

# Zusammenfassung\*Einführung in Geometrie/Topologie

gehalten von Dr. Thomas Vogel, Universität Bonn  
im Sommersemester 2013

Felix Beck, Robert Hemstedt  
`r@twopi.eu`

5. Mai 2013

## Hinweise zur Verwendung

Die stets aktuelle Version dieser Zusammenfassung lässt sich finden unter

.

Dort sind auch die `.tex`-Dateien zu finden, wenn man selbst Veränderungen vornehmen möchte. Bitte beachtet die **Lizenzhinweise**.

Werter Kommilitone, diese Zusammenfassung basiert zum größten Teil auf Mitschriften unserer GeoTopo-Vorlesungen bei Dr. Vogel. Leider wird kein Skript zur Verfügung gestellt, sodass wir uns mal drangesetzt haben, selbst eine Zusammenfassung zu texen, da die Gutenberg-Tastatur bei  $\text{\LaTeX}$ -Dokumenten leider nicht so effektiv ist.

Die Nummerierung der Sätze und Kapitelabschnitte erfolgt in der Reihenfolge der persönlichen Aufzeichnung.

Gedacht ist diese Zusammenfassung explizit als Prüfungsvorbereitung und wird daher auch noch bis zur letzten Vorlesung weiterhin ergänzt. Wenn du Anmerkungen, Ergänzungen, Lob oder Kritik haben solltest, dann sprich einfach einen von uns an, schick eine E-Mail oder, was das beste wohl ist, benutze `github.com`, um eine *pull*-Request zu schicken.

Wir haften weder für „fehlende“ Inhalte noch für inhaltliche oder sprachliche Fehler.

Wir hoffen, dass diese Zusammenfassung und der damit verbundene Aufwand sich nicht nur für uns als Verfasser, sondern auch noch für dich als Kommilitone lohnen und der Aufwand auch in Form einer möglichst guten Klausurnote entlohnt wird.

Viel Spaß beim Lernen!

---

\*nach persönlichen Aufzeichnungen

# Lizenz

Ich veröffentliche dieses Dokument unter der Beerware-Lizenz:

„THE BEER-WARE LICENSE“ (Revision 42):  
<rtwopi.eu> schrieb diese Datei. Solange Sie diesen Vermerk nicht entfernen, können Sie mit dem Material machen, was Sie möchten. Wenn wir uns eines Tages treffen und Sie denken, das Material ist es wert, können Sie mir dafür ein Bier ausgeben. Robert Hemstedt

Weitere Hinweise lassen sich finden unter: <http://de.wikipedia.org/wiki/Beerware>

## 1 Metrische Räume

**Definition 1.1:** Sei  $(X, d)$  eine Menge mit  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\forall x, y, z \in X$

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \\d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\d(x, y) &= d(y, x) \\d(x, z) &\geq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

Dann heißt  $(X, d)$  **metrischer Raum**.

**Definition 1.2:** Seien  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  metrische Räume.

Die Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  ist eine **Isometrie**, falls  $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$

**Definition 1.3:** Die Abbildung  $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$  ist **stetig** in  $x \in X$ , falls für alle  $\delta > 0$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $f(B_\epsilon(x)) \subset B_\delta(f(x))$ , wobei  $B_r(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$  der **offene  $r$ -Ball** um  $x$  ist.

**Definition 1.4:** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

$U \subset X$  ist **offen**, falls für alle  $u \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $B_\epsilon(u) \subset U$ .

$U \subset X$  ist **abgeschlossen**, falls  $X \setminus U$  offen ist.

$U \subset X$  ist eine **Umgebung** von  $u \in U$ , falls ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $B_\epsilon(u) \subset U$

$X$  und  $\emptyset$  sind beide zugleich offen und abgeschlossen.

Offene Bälle sind offen.

**Lemma 1.5:** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

(i) Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge,  $U_{i \in I} \subset X$  offen  $\forall i \in I$ . Dann ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$  offen.

(ii) Sei  $I$  eine endliche Indexmenge,  $U_{i \in I} \subset X$  offen  $\forall i \in I$ . Dann ist  $\bigcap_{i \in I} U_i \subset X$  offen.

**Definition 1.6:** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  **konvergiert** gegen  $x \in X$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $d(x, x_n) < \epsilon$  für alle  $n \geq N(\epsilon)$ .

Eine Folge  $(x_n)$  heißt **Cauchy-Folge**, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists N : d(x_n, x_m) < \epsilon \forall n, m > N$ .

