

# Một số vấn đề về Cây

Nguyễn Tuấn Anh, Phan Trường Trí, Lê Châu Anh  
Nguyễn Trường Thịnh, Huỳnh Phạm Đức Lâm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

*MA004.M21.KHTN*

# Tổng quan

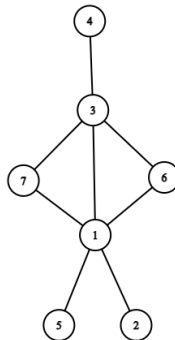
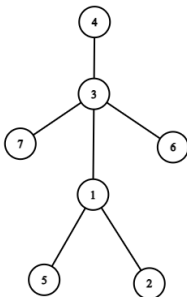
- 1 Một số khái niệm
- 2 Cây  $m$ -phân và các tính chất
- 3 Phép duyệt cây nhị phân
- 4 Ký pháp nghịch đảo Balan

# Một số khái niệm

## Định nghĩa (Cây)

Graph *liên thông*  $G$  được gọi là *cây* nếu  $G$  không chứa chu trình.

**Nhận xét.** Cây là một đơn đồ thị.



# Một số khái niệm

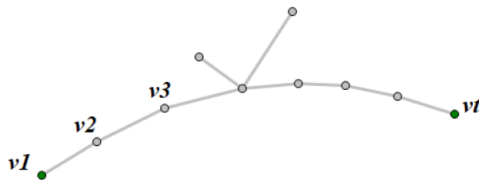
## Định nghĩa

Trong cây, các đỉnh bậc một được gọi là *lá*. Lá còn được gọi là đỉnh ngoài của cây.

## Định lý

Mọi cây  $n$  đỉnh ( $n \geq 2$ ) đều có ít nhất hai lá.

*Chứng minh.* Kỹ thuật xét đường đi dài nhất. □

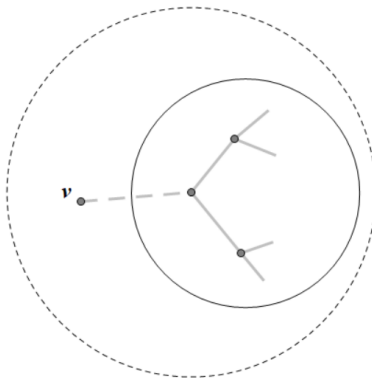


# Một số khái niệm

## Định lý

Mọi cây  $n$  đỉnh có  $n - 1$  cạnh.

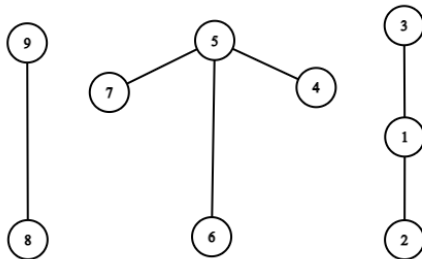
*Chứng minh.* Quy nạp. □



# Một số khái niệm

## Định nghĩa (Rừng)

Graph mà mỗi thành phần liên thông là một *cây* được gọi là *rừng*.



# Một số khái niệm

## Định lý (Daisy Chain)

Cho graph  $T$  có  $n$  đỉnh, các mệnh đề sau đây tương đương:

- 1  $T$  là một cây.
- 2  $T$  không chứa chu trình và có  $n - 1$  cạnh.
- 3  $T$  liên thông, mọi cạnh đều là cầu.
- 4 Có một đường đi sơ cấp duy nhất giữa hai đỉnh bất kỳ của  $T$ .
- 5  $T$  không chứa chu trình và nếu thêm một cạnh  $e$  nối hai đỉnh bất kỳ không kề nhau của  $T$  thì ta có đúng một chu trình trong  $T + e$ .
- 6  $T$  liên thông và có  $n - 1$  cạnh.

*Chứng minh.* Định lý trên có thể dễ dàng được chứng minh bằng *quy nạp* và *phản chứng* trên tập đỉnh. □

# Một số khái niệm

- Làm thế nào để kiểm tra xem một graph có phải là một cây?

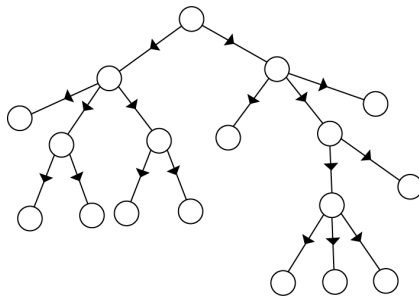


# Một số khái niệm

## Định nghĩa (Cây có gốc)

Cây mà một đỉnh được chọn làm gốc, mỗi cạnh được định hướng từ gốc đi ra được gọi là *cây có gốc*.

