

Zusammenfassung*Einführung in Geometrie/Topologie

gehalten von Dr. Thomas Vogel, Universität Bonn
im Sommersemester 2013

Felix Beck, Robert Hemstedt
`r@twopi.eu`

21. April 2013

Hinweise zur Verwendung

Die stets aktuelle Version dieser Zusammenfassung lässt sich finden unter

.
Dort sind auch die `.tex`-Dateien zu finden, wenn man selbst Veränderungen vornehmen möchte.
Bitte beachtet die **Lizenzhinweise**.

Werter Kommilitone, diese Zusammenfassung basiert zum größten Teil auf Mitschriften unserer GeoTopo-Vorlesungen bei Dr. Vogel. Leider wird kein Skript zur Verfügung gestellt, sodass wir uns mal drangesetzt haben, selbst eine Zusammenfassung zu texen, da die Gutenberg-Tastatur bei \LaTeX -Dokumenten leider nicht so effektiv ist.

Die Nummerierung der Sätze und Kapitelabschnitte erfolgt in der Reihenfolge der persönlichen Aufzeichnung.

Gedacht ist diese Zusammenfassung explizit als Prüfungsvorbereitung und wird daher auch noch bis zur letzten Vorlesung weiterhin ergänzt. Wenn du Anmerkungen, Ergänzungen, Lob oder Kritik haben solltest, dann sprich einfach einen von uns an, schick eine E-Mail oder, was das beste wohl ist, benutze `github.com`, um eine *pull*-Request zu schicken.

Wir haften weder für „fehlende“ Inhalte noch für inhaltliche oder sprachliche Fehler.

Wir hoffen, dass diese Zusammenfassung und der damit verbundene Aufwand sich nicht nur für uns als Verfasser, sondern auch noch für dich als Kommilitone lohnen und der Aufwand auch in Form einer möglichst guten Klausurnote entlohnt wird.

Viel Spaß beim Lernen!

*nach persönlichen Aufzeichnungen

Lizenz

Ich veröffentliche dieses Dokument unter der Beerware-Lizenz:

„THE BEER-WARE LICENSE“ (Revision 42):
<rtwopi.eu> schrieb diese Datei. Solange Sie diesen Vermerk nicht entfernen, können Sie mit dem Material machen, was Sie möchten. Wenn wir uns eines Tages treffen und Sie denken, das Material ist es wert, können Sie mir dafür ein Bier ausgeben. Robert Hemstedt

Weitere Hinweise lassen sich finden unter: <http://de.wikipedia.org/wiki/Beerware>

1 Metrische Räume

Definition 1.1: Sei (X, d) eine Menge mit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\forall x, y, z \in X$

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \\d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\d(x, y) &= d(y, x) \\d(x, z) &\geq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

Dann heißt (X, d) **metrischer Raum**.

Definition 1.2: Seien (X, d) , (X', d') metrische Räume.

Die Abbildung $f : X \rightarrow X'$ ist eine **Isometrie**, falls $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$

Definition 1.3: Die Abbildung $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ ist **stetig** in $x \in X$, falls für alle $\delta > 0$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $f(B_\epsilon(x)) \subset B_\delta(f(x))$, wobei $B_r(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$ der **offene r -Ball** um x ist.

Definition 1.4: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

$U \subset X$ ist **offen**, falls für alle $u \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(u) \subset U$.

$U \subset X$ ist **abgeschlossen**, falls $X \setminus U$ offen ist.

$U \subset X$ ist eine **Umgebung** von $u \in U$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(u) \subset U$

X und \emptyset sind beide zugleich offen und abgeschlossen.

Offene Bälle sind offen.

Lemma 1.5: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Sei I eine beliebige Indexmenge, $U_{i \in I} \subset X$ offen $\forall i \in I$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ offen.

(ii) Sei I eine endliche Indexmenge, $U_{i \in I} \subset X$ offen $\forall i \in I$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i \subset X$ offen.

Definition 1.6: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $d(x, x_n) < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

Eine Folge (x_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls $\forall \epsilon > 0 \exists N : d(x_n, x_m) < \epsilon \forall n, m > N$.