**Definition 1.7:**  $(X, d)$  ist **beschränkt**, falls  $\exists C \in \mathbb{R} : d(x, y) < C \quad \forall x, y \in X$ .

$(X, d)$  ist **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

**Definition 1.8:** Sei  $X$  eine Menge und  $d, d'$  Metriken auf  $X$ .  
 $d$  und  $d'$  sind **äquivalent**, falls

- für alle  $x \in X, r > 0$  es ein  $r' > 0$  gibt, sodass  $B_{r'}^{d'}(x) \subset B_r^d(x)$
- für alle  $x \in X, r' > 0$  es ein  $r > 0$  gibt, sodass  $B_r^d(x) \subset B_{r'}^{d'}(x)$

Sind  $d, d'$  äquivalente Metriken, dann ist  $U \subset (X, d)$  offen genau dann, wenn  $U \subset (X, d')$  offen ist;  $x_n \rightarrow x$  in  $(X, d)$  genau dann, wenn  $x_n \rightarrow x$  in  $(X, d')$ .

Für Beschränktheit und Vollständigkeit gibt es keine analogen Aussagen:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$  eine Metrik auf  $X$ , die äquivalent ist zu  $d$ . Aber  $d'$  ist immer beschränkt (zB.  $C = 1$ ), unabhängig davon, ob  $d$  beschränkt ist oder nicht.

$(X = [0, \infty], d_{St}(x, y) = |x - y|)$  ist vollständig.

$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \right|$  ist äquivalent zu  $d_{St}$  und  $x_n = n$  ist eine Cauchy-Folge bzgl.  $d'$ , aber nicht bzgl.  $d$ .

## 2 Topologische Räume

**Definition 2.1:** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}(X)$  ein System von Teilmengen von  $X$ , sodass

1.  $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
2.  $I$  beliebige Indexmenge,  $U_{i,i \in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$
3.  $I$  endliche Indexmenge,  $U_{i,i \in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Dann heißt  $\mathcal{O}$  **Topologie** auf  $X$ .

Sei  $X$  eine nichtleere Menge.

Triviale Topologie:  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$

Diskrete Topologie:  $\mathcal{O} = \mathbb{P}(X)$

Für jeden metrischen Raum  $(X, d)$  induziert  $d$  eine Topologie, die nur von der Äquivalenzklasse von  $d$  abhängt.

**Definition 2.2:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $B \subset X$  ist **abgeschlossen**, falls  $B^C := X \setminus B$  offen ist.

Hinweis: eine Teilmenge  $A \subset (X, \mathcal{O})$  kann weder abgeschlossen noch offen sein. Als Beispiel sei  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  genannt.

**Definition 2.3:** Sei  $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}')$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

$f$  ist **stetig** genau dann, wenn für alle  $V \subset \mathcal{O}'$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen ist.

$f$  ist ein **Homöomorphismus**, falls  $f$  stetig, bijektiv und  $f^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

**Definition 2.4:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.

$A \subset X$  ist **Umgebung** von  $x$ , falls es  $U \in \mathcal{O}$  gibt, sodass  $x \in U \subset A$ .

$f : X \rightarrow Y$  ist **stetig in  $x$** , falls für jede Umgebung  $V$  von  $f(x) \in Y$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  existiert, sodass  $f(U) \subset V$ .

**Lemma 2.5:** Eine Teilmenge  $A \subset (X, \mathcal{O})$  ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Ist  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  sowie  $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{O} \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ , gilt:

- (i)  $x \in U$  für  $U \in \mathcal{U}_x$
- (ii)  $U \in \mathcal{U}_x$  und  $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$
- (iii)  $U_1, U_2, \dots, U_r \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \bigcup_{i=1}^r U_i \in \mathcal{U}_x$
- (iv) für jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}_x$  gibt es eine Menge  $V \subset U$  mit  $x \in V$ , sodass  $V$  Umgebung ist für jedes  $y \in V$ .

Umgekehrt gilt folgender

**Satz 2.6:** Sei  $X$  eine Menge. Für jedes  $x \in X$  sei ein System  $\mathcal{U}_x$  von nichtleeren Teilmengen gewählt, sodass (i) - (iv) erfüllt sind. Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , sodass die  $\mathcal{O}$ -Umgebungen  $\mathcal{W}_x$  von  $X$  genau die Systeme  $\mathcal{U}_x$  sind.

