第五次作业参考答案

By 朱映

第五次作业最大问题:

1. 看清题目，要求用直接证明+演绎定理，就不能只写一种;
2. 演绎定理、反证法等运用时要说明清楚

1. **分别利用直接证明（即根据“证明”的定义，基于三个公理、Γ及 MP 规则进行证明）和演绎定理写出下面的证明过程（注明证明依据）**$\Gamma=\{p,(q\to(p\to r))\}$，**证明**$\Gamma\vdash(q\to r)$

直接证明:

$(1)p$	假定
$(2)p\to(q\to p)$	(L1) 肯定后件律
$(3)q\to p$	(1)，(2) MP
$(4)q\to(p\to r)$	假定
$(5)(q\to(p\to r))\to((q\to p)\to(q\to r))$	(L2) 蕴涵分配律
$(6)(q\to p)\to(q\to r)$	(4)，(5) MP
$(7)q\to r$	(3)，(6) MP

由演绎定理，只需证明：$\Gamma\cup\{q\}\vdash r$

$(1)q$	假定
$(2)q\to(p\to r)$	假定
$(3)p\to r$	(1)，(2) MP
$(4)p$	假定
$(5)r$	(4)，(5) MP

原式得证。

1. **证明下列定理（注明证明依据）**。
   1. $\vdash(q\to p)\to(\neg p\to\neg q)$
   2. $\vdash\neg(p\to q)\to(q\to p)$
   3. $\vdash((p\to q)\to p)\to p$
   4. $\vdash(p\to q)\to((\neg p\to q)\to q)$

   答:

   1. 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{q\to p\}\vdash\neg p\to\neg q$

$(1)\neg\neg q\to q$	双重否定律
$(2)q\to p$	假定
$(3)\neg\neg q\to p$	(1)，(2) HS
$(4)p\to\neg\neg p$	第二双重否定律
$(5)\neg\neg q\to\neg\neg p$	(3)，(4) HS
$(6)(\neg\neg q\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg q)$	(L3) 换位律
$(7)\neg p\to\neg q$	(5)，(6) MP

得证。

1 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{\neg(p \to q)\} \vdash q \to p$

$(1)\neg(p \to q)$	假定
$(2)\neg(p \to q) \to ((p \to q) \to p)$	否定前件律
$(3)(p \to q) \to p$	(1)，(2) MP
$(4)\neg p \to (p \to q)$	否定前件律
$(5)\neg p \to p$	(3)，(4) HS
$(6)(\neg p \to p) \to p$	否定肯定律
$(7)p$	(5)，(6) HS
$(8)p \to (q \to p)$	(L1) 肯定后件率
$(9)q \to p$	(7)，(8) MP

得证

1 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{(p \to q) \to p\} \vdash p$

$(1)(p \to q) \to p$	假定
$(2)\neg p \to (p \to q)$	否定前件律
$(3)\neg p \to p$	(1)，(2) HS
$(4)(\neg p \to p) \to p$	否定肯定律
$(5)p$	(3)，(4) MP

得证

1 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{p \to q\} \vdash (\neg p \to q) \to q$
再次使用演绎定理，只用证明 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$

$(1)p \to q$	假定
$(2)(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	换位律
$(3)\neg q \to \neg p$	(1)，(2) MP
$(4)\neg p \to q$	假定
$(5)\neg q \to q$	(3)，(4) HS
$(6)(\neg q \to q) \to q$	否定肯定律
$(7)q$	(5)，(6) MP

得证

---

1 **不用公理 L3（目前反证律的证明过程中间接地使用了 L3），尝试利用归谬律和双重否定律 $(\vdash \neg\neg p \to p)$推出反证律。**

证明：由反证律前提，我们有：

（1）$\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$

（2）$\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q$

由归谬律可得：

$\Gamma \vdash \neg\neg p$

即存在 $\neg\neg p$ 从 Γ 的证明：

$(1)\ldots$	假定
$(2)\neg\neg p$	$\neg\neg p$ 从 Γ 的证明
$(3)\neg\neg p \to p$	双重否定律
$(4)p$	(2)，(3) MP

于是我们有 $\Gamma \vdash p$，反证律得证。