

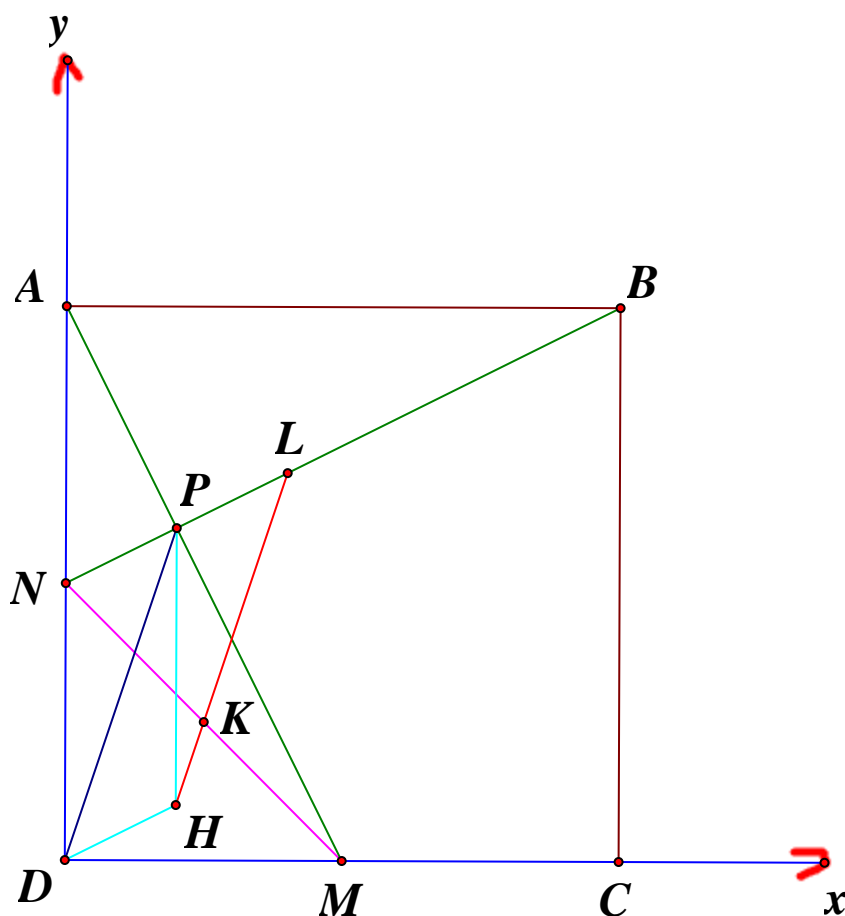
Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P383. (Mức B) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, DA. AM cắt BN tại P. Gọi L là điểm đối xứng của N qua P và K là trung điểm của MN. Gọi H là trực tâm tam giác DMP. Chứng minh rằng ba điểm H, K, L thẳng hàng và $KL = 3KH$.



Lời giải: Ta phát biểu một nhận xét quen thuộc

Các điểm $X(x_1; y_1), Y(x_2; y_2), Z(x_3; y_3)$ với $x_1 \neq x_2 \neq x_3, y_1 \neq y_2 \neq y_3$ thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $O \equiv D$, A và C nằm trên trục Dx, Dy theo thứ tự như hình trên.

Số thực dương $2a$ biểu thị độ dài cạnh hình vuông. Khi đó chúng ta có ngay các tọa độ:

$A(0; 2a), B(2a; 2a), C(2a; 0), D(0; 0), M(a; 0), N(0; a), K(a/2; a/2)$. $\overrightarrow{AM} = (a; -2a)$ nên

đường thẳng AM có vector pháp tuyến là $(2; 1)$. Thế thì (AM): $2(x - a) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow$
 (AM): $2x + y - 2a = 0$. Tương tự (BN): $-x + 2y - 2a = 0$. Từ đây, tọa độ của P chính là
 nghiệm $(x; y)$ của hệ gồm 2 phương trình trên, dễ có $P(2a/5; 6a/5)$. L đối xứng với N qua P
 nên $L = 2P - N = (2.2a/5 - 0; 2.6a/5 - a) = (4a/5; 7a/5)$. Do cách chọn trục và cũng do
 H là trực tâm $\triangle DMP$ nên (PH): $x = 2a/5$. Đường thẳng DH nhận vector chỉ phương của
 đường thẳng AM tức $(1; -2)$ làm vector pháp tuyến. Vì vậy có phương trình đường thẳng
 (DH): $1(x - 0) - 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow$ (DH): $x - 2y = 0$. Tọa độ của H là nghiệm $(x; y)$ của hệ
 gồm 2 phương trình đường thẳng DH và PH. Dễ dàng tìm được $H(2a/5; a/5)$. Để ý

$$\frac{\frac{2a}{5} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{5} - \frac{a}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{4a}{5}}{\frac{a}{2} - \frac{7a}{5}}$$

Nên H, K, L thẳng hàng. Cuối cùng

$$KL = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{4a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{7a}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$$

$$KH = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}a$$

Đồng nghĩa $KL = 3KH$. Vì thế chúng ta đã xong!