Definition 1.7: (X, d) ist **beschränkt**, falls $\exists C \in \mathbb{R} : d(x, y) < C \quad \forall x, y \in X$.

(X, d) ist **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Definition 1.8: Sei X eine Menge und d, d' Metriken auf X .
 d und d' sind **äquivalent**, falls

- für alle $x \in X, r > 0$ es ein $r' > 0$ gibt, sodass $B_{r'}^{d'}(x) \subset B_r^d(x)$
- für alle $x \in X, r' > 0$ es ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r^d(x) \subset B_{r'}^{d'}(x)$

Sind d, d' äquivalente Metriken, dann ist $U \subset (X, d)$ offen genau dann, wenn $U \subset (X, d')$ offen ist; $x_n \rightarrow x$ in (X, d) genau dann, wenn $x_n \rightarrow x$ in (X, d') .

Für Beschränktheit und Vollständigkeit gibt es keine analogen Aussagen:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ eine Metrik auf X , die äquivalent ist zu d . Aber d' ist immer beschränkt (zB. $C = 1$), unabhängig davon, ob d beschränkt ist oder nicht.

$(X = [0, \infty], d_{St}(x, y) = |x - y|)$ ist vollständig.

$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \right|$ ist äquivalent zu d_{St} und $x_n = n$ ist eine Cauchy-Folge bzgl. d' , aber nicht bzgl. d .

2 Topologische Räume

Definition 2.1: Sei X eine Menge und $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X , sodass

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
2. I beliebige Indexmenge, $U_{i,i \in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$
3. I endliche Indexmenge, $U_{i,i \in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Dann heißt \mathcal{O} **Topologie** auf X .

Sei X eine nichtleere Menge.

Triviale Topologie: $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$

Diskrete Topologie: $\mathcal{O} = \mathbb{P}(X)$

Für jeden metrischen Raum (X, d) induziert d eine Topologie, die nur von der Äquivalenzklasse von d abhängt.

Definition 2.2: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $B \subset X$ ist **abgeschlossen**, falls $B^C := X \setminus B$ offen ist.

Hinweis: eine Teilmenge $A \subset (X, \mathcal{O})$ kann weder abgeschlossen noch offen sein. Als Beispiel sei $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ genannt.

Definition 2.3: Sei $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}')$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

f ist **stetig** genau dann, wenn für alle $V \subset \mathcal{O}'$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist.

f ist ein **Homöomorphismus**, falls f stetig, bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig ist.

Definition 2.4: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

$A \subset X$ ist **Umgebung** von x , falls es $U \in \mathcal{O}$ gibt, sodass $x \in U \subset A$.

$f : X \rightarrow Y$ ist **stetig in x** , falls für jede Umgebung V von $f(x) \in Y$ eine Umgebung U von x existiert, sodass $f(U) \subset V$.

Lemma 2.5: Eine Teilmenge $A \subset (X, \mathcal{O})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $x \in X$ sowie $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{O} \mid U \text{ Umgebung von } x\}$, gilt:

- (i) $x \in U$ für $U \in \mathcal{U}_x$
- (ii) $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$
- (iii) $U_1, U_2, \dots, U_r \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \bigcup_{i=1}^r U_i \in \mathcal{U}_x$
- (iv) für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ gibt es eine Menge $V \subset U$ mit $x \in V$, sodass V Umgebung ist für jedes $y \in V$.

Umgekehrt gilt folgender

Satz 2.6: Sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei ein System \mathcal{U}_x von nichtleeren Teilmengen gewählt, sodass (i) - (iv) erfüllt sind. Dann gibt es genau eine Topologie \mathcal{O} auf X , sodass die \mathcal{O} -Umgebungen \mathcal{W}_x von X genau die Systeme \mathcal{U}_x sind.

Definition 2.7: Sei X eine Menge und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X .

\mathcal{O}_1 ist **größer** als \mathcal{O}_2 , falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

\mathcal{O}_1 ist **feiner** als \mathcal{O}_2 , falls $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$.

Beliebige Durchschnitte von Topologien ergeben wieder Topologien, die Vereinigung von zwei oder mehr Topologien ist aber im Allgemeinen keine.

Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$. Dann gibt es genau eine grösste Topologie auf X , die \mathcal{S} enthält: $\mathcal{O}(\mathcal{S}) := \bigcup_{\mathcal{O} \text{ Topo. } \mathcal{S} \subset \mathcal{O}} \mathcal{O}$. Dies ist wohldefiniert, da zumindest $\mathbb{P}(X)$ eine Topologie mit $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$ ist.

Definition 2.8: Sei \mathcal{O} eine Topologie, $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, mit $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}$. Dann ist \mathcal{S} eine **Subbasis** von \mathcal{O} .

\mathcal{S} ist eine **Basis** von \mathcal{O} , falls jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus \mathcal{S} ist.

3 Konstruktion neuer Topologien aus gegebenen

Seien $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Dann definiert man auf $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ eine Topologie durch ihre Basis $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Insbesondere sind dann die Inklusionen $\begin{cases} i_1 : X_1 \rightarrow X \\ i_2 : X_2 \rightarrow X \end{cases}$ beide stetig. Diese Topologie ist die grösste mit dieser Eigenschaft.

Definition 3.1: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann heisst $\mathcal{O}_A := \{U \subset A \mid \text{es gibt } V \subset X \text{ offen : } V \cap A = U\}$ **Teilraumtopologie**.

Seien $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und $X = X_1 \times X_2$. Dann ist $\mathcal{O}_X := \{W \mid \text{für } (x_1, x_2) \in W \text{ gibt es Umgebungen } U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2 \text{ von } x_1 \text{ bzw. } x_2, \text{ sodass } U_1 \times U_2 \subset W\}$ die grösste Topologie, sodass die Projektionen $\begin{cases} \pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \\ \pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2 \end{cases}$ beide stetig sind.

Sei $X_{i,i \in I}$ eine beliebige Anzahl an topologischen Räumen, $X = \prod_{i \in I} X_i$. Die Produkttopologie \mathcal{O}_X auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist die grösste Topologie, sodass die Projektionen $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \quad \forall j \in I$ stetig sind.

Also enthält \mathcal{O}_x die Mengen $\pi_j^{-1}(U_j)$ für $U_j \subset X_j$ offen und endliche Schnitte solcher Mengen, sowie beliebige Vereinigungen endlicher Schnitte.

Definition 3.2: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Die Quotiententopologie auf X/\sim ist die feinste Topologie, sodass $\pi : X \rightarrow X/\sim$ stetig ist. D.h. $A \subset X/\sim$ ist genau dann offen, falls $\pi^{-1}(A)$ offen ist.

Definition 3.3: Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : X \rightarrow Y$ ist **offen** (bzw. **abgeschlossen**), falls das Bild jeder offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmenge selbst offen (bzw. abgeschlossen) ist.

3.0.1 Verkleben von topologischen Räumen

Seien X, X' topologische Räume, $f : X \supset Y \rightarrow X'$ eine Abbildung. Auf $X \dot{\cup} X'$ definiert man

$$\sim \text{ durch } w \sim z \Leftrightarrow \begin{cases} w = z \\ w, z \in Y \text{ und } f(w) = f(z) \\ w \in Y, z \in X' \text{ und } f(w) = z \\ w \in X', z \in Y \text{ und } f(z) = w \end{cases}$$

Definition 3.4: $X \dot{\cup} X'/\sim =: X \cup_f X'$ ist der durch Zusammenkleben von X, X' mit f entstandene Raum.

4 Neue Teilmengen aus alten

Definition 4.1: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $A \subset X$.

\mathring{A} (innerer Kern von A) ist die größte offene Teilmenge von A . $\mathring{A} = \bigcup_{B \subset A \text{ offen}} B$

\bar{A} (Abschluss von A) ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. $\bar{A} = \bigcap_{B \supset A \text{ abg.}} B$

$x \in X$ ist ein Berührungspunkt von A , falls jede Umgebung U von x A schneidet.

$x \in X$ ist ein Randpunkt von A , falls x ein Berührungspunkt von A und $X \setminus A$ ist.

δA ist die Menge aller Randpunkte von A .