**Definition 2.7:** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  Topologien auf  $X$ .

$\mathcal{O}_1$  ist **größer** als  $\mathcal{O}_2$ , falls  $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ .

$\mathcal{O}_1$  ist **feiner** als  $\mathcal{O}_2$ , falls  $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ .

Beliebige Durchschnitte von Topologien ergeben wieder Topologien, die Vereinigung von zwei oder mehr Topologien ist aber im Allgemeinen keine.

Sei  $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine grösste Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{S}$  enthält:  $\mathcal{O}(\mathcal{S}) := \bigcup_{\mathcal{O} \text{ Topo. } \mathcal{S} \subset \mathcal{O}} \mathcal{O}$ . Dies ist wohldefiniert, da zumindest  $\mathbb{P}(X)$  eine Topologie mit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$  ist.

**Definition 2.8:** Sei  $\mathcal{O}$  eine Topologie,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ , mit  $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}$ . Dann ist  $\mathcal{S}$  eine **Subbasis** von  $\mathcal{O}$ .

$\mathcal{S}$  ist eine **Basis** von  $\mathcal{O}$ , falls jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{S}$  ist.

### 3 Konstruktion neuer Topologien aus gegebenen

Seien  $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$  topologische Räume. Dann definiert man auf  $X = X_1 \dot{\cup} X_2$  eine Topologie durch ihre Basis  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Insbesondere sind dann die Inklusionen  $\begin{cases} i_1 : X_1 \rightarrow X \\ i_2 : X_2 \rightarrow X \end{cases}$  beide stetig. Diese Topologie ist die grösste mit dieser Eigenschaft.

**Definition 3.1:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Dann heisst  $\mathcal{O}_A := \{U \subset A \mid \text{es gibt } V \subset X \text{ offen : } V \cap A = U\}$  **Teilraumtopologie**.

Seien  $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$  topologische Räume und  $X = X_1 \times X_2$ . Dann ist  $\mathcal{O}_X := \{W \mid \text{für } (x_1, x_2) \in W \text{ gibt es Umgebungen } U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2 \text{ von } x_1 \text{ bzw. } x_2, \text{ sodass } U_1 \times U_2 \subset W\}$  die grösste Topologie, sodass die Projektionen  $\begin{cases} \pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \\ \pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2 \end{cases}$  beide stetig sind.

Sei  $X_{i,i \in I}$  eine beliebige Anzahl an topologischen Räumen,  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Die Produkttopologie  $\mathcal{O}_X$  auf  $\prod_{i \in I} X_i$  ist die grösste Topologie, sodass die Projektionen  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \quad \forall j \in I$  stetig sind.

Also enthält  $\mathcal{O}_x$  die Mengen  $\pi_j^{-1}(U_j)$  für  $U_j \subset X_j$  offen und endliche Schnitte solcher Mengen, sowie beliebige Vereinigungen endlicher Schnitte.

**Definition 3.2:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Die Quotiententopologie auf  $X/\sim$  ist die feinste Topologie, sodass  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  stetig ist. D.h.  $A \subset X/\sim$  ist genau dann offen, falls  $\pi^{-1}(A)$  offen ist.

**Definition 3.3:** Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen  $f : X \rightarrow Y$  ist **offen** (bzw. **abgeschlossen**), falls das Bild jeder offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmenge selbst offen (bzw. abgeschlossen) ist.

### 3.0.1 Verkleben von topologischen Räumen

Seien  $X, X'$  topologische Räume,  $f : X \supset Y \rightarrow X'$  eine Abbildung. Auf  $X \dot{\cup} X'$  definiert man

$$\sim \text{ durch } w \sim z \Leftrightarrow \begin{cases} w = z \\ w, z \in Y \text{ und } f(w) = f(z) \\ w \in Y, z \in X' \text{ und } f(w) = z \\ w \in X', z \in Y \text{ und } f(z) = w \end{cases}$$

**Definition 3.4:**  $X \dot{\cup} X'/\sim =: X \cup_f X'$  ist der durch Zusammenkleben von  $X, X'$  mit  $f$  entstandene Raum.

## 4 Neue Teilmengen aus alten

**Definition 4.1:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$ .

$\mathring{A}$  (innerer Kern von  $A$ ) ist die größte offene Teilmenge von  $A$ .  $\mathring{A} = \bigcup_{B \subset A \text{ offen}} B$

$\bar{A}$  (Abschluss von  $A$ ) ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.  $\bar{A} = \bigcap_{B \supset A \text{ abg.}} B$

$x \in X$  ist ein Berührungspunkt von  $A$ , falls jede Umgebung  $U$  von  $x$   $A$  schneidet.

