Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P405. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right) \geq 1.$$

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \geq \frac{(a+b)^2}{2ab+bc+ca}.$$

Mặt khác, đặt $\theta = ab+bc+ca > 0$ và để ý

$$\frac{a+b}{2ab+bc+ca} \geq \frac{1}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b)} \geq 2ab+bc+ca.$$

$$\Leftrightarrow (\theta+b^2)(\theta+a^2) \geq (\theta+ab)^2.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. (\text{đúng})$$

Do đó

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \geq \frac{a+b}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}.$$

Tương tự

$$\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b+c}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}, \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c} \geq \frac{c+a}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}.$$

Nhân chúng lại thì ta có ngay điều phải chứng minh. Từ các đánh giá và lập luận ở trên, dấu "=" của bất đẳng thức đầu bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.