Zusammenfassung[*]Einführung in Geometrie/Topologie

gehalten von Dr. Thomas Vogel, Universität Bonn
im Sommersemester 2013

Felix Beck, Robert Hemstedt
`r@twopi.eu`

11. Mai 2013

Hinweise zur Verwendung

Die stets aktuelle Version dieser Zusammenfassung lässt sich finden unter
.
Dort sind auch die `.tex`-Dateien zu finden, wenn man selbst Veränderungen vornehmen möchte. Bitte beachtet die **Lizenzhinweise**.

Werter Kommilitone, diese Zusammenfassung basiert zum größten Teil auf Mitschriften unserer GeoTopo-Vorlesungen bei Dr. Vogel. Leider wird kein Skript zur Verfügung gestellt, sodass wir uns mal drangesetzt haben, selbst eine Zusammenfassung zu texen, da die Guttenberg-Tastatur bei LaTeX- Dokumenten leider nicht so effektiv ist.

Die Nummerierung der Sätze und Kapitelabschnitte erfolgt in der Reihenfolge der persönlichen Aufzeichnung.

Gedacht ist diese Zusammenfassung explizit als Prüfungsvorbereitung und wird daher auch noch bis zur letzten Vorlesung weiterhin ergänzt. Wenn du Anmerkungen, Ergänzungen, Lob oder Kritik haben solltest, dann sprich einfach einen von uns an, schick eine E-Mail oder, was das beste wohl ist, benutze `github.com`, um eine *pull*-Request zu schicken.

Wir haften weder für „fehlende“ Inhalte noch für inhaltliche oder sprachliche Fehler.

Wir hoffen, dass diese Zusammenfassung und der damit verbundene Aufwand sich nicht nur für uns als Verfasser, sondern auch noch für dich als Kommilitone lohnen und der Aufwand auch in Form einer möglichst guten Klausurnote entlohnt wird.
Viel Spaß beim Lernen!

[*]nach persönlichen Aufzeichnungen

Lizenz

Ich veröffentliche dieses Dokument unter der Beerware-Lizenz:

1 Metrische Räume

Definition 1.1: *Sei* (X, d) *eine Menge mit* $d : X \times X \to \mathbb{R}$*, sodass* $\forall x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq 0 \\ d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Dann heißt (X, d) **metrischer Raum**.

Definition 1.2: *Seien* (X, d), (X', d') *metrische Räume.*
Die Abbildung $f : X \to X'$ *ist eine* **Isometrie***, falls* $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$

Definition 1.3: *Die Abbildung* $f : (X, d) \to (X', d')$ *ist* **stetig** *in* $x \in X$*, falls für alle* $\delta > 0$ *ein* $\epsilon > 0$ *existiert, sodass* $f(B_\epsilon(x)) \subset B_\delta(f(x))$*, wobei* $B_r(x) = \{x' \in X | d(x, x') < r\}$ *der* **offene** *r-Ball um x ist.*

Definition 1.4: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum.*
$U \subset X$ *ist* **offen***, falls für alle* $u \in U$ *ein* $\epsilon > 0$ *existiert, sodass* $B_\epsilon(x) \subset U$.
$U \subset X$ *ist* **abgeschlossen***, falls* $X \setminus U$ *offen ist.*
$U \subset X$ *ist eine* **Umgebung** *von* $u \in U$*, falls ein* $\epsilon > 0$ *existiert, sodass* $B_\epsilon(U) \subset U$

X und $\emptyset$ sind beide zugleich offen und abgeschlossen.
Offene Bälle sind offen.

Lemma 1.5: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum.*

(i) Sei I *eine beliebige Indexmenge,* $U_{i,i\in I} \subset X$ *offen* $\forall i \in I$*. Dann ist* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subset X$ *offen.*

(ii) Sei I *eine endliche Indexmenge,* $U_{i,i\in I} \subset X$ *offen* $\forall i \in I$*. Dann ist* $\bigcap\limits_{i\in I} U_i \subset X$ *offen.*

Definition 1.6: *Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X **konvergiert** *gegen* $x \in X$*, wenn für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass* $d(x, x_n) < \epsilon$ *für alle* $n \geq N(\epsilon)$.
Eine Folge (x_n) *heißt* **Cauchy-Folge***, falls* $\forall \epsilon > 0 \exists N : d(x_n, s_m) < \epsilon \forall n, m > N$.

