Solution Dynamic Programming Part 1

Nguyễn Tuấn Anh, Nguyễn Trần Việt Anh*

Ngày 19 tháng 6 năm 2023

Bài viết này trình bày lời giải cho các bài tập mà nhóm đã đề xuất.

Mục lục

1 Problem 1. ANAMI, proposed by Team 9 **2**
1.1 Bài toán 2
1.2 Lời giải 2

2 Problem 2. BBUGGY, proposed by Team 9 **3**
2.1 Bài toán 3
2.2 Lời giải 3

3 Problem 3. CNA, proposed by Team 9 **4**
3.1 Bài toán 4
3.2 Lời giải 4

4 Homework. Zoro, proposed by Team 9 **5**
4.1 Bài toán 5
4.2 Lời giải 5

*Sinh viên lớp KHTN2021, MSSV: 21520142 - 21520006

§1 Problem 1. ANAMI, proposed by Team 9

§1.1 Bài toán

Cho trước hai số nguyên dương n và S. Ta gọi một bộ n số nguyên không âm $(a_1, a_2, ..., a_n)$ (không nhất thiết phân biệt) là n-Nami nếu thỏa mãn

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = S$$

Hãy đếm số lượng bộ n-Nami.

§1.2 Lời giải

Xét tập vô hạn đếm được

$$\mathbf{A} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\}$$

Đổi biến

$$\frac{1}{2^{a_i}} \mapsto b_i$$

Thì $b_i \in \mathbf{A}$. Khi đó đẳng thức ban đầu trở thành

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = S$$

Gọi c_1 là số bộ b có n phần tử và tồn tại ít nhất một giá trị $b_i = 1$.
Ngược lại, c_2 là số bộ b có n phần tử trong đó không chứa bất kỳ giá trị nào bằng 1.
Đáp án chính là $c_1 + c_2$.
Gọi $f(n, S)$ là số bộ có n phần tử và có tổng bằng S.
Trường hợp 1. Tồn tại số 1 trong b.
Khi đó tổng của $n - 1$ phần tử còn lại sẽ bằng $S - 1$. Như vậy $c_1 = f(n - 1, S - 1)$.
Trường hợp 2. Không có số 1 nào trong b.
Nghĩa là các phần tử chỉ thuộc tập

$$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$$

Để ý rằng

$$2\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\} = \mathbf{A}$$

Khi đó $c_2 = f(n, 2S)$.
Tóm lại $f(n, S) = f(n - 1, S - 1) + f(n, 2S)$.
Độ phức tạp: $\mathcal{O}(nS)$.

§2 Problem 2. BBUGGY, proposed by Team 9

§2.1 Bài toán

Wind D. Buggy là một Tứ hoàng với haki gió vương cực mạnh. Ở chap 1082 Buggy đã tuyên bố Cross Guild sẽ tham gia cuộc đua tranh giành One Piece. Tuy không biết One Piece ở đâu nhưng hắn đã có được manh mối quan trọng. Đó là One Piece ở cách sào huyệt vua hề L đơn vị khoảng cách. Biết L là độ dài đường đi dài nhất của G là một DAG có N đỉnh, M cạnh.
Hãy giúp Buggy tìm ra One Piece bằng cách xác định khoảng cách L.

