不要以为数学中的矩阵也是黑色屏幕上不断变化的绿色字符。在数学中，一个矩阵说穿了就是一个二维数组。一个n行m列的矩阵可以乘以一个m行p列的矩阵，得到的结果是一个n行p列的矩阵，其中的第i行第j列位置上的数等于前一个矩阵第i行上的m个数与后一个矩阵第j列上的m个数对应相乘后所有m个乘积的和。比如，下面的算式表示一个 2 行 2 列的矩阵乘以 2 行 3 列的矩阵，其结果是一个 2 行 3 列的矩阵。其中，结果的那个 4 等于 2*2+0*1：

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

下面的算式则是一个 1 x 3 的矩阵乘以 3 x 2 的矩阵，得到一个 1 x 2 的矩阵：

$$\begin{pmatrix}8 & 8 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84 & 70\end{pmatrix}$$

矩阵乘法的两个重要性质：一，矩阵乘法**不满足**交换律；二，矩阵乘法满足结合律。为什么矩阵乘法不满足交换律呢？废话，交换过来后两个矩阵有可能根本不能相乘。为什么它又满足结合律呢？仔细想想你会发现这也是废话。假设你有三个矩阵A、B、C，那么(AB)C和A(BC)的结果的第i行第j列上的数都等于所有A(ik)*B(kl)*C(lj)的和（枚举所有的k和l）。

经典题目 1 给定n个点，m个操作，构造O(m+n)的算法输出m个操作后各点的位置。操作有平移、缩放、翻转和旋转

这里的操作是对所有点同时进行的。其中翻转是以坐标轴为对称轴进行翻转（两种情况），旋转则以原点为中心。如果对每个点分别进行模拟，那么m个操作总共耗时O(mn)。利用矩阵乘法可以在O(m)的时间里把所有操作合并为一个矩阵，然后每个点与该矩阵相乘即可直接得出最终该点的位置，总共耗时O(m+n)。假设初始时某个点的坐标为x和y，下面 5 个矩阵可以分别对其进行平移、旋转、翻转和旋转操作。预先把所有m个操作所对应的矩阵全部乘起来，再乘以(x,y,1)，即可一步得出最终点的位置。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+p\\ y+q\\ 1\end{pmatrix}$$

平移

$$\begin{pmatrix}L & 0 & 0\\ 0 & L & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x*L\\ y*L\\ 1\end{pmatrix}$$

缩放

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\\ 1\end{pmatrix}$$

上下翻转

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ y\\ 1\end{pmatrix}$$

左右翻转

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha x-\sin\alpha y\\ \sin\alpha x+\cos\alpha y\\ 1\end{pmatrix}$$

绕原点旋转

经典题目 2 给定矩阵A，请快速计算出A^n（n个A相乘）的结果，输出的每个数都mod p。

由于矩阵乘法具有结合律，因此A^4 = A * A * A * A = (A*A) * (A*A) = A^2 * A^2。我们可以得到这样的结论：当n为偶数时，A^n = A^(n/2) * A^(n/2)；当n为奇数时，A^n = A^(n/2) * A^(n/2) * A （其中n/2 取整）。这就告诉我们，计算A^n也可以使用二分快速求幂的方法。例如，为了算出A^25 的值，我们只需要递归地计算出A^12、A^6、A^3 的值即可。根据这里的一些结果，我们可以在计算过程中不断取模，避免高精度运算。

经典题目 3 POJ3233 (感谢rmq)

题目大意：给定矩阵A，求A + A^2 + A^3 + … + A^k的结果（两个矩阵相加就是对应位置分别相加）。输出的数据mod m。k<=10^9。

这道题两次二分，相当经典。首先我们知道，A^i可以二分求出。然后我们需要对整个题目的数据规模k进行二分。比如，当k=6 时，有：

A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 =(A + A^2 + A^3) + A^3*(A + A^2 + A^3)

应用这个式子后，规模k减小了一半。我们二分求出A^3 后再递归地计算A + A^2 + A^3，即可得到原问题的答案。

经典题目 4 VOJ1049

题目大意：顺次给出m个置换，反复使用这m个置换对初始序列进行操作，问k次置换后的序列。m<=10, k<2^31。

首先将这m个置换“合并”起来（算出这m个置换的乘积），然后接下来我们需要执行这个置换k/m次（取整，若有余数则剩下几步模拟即可）。注意任意一个置换都可以表示成矩阵的形式。例如，将 1 2 3 4 置换为 3 1 2 4，相当于下面的矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix}$$

置换k/m次就相当于在前面乘以k/m个这样的矩阵。我们可以二分计算出该矩阵的k/m次方，再乘以初始序列即可。做出来了别忙着高兴，得意之时就是你灭亡之日，别忘了最后可能还有几个置换需要模拟。