Lemma 4.2: $\delta A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (X \setminus \mathring{A})$ ist abgeschlossen.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ für jede offene Umgebung U von x ist $A \cap U \neq \emptyset$

Insbesondere: $x \in \bar{A} \Rightarrow x$ ist Berührungspunkt von A .

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow x$ ist kein Berührungspunkt von $X \setminus A$

Definition 4.3: Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann ist $x \in X$ ein Häufungspunkt der Folge, falls jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält.

Ist x Häufungspunkt von (x_n) . Dann gibt es im Allgemeinen keine Teilfolge von x_n , die gegen x konvergiert.

Definition 4.4: Ein topologischer Raum erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom**, falls für jedes $x \in X$ eine Menge $U_{n,n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen existiert, sodass für V , beliebige Umgebung von x , ein $n(V)$ existiert, sodass $U_{n(V)} \subset V$.

Definition 4.5: Ein topologischer Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

Satz 4.6: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Äquivalent sind:

- (a) f ist stetig
- (b) $V \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset X$ abgeschlossen
- (c) $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A)}$ für alle $A \subset X$.

5 Zusammenhängende Räume

Definition 5.1: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **zusammenhängend**, falls X nicht in nichtleere disjunkte offene Teilmengen zerlegt werden kann, d.h. $X = U_1 \cup U_2$; U_1, U_2 offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$.

Satz 5.2: Sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend (in der Teilraumtopologie von Y). Insbesondere sind Quotienten zusammenhängender Räume zusammenhängend.

Satz 5.3: Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Dann ist auch \bar{A} zusammenhängend und, falls $A \subset B \subset \bar{A}$, auch B .

Satz 5.4: Sei X ein topologischer Raum, I eine beliebige Indexmenge und $X_{i,i \in I} \subset X$ zusammenhängende Teilräume mit $\bigcup_{i \in I} X_i = X$, $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Dann ist X zusammenhängend.

Korollar 5.5: Sei $x \in X$ ein Punkt in einem topologischen Raum X . Dann gibt es eine größte zusammenhängende Teilmenge $C_x \subset X$, sodass $x \in C_x$ und $C_x \subset X$ abgeschlossen ist.

Definition 5.6: C_x ist die **Zusammenhangskomponente** von $x \in X$.

Definition 5.7: Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ("Weg") mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ existiert.

Satz 5.8: Sei X ein topologischer Raum. X wegzusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend.

Bemerkung 5.9: Sei X ein topologischer Raum, I eine beliebige Indexmenge und $X_{i,i \in I} \subset X$ wegzusammenhängende Teilräume mit $\bigcup_{i \in I} X_i = X$, $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Dann ist X wegzusammenhängend.

Definition 5.10: Ein topologischer Raum X heißt **lokal zusammenhängend**, falls für jeden Punkt x jede Umgebung von x eine offene zusammenhängende Umgebung von x enthält.

Nicht jeder (weg-)zusammenhängender topologischer Raum ist auch lokal zusammenhängend.

Satz 5.11: X lokal zusammenhängender topologischer Raum \Leftrightarrow jede Zusammenhangskomponente in jeder offenen Menge ist offen.

Korollar 5.12: X lokal zusammenhängender topologischer Raum \Rightarrow Jede Zusammenhangskomponente ist offen.

6 Trennungsaxiome

Definition 6.1: Ein topologischer Raum X ist **Hausdorff'sch** (T_2), falls für je zwei Punkte $x \neq x'$ offene Umgebungen $U, U', x \in U, x' \in U'$ existieren, sodass $U \cap U' = \emptyset$.

Nutzen der Hausdorff'sch-Eigenschaft: Jede konvergente Folge (Netz, Filter) hat genau einen Grenzwert.

Satz 6.2: (a) Teilräume von T_2 -Räumen sind T_2 -Räume.

(b) Produkträume $\prod_{i \in I} X_i$ sind genau dann T_2 -Räume, wenn für alle $i \in I$ X_i T_2 -Raum ist.

(c) Quotienten von T_2 -Räumen sind im Allgemeinen keine T_2 -Räume.

Satz 6.3: (a) Ein topologischer Raum X ist Hausdorff'sch genau dann, wenn $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ (zwischen topologischen Räumen) stetig und Y Hausdorff'sch. Dann ist $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ abgeschlossen.