Traitement des séries temporelles

Partie I – Modélisation et analyse de séries temporelles

Xavier Hinaut & Nathan Trouvain
Mnemosyne - Inria/IMN/LabRI

Sommaire

Introduction

Introduction: *Timeseries in the wild*

Nature des séries temporelles

Processus aléatoire (discret ou continu)

$\{\ldots, X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+n}, \ldots\}$

Observation et échantillonnage

$h(X_t)$

$\rightarrow$

Séries temporelles (discret)

$\{x_0, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+m}\}$

déf. Un tirage (ou observation) d'un **processus aléatoire** $\{\ldots, X_{tn}, X_{t(n+1)}, \ldots, X_{t(n+m)}, \ldots\}$ défini par un ensemble **(discret)** de **variables aléatoires indexées dans le temps** est une ***série temporelle***.

Introduction: *Timeseries in the wild*

Domaines d'application

Processus aléatoire (discret ou continu)

$\{\ldots, X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+n}, \ldots\}$

Observation et échantillonnage
$h(X_t)$

$\longrightarrow$

Séries temporelles (discret)

$\{x_0, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+m}\}$

ex.

- Systèmes physiques : météo, mouvement des océans, contrôle du rythme cardiaque, rayonnements lumineux et thermiques…
- Sources anthropiques : indicateurs économiques et financiers, langage, comportement…

- Données de terrain ou d'étude : température sur un an, rythme cardiaque sur une journée, vidéos et enregistrements audios, texte…
- *You are here* → **Données simulées : modèles géophysiques, économétriques, du langage…**

Introduction: *Timeseries in the wild*

Un problème difficile

Processus aléatoire (discret ou continu)

$\{\dots, X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}, \dots\}$

Souvent inconnu/continu/caché

Observation et échantillonnage $h(X_t)$

Souvent avec perte

Séries temporelles (discret)

$\{x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m}\}$

Souvent incomplet/sans répétition

ex.

- Systèmes physiques : météo, mouvement des océans, contrôle du rythme cardiaque, rayonnements lumineux et thermiques…
- Sources anthropiques : indicateurs économiques et financiers, langage, comportement…

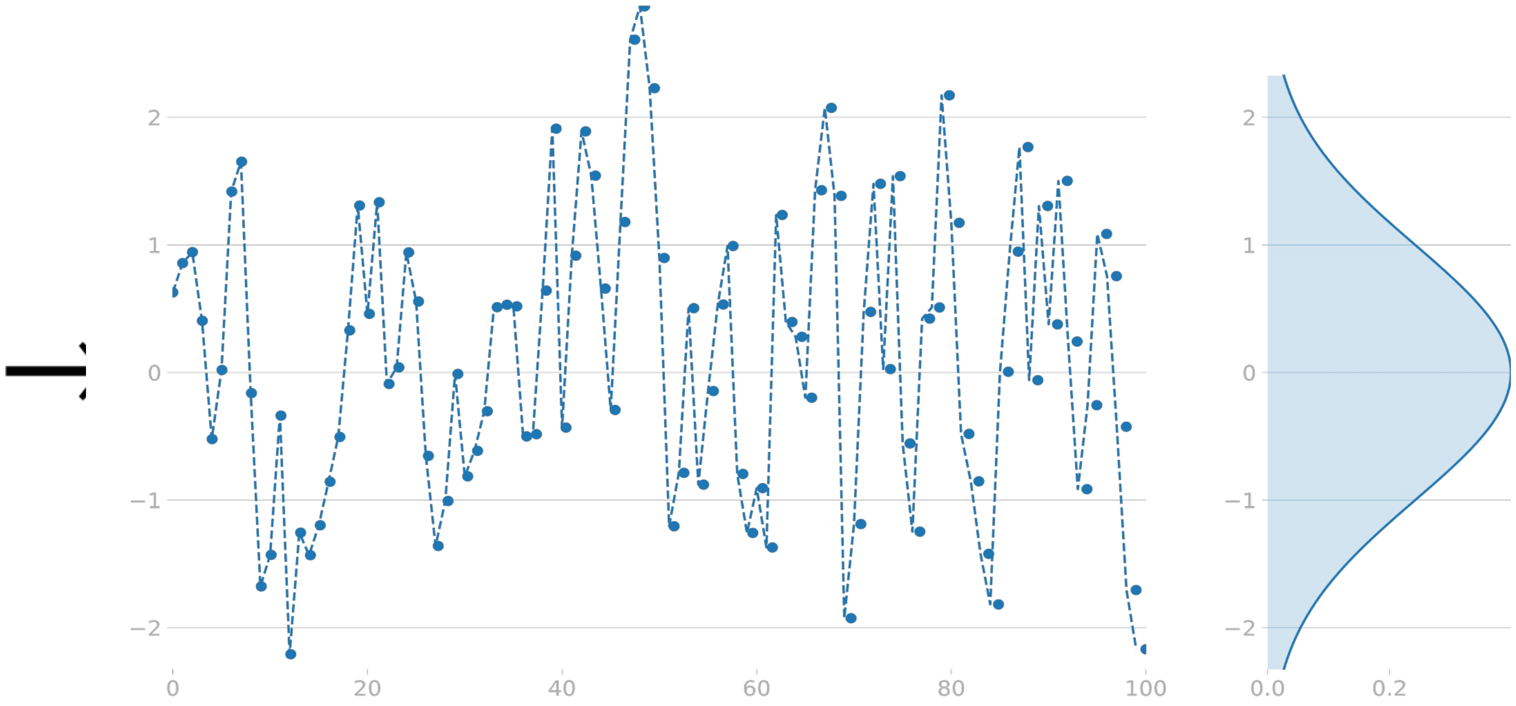
- Données de terrain ou d'étude : température sur un an, rythme cardiaque sur une journée, vidéos et enregistrements audios, texte…
- Données simulées : modèles géophysiques, économétriques, du langage…

