Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

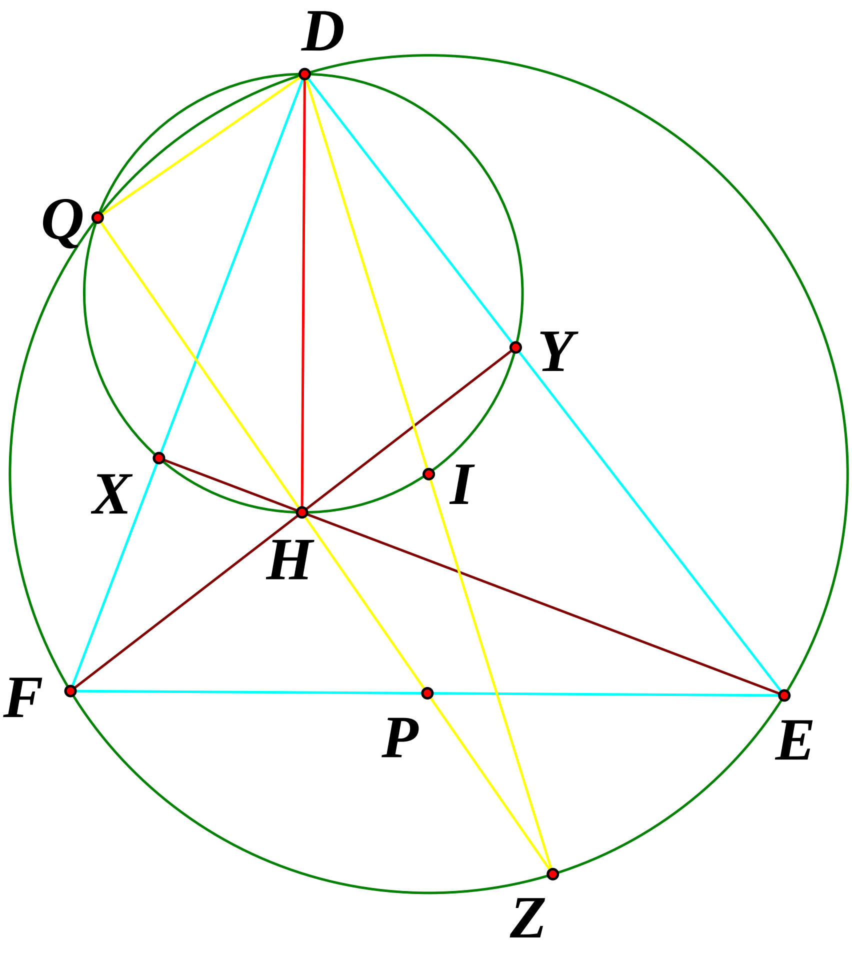
Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

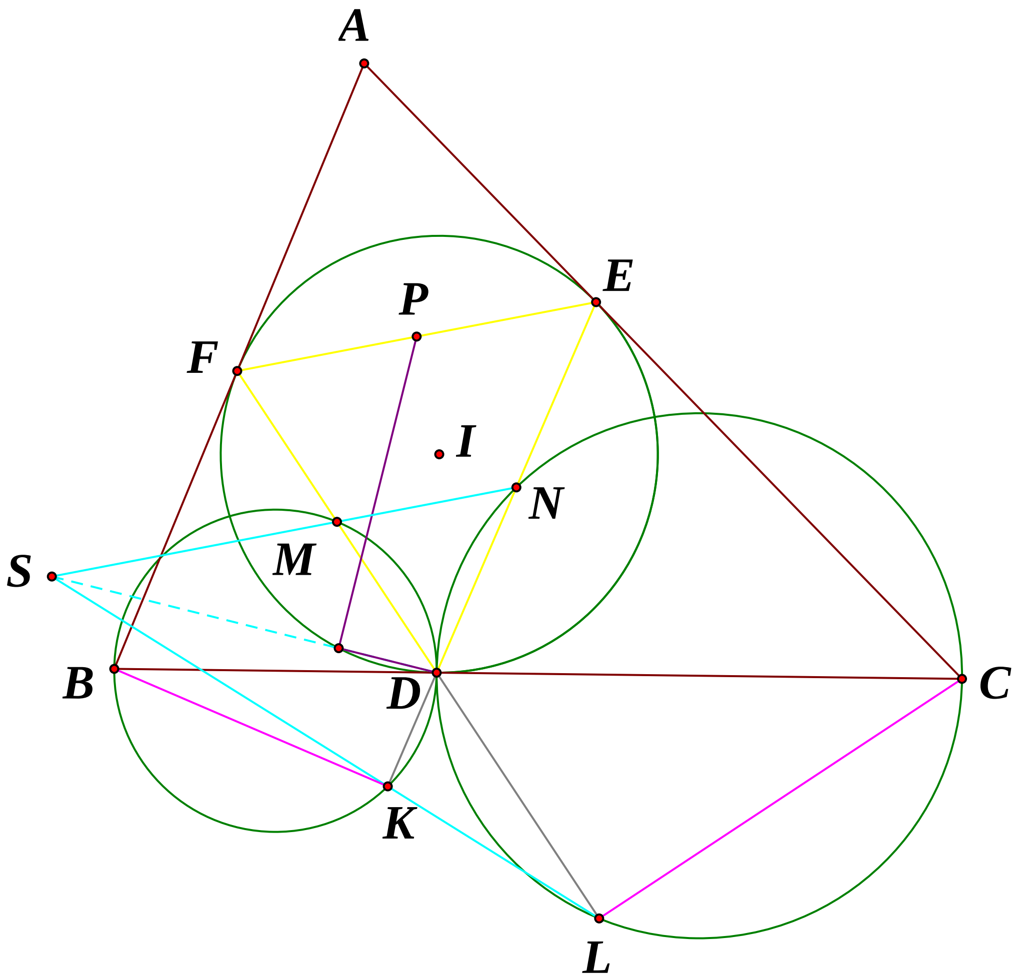
Số điện thoại: 0971895842.