经典题目 5 《算法艺术与信息学竞赛》207 页（2.1 代数方法和模型，[例题 5]细菌，版次不同可能页码有偏差）

大家自己去看看吧，书上讲得很详细。解题方法和上一题类似，都是用矩阵来表示操作，然后二分求最终状态。

经典题目 6 给定n和p，求第n个Fibonacci数mod p的值，n不超过 2^31

根据前面的一些思路，现在我们需要构造一个 2 x 2 的矩阵，使得它乘以(a,b)得到的结果是(b,a+b)。每多乘一次这个矩阵，这两个数就会多迭代一次。那么，我们把这个 2 x 2 的矩阵自乘n次，再乘以(0,1)就可以得到第n个Fibonacci数了。不用多想，这个 2 x 2 的矩阵很容易构造出来：

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix}$$

经典题目 7 VOJ1067

我们可以用上面的方法二分求出任何一个线性递推式的第n项，其对应矩阵的构造方法为：在右上角的(n-1)*(n-1)的小矩阵中的主对角线上填 1，矩阵第n行填对应的系数，其它地方都填 0。例如，我们可以用下面的矩阵乘法来二分计算f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2) + 2f(n-4)的第k项：

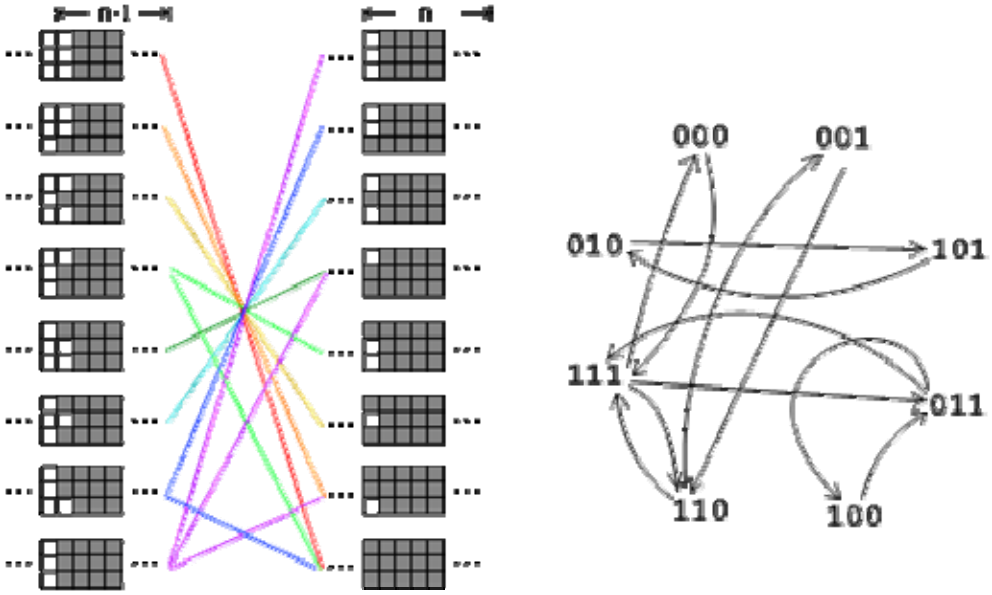
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\2&0&-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\c\\d\\2a-3c+4d\end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法求解线性递推关系的题目我能编出一卡车来。这里给出的例题是系数全为 1 的情况。

经典题目 8 给定一个有向图，问从A点恰好走k步（允许重复经过边）到达B点的方案数mod p的值

把给定的图转为邻接矩阵，即A(i,j)=1 当且仅当存在一条边i->j。令C=A*A，那么C(i,j)=ΣA(i,k)*A(k,j)，实际上就等于从点i到点j恰好经过 2 条边的路径数（枚举k为中转点）。类似地，C*A的第i行第j列就表示从i到j经过 3 条边的路径数。同理，如果要求经过k步的路径数，我们只需要二分求出A^k即可。

经典题目 9 用 1 x 2 的多米诺骨牌填满M x N的矩形有多少种方案，M<=5，N<2^31，输出答案mod p的结果



我们以M=3 为例进行讲解。假设我们把这个矩形横着放在电脑屏幕上，从右往左一列一列地进行填充。其中前n-2 列已经填满了，第n-1 列参差不齐。现在我们要做的事情是把第n-1 列也填满，将状态转移到第n列上去。由于第n-1 列的状态不一样（有 8 种不同的状态），因此我们需要分情况进行讨论。在图中，我把转移前 8 种不同的状态放在左边，转移后 8 种不同的状态放在右边，左边的某种状态可以转移到右边的某种状态就在它们之间连一根线。注意为了保证方案不重复，状态转移时我们不允许在第n-1 列竖着放一个多米诺骨牌（例如左边第 2 种状态不能转移到右边第 4 种状态），否则这将与另一种转移前的状态重复。把这 8 种状态的转移关系画成一个有向图，那么问题就变成了这样：从状态 111 出发，恰好经过n步回到这个状态有多少种方案。比如，n=2 时有 3 种方案，111->011->111、111->110->111 和 111->000->111，这与用多米诺骨牌覆盖 3×2 矩形的方案一一对应。这样这个题目就转化为了我们前面的例题 8。