Problématique

En quoi un processus aléatoire est différent d'une série de distributions d'événements aléatoires ?

Est-ce que ce n'est pas juste du bruit gaussien, mais horizontalement ?

(spoilers: non)



Problématique: un exemple

déf.

Une série temporelle est un **agencement ordonné dans le temps** de tirages de variables aléatoires d'un processus aléatoire.
Les tirages ne sont pas indépendants.

ex.

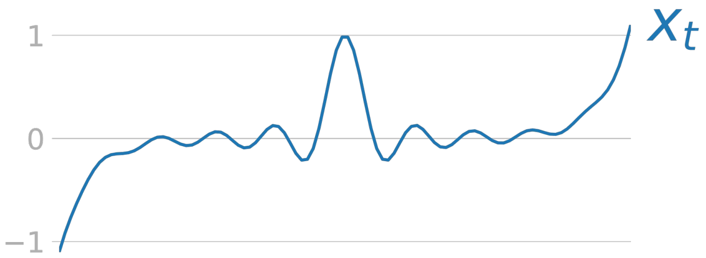
Soit X_t une variable aléatoire représentant un pixel d'une vidéo à l'instant t:

Avec agencement: X_t dépend de $X_{t-1,t-2,\ldots t-n}$

Sans agencement, perte d'une partie de l'information

I. Modélisation et analyse des séries temporelles

Type de données



déf.

- Domaine continu

$$h(X_t) = x_t \in \mathbb{Z}$$

Les « vraies » **séries temporelles**, représentées dans un domaine continu (nombres réels ou complexes).

ex. La plupart des données physiques, météos, physiologiques, financières, audio, vidéo.

déf.

- Domaine discret

$$h(X_t) = x_t \in L \leftarrow \textit{Parfois appelé lexique}$$

Appelées **séquences.** Le résultat du processus aléatoire est un symbole issu d'un ensemble discret.

ex. Le langage, en particulier. $L = \{\dots, < le >, < en >, < particulier >, < langage >, <.>, <,>, \dots\}$

x_1 x_2 $x_3 x_4$ x_5 x_6

Type de données

Il est possible de passer d'un domaine à l'autre.

$ex.$ Attribuer un vecteur de nombres réels à un symbole: *word embedding.*

$ex.$ Attribuer un symbole à un régime d'une série temporelle: annoter un son par un symbole.

