Lời giải mục THÁCH THỨC KỲ NÀY

Nguyễn Tuấn Anh

Lớp 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh.

Số điện thoại: 0971895842.

P397. (Mức A) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \geq 2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải: Quy đồng phân số và chú ý đến giả thiết $abc = 1$ thì điều cần chứng minh tương đương với $a^2c + b^2a + c^2b + 3(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 2(a + b + c + ab + bc + ca). (1)$

Với $a, b, c > 0$ thì $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$. Khai triển ra thì thu được $a^2c + b^2a + c^2b + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6abc$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Áp dụng kết quả trên vào (1) với chú ý $a + b + c + ab + bc + ca + abc + 1 = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$ chúng ta có thể quy về việc chứng minh bất đẳng thức

$$6abc + 2(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 2\big((a + 1)(b + 1)(c + 1) - abc - 1\big).$$

$$\Leftrightarrow 3 + a^2b + b^2c + c^2a \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1 - 1.$$

$$\Leftrightarrow 5 + a^2b + b^2c + c^2a \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1). (2)$$

Từ giả thiết suy ra tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $a = m/n, b = n/p, c = p/m$. Thay chúng vào (2) chúng ta có thể viết lại như sau

$$5 + \frac{m^2}{np} + \frac{n^2}{pm} + \frac{p^2}{mn} \geq \left(\frac{m}{n} + 1\right)\left(\frac{n}{p} + 1\right)\left(\frac{p}{m} + 1\right).$$

$$\Leftrightarrow m^3 + n^3 + p^3 + 5mnp \geq (m + n)(n + p)(p + m).$$

$$\Leftrightarrow m(m - n)(m - p) + n(n - p)(n - m) + p(p - m)(p - n) \geq 0. (3)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (3). Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n \geq p$. Khi đó $p(p - m)(p - n) \geq 0$. Cần chứng minh

$$m(m - n)(m - p) + n(n - p)(n - m) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (m - n)\big(m(m - p) - n(n - p)\big) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (m - n)^2(m + n - p) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do giả sử, hơn nữa dấu "=" xảy ra khi $m = n = p$. Vì thế chúng ta đã xong! Theo các lập luận ở trên thì dấu "=" của bất đẳng thức đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.