**Nhận xét.** Cây có gốc luôn tồn tại trong mỗi cây.



# Một số khái niệm

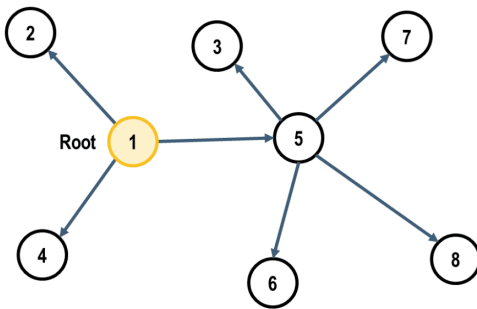
## Các định nghĩa khác

Trong một cây có gốc:

- Nếu có một cạnh được định hướng trực tiếp từ  $u$  đến  $v$ , thì  $u$  là *cha* của  $v$  hay  $v$  là *con* của  $u$ .
- Hai đỉnh cùng cha được gọi là *anh em*.
- *Tổ tiên* của một đỉnh khác với gốc là các đỉnh trên đường đi từ gốc tới đỉnh này.
- *Con cháu* của đỉnh  $u$  là các đỉnh có  $u$  là tổ tiên.
- Đỉnh  $u$  được gọi là *lá* nếu  $u$  không có con.
- Các đỉnh có con được gọi là *đỉnh trong*.
- *Cây con* là cây có gốc với gốc được chọn từ tập đỉnh cây đang xét.
- Số cạnh trên đường đi từ gốc tới đỉnh  $u$  được gọi là *mức* của  $u$ .

# Một số khái niệm

Xác định nguồn gốc phả hệ của cây có gốc dưới đây.



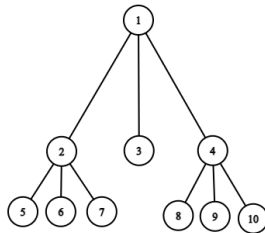
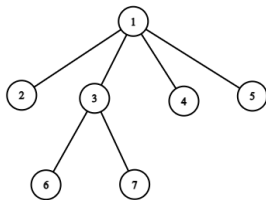
# Cây $m$ -phân và các tính chất

## Định nghĩa (Cây $m$ -phân)

Là cây có gốc, mỗi nút có *không quá*  $m$  nút con.

## Trường hợp đặc biệt

- Cây đầy đủ
- Cây nhị phân



# Cây $m$ -phân và các tính chất

## Tính chất

Cây  $m$ -phân đầy đủ với  $N$  đỉnh,  $I$  đỉnh trong,  $L$  lá, có:

$$① \quad N = m \cdot I + 1 \Leftrightarrow I = \frac{N - 1}{m}$$

$$② \quad N = L + I$$

$$③ \quad L = (m - 1) \cdot I + 1 \Leftrightarrow I = \frac{L - 1}{m - 1}$$

$$④ \quad L = \frac{(m - 1) \cdot N + 1}{m} \Leftrightarrow N = \frac{m \cdot L - 1}{m - 1}$$

# Cây $m$ -phân và các tính chất

Một số loại cây thường gặp.

$m = 2$

- ① Cây nhị phân
- ② Cây nhị phân tìm kiếm
  - Cây AVL
  - Cây đỏ đen

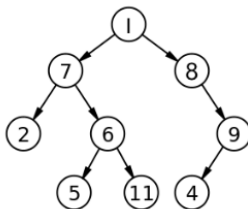
$m > 2$  (Cây nhiều nhánh)

Cây 2 – 3 – 4

# Phép duyệt cây nhị phân

## Duyệt cây nhị phân

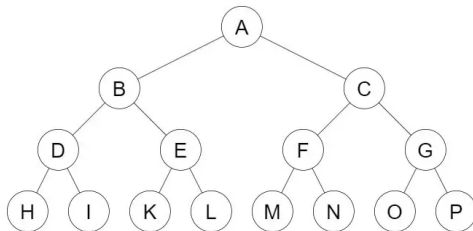
- ❶ Là duyệt qua từng nút của cây theo một thứ tự nhất định.
- ❷ Có 3 cách duyệt cây nhị phân.
  - Cách 1: Duyệt tiền tự (NLR).
  - Cách 2: Duyệt trung tự (LNR).
  - Cách 3: Duyệt hậu tự (LRN).



# Phép duyệt cây nhị phân

## Duyệt tiền tự (NLR)

Duyệt từ nút gốc, duyệt tiền tự cây con trái, duyệt tiền tự cây con phải.



