Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 12T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P456. (Mức B) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a^2+1)^2}{bc(b+c)} + \frac{(b^2+1)^2}{ca(c+a)} + \frac{(c^2+1)^2}{ab(a+b)} \geq 8\sqrt{3}.$$

Lời giải: Ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$. Lập các đẳng thức tương tự với $b^2 + 1$ và $c^2 + 1$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{bc(b+c)} + \frac{(b+c)^2(b+a)^2}{ca(c+a)} + \frac{(c+a)^2(c+b)^2}{ab(a+b)} \geq 8\sqrt{3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ thì sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{(b+c)^3} + \frac{(b+c)^2(b+a)^2}{(c+a)^3} + \frac{(c+a)^2(c+b)^2}{(a+b)^3} \geq 2\sqrt{3}.$$

Sử dụng $AM - GM$ thì

$$\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{(b+c)^3} + \frac{(b+c)^2(b+a)^2}{(c+a)^3} + \frac{(c+a)^2(c+b)^2}{(a+b)^3} \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Ta sẽ chứng minh $3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2\sqrt{3}$.

Hay $9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{3}$ $(*)$. Ngoài ra ta cũng có một bất đẳng thức quen thuộc

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Kết hợp với $a + b + c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = \sqrt{3}$ thì thu được bất đẳng thức (*). Từ đó hoàn tất chứng minh. Do các đánh giá ở trên, dấu "=" của bất đẳng thức đề bài xảy ra khi

$$a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$