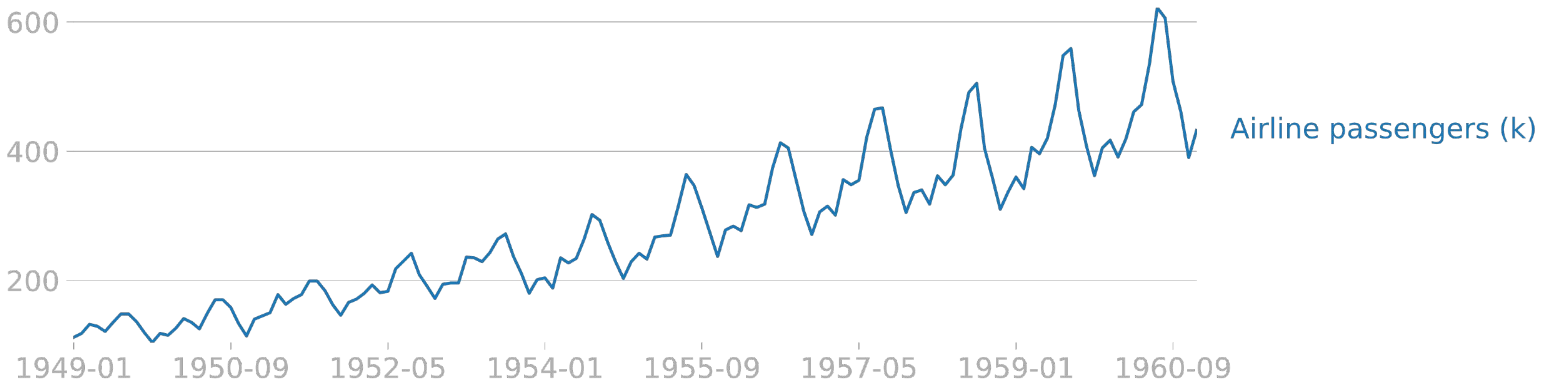
Les séries peuvent être **univariées ou multivariées.**

$ex.$ La température au cours du temps est **univariée**. La température et l'humidité au cours du temps, pris comme le résultat d'un seul phénomène, forment une série **multivariée**.

$ex.$ Les vidéos sont une forme particulière de séries multivariées (avec beaucoup de variables corrélées spatio-temporellement).

I.1. Séries temporelles

Décomposition



Composantes (théoriques) d'un série temporelle

déf.

Série **additive**

$$X_t = c + T_t + S_t + \eta_t$$

Série **multiplicative**

$$X_t = c \times T_t \times S_t \times \eta_t$$

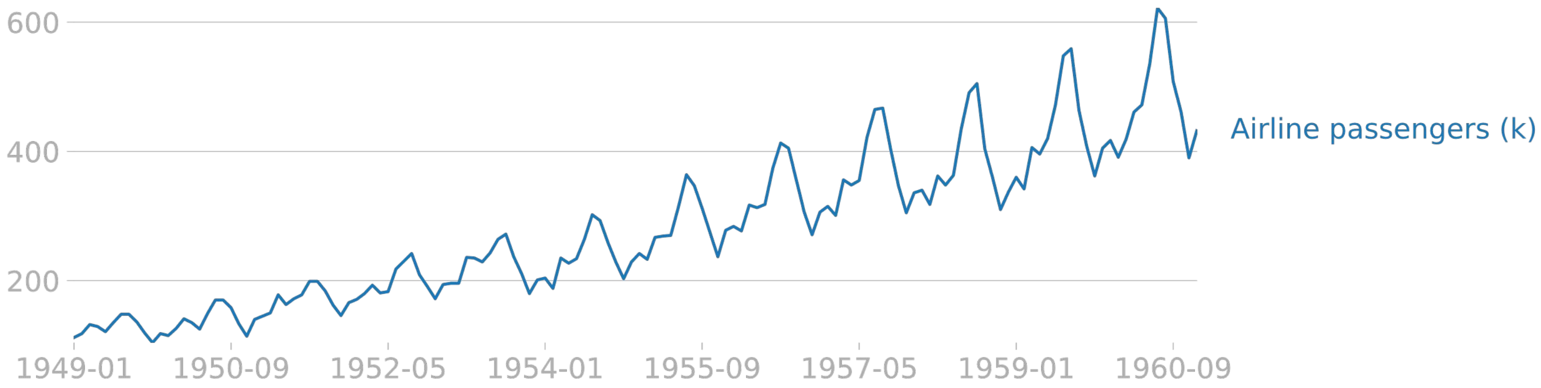
c — **Niveau** (*level*) : moyenne de la série

T_t — **Tendance** (*trend*) : évolution de la moyenne dans le temps

S_t — **Saisonnalité** (*seasonality*) : cycles dans la séries

η_t — **Bruit** ou **résidus** (*noise, residuals*) : tout ce qu'il reste. Doit être décorrélé des autres composants.

