

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. Статистичний аналіз випадкових помилок**

**Мета:** Повторити поняття випадкових і систематичних помилок, середнього значення, стандартного відхилення та стандартного відхилення середнього та провести їх оцінювання.

**Теоретичні відомості** до роботи наведені у лекції 3.

### **Порядок виконання роботи**

**Завдання 1.** Визначити, до якого типу належать наведені нижче помилки:

- а) помилка при одноразовому вимірюванні опору провідника;
- б) відхилення значення опору провідника від виміряного точнішим приладом в процесі вимірювання опору одного й того ж провідника 100 разів в один і той же бік;
- в) одноразове вимірювання діаметру об'єкта;
- г) відхилення значення внутрішнього діаметру одного й того ж об'єкта при вимірюванні 30 разів в різні боки.

**Завдання 2.** Виконати наступне завдання згідно з номером свого варіанту.

**1.** Величина  $x$  виміряна п'ять разів, отримані результати: 5, 7, 9, 7, 8. Обчислити середнє значення  $\bar{x}$  і стандартне відхилення  $\sigma_x$ , користуючись різними формулами (лекція 3). Порівняти отримані значення.

**2.** Середнє значення  $\bar{x}$  від  $N$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  визначено як  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ .

Відхиленням величини  $x_i$  є різниця  $d_i = x_i - \bar{x}$ . Покажіть, що середнє значення відхилень  $d_1, d_2, \dots, d_N$  дорівнює нулю.

**3.** Обчислити середнє значення  $\bar{t}$  і стандартне відхилення  $\sigma_t$  для 30 результатів вимірювання часу  $t$  (с):

8.16; 8.14; 8.12; 8.16; 8.18; 8.10; 8.18; 8.18; 8.18; 8.24;  
 8.16; 8.14; 8.17; 8.18; 8.21; 8.12; 8.12; 8.17; 8.06; 8.10;  
 8.12; 8.10; 8.14; 8.09; 8.16; 8.16; 8.21; 8.14; 8.16; 8.13.

**4.** Якщо провести багато вимірювань, то можна очікувати, що приблизно 70% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm \sigma_t$ . Також можна очікувати, що близько 95% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ . Для результатів вимірювань із завдання №3 визначити, скільки з цих результатів, за вашими очікуваннями, лежатиме поза інтервалом  $\bar{t} \pm \sigma_t$ ? А скільки насправді?

5. Якщо б результатом вимірювання було  $\lambda = 11.2 \pm 0.1$  см, а калібрування генератора було б проведене з 3%-вою похибкою, то яким би був результат обчислення в завданні №9? Чи була б важливою систематична помилка?

6. Якщо брати дані 30 вимірювань із завдання №3, якою буде найкраща оцінка для часу та його похибки за умови, що всі похибки є випадковими?

7. В табл.1 наведені результати десяти вимірювань довжини  $l$  та ширина  $b$  прямокутника, які використовуються для визначення площі  $A = lb$ . Якщо б вимірювання проводились таким чином, що кожного разу визначалась пара значень (одне значення  $l$  і одне значення  $b$ ), то було б логічно перемножити результати в кожній парі та отримати значення  $A$ . Обчислити таким способом десять значень  $A$ , потім середнє значення  $\bar{A}$ , стандартне відхилення  $\sigma_A$  та стандартне відхилення середнього  $\sigma_{\bar{A}}$ .

Таблиця 1 – Довжина і ширина (мм)

Виміряні значення						Середнє	Стандартне відхилення	Стандартне відхилення середнього
$l$	24.25	24.26	24.22	24.28	24.24			
	24.25	24.22	24.26	24.23	24.24			
$b$	50.36	50.35	50.41	50.37	50.36			
	50.32	50.39	50.38	50.36	50.38			

8. Після кількох вимірювань швидкості звуку  $u$  був зроблений висновок про те, що стандартне відхилення вимірювань дорівнює  $\sigma_u = 10$  м/с. Припускаючи, що всі помилки є випадковими, можна досягти будь-якої бажаної точності, проводячи достатню кількість вимірювань та усереднюючи. Скільки вимірювань необхідно провести, щоб остаточна похибка результату склала  $\pm 3$  м/с? А скільки, якщо похибка складатиме всього 0.5 м/с?

9. Обчислюється швидкість звуку, за формулою  $u = f\lambda$ , де  $f$  – частота, що зчитується з циферблату звукового генератора, а  $\lambda$  – довжина хвилі, що вимірюється за розміщенням кількох максимумів у резонуючому стовпчику повітря. Оскільки вимірювання  $\lambda$  виконувались кілька разів, їх можна обробити статистичними методами, на підставі яких робиться висновок, що  $\lambda = 11.2 \pm 0.5$  см. Вимірювання частоти  $f = 3000$  Гц було проведено лише один раз, тому немає підстав говорити про достовірність цього значення. Додатково оговорюється, що генератор є «надійним з похибкою 1%», отже, вказується 1%–ва систематична помилка в  $f$  (але не в  $\lambda$ ). Який результат буде для  $u$  та її похибки? Чи важливою є 1%–ва можлива систематична помилка генератора (що виникає через недостатньо точне його калібрування)?