Definition 1.7: (X, d) *ist* **beschränkt***, falls* $\exists C \in \mathbb{R} : d(x, y) < C \quad \forall x, y \in X$.
(X, d) *ist* **vollständig***, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Definition 1.8: *Sei X eine Menge und d, d' Metriken auf X.*
d und d' sind **äquivalent**, *falls*

- *für alle $x \in X, r > 0$ es ein $r' > 0$ gibt, sodass $B_{r'}^{d'}(x) \subset B_r^d(x)$*
- *für alle $x \in X, r' > 0$ es ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r^d(x) \subset B_{r'}^{d'}(x)$*

Sind d, d' äquivalente Metriken, dann ist $U \subset (X, d)$ offen genau dann, wenn $U \subset (X, d')$ offen ist; $x_n \to x$ in (X, d) genau dann, wenn $x_n \to x$ in (X, d').

Für Beschränktheit und Vollständigkeit gibt es keine analogen Aussagen:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine Metrik auf X, die äquivalent ist zu d. Aber d' ist immer beschränkt (zB. $C = 1$), unabhängig davon, ob d beschränkt ist oder nicht.

$(X = [0, \infty], d_{St}(x, y) = |x - y|)$ ist vollständig.
$d'(x, y) = \left|\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}\right|$ ist äquivalent zu d_{St} und $x_n = n$ ist eine Cauchy-Folge bzgl. d', aber nicht bzgl. d.

2 Topologische Räume

Definition 2.1: *Sei X eine Menge und $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, sodass*

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
2. *I beliebige Indexmenge,* $U_{i,i\in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$
3. *I endliche Indexmenge,* $U_{i,i\in I} \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

Dann heißt $\mathcal{O}$ **Topologie** *auf X.*

Sei X eine nichtleere Menge.
Triviale Topologie: $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$
Diskrete Topologie: $\mathcal{O} = \mathbb{P}(X)$
Für jeden metrischen Raum (X, d) induziert d eine Topologie, die nur von der Äquivalenzklasse von d abhängt.

Definition 2.2: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.*
Eine Teilmenge $B \subset X$ ist **abgeschlossen**, *falls $B^C := X \setminus B$ offen ist.*

Hinweis: eine Teilmenge $A \subset (X, \mathcal{O})$ kann weder abgeschlossen noch offen sein. Als Beispiel sei $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ genannt.

Definition 2.3: *Sei $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}')$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.*
f ist **stetig** *genau dann, wenn für alle $V \subset \mathcal{O}'$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist.*
f ist ein **Homöomorphismus**, *falls f stetig, bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig ist.*

Definition 2.4: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*
$A \subset X$ ist **Umgebung** *von x, falls es $U \in \mathcal{O}$ gibt, sodass $x \in U \subset A$.*
$f : X \to Y$ ist **stetig in** *x, falls für jede Umgebung V von $f(x) \in Y$ eine Umgebung U von x existiert, sodass $f(U) \subset V$.*

Lemma 2.5: *Eine Teilmenge $A \subset (X, \mathcal{O})$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.*

Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ sowie $\mathcal{U}_x := \{U \in X | U \text{ Umgebung von } x\}$, gilt:

(i) $x \in U$ für $U \subset \mathcal{U}$

(ii) $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subset V \quad \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

(iii) $U_1, U_2, \ldots, U_r \in \mathcal{U}_x \quad \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i \in \mathcal{U}$

(iv) für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}$ gibt es eine Menge $V \subset U$ mit $x \in V$, sodass V Umgebung ist für jedes $y \in V$.

Umgekehrt gilt folgender

Satz 2.6: *Sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei ein System $\mathcal{U}_x$ von nichtleeren Teilmengen gewählt, sodass* (i) - (iv) *erfüllt sind. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, sodass die $\mathcal{O}$-Umgebungen $\mathcal{W}_x$ von X genau die Systeme $\mathcal{U}_x$ sind.*

Definition 2.7: *Sei X eine Menge und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X.*
$\mathcal{O}_1$ ist **gröber** *als $\mathcal{O}_2$, falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.*
$\mathcal{O}_1$ ist **feiner** *als $\mathcal{O}_2$, falls $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$.*

Beliebige Durchschnitte von Topologien ergeben wieder Topologien, die Vereinigung von zwei oder mehr Topologien ist aber im Allgemeinen keine.

Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$. Dann gibt es genau eine gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{S}$ enthält: $\mathcal{O}(\mathcal{S}) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{O} \text{ Topo.} \\ \mathcal{S} \subset \mathcal{O}}} \mathcal{O}$. Dies ist wohldefiniert, da zumindest $\mathbb{P}(X)$ eine Topologie mit $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$ ist.

Definition 2.8: *Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie, $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, mit $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine* **Subbasis** *von $\mathcal{O}$.*
$\mathcal{S}$ ist eine **Basis** *von $\mathcal{O}$, falls jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{S}$ ist.*

3 Konstruktion neuer Topologien aus gegebenen

Seien $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Dann definiert man auf $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ eine Topologie durch ihre Basis $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Insbesondere sind dann die Inklusionen $\begin{cases} i_1 : X_1 \to X \\ i_2 : X_2 \to X \end{cases}$ beide stetig. Diese Topologie ist die gröbste mit dieser Eigenschaft.

Definition 3.1: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.*
Dann heißt $\mathcal{O}_A := \{U \subset A | \text{es gibt } V \subset X \text{ offen} : V \cap A = U\}$ **Teilraumtopologie**.

Seien $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und $X = X_1 \times X_2$.
Dann ist $\mathcal{O}_X := \{W | \text{ für } (x_1, x_2) \in W \text{ gibt es Umgebungen } U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2 \text{ von } x_1 \text{ bzw. } x_2, \text{ sodass } U_1 \times U_2 \subset W\}$ die gröbste Topologie, sodass die Projektionen $\begin{cases} \pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1 \\ \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2 \end{cases}$ beide stetig sind.

Sei $X_{i,i\in I}$ eine beliebige Anzahl an topologischen Räumen, $X = \prod_{i\in I} X_i$. Die Produkttopologie $\mathcal{O}_X$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ ist die gröbste Topologie, sodass die Projektionen $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j \quad \forall j \in I$ stetig sind.

Also enthält $\mathcal{O}_x$ die Mengen $\pi_j^{-1}(U_j)$ für $U_j \subset X_j$ offen und endliche Schnitte solcher Mengen, sowie beliebige Vereinigungen endlicher Schnitte.

Definition 3.2: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalentrelation auf X. Die Quotiententopologie auf $X/_\sim$ ist die feinste Topologie, sodass $\pi : X \to X/_\sim$ stetig ist. D.h. $A \subset X/_\sim$ ist genau dann offen, falls $\pi^{-1}(A)$ offen ist.*

Definition 3.3: *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : X \to Y$ ist* **offen** *(bzw.* **abgeschlossen***), falls das Bild jeder offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmenge selbst offen (bzw. abgeschlossen) ist.*

3.0.1 Verkleben von topologischen Räumen

Seien X, X' topologische Räume, $f : X \supset Y \to X'$ eine Abbildung. Auf $X \,\dot\cup\, X'$ definert man

$$\sim \text{ durch } w \sim z \Leftrightarrow \begin{cases} w = z \\ w, z \in Y \text{ und } f(w) = f(z) \\ w \in Y, z \in X' \text{ und } f(w) = z \\ w \in X', z \in Y \text{ und } f(z) = w \end{cases}$$

Definition 3.4: *$X \,\dot\cup\, X'/_\sim =: X \cup_f X'$ ist der durch Zusammenkleben von X, X' mit f entstandene Raum.*

4 Neue Teilmengen aus alten

Definition 4.1: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$.*
$\mathring{A}$ (innerer Kern von A) ist die größte offene Teilmenge von A. $\mathring{A} = \bigcup_{B\subset A \text{ offen}} B$
$\bar{A}$ (Abschluss von A) ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. $\bar{A} = \bigcap_{B\supset A \text{ abg.}} B$
$x \in X$ ist ein Berührpunkt von A, falls jede Umgebung U von x A schneidet.
$x \in X$ ist ein Randpunkt von A, falls x ein Berührpunkt von A und $X \setminus A$ ist.
δA ist die Menge aller Randpunkte von A.

Lemma 4.2: *$\delta A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \left(X \setminus \mathring{A}\right)$ ist abgeschlossen.*
$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ für jede offene Umgebung U von x ist $A \cap U \neq \emptyset$
Insbesondere: $x \in \bar{A} \Rightarrow x$ ist Berührpunkt von A.
$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow x$ ist kein Berührpunkt von $X \setminus A$

Definition 4.3: *Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann ist $x \in X$ ein Häufungspunkt der Folge, falls jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält.*

Ist x Häufungspunkt von (x_n). Dann gibt es im Allgemeinen keine Teilfolge von x_n, die gegen x konvergiert.

