

Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P398. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) - f(y)) = (x + y)^2 f(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết quả: $f(x) = 0, f(x) = x^2, f(x) = -x^2$.

Lời giải: Dễ thấy nếu f là hàm hằng thì f đồng nhất 0. Ta xét trường hợp f không là hàm hằng.

Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số khác hằng thỏa mãn $f(f(x) - f(y)) = (x + y)^2 f(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Kí hiệu $P(x; y)$ là phép thay giá trị x và y trong (1).

$$P(1; 1) \Rightarrow f(0) = 4f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$P(x; 0) \Rightarrow f(f(x)) = x^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}. (2)$$

$$P(0; x) \Rightarrow f(-f(x)) = x^2 f(-x), \forall x \in \mathbb{R}. (3)$$

$$P(f(x), -f(x)) \Rightarrow f(f(f(x)) - f(-f(x))) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) và (3) thì được $f(x^2 f(x) - x^2 f(-x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Nhận xét 1: f toàn ánh trên $(-\infty; 0]$ hoặc $[0; +\infty)$.

Chứng minh.

$$P\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) = x^2 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. (5)$$

Điều này ngụ ý f có thể nhận mọi giá trị trong $(-\infty; 0]$ hoặc $[0; +\infty)$. Có nghĩa f toàn ánh trên $(-\infty; 0]$ hoặc $[0; +\infty)$.

Nhận xét 2: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chứng minh. Giả sử có $u \neq 0$ để $f(u) = 0$. Theo nhận xét 1 thì luôn có $v \in \mathbb{R}$ để $f(v) = u$.

Áp dụng (2) và để ý $0 = f(u) = f(f(v)) = v^2 f(v) = v^2 u$. Vì $u \neq 0$ nên $v = 0$, hay $u = f(v) = f(0) = 0$ (vô lí). Tức là ta phải có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nhận xét 3: f là hàm số chẵn.

Chứng minh. Được suy ra từ (4), nhận xét 2 và $f(0) = 0$.

$$P\left(\frac{x-y}{2}; -\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow f\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right) - f\left(-\frac{x+y}{2}\right)\right) = y^2 f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. (6)$$

Từ (6) kết hợp với (5) và nhận xét 3 thì được

$$\begin{aligned} y^2 f(x) &= f\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right) - f\left(-\frac{x+y}{2}\right)\right) = f\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) \\ &= x^2 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. (7) \end{aligned}$$

Trong (7) cho $y = 1$ thì $f(x) = cx^2, \forall x \in \mathbb{R} (c = f(1))$.

Thay kết quả vừa có được vào (1) thì $c^3(x^2 - y^2)^2 = c(x^2 - y^2)$. Suy ra $c \in \{-1; 0; 1\}$. Do f khác hằng nên có các hàm số $f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy cả 2 hàm số này và $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tóm lại tất cả các hàm số cần tìm là 3 hàm số trên.