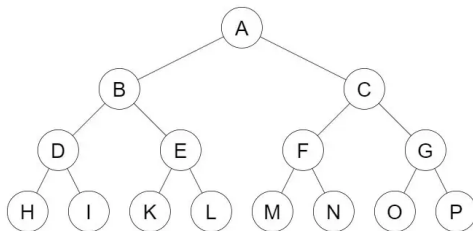
Duyệt tiền tự: A B D H I E K L C F M N G O P



# Phép duyệt cây nhị phân

## Duyệt trung tự (LNR)

Duyệt trung tự cây con trái, duyệt nút gốc, duyệt trung tự cây con phải.

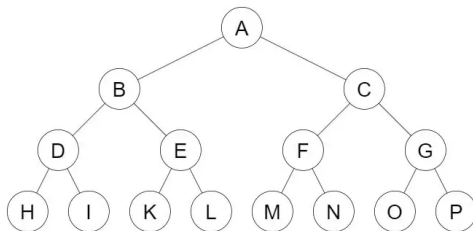


Duyệt trung tự: H D I B K E L A M F N C O G P

# Phép duyệt cây nhị phân

## Duyệt hậu tự (LRN)

Duyệt hậu tự cây con trái, duyệt hậu tự cây con phải, duyệt nút gốc.

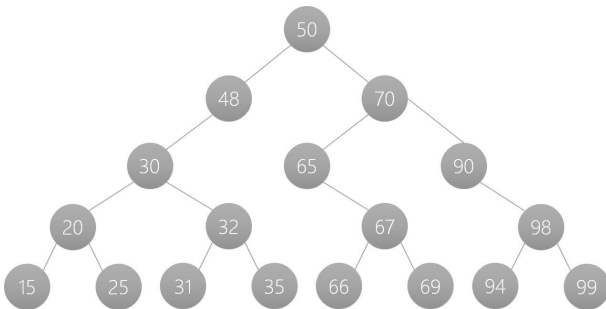


Duyệt hậu tự: H I D K L E B M N F O P G C A

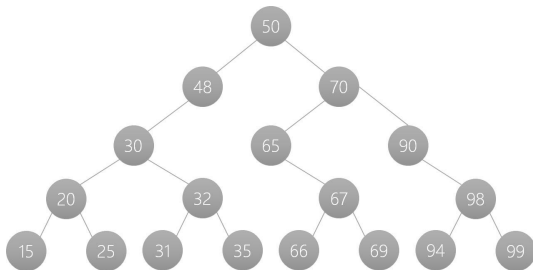
# Phép duyệt cây nhị phân

## Bài tập

Duyệt cây nhị phân sau theo 3 cách: Duyệt tiền tự, duyệt trung tự, duyệt hậu tự.



# Phép duyệt cây nhị phân



- Duyệt tiền tự (NLR):  
50, 48, 30, 20, 15, 25, 32, 31, 35, 70, 65, 67, 66, 69, 90, 98, 94, 99
- Duyệt trung tự (LNR):  
15, 20, 25, 30, 31, 32, 35, 48, 50, 65, 66, 67, 69, 70, 90, 94, 98, 99
- Duyệt hậu tự (LRN):  
15, 25, 20, 31, 35, 32, 30, 48, 66, 69, 67, 65, 94, 99, 98, 90, 70, 50

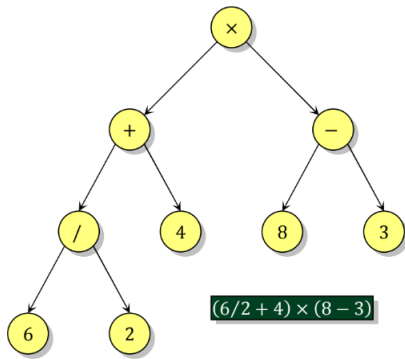
## Định nghĩa (Cây biểu thức số học)

- 1 Là cây nhị phân.
- 2 Mỗi nút trong biểu diễn cho một toán tử hai ngôi  $\theta$ .
- 3 Mỗi nút lá biểu diễn cho một toán hạng của biểu thức.
- 4 Nếu nút biểu diễn cho toán tử hai ngôi  $\theta$  và có hai con:
  - Con trái biểu diễn cho biểu thức  $E_1$ .
  - Con phải biểu diễn cho biểu thức  $E_2$ .
  - Khi đó nút trong này biểu diễn cho biểu thức  $E_1\theta E_2$ .