Definition 4.4: *Ein topologischer Raum erfüllt das* **1. Abzählbarkeitsaxiom***, falls für jedes $x \in X$ eine Menge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Umgebungen (von x) existiert, sodass für V, beliebige Umgebung von x, ein $n(V)$ existiert, sodass $U_{n(V)} \subset V$.*

Definition 4.5: *Ein topologischer Raum erfüllt das* **2. Abzählbarkeitsaxiom**, *falls es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.*

Satz 4.6: *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Äquivalent sind:*

(a) f ist stetig

(b) $V \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset U$ abgeschlossen

(c) $f\left(\bar{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ für alle $A \subset X$.

5 Zusammenhängende Räume

Definition 5.1: *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt* **zusammenhängend**, *falls X nicht in nichtleere disjunkte offene Teilmengen zerlegt werden kann, d.h. $X = U_1 \cup U_2$; U_1, U_2 offen, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$.*

Satz 5.2: *Sei die Abbildung $f : X \to Y$ stetig, X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend (in der Teilraumtopologie von Y). Insbesondere sind Quotienten zusammenhängender Räume zusammenhängend.*

Satz 5.3: *Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Dann ist auch $\bar{A}$ zusammenhängend und, falls $A \subset B \subset \bar{A}$, auch B.*

Satz 5.4: *Sei X ein topologischer Raum, I eine beliebige Indexmenge und $X_{i,i\in I} \subset X$ zusammenhängende Teilräume mit $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$, $\bigcap\limits_{i\in I} \neq \emptyset$. Dann ist X zusammenhängend.*

Korollar 5.5: *Sei $x \in X$ ein Punkt in einem topologischen Raum X. Dann gibt es eine größte zusammenhängende Teilmenge $C_x \in X$, sodass $x \in C_x$ und $C_x \in X$ abgeschlossen ist.*

Definition 5.6: *C_x ist die* **Zusammenhangskomponente** *von $x \in X$.*

Definition 5.7: *Ein topologischer Raum X heißt* **wegzusammenhängend**, *falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ ("Weg") mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ existiert.*

Satz 5.8: *Sei X ein topologischer Raum. X wegzusammenhängend $\Rightarrow$ X zusammenhängend.*

Bemerkung 5.9: Sei X ein topologischer Raum, I eine beliebige Indexmenge und $X_{i,i\in I} \subset X$ wegzusammenhängende Teilräume mit $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$, $\bigcap\limits_{i\in I} \neq \emptyset$. Dann ist X wegzusammenhängend.

Definition 5.10: *Ein topologischer Raum X heißt* **lokal zusammenhängend**, *falls für jeden Punkt x jede Umgebung von x eine offene zusammenhängende Umgebung von x enthält.*

Nicht jeder (weg-)zusammenhängender topologischer Raum ist auch lokal zusammenhängend.

Satz 5.11: *X lokal zusammenhängender topologischer Raum $\Leftrightarrow$ jede Zusammenhangskomponente in jeder offenen Menge ist offen.*

Korollar 5.12: *X lokal zusammenhängender topologischer Raum $\Rightarrow$ Jede Zusammenhangskomponente ist offen.*

6 Trennungsaxiome

Definition 6.1: *Ein topologischer Raum X ist* **Hausdorff'sch** (T_2)*, falls für je zwei Punkte $x \neq x'$ offene Umgebungen $U, U', x \in U, x' \in U'$ existieren, sodass $U \cap U' = \emptyset$.*

Nutzen der Hausdorff'sch-Eigenschaft: Jede konvergente Folge (Netz, Filter) hat genau einen Grenzwert.

Satz 6.2: *(a) Teilräume von T_2-Räumen sind T_2-Räume.*

(b) Produkträume $\prod\limits_{i \in I} X_i$ sind genau dann T_2-Räume, wenn für alle $i \in I$ X_i T_2-Raum ist.

(c) Quotienten von T_2-Räumen sind im Allgemeinen keine T_2-Räume.

Satz 6.3: *(a) Ein topologischer Raum X ist Hausdorff'sch genau dann, wenn $\Delta := \{(x,x) \,|x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.*

(b) Sei die Abbildung $f : X \to Y$ (zwischen topologischen Räumen) stetig und Y Hausdorff'sch. Dann ist $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X |\; f(x_1) = f(x_2)\}$ abgeschlossen.

