算法 hw 4

Q1 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数序列，满足

1. $a_1 = 1$
2. $a_j \le \max\limits_{1\le i\le j-1} a_i + 1, \ \forall j \in [2, n]$

动态规划计算长度为 n 的正整数序列中满足上条件的序列数目。

设序列长度为 n，$a_n = m$.

则 ① $n=1$ 时 $a_n = a_1 = 1$ 1种

② $a_n = 1$ 时 $n=1$ 1种

③ 当 $n>1$ 时 $\boxed{1}$ 有 $n>m$.

对于 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 有 <1> $a_{n-1} = m-1$，则 $a_n = m$ 1种

<2> $a_{n-1} = m$，则 $1 \le a_n \le m$ m种

$\boxed{2}$ 有 $n = m$.

则 $a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_n = n = m$. 1种

$$\text{则 序列数 } f(n,m) = \begin{cases} 0 & 1 = n < m \quad \text{fault} \\ 1 & m = n \ ①②③\boxed{2} \\ f(n-1, m-1) + m \times f(n-1, m) & ③\boxed{1}<1><2> \end{cases}$$

则总数 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(n, i)$ $O(n^2)$

$O(n)$ $O(n)$

Q_2 weloveUSTC $\longrightarrow$ we love USTC ✓

$\longrightarrow$ welo vell STC ×

q为质量. $x = x_1x_2\cdots x_n \longrightarrow x = y_1y_2\cdots y_k$

$\sum_{i=1}^{k} q(y_i)$

令 $x = z_1z_2$ (其中 $z_1 = x_1x_2\cdots x_k$

$z_2 = x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_n$) 为最佳划分

则 z_1和z_2也一定为 $x_1x_2\cdots x_k$ 和 ($x_{k+1}\cdots x_n$) 的最佳划分

设 $f(i,j)$ 为从 x_i 到 x_j 的划分中的最佳划分 ($\sum q(x_k)$ 最高)

$$f(i,j) = \begin{cases} q(x_i) & i=j \\ \max\left[q(x_i到j),\ \max\limits_{i\le k\le j}(f(i,k)+f(k+1,j))\right] & i<j \end{cases}$$

到 $f(1,n)$ 结束。

由 $1\le i\le n$ $1\le j\le n$, 有 $O(n^2)$

又有 $1\le i\le k\le j\le n$, 有 $O(n)$

则 $O(n^3)$

Q3 n种策略。策略为策略 i 时开销 c_i，年利润 p_i。当前为策略1

计划 m 年。每年只能操作一次。

1. p_i 存入积蓄

2. 积蓄中付 c_j 将策略变为 j（不能带来 p_j 的收益）

$f(i,j)$ 为在第 i 年初策略为 j 时的最大收益

$0 \le i \le m \quad 0 \le j \le n$. 初始化所有 $f(i,j) = -1$

令 $f(0,1)=0$ 表示第0年策略为1

1. p_j 存入积蓄 收益 $f(i-1,j)+p_j$

2. 改策略为 j 收益 $f(i-1,k)-c_j$

$$f(i,j) = \begin{cases} f(i-1,j)+p_j & \text{操作1} \\ \max\{f(i-1,k)-c_j\} & \text{操作2 当前策略为k} \\ \max\{f(i-1,j)+p_j,\ \max[f(i-1,k)-c_j]\} & \text{操作1, 2 选最优} \end{cases}$$

则结果为 $\max\limits_{1\le k\le n} f(m,k)$ → $O(m\times n)$

$O(n)$ ~~$O(m\times n)$~~

故 ~~$T(n)=O$~~ ~~所以~~ $T = O(mn^2)$

Q4. ~~n个位置 选择 $m_1, m_2 \cdots m_n$~~

n个位置，距路口 $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$

要求 1. 对于每个位置i，只开一个摊，收入为 p_i（每晚）

2. ∀2个摊位至少k米远。

设f(i)为开i个摊后最大收益

即 1. 开摊，设当前摊位为i，前一个为j，有 $|m_i - m_j| \geq k$

2. 不开摊，则为 $f(i-1)$

边界 $f(0) = 0$

方程 $f(i) = \max\{f(i-1), \max[f(j) + p_i]\}$

其中 $|m_i - m_j| \geq k$ → $O(n)$

结果 $f(n)$ → $O(n)$（遍历1到n）

则 $O(n^2)$