**10.** Якщо провести багато вимірювань, то можна очікувати, що приблизно 70% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm \sigma_t$ . Також можна очікувати, що близько 95% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ . Для результатів вимірювань із завдання №3 визначити, скільки з цих результатів, за вашими очікуваннями, лежатиме поза інтервалом  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ ? А скільки *насправді*?

**11.** Для того, щоб обчислити стандартне відхилення  $\sigma_x$  для  $N$  вимірювань  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , необхідно знайти суму  $\sum (x_i - \bar{x})^2$ . Доведіть, що цю суму можна записати у вигляді:  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i)^2 - N\bar{x}^2$ .

**12.** Обчислити стандартне відхилення за даними завдання №1, використовуючи тотожність, отриману в завданні №11.

**13.** Вимірюється період коливань маятника три рази, отримані результати: 1.6; 1.8; 1.7 (с). Чому дорівнюють середнє значення та стандартне відхилення? (Для стандартного відхилення використовувати альтернативну формулу визначення стандартного відхилення (див. лекцію 3). Якщо провести четверте вимірювання, якою буде імовірність того, що результат цього нового вимірювання лежатиме *поза* інтервалом [1.6; 1.8] с?

**14.** Розв'язати задачу визначення площі  $A$  (завдання №7, табл.1) за умови, що  $A$  визначається як добуток  $\bar{l}\bar{b}$ , і похибки розраховуються як у непрямих вимірюваннях (див. приклад 3.1 лекції 3).

**15.** Обчислити коефіцієнт пружності пружини  $k$  з табл.2. Розрахувати  $\bar{k}$  та його похибку (стандартне відхилення середнього  $\sigma_{\bar{k}}$ ).

Таблиця 2 – Обчислення коефіцієнту пружності пружини  $k$

Маса $m$ , кг	0.513	0.581	0.634	0.691	0.752	0.834	0.901	0.950
Період $T$ , с	1.24	1.33	1.36	1.44	1.50	1.59	1.65	1.69
$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$								

**16.** Обчислити стандартне відхилення середнього для п'яти вимірювань із завдання №1. Яким буде значення  $x$ ?

**17.** В табл.3 наведені результати п'яти вимірювань довжини  $l$  та ширина  $b$  прямокутника, які використовуються для визначення площі  $A=lb$ . Якщо б вимірювання проводились таким чином, що кожного разу визначалась пара значень (одне значення  $l$  і одне значення  $b$ ), то було б логічно перемножити результати в кожній парі та отримати значення  $A$ . Обчислити таким способом п'ять значень  $A$ , потім середнє значення  $\bar{A}$ , стандартне відхилення  $\sigma_A$  та стандартне відхилення середнього  $\sigma_{\bar{A}}$ . Розв'язати задачу також за умови, що  $A$  визначається як добуток  $\bar{l}\bar{b}$ , і похибки розраховуються як у непрямих вимірюваннях (див. приклад 3.1 лекції 3). Порівняти результати.

Таблиця 3 – Довжина і ширина (мм)

Виміряні значення						Середнє	Стандартне відхилення	Стандартне відхилення середнього
$l$	24.25	24.26	24.22	24.28	24.24			
$b$	50.36	50.35	50.41	50.37	50.36			

**18.** Обчислити середнє значення  $\bar{t}$  і стандартне відхилення  $\sigma_t$  для 20 результатів вимірювання часу  $t$  (с):

8.16; 8.14; 8.17; 8.18; 8.21; 8.12; 8.12; 8.17; 8.06; 8.10;

8.12; 8.10; 8.14; 8.09; 8.16; 8.16; 8.21; 8.14; 8.16; 8.13.

**19.** Якщо провести багато вимірювань, то можна очікувати, що приблизно 70% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm \sigma_t$ . Також можна очікувати, що близько 95% всіх результатів опиняться всередині інтервалу  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ . Для результатів вимірювань із завдання №3 визначити, скільки з цих результатів, за вашими очікуваннями, лежатиме поза інтервалом  $\bar{t} \pm \sigma_t$ ? А скільки *насправді*?

### Контрольні питання

1. Прямі та непрямі вимірювання.
2. Випадкові та систематичні помилки.
3. Середнє значення та стандартне відхилення.
4. Стандартне відхилення як похибка одиничного вимірювання.
5. Стандартне відхилення середнього.