# Ký pháp nghịch đảo Balan - Cây biểu thức số học

## Ví dụ

Biểu thức  $E = (6/2 + 4) \times (8 - 3)$  có thể được biểu diễn bằng cây biểu thức số học như sau:



# Ký pháp nghịch đảo Balan - Duyệt cây biểu thức

Ta duyệt cây biểu thức của biểu thức  $E = (6/2 + 4) \times (8 - 3)$  ở ví dụ theo 3 cách, sẽ được kết quả như sau:

- Duyệt tiền tự (Ký pháp Balan):  $\times + / 6 2 4 - 8 3$   
Đây là dạng tiền tố (prefix) của biểu thức, toán tử được viết trước hai toán hạng tương ứng.
- Duyệt trung tự:  $6 / 2 + 4 \times 8 - 3$   
Đây là dạng trung tố (infix) của biểu thức, bị nhập nhằng vì thiếu dấu ngoặc. Có thể giải quyết vấn đề trên bằng cách thêm vào thủ tục duyệt cơ chế bổ sung các cặp dấu ngoặc vào mỗi biểu thức con. Khi đó biểu thức trung tự sẽ là  $((6/2 + 4) \times (8 - 3))$ .
- Duyệt hậu tự (Ký pháp nghịch đảo Balan):  $6 2 / 4 + 8 3 - \times$   
Đây là dạng hậu tố (postfix) của biểu thức, toán tử được viết sau hai toán hạng tương ứng.

Trên máy tính, người ta thường dùng RPN để tính giá trị của biểu thức:

- Tính từ trái qua phải (thứ tự tính toán của infix không phải là từ trái qua phải mà là theo độ ưu tiên của phép tính).
- Không sử dụng dấu ngoặc (infix phải sử dụng dấu ngoặc để tránh nhập nhầm biểu thức).
- Tính toán đơn giản bằng cách sử dụng Stack (ngăn xếp).



## Thuật toán tính giá trị biểu thức RPN

- 1 Đọc lần lượt từng phần tử (token) của RP.
- 2 Nếu phần tử đó là một toán hạng thì đẩy phần tử đó vào stack. Ngược lại, phần tử đó là một toán tử. Ta gọi toán tử này là  $\theta$ .
  - Lấy 2 toán hạng  $y$  và  $x$  ra từ Stack ( $y$  được thêm vào stack sau  $x$ ). Trong trường hợp  $\theta$  là toán tử 1 ngôi thì chỉ lấy 1 toán hạng.
  - Áp dụng toán tử cho 2 (hoặc 1) toán hạng vừa lấy ra.
  - Đẩy kết quả của  $x\theta y$  (hoặc  $\theta y$ ) vào stack.
- 3 Sau khi đọc hết các token trong RPN thì stack sẽ còn duy nhất 1 toán hạng, và đó cũng là kết quả của phép tính.

# Ký pháp nghịch đảo Balan - Reverse Polish Notation – RPN

## Ví dụ

Tính giá trị biểu thức  $E = (6/2 + 4) \times (8 - 3)$

Biểu thức sẽ có kí pháp RPN là:  $E = 6\ 2\ /\ 4\ +\ 8\ 3\ -\ \times$

Quá trình tính toán phép tính và lưu trữ của Stack diễn ra như sau:

Độc	Xử lý	Ngăn xếp
6	Đẩy vào 6	6
2	Đẩy vào 2	6, 2
/	Lấy ra 2 và 6, đẩy vào $6/2 = 3$	3
4	Đẩy vào 4	3, 4
+	Lấy ra 4 và 3, đẩy vào $3 + 4 = 7$	7
8	Đẩy vào 8	7, 8
3	Đẩy vào 3	7, 8, 3
-	Lấy ra 3 và 8, đẩy vào $8 - 3 = 5$	7, 5
$\times$	Lấy ra 5 và 7, đẩy vào $7 \times 5 = 35$	35

Vậy, ta được kết quả  $E = 35$ .

Tính giá trị của biểu thức RPN

$$E = 1\ 2 + 3 - 4 \times 5\ 6\ 7\ 8 + - \times \times$$

Chuyển biểu thức sau sang PN và RPN

$$E = \frac{(A + B)(C + D)}{(A - B)C + D} + \frac{A^2 + BD}{C^2 - BD}$$

# Tại sao không dùng prefix?

- prefix vẫn được dùng trong NNLT Lisp.
- prefix sẽ thuận tiện hơn khi ta định nghĩa toán tử như một hàm.
- Ví dụ:  $+ 3 * 2 7$
- Sẽ được thực thi thành `add(3, mul(2,7))`.

- Vũ Đình Hòa, “Định lý và vấn đề về đồ thị hữu hạn”, NXB Giáo dục, 2003.
- Lê Anh Vinh, “Lý thuyết đồ thị”, NXB ĐHQG Hà Nội, 2020.
- Hồ Sĩ Đàm, “Tài liệu giáo khoa chuyên tin Quyển 2”, NXB Giáo dục Việt Nam.

# The End