Definition 6.4: *Sei X ein topologischer Raum. $A \subset X$ heißt* **dicht**, *wenn $\bar{A} = X$*

Satz 6.5: *Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und Y Hausdorff'sch. Für $A \subset X$ gilt dann: $f = g \Leftrightarrow f|_A = g|_A$*

Definition 6.6: *Ein topologischer Raum X hat die T_1-Eigenschaft, wenn für $x \neq x' \in X$ Umgebungen U von x und U' von x' existieren, sodass $x \in X$, $x' \in X'$, aber $x \notin U'$, $x' \notin U$.*

Satz 6.7: *Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) X hat die T_1-Eigenschaft

(b) jeder Punkt ist abgeschlossen

(c) $\forall A \subset X$ gilt $A = \bigcap\limits_{U \supset A,\ offen} U$

7 Kompaktheit

Definition 7.1: *Ein topologischer Raum X ist* **kompakt**, *falls für jede offene Überdeckungung von X eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. für $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, U_i offen für alle $i \in I$ einer beliebigen Indexmenge, eine endliche Teilmenge $\{i_1, \cdots i_r\}$ existiert, sodass $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$.*

Satz 7.2: *X kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt.*

Satz 7.3: $[0,1]$ *ist kompakt mit der Standarttopologie.*

Lemma 7.4: *Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass es für jedes Interfall der Länge δ ein $i \in I$ gibt, für das U_i dieses Intervall ganz enthält.*

Satz 7.5: *Seien X, Y topologische Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(X)$ kompakt (in der Teilraumtopologie von Y).*

Korollar 7.6: *Quotienten kompakter topologischer Räume sind kompakt.*

Satz 7.7: *Sei X kompakter topologischer Raum, und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt (in der Teilraumtopologie).*

Satz 7.8: *Seien X, Y kompakte topologische Räume. Dann ist $X \times Y$ kompakt.*

Korollar 7.9: *Endliche Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt.*

Allgemein gilt sogar der

Satz 7.10: *(von Tychonoff, 1930)*
Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine beliebig große Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt.

Dieser ist jedoch äquivalent zum umstrittenen Auswahlaxiom (Axiom of Choice):
Sei $(B_i)_{i\in I}$ eine beliebig große Familie nichtleerer Mengen. Dann gibt es $F : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$, sodass $F(i) \in B_i$.

Bemerkung 7.11: Ist für zwei topologische Räume X, Y der Produktraum $X \times Y$ kompakt, so sind schon X, Y kompakt. Dies gilt ebenfalls für unendliche Produkte.

Satz 7.12: *Sei X ein Hausdorffraum, $A \subset X$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen.*

Bemerkung 7.13: Ist X kompakter Hausdorffraum, $A \subset X$ kompakt bzw. abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und $V \supset A$ offen, sodass $U \cap V = \emptyset$. Ist weiter $B \subset X$ abgeschlossen bzw. kompakt, $A \cap B = \emptyset$, gibt es $V_1 \supset A$ und $V_2 \supset B$ offen mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Das heißt, in kompakten Hausdorffräumen kann man abgeschlossene Mengen von Punkten bzw. einer anderen disjunkten abgeschlossenen Menge trennen.

8 Probleme/Nutzen von Folgen

Definition 8.1: *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist* **folgenstetig**, *falls aus $x_n \to x$ in X folgt, dass $f(x_n) \to f(x)$ in Y.*

Satz 8.2:
(a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f folgenstetig.

(b) Sei $f : X \to Y$ eine folgenstetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist f stetig.

Lemma 8.3: *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(a) X ist kompakt.

(b) Seien $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossen für eine beliebige Indexmenge I, sodass $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Dann existieren $i_1, \dots i_r \in I, r \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j} = \emptyset$

Satz 8.4: *Sei X ein kompakter topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf X. Dann hat (x_n) einen Häufungspunkt.*

Definition 8.5: *Ein topologischer Raum ist* **folgenkompakt***, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.*

$\mathbb{P}(\mathbb{N})$ ist kompakt (Tychonoff), aber nicht folgenkompakt. Es gibt auch topologische Räume, die folgenkompakt, aber nicht kompakt sind.

