Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P429. (Mức A) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c, n) thỏa mãn

$$a! + b! + c! = 2^n.$$

Lời giải: Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Thế thì $c! \mid a! + b! + c! = 2^n$. Nếu $c \geq 3$ thì $3 \mid 2^n$ (vô lí). Do đó $c = 1$ hoặc $c = 2$.

⊙ Trường hợp 1: $c = 1$.

Viết lại giả thiết $a! + b! + 1 = 2^n$. Nhận thấy $a!, b!$ phải khác tính chẵn lẻ, nên $b = 1$ do $a \geq b$. Lúc này $a! = 2(2^{n-1} - 1)$. Số mũ của 2 ở vế phải là 1 nên $a = 2$ hoặc $a = 3$. Nếu $a = 2$ thì từ đẳng thức ở trên, $n = 2$. Còn nếu $a = 3$ thì $n = 3$. Trong trường hợp này, các bộ (a, b, c, n) là $(3,1,1,3), (2,1,1,2)$. Thử lại đều nhận cả 2 bộ này.

⊙ Trường hợp 2: $c = 2$.

Viết lại giả thiết $a! + b! + 2 = 2^n$. Nhận thấy $a!, b!$ cùng tính chẵn lẻ. Nếu $a!, b!$ cùng lẻ thì $a = b = 1$, mâu thuẫn với điều giả sử. Do đó $a!, b!$ cùng chẵn, hay $a \geq b \geq 2$. Ta chỉ xét $n > 3$ do $2! + 2! + 2 = 6$ và $3! + 2! + 2 = 10$. Chia 2 vế cho 2 thì $a!/2 + b!/2 + 1 = 2^{n-1} \vdots 2$, nên $a!/2$ và $b!/2$ khác tính chẵn lẻ. Do đó:

+Nếu $a \geq 4$ thì $b \leq 3$. Nếu $b = 2$ thì $a! = 2^n - 4 = 4(2^{n-2} - 1)$. Để ý $a \geq 4$ thì $v_2(a!) \geq 3$ nên $b = 2$ thì không có số a. Còn nếu $b = 3$ thì $a! = 2^n - 8 = 8(2^{n-3} - 1)$. Cho nên $v_2(a!) = 3 \Rightarrow 4 \leq a \leq 5$. Nếu $a = 5$ thì $n = 7$, nếu $a = 4$ thì $n = 5$.

+Nếu $a = 3, b = 2$ hoặc $a = b = 2$ thì theo cách xét ở trên, không có số n thỏa mãn.

Trong trường hợp này, các bộ (a, b, c, n) là $(5,3,2,7), (4,3,2,5)$. Thử lại đều nhận cả 2 bộ này.

Tóm lại, tất cả các bộ (a, b, c, n) thỏa mãn điều kiện bài toán là
$(3,1,1,3), (1,3,1,3), (1,1,3,3), (2,1,1,2), (1,2,1,2), (1,1,2,2), (5,3,2,7), (5,2,3,7), (3,5,2,7), (3,2,5,7)$

$$(2,3,5,7), (2,5,3,7), (4,3,2,5), (4,2,3,5), (3,2,4,5), (3,4,2,5), (2,3,4,5), (2,4,3,5).$$