$x \in X$  ist ein Randpunkt von  $A$ , falls  $x$  ein Berührungspunkt von  $A$  und  $X \setminus A$  ist.

$\delta A$  ist die Menge aller Randpunkte von  $A$ .

**Lemma 4.2:**  $\delta A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (X \setminus \mathring{A})$  ist abgeschlossen.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$  für jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  ist  $A \cap U \neq \emptyset$

Insbesondere:  $x \in \bar{A} \Rightarrow x$  ist Berührungspunkt von  $A$ .

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow x$  ist kein Berührungspunkt von  $X \setminus A$

**Definition 4.3:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Dann ist  $x \in X$  ein Häufungspunkt der Folge, falls jede Umgebung von  $x$  unendlich viele Folgenglieder enthält.

Ist  $x$  Häufungspunkt von  $(x_n)$ . Dann gibt es im Allgemeinen keine Teilfolge von  $x_n$ , die gegen  $x$  konvergiert.

**Definition 4.4:** Ein topologischer Raum erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom**, falls für jedes  $x \in X$  eine Menge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Umgebungen (von  $x$ ) existiert, sodass für  $V$ , beliebige Umgebung von  $x$ , ein  $n(V)$  existiert, sodass  $U_{n(V)} \subset V$ .

**Definition 4.5:** Ein topologischer Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

**Satz 4.6:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Äquivalent sind:

- (a)  $f$  ist stetig
- (b)  $V \subset Y$  abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset X$  abgeschlossen
- (c)  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  für alle  $A \subset X$ .

## 5 Zusammenhängende Räume

**Definition 5.1:** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt **zusammenhängend**, falls  $X$  nicht in nichtleere disjunkte offene Teilmengen zerlegt werden kann, d.h.  $X = U_1 \cup U_2$ ;  $U_1, U_2$  offen,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$  oder  $U_2 = \emptyset$ .

**Satz 5.2:** Sei die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $X$  zusammenhängend. Dann ist  $f(X)$  zusammenhängend (in der Teilraumtopologie von  $Y$ ). Insbesondere sind Quotienten zusammenhängender Räume zusammenhängend.

**Satz 5.3:** Sei  $A \subset X$  zusammenhängend. Dann ist auch  $\bar{A}$  zusammenhängend und, falls  $A \subset B \subset \bar{A}$ , auch  $B$ .

**Satz 5.4:** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $X_{i,i \in I} \subset X$  zusammenhängende Teilräume mit  $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ ,  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ . Dann ist  $X$  zusammenhängend.

**Korollar 5.5:** Sei  $x \in X$  ein Punkt in einem topologischen Raum  $X$ . Dann gibt es eine größte zusammenhängende Teilmenge  $C_x \subset X$ , sodass  $x \in C_x$  und  $C_x \subset X$  abgeschlossen ist.

**Definition 5.6:**  $C_x$  ist die **Zusammenhangskomponente** von  $x \in X$ .

**Definition 5.7:** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte  $x_0, x_1 \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ("Weg") mit  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$  existiert.

**Satz 5.8:** Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  wegzusammenhängend  $\Rightarrow X$  zusammenhängend.

**Bemerkung 5.9:** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $X_{i,i \in I} \subset X$  wegzusammenhängende Teilräume mit  $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ ,  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ . Dann ist  $X$  wegzusammenhängend.

**Definition 5.10:** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal zusammenhängend**, falls für jeden Punkt  $x$  jede Umgebung von  $x$  eine offene zusammenhängende Umgebung von  $x$  enthält.

Nicht jeder (weg-)zusammenhängender topologischer Raum ist auch lokal zusammenhängend.

**Satz 5.11:**  $X$  lokal zusammenhängender topologischer Raum  $\Leftrightarrow$  jede Zusammenhangskomponente in jeder offenen Menge ist offen.

**Korollar 5.12:**  $X$  lokal zusammenhängender topologischer Raum  $\Rightarrow$  Jede Zusammenhangskomponente ist offen.

## 6 Trennungsaxiome

**Definition 6.1:** Ein topologischer Raum  $X$  ist **Hausdorff'sch** ( $T_2$ ), falls für je zwei Punkte  $x \neq x'$  offene Umgebungen  $U, U', x \in U, x' \in U'$  existieren, sodass  $U \cap U' = \emptyset$ .