后面我写了一份此题的源代码。你可以再次看到位运算的相关应用。

经典题目 10 POJ2778

题目大意是，检测所有可能的n位DNA串有多少个DNA串中不含有指定的病毒片段。合法的DNA只能由ACTG四个字符构成。题目将给出 10 个以内的病毒片段，每个片段长度不超

过 10。数据规模n<=2 000 000 000。

下面的讲解中我们以ATC,AAA,GGC,CT这四个病毒片段为例，说明怎样像上面的题一样通过构图将问题转化为例题 8。我们找出所有病毒片段的前缀，把n位DNA分为以下 7 类：以AT结尾、以AA结尾、以GG结尾、以?A结尾、以?G结尾、以?C结尾和以??结尾。其中问号表示“其它情况”，它可以是任一字母，只要这个字母不会让它所在的串成为某个病毒的前缀。显然，这些分类是全集的一个划分（交集为空，并集为全集）。现在，假如我们已经知道了长度为n-1 的各类DNA中符合要求的DNA个数，我们需要求出长度为n时各类DNA的个数。我们可以根据各类型间的转移构造一个边上带权的有向图。例如，从AT不能转移到AA，从AT转移到??有 4 种方法（后面加任一字母），从?A转移到AA有 1 种方案（后面加个A），从?A转移到??有 2 种方案（后面加G或C），从GG到??有 2 种方案（后面加C将构成病毒片段，不合法，只能加A和T）等等。这个图的构造过程类似于用有限状态自动机做串匹配。然后，我们就把这个图转化成矩阵，让这个矩阵自乘n次即可。最后输出的是从??状态到所有其它状态的路径数总和。

题目中的数据规模保证前缀数不超过 100，一次矩阵乘法是三方的，一共要乘log(n)次。因此这题总的复杂度是 100^3 * log(n)，AC了。

最后给出第 9 题的代码供大家参考（今天写的，熟悉了一下C++的类和运算符重载）。为了避免大家看代码看着看着就忘了，我把这句话放在前面来说：

Matrix67 原创，转贴请注明出处。

```
#include <cstdio>
#define SIZE (1<<m)
#define MAX_SIZE 32
using namespace std;

class CMatrix
{
    public:
        long element[MAX_SIZE][MAX_SIZE];
        void setSize(int);
        void setModulo(int);
        CMatrix operator* (CMatrix);
        CMatrix power(int);
    private:
        int size;
        long modulo;
};

void CMatrix::setSize(int a)
{
    for (int i=0; i<a; i++)
        for (int j=0; j<a; j++)
            element[i][j]=0;
    size = a;
```

```
}

void CMatrix::setModulo(int a)
{
    modulo = a;
}

CMatrix CMatrix::operator* (CMatrix param)
{
    CMatrix product;
    product.setSize(size);
    product.setModulo(modulo);
    for (int i=0; i<size; i++)
        for (int j=0; j<size; j++)
            for (int k=0; k<size; k++)
            {
                product.element[i][j]+=element[i][k]*param.element[k]
[j];
                product.element[i][j]%=modulo;
            }

    return product;
}

CMatrix CMatrix::power(int exp)
{
    CMatrix tmp = (*this) * (*this);
    if (exp==1) return *this;
    else if (exp & 1) return tmp.power(exp/2) * (*this);
    else return tmp.power(exp/2);
}


int main()
{
    const int validSet[]={0,3,6,12,15,24,27,30};
    long n, m, p;
    CMatrix unit;

    scanf("%d%d%d", &n, &m, &p);
    unit.setSize(SIZE);
    for(int i=0; i<SIZE; i++)
        for(int j=0; j<SIZE; j++)
            if( ((~i)&j) == ((~i)&(SIZE-1)) )
```

```
            {
                bool isValid=false;
                for             (int             k=0;             k<8;
k++)isValid=isValid||(i&j)==validSet[k];
                unit.element[i][j]=isValid;
            }

    unit.setModulo(p);
    printf("%d", unit.power(n).element[SIZE-1][SIZE-1] );
    return 0;
}
```