P438. (Mức A) Cho tam giác ABC (với $AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. K là hình chiếu của B lên DE; L là hình chiếu của C lên DF. M, N theo thứ tự là trung điểm DF, DE. Gọi P là trung điểm EF. Lấy điểm Q khác D trên (I) sao cho $\angle PQD = 90^0$. Chứng minh rằng MN, KL và QD đồng quy.

Lời giải:



Gọi Z là giao điểm thứ 2 của DI và (I), các đường cao FY, EX của $\triangle$ DEF cắt nhau tại H. Khi đó EHFZ là hình bình hành. Nên H, P, Z cùng nằm trên một đường thẳng. Cho đường này cắt (I) lần nữa tại Q' thì $\angle PQ'D = 90^0$. Hơn nữa, Q' thuộc cung DF do $DF < DE$ $(AB < AC)$. Nếu như có $Q'' \neq Q'$ trên (I) sao cho $\angle PQ''D = 90^0$ thì $Q''P$ phải đi qua Z, điều này vô lí. Vì thế $Q \equiv Q' \equiv Q''$. Ngoài ra, D, Q, X, H, Y cùng thuộc đường tròn đường kính DH.



Chúng ta sử dụng tọa độ tỉ cự với $\triangle$ DEF làm cơ sở $(DE = c, EF = a, FD = b)$, tọa độ một số điểm $D(1:0:0), E(0:1:0), F(0:0:1)$. Có phép đặt

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2} = S_C; \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = S_A; \frac{c^2+a^2-b^2}{2} = S_B.$$

Bởi vì $H(S_BS_C: S_CS_A: S_AS_B)$ nên $X(S_C: 0: S_A), Y(S_B: S_A: 0)$. Phương trình tổng quát của một đường tròn là $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(ux+vy+wz) = 0$, với u, v, w là các số thực nào đó. Thay tọa độ của D vào thì thu được $u = 0$. Tiếp tục thay X, Y vào thì

$$b^2S_AS_C - (S_A + S_C)S_Aw = 0.$$

$$c^2S_AS_B - (S_A + S_B)S_Av = 0.$$

Suy ra $v = S_B$ và $w = S_C$. Nên (DXY): $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(S_By + S_Cz) = 0$.

Do cách chọn nên (DEF): $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Phương trình đường thẳng qua DQ cũng chính là phương trình trục đẳng phương của (I) và (DXY), chính là

$$S_By + S_Cz = 0.$$

Bởi vì $M(1:0:1), N(1:1:0)$ nên $(MN): -x+y+z=0$. Gọi $MN \cap DQ = \{S\}$ thì tọa độ của S là nghiệm của hệ

$$\left.\begin{matrix} S_B y + S_C z = 0 \\ -x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{y}{z} = \dfrac{-S_C}{S_B} \\ x = y+z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = S_B - S_C \\ y = -S_C \\ z = S_B \end{cases}.$$

Hay $S(S_B - S_C : -S_C : S_B)$. Gọi W là điểm Lemoine ứng với $\triangle DEF$ thì có hệ thức cơ bản về vector $a^2\overrightarrow{WD} + b^2\overrightarrow{WE} + c^2\overrightarrow{WF} = \vec{0}$. Suy ra $a^2(\vec{W} - \vec{D}) + b^2(\vec{W} - \vec{E}) + c^2(\vec{W} - \vec{F}) = \vec{0}$. Từ đây thu được $W(a^2 : b^2 : c^2)$. B là giao điểm 2 tiếp tuyến tại D, F nên nằm trên EW. Có nghĩa tọa độ sẽ được tham số hóa $B(a^2 : t : c^2)$. Hơn nữa, B cũng nằm trên đường trung trực của DF là $b^2(x-z) + y(a^2 - c^2) = 0$. Thay tọa độ của B vào thì tìm được $t = -b^2$. Hay là ta có được $B(a^2 : -b^2 : c^2)$. Để ý, BKDM nội tiếp đường tròn đường kính BD. Để tìm K ta sẽ cho đường tròn (BMD) giao với đường thẳng DE. Tất nhiên, nó sẽ khác D. Tương tự khi viết phương trình (DXY) thì

$$(BMD): a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)\left(\frac{c^2(3a^2 + c^2 - b^2)}{4S_B}y + \frac{c^2}{2}z\right) = 0.$$

K nằm trên DE nên $K(x:y:0)$. Nó cũng thuộc (BMD), thì

$$c^2xy - (x+y)\frac{c^2(3a^2 + c^2 - b^2)}{4S_B}y = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{-2S_C}.$$

Cho nên $K(b^2 - c^2 - 3a^2 : 2S_C : 0)$. Tương tự, $L(c^2 - b^2 - 3a^2 : 0 : 2S_B)$.

Cuối cùng, dễ thấy rằng

$$\begin{vmatrix} b^2 - c^2 - 3a^2 & 2S_C & 0 \\ c^2 - b^2 - 3a^2 & 0 & 2S_B \\ S_B - S_C & -S_C & S_B \end{vmatrix} = 4S_BS_C(b^2 - c^2) + 4S_BS_C(S_B - S_C) = 0.$$

Đồng nghĩa S, K, L thẳng hàng. Hay MN, KL, QD đồng quy tại S. ■