Satz 8.6: *Sei X ein kompakter topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X folgenkompakt.*

Satz 8.7: *Sei (X,d) ein metrischer Raum. X kompakt $\Leftrightarrow$ X folgenkompakt.*

9 Reguläre/Normale Räume und Urysohns Lemma

Neben T_1 und T_2 gibt es weitere Trennungsaxiome. Die Literatur ist jedoch uneinheitlich.

Definition 9.1: *Ein topologischer Raum X hat die T_3-Eigenschaft, wenn für alle $x \in X$, $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$ eine Umgebung U_x von x und U_A offen mit $A \subset U_A$ gibt, sodass $U_x \cap U_A = \emptyset$.*
Ein topologischer Raum X hat die T_1-Eigenschaft, wenn für alle disjunkten $A, B \subset X$, abgeschlossen, U_A und U_B offen existieren, sodass $A \subset U_A$, $B \subset U_B$ und $U_A \cap U_B = \emptyset$.
Ein topologischer Raum X hat die $T_{3\ 1/2}$-Eigenschaft, wenn es für alle $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$ eine stetige Funktion $f: X \to [0,1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f|_A \equiv 0$.

$T_2 \Rightarrow T_1$
$T_1 \wedge T_3 \Rightarrow T_2$

Definition 9.2: *Ein topologischer Raum heißt* **regulär***, falls er die T_1- und die T_3-Eigenschaft hat.*
Ein topologischer Raum heißt **vollständig regulär***, falls er die $T_{3\ 1/2}$- und die T_1-Eigenschaft hat.*
Ein topologischer Raum heißt **normal***, falls er die T_1- und die T_4-Eigenschaft hat.*

Kompakte Hausdorffräume sind regulär und normal.

Lemma 9.3: *(von Urysohn)*
Erfülle X die T_4-Eigenschaft und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion $f: X \to [0,1]$, so dass $f|_A \equiv 1$ und $f|_B \equiv 0$.

Satz 9.4: *(Fortsetzungssatz von Tietze)*
Erfülle X die T_4-Eigenschaft und sei $A \subset X$ abgeschlossen. Weiterhin sei $f: A \to [a,b]$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F: X \to [a,b]$ und $F|_A = f$.

Korollar 9.5: *Erfülle X die T_4-Eigenschaft, sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f: A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F: X \to \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.*

Definition 9.6: *Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Seit weiter $\tau_\lambda : X \to [0,1], \lambda \in \Lambda$ eine Sammlung stetiger Funktionen, die* **lokal endlich** *ist, d.h. für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $V(x)$, sodass $V(x) \cap Tr(\tau_\lambda) = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele der $\lambda \in \Lambda$, und $\sum\limits_{\lambda} \tau_\lambda(x) \equiv 1$. Dann ist $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine* **Zerlegung der 1***.*
Sie ist $(U_i)_{i \in I}$ **untergeordnet***, falls $\forall \lambda\ \exists i(\lambda) : Tr(\tau_\lambda) \subset U_{i(\lambda)}$.*

Definition 9.7: *(Dieudonné)*
Ein Hausdorffraum X ist **parakompakt**, *wenn für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ existiert. D.h. für alle $x \in X$ gibt es C_x, offene Umgebung von x, sodass $C_x \cap V_j = \emptyset$ für fast alle $j \in J$ (lokal endlich), (V_j) ist wieder eine offene Überdeckung und es gibt für alle $j \in J$ ein $i \in I$ mit $U_i \supset V_j$ (Verfeinerung).*

Kompakte Räume und CW-Komplexe sind parakompakt. CW-Komplexe sind parakompakt.

Satz 9.8: *(A. Stone, 1948)*
Metrisierbare Räume sind parakompakt.

Lemma 9.9: *Parakompakte Räume sind normal.*

Satz 9.10: *Ein Hausdorffraum X ist genau dann parakompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung von X eine Zerlegung der 1 existiert.*

10 Homotopien, Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen.

Definition 10.1: *f ist* **homotop** *to g ($f \cong g$), wenn eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert, sodass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$.*

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}(X,Y)$, dh. der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.

Lemma 10.2: *Sei X ein topologischer Raum und seien $A_1, A_2, \ldots A_n$ abgeschlossen, sodass $\bigcup\limits_{i=1}^{n} = A$. Dann ist $f : X \to Y$ stetig, genau dann wenn $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig ist für alle $1 \leq i \leq n$.*

Definition 10.3: *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz, wenn eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert, sodass $f \circ g \cong id_Y$ und $g \circ f \cong id_X$.*