Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P395. (Mức B) Cho X là tập gồm 2020 số thực sao cho với bất kỳ hai số khác nhau $a, b \in X$ thì $a^2 + b\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ. Chứng minh rằng $a\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ với mọi $a \in X$.

Lời giải: Ta sử dụng một số nhận xét cũng là kết quả quen thuộc:

Nhận xét 1. Tổng của 2 số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

Chứng minh: Với 2 số hữu tỷ $x = m/n$ và $y = p/q$ $(m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n, q \neq 0, (m, n) = (p, q) = 1)$ thì $x + y = m/n + p/q = (mq + np)/nq \in \mathbb{Q}$.

Nhận xét 2. Tích của một số hữu tỷ và một số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

Chứng minh: Với 2 số hữu tỷ x, y như kết quả 1 thì $xy = (mp)/(nq) \in \mathbb{Q}$.

Nhận xét 3. Tích của một số hữu tỷ và một số vô tỷ là một số vô tỷ.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, tức là tích của một số hữu tỷ và một số vô tỷ là một số hữu tỷ. Cũng với 2 số hữu tỷ x, y như trên và số vô tỷ z. Giả sử $xz = y \Leftrightarrow m/n.z = p/q \Leftrightarrow z = (np)/(mq) \in \mathbb{Q}$, điều này vô lí.

Trở lại bài toán.

Với 3 số a, b, c đôi một phân biệt thuộc tập X ta có được $\begin{cases} a^2 + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \\ b^2 + c\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \\ c^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$ (1)

Lần lượt trừ các biểu thức trong (1) cho nhau thì $\begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{2}(b - c) \in \mathbb{Q} \\ b^2 - c^2 + \sqrt{2}(c - a) \in \mathbb{Q} \\ c^2 - a^2 + \sqrt{2}(a - b) \in \mathbb{Q} \end{cases}$ (2)

Từ (2) lấy biểu thức đầu trừ cho biểu thức thứ 2 thì $a^2 - 2b^2 + c^2 + \sqrt{2}(b - 2c + a) \in \mathbb{Q}$ (3)

Tương tự cũng sẽ có $d \in X$ thỏa mãn $c^2 - 2b^2 + d^2 + \sqrt{2}(b - 2c + d) \in \mathbb{Q}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2 - d^2 + \sqrt{2}(a - d) \in \mathbb{Q}$. (5)

Tiếp tục với 3 số $a, b, d \in X$ thì $\begin{cases} a^2 + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \\ b^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$, suy ra $b^2 - a^2 + \sqrt{2}(a - d) \in \mathbb{Q}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $b^2 - d^2 + 2\sqrt{2}(a - d) \in \mathbb{Q}$. (7)

Từ (6) và (7) suy ra $b^2 - 2a^2 + d^2 \in \mathbb{Q}$. (8)

Tương tự với 3 số $a, c, d \in X$ thì $c^2 - 2a^2 + d^2 \in \mathbb{Q}$. (9)

Từ (8) và (9) suy ra $b^2 - c^2 \in \mathbb{Q}$, kết hợp với $b^2 + c\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ thì $c^2 + c\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Kết quả vừa thu được và $c^2 + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ngụ ý rằng $\sqrt{2}(b - c) \in \mathbb{Q}$ (10). Bởi hằng đẳng thức quen thuộc $b^2 - c^2 = \sqrt{2}(b - c)(b + c)/\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, theo nhận xét 2 và 3 thì điều này đồng nghĩa với việc $(b + c)/\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Suy ra $\sqrt{2}(b + c) = 2(b + c)/\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, kết hợp với (10) thì được $b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Các số trong tập có vai trò như nhau nên $a\sqrt{2}$ cũng là số hữu tỷ. Vì thế chúng ta xong!