Nutzen der Hausdorff'sch-Eigenschaft: Jede konvergente Folge (Netz, Filter) hat genau einen Grenzwert.

**Satz 6.2:** (a) Teilräume von  $T_2$ -Räumen sind  $T_2$ -Räume.

(b) Produkträume  $\prod_{i \in I} X_i$  sind genau dann  $T_2$ -Räume, wenn für alle  $i \in I$   $X_i$   $T_2$ -Raum ist.

(c) Quotienten von  $T_2$ -Räumen sind im Allgemeinen keine  $T_2$ -Räume.

**Satz 6.3:** (a) Ein topologischer Raum  $X$  ist Hausdorff'sch genau dann, wenn  $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$  abgeschlossen ist.

(b) Sei die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  (zwischen topologischen Räumen) stetig und  $Y$  Hausdorff'sch. Dann ist  $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$  abgeschlossen.

**Definition 6.4:** Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $A \subset X$  heißt **dicht**, wenn  $\bar{A} = X$

**Satz 6.5:** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und  $Y$  Hausdorff'sch. Für  $A \subset X$  gilt dann:  $f = g \Leftrightarrow f|_A = g|_A$

**Definition 6.6:** Ein topologischer Raum  $X$  hat die  $T_1$ -Eigenschaft, wenn für  $x \neq x' \in X$  Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $U'$  von  $x'$  existieren, sodass  $x \in U, x' \in U'$ , aber  $x \notin U', x' \notin U$ .

**Satz 6.7:** Für einen topologischen Raum  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

(a)  $X$  hat die  $T_1$ -Eigenschaft

(b) jeder Punkt ist abgeschlossen

(c)  $\forall A \subset X$  gilt  $A = \bigcap_{U \supset A, \text{ offen}} U$

## 7 Kompaktheit

**Definition 7.1:** Ein topologischer Raum  $X$  ist **kompakt**, falls für jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. für  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i$  offen für alle  $i \in I$  einer beliebigen Indexmenge, eine endliche Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_r\}$  existiert, sodass  $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ .

**Satz 7.2:**  $X$  kompakter topologischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\Rightarrow f$  ist beschränkt.

**Satz 7.3:**  $[0, 1]$  ist kompakt mit der Standardtopologie.

**Lemma 7.4:** Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ , sodass es für jedes Intervall der Länge  $\delta$  ein  $i \in I$  gibt, für das  $U_i$  dieses Intervall ganz enthält.

**Satz 7.5:** Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f(X)$  kompakt (in der Teilraumtopologie von  $Y$ ).

**Korollar 7.6:** *Quotienten kompakter topologischer Räume sind kompakt.*

**Satz 7.7:** *Sei  $X$  kompakter topologischer Raum, und  $A \subset X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt (in der Teilraumtopologie).*

**Satz 7.8:** *Seien  $X, Y$  kompakte topologische Räume. Dann ist  $X \times Y$  kompakt.*

**Korollar 7.9:** *Endliche Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt.*

Allgemein gilt sogar der

**Satz 7.10:** *(von Tychonoff, 1930)*

*Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine beliebig große Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist  $\prod_{i \in I} X_i$  kompakt.*

Dieser ist jedoch äquivalent zum umstrittenen Auswahlaxiom (Axiom of Choice):

Sei  $(B_i)_{i \in I}$  eine beliebig große Familie nichtleerer Mengen. Dann gibt es  $F : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$ , sodass  $F(i) \in B_i$ .

**Bemerkung 7.11:** Ist für zwei topologische Räume  $X, Y$  der Produktraum  $X \times Y$  kompakt, so sind schon  $X, Y$  kompakt. Dies gilt ebenfalls für unendliche Produkte.

**Satz 7.12:** *Sei  $X$  ein Hausdorffraum,  $A \subset X$  kompakt. Dann ist  $A$  abgeschlossen.*

**Bemerkung 7.13:** Ist  $X$  kompakter Hausdorffraum,  $A \subset X$  kompakt bzw. abgeschlossen und  $x \in X \setminus A$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  und  $V \supset A$  offen, sodass  $U \cap V = \emptyset$ . Ist weiter  $B \subset X$  abgeschlossen bzw. kompakt,  $A \cap B = \emptyset$ , gibt es  $V_1 \supset A$  und  $V_2 \supset B$  offen mit  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Das heißt, in kompakten Hausdorffräumen kann man abgeschlossene Mengen von Punkten bzw. einer anderen disjunkten abgeschlossenen Menge trennen.

