可得

$$F = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

习题 3.2

> Show that the unitary operator moving the state parametrized on the Bloch sphere by the angles (θ_1, ϕ_1) into the state (θ_2, ϕ_2) is given by
>
> $$R_z\left(\frac{\pi}{2}+\phi_2\right)HR_z(\theta_2-\theta_1)HR_z\left(-\frac{\pi}{2}-\phi_1\right)$$
>
> The *phase-shift gate* is defined as
>
> $$R_z(\delta)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\delta}\end{bmatrix}$$

解答:

分解旋转操作即可

1. 应用 $R_z\left(-\frac{\pi}{2}-\phi_1\right)$，将初始方位角 ϕ_1 转换为 0;
2. 应用 H 门，将 *Bloch* 球的旋转轴从 z 轴映射到 x 轴;
3. 应用 $R_z(\theta_2-\theta_1)$，完成从 θ_1 到 θ_2 的旋转;
4. 应用 H 门，将旋转轴从 x 轴映射回 z 轴;
5. 应用 $R_z\left(\frac{\pi}{2}+\phi_2\right)$，将最终方位角调整为 ϕ_2。

即完整酉算符为:

$$U=R_z\left(\frac{\pi}{2}+\phi_2\right)HR_z(\theta_2-\theta_1)HR_z\left(-\frac{\pi}{2}-\phi_1\right)$$

习题 4.1

> 证明贝尔态 $|\phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$ 可以等效表达为 $|\phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle+|bb\rangle)$，其中 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是任意一组正交归一基。

解答:

对任意一组正交归一基 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$，可以表示为:

$$|a\rangle=\cos\theta|0\rangle+e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle$$

$$|b\rangle=-\sin\theta|0\rangle+e^{i\phi}\cos\theta|1\rangle$$

对于 $|aa\rangle+|bb\rangle$ 代入，得到:

$$|aa\rangle=(\cos\theta|0\rangle+e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle)\otimes(\cos\theta|0\rangle+e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle)$$

$$|bb\rangle=(-\sin\theta|0\rangle+e^{i\phi}\cos\theta|1\rangle)(-\sin\theta|0\rangle+e^{i\phi}\cos\theta|1\rangle)$$

$$|aa\rangle+|bb\rangle=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)|00\rangle+(e^{2i\phi}\sin^2\theta+e^{2i\phi}\cos^2\theta)|11\rangle$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle+|bb\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+e^{2i\phi}|11\rangle)$$

由于 $e^{2i\phi}$ 是一个全局相位，对量子态无物理意义，可以等效写为:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle+|bb\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$$

即

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle + |bb\rangle)$$

习题 5.1

> Let $|x\rangle$ be a basis state of n qubits. Prove that
>
> $$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{x\cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2^n}}$$
>
> where $x \cdot z$ is the bitwise inner product of x and z, modulo 2, and the sum is over all $z \in \{0,1\}^n$.

解答:

哈达玛门 H 作用在单比特 $|b\rangle$ ($b \in \{0,1\}$) 为:

$$H|b\rangle = \frac{\sum_{c=0}^{1}(-1)^{b\cdot c}|c\rangle}{\sqrt{2}}$$

其中，$b \cdot c$ 是 b 和 c 的按位内积，由于 $b, c \in \{0,1\}$，也是普通乘积。

哈达玛门对 $|x\rangle$ 的 n 重张量积 $H^{\otimes n}|x\rangle$ 可看作每个比特独立施加哈达玛门，因此:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = H|x_1\rangle \otimes H|x_2\rangle \otimes \ldots \otimes H|x_n\rangle$$

其中 $x = x_1 x_2 \ldots x_n$，且每个 $x_i \in \{0,1\}$。

展开，得到:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{i=1}^{n} \left(\sum_{z_i=0}^{1} (-1)^{x_i \cdot z_i} |z_i\rangle \right)$$

化简:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z_1=0}^{1} \sum_{z_2=0}^{1} \ldots \sum_{z_n=0}^{1} \left(\prod_{i=1}^{n} (-1)^{x_i \cdot z_i} \right) |z_1 z_2 \ldots z_n\rangle$$

将 $z = z_1 z_2 \ldots z_n \in \{0,1\}^n$ 表示为整体向量，得:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{\sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{x\cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2^n}}$$

其中 $x \cdot z = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \mod 2$。

即为结果。