Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P449. (Mức A) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n, số

$$\frac{m^4 - m^2 + 1}{2n^3 - 2n + 11}$$

không phải là số nguyên.

Lời giải: Ta có nhận xét quen thuộc sau:

Cho số nguyên tố p có dạng $4k + 3$ và 2 số nguyên a, b. Khi đó nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ thì $a \vdots p, b \vdots p$.

Giả sử tồn tại cặp $(m; n)$ và số tự nhiên A nào đó mà

$$\frac{m^4 - m^2 + 1}{2n^3 - 2n + 11} = A \in \mathbb{Z}.$$

Hay $m^4 - m^2 + 1 = (2n^3 - 2n + 11)A$.

Tương đương $(m^2 - 1)^2 + m^2 = [2n(n-1)(n+1) + 11]A$.

Dễ thấy các số $m^4 - m^2 + 1, 2n^3 - 2n + 11, A$ đều phải lớn hơn 0.

Đặt $2n(n-1)(n+1) + 11 = B$ thì B lẻ và $B \equiv 11 \equiv 3 (\bmod 4)$. Nếu như B không có bất kì ước nguyên tố nào đồng dư 3 mod 4 thì $B \equiv 1 (\bmod 4)$, vô lí. Vậy B phải có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $4k + 3$. Gọi đó là p. Với lưu ý rằng nếu $m = 1$ hoặc $m = -1$ thì không có giá trị n để $A \in \mathbb{Z}$. Áp dụng nhận xét ở trên ta có:

$$\begin{cases} p | m \\ p | m^2 - 1 \end{cases}.$$

Suy ra $p|1$. Điều này không thể xảy ra. Dẫn tới giả sử ban đầu là sai. Có nghĩa với mọi số tự nhiên m, n, số

$$\frac{m^4 - m^2 + 1}{2n^3 - 2n + 11}$$

không thể là số nguyên.