§2.2 Lời giải

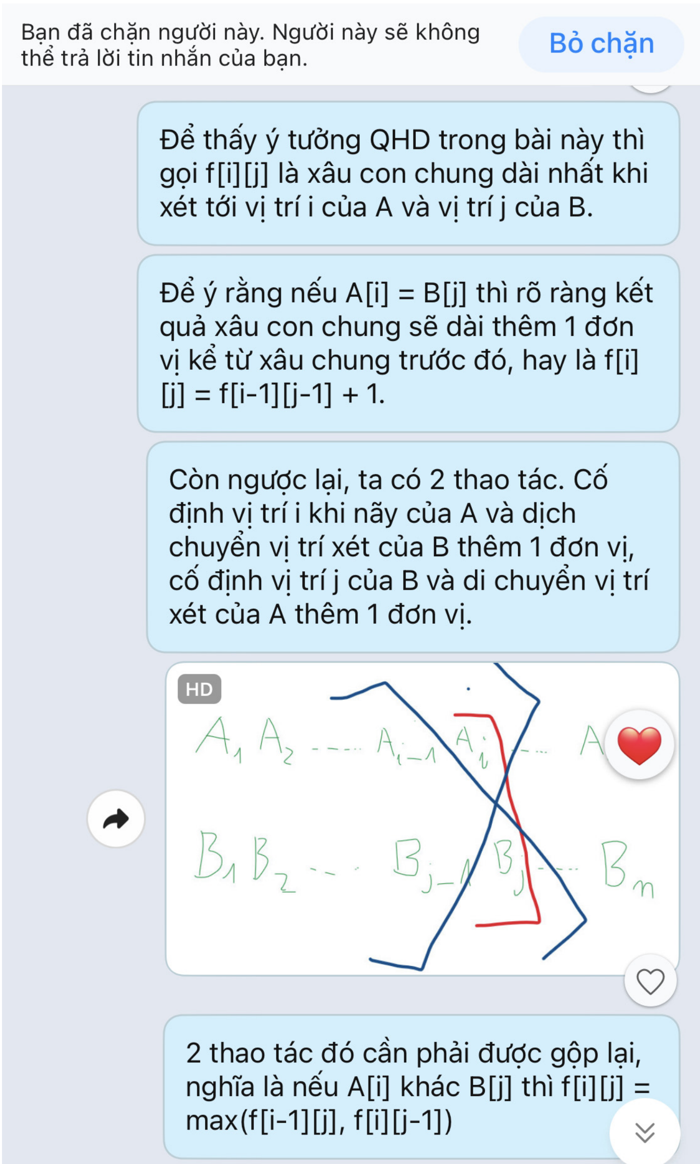
$f(i)$ là độ dài đường đi dài nhất xuất phát từ i. Chỉ cần DFS là xong.
Độ phức tạp: $\mathcal{O}(M + N)$.

§3 Problem 3. CNA, proposed by Team 9

§3.1 Bài toán

Trái Đất đang bị người ngoài hành tinh xâm chiếm. Nhân vật chính của chúng ta đó là Bé Na. Thật sự thì Bé Na là một cao thủ PUBG. Vào một ngày đẹp trời, các đồng đội bị bắt và gặp nguy hiểm vì thế Na rất muốn vận dụng kiến thức PUBG vào thực tiễn để giải cứu. Tuy nhiên Na hiện không có vũ khí. Nhưng thật may mắn, ông bụt xuất hiện và nói sẽ tặng một khẩu súng cùng n viên đạn cho Na. Biết n là độ dài xâu con chung dài nhất của hai xâu A và B cho trước. Nhận được súng và đạn, Na lên đường tiêu diệt bọn người ngoài hành tinh xấu xa. Na muốn biết chính xác n là bao nhiêu để có thể sử dụng một cách hiệu quả.
Hãy giúp Bé Na giải cứu đồng đội bằng cách xác định số viên đạn mà bụt tài trợ.

§3.2 Lời giải



Độ phức tạp: $\mathcal{O}(|A||B|)$.

§4 Homework. Zoro, proposed by Team 9

§4.1 Bài toán

Có q giá trị k. Với mỗi k, hãy tính

$$\binom{0}{k} + \binom{3}{k} + \binom{6}{k} + \ldots + \binom{3n}{k}$$

§4.2 Lời giải

Một lời giải với hướng suy nghĩ rất tự nhiên, bé Dâu's solution

We define the array $dp[k]$ of size $3n$, which computes

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i}{k} = \binom{0}{k} + \binom{3}{k} + \ldots + \binom{3n-3}{k}$$

Under this definition, $ans[k] = (dp[k] + \binom{3n}{k}) \mod (10^9 + 7)$, where ans is what we want to find.

We known that Hockey Stick Identity is $\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \ldots + \binom{3n-1}{k} = \binom{3n}{k+1}$. We also known that $\binom{3i+1}{k} = \binom{3i}{k} + \binom{3i}{k-1}$ and $\binom{3i+2}{k} = \binom{3i}{k} + 2\binom{3i}{k-1} + \binom{3i}{k-2}$. For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
dp[k] &= \binom{3n}{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i+1}{k} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i+2}{k} \\
&= \binom{3n}{k+1} - 2.\sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i}{k} - 3.\sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i}{k-1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{3i}{k-2} \\
&= \binom{3n}{k+1} - 2.dp[k] - 3.dp[k-1] - dp[k-2] \\
\iff 3.dp[k] &= \binom{3n}{k+1} - 3.dp[k-1] - dp[k-2] \\
\iff \quad dp[k] &= \frac{\binom{3n}{k+1} - 3.dp[k-1] - dp[k-2]}{3}
\end{aligned}$$

Độ phức tạp: $\mathcal{O}(n + q)$.