## 8 Probleme/Nutzen von Folgen

**Definition 8.1:** *Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist **folgenstetig**, falls aus  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  folgt, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $Y$ .*

**Satz 8.2:** (a) *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist  $f$  folgenstetig.*

(b) *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine folgenstetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist  $f$  stetig.*

**Lemma 8.3:** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(a)  *$X$  ist kompakt.*

(b) *Seien  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossen für eine beliebige Indexmenge  $I$ , sodass  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ . Dann*

*existieren  $i_1, \dots, i_r \in I, r \in \mathbb{N}$  mit  $\bigcap_{j=1}^r A_{i_j} = \emptyset$*

**Satz 8.4:** *Sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $X$ . Dann hat  $(x_n)$  einen Häufungspunkt.*



**Definition 8.5:** Ein topologischer Raum ist **folgenkompakt**, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

$\mathbb{P}(\mathbb{N})$  ist kompakt (Tychonoff), aber nicht folgenkompakt. Es gibt auch topologische Räume, die folgenkompakt, aber nicht kompakt sind.

**Satz 8.6:** Sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist  $X$  folgenkompakt.

**Satz 8.7:** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $X$  kompakt  $\Leftrightarrow X$  folgenkompakt.

## 9 Reguläre/Normale Räume und Urysohns Lemma

Neben  $T_1$  und  $T_2$  gibt es weitere Trennungsaxiome. Die Literatur ist jedoch uneinheitlich.

**Definition 9.1:** Ein topologischer Raum  $X$  hat die  $T_3$ -Eigenschaft, wenn für alle  $x \in X$ ,  $A \subset X$  abgeschlossen mit  $x \notin A$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  und  $U_A$  offen mit  $A \subset U_A$  gibt, sodass  $U_x \cap U_A = \emptyset$ .

Ein topologischer Raum  $X$  hat die  $T_1$ -Eigenschaft, wenn für alle disjunkten  $A, B \subset X$ , abgeschlossen,  $U_A$  und  $U_B$  offen existieren, sodass  $A \subset U_A$ ,  $B \subset U_B$  und  $U_A \cap U_B = \emptyset$ .

Ein topologischer Raum  $X$  hat die  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Eigenschaft, wenn es für alle  $x \in X$  und  $A \subset X$  abgeschlossen mit  $x \notin A$  eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  gibt mit  $f(x) = 1$  und  $f|_A \equiv 0$ .

$$T_2 \Rightarrow T_1$$

$$T_1 \wedge T_3 \Rightarrow T_2$$

**Definition 9.2:** Ein topologischer Raum heißt **regulär**, falls er die  $T_1$ - und die  $T_3$ -Eigenschaft hat.

Ein topologischer Raum heißt **vollständig regulär**, falls er die  $T_{3\frac{1}{2}}$ - und die  $T_1$ -Eigenschaft hat.

Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls er die  $T_1$ - und die  $T_4$ -Eigenschaft hat.

Kompakte Hausdorffräume sind regulär und normal.

**Lemma 9.3:** (von Urysohn)

Erfülle  $X$  die  $T_4$ -Eigenschaft und seien  $A, B \subset X$  abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , so dass  $f|_A \equiv 1$  und  $f|_B \equiv 0$ .

**Satz 9.4:** (Fortsetzungssatz von Tietze)

Erfülle  $X$  die  $T_4$ -Eigenschaft und sei  $A \subset X$  abgeschlossen. Weiterhin sei  $f : A \rightarrow [a, b]$  stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung  $F : X \rightarrow [a, b]$  und  $F|_A = f$ .

**Korollar 9.5:** Erfülle  $X$  die  $T_4$ -Eigenschaft, sei  $A \subset X$  abgeschlossen und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F|_A = f$ .

**Definition 9.6:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei weiter  $\tau_\lambda : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $\lambda \in \Lambda$  eine Sammlung stetiger Funktionen, die **lokal endlich** ist, d.h. für jedes  $x \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $V(x)$ , sodass  $V(x) \cap \text{Tr}(\tau_\lambda) = \emptyset$  für alle bis auf endlich viele der  $\lambda \in \Lambda$ , und  $\sum_\lambda \tau_\lambda(x) \equiv 1$ . Dann ist  $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine **Zerlegung der 1**.

Sie ist  $(U_i)_{i \in I}$  **untergeordnet**, falls  $\forall \lambda \exists i(\lambda) : \text{Tr}(\tau_\lambda) \subset U_{i(\lambda)}$ .