Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P427. (Mức A) Tìm số nguyên dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau

$$x^3 + y^3 + (xy)^k \geq 3.$$

luôn đúng với mọi cặp số thực dương (x, y) thỏa mãn $x + y = 2$.

Lời giải: Đầu tiên, với $a > 0$ chọn bộ

$$(x, y) = \left(\frac{a+6}{a+5}, \frac{a+4}{a+5}\right).$$

Bất đẳng thức được viết lại

$$\left(\frac{a+6}{a+5}\right)^3 + \left(\frac{a+4}{a+5}\right)^3 + \left(\frac{(a+6)(a+4)}{(a+5)(a+5)}\right)^k \geq 3.$$

Cho $a \to 0^+$ thì

$$\left(\frac{24}{25}\right)^k \geq \frac{19}{25} \Leftrightarrow k \leq \log_{\frac{24}{25}} \frac{19}{25} < \log_{\frac{24}{25}} \left(\frac{24}{25}\right)^7 = 7.$$

Bởi vì $19.25^6 = 4638671875 > 24^7 = 4586471424$. Nên $k \leq 6$.

Do đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đề bài đúng với $k = 6$.

Để ý $x^3 + y^3 + (xy)^6 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + (xy)^6 = 8 - 6xy + (xy)^6$.

Đặt $t = xy$ thì $t \in (0; 1]$. Quy về chứng minh

$$t^6 - 6t + 5 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t - 5) \geq 0.$$

Luôn đúng do $t \leq 1$ và $t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t \leq 5$.

Vậy $k = 6$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.