Décomposition



Composantes (théoriques) d'un série temporelle

déf.

Série **additive**

$$X_t = c + T_t + S_t + \eta_t$$

Série **multiplicative**

$$X_t = c \times T_t \times S_t \times \eta_t$$

c — **Niveau** (*level*) : moyenne de la série

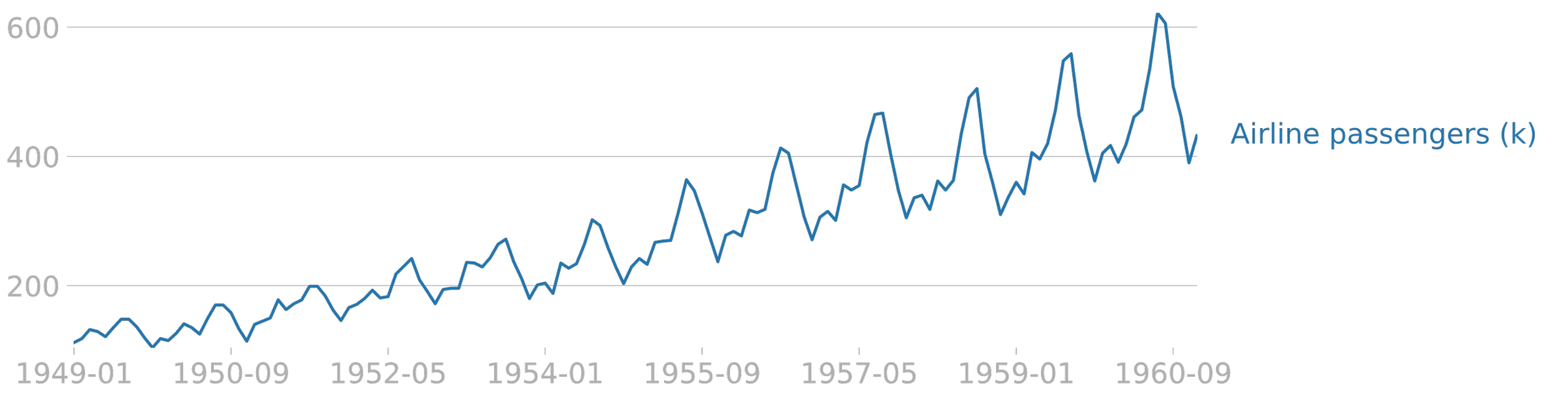
T_t — **Tendance** (*trend*) : évolution de la moyenne dans le temps

S_t — **Saisonnalité** (*seasonality*) : cycles dans la séries

Composants systémiques Modélisables

η_t — **Bruit** ou **résidus** (*noise, residuals*) : tout ce qu'il reste. Doit être décorrélé des autres composants.

Décomposition



Composantes (théoriques) d'un série temporelle

Série **additive**

$$X_t = c + T_t + S_t + \eta_t$$

- Tendance linéaire
- Cycles à fréquence et/ou amplitude fixe

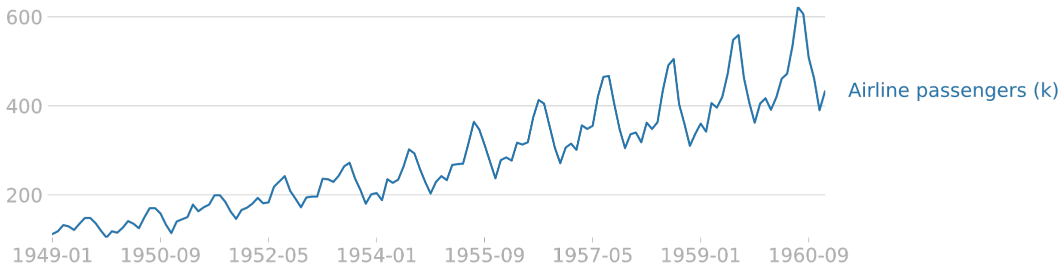
Série **multiplicative**

$$X_t = c \times T_t \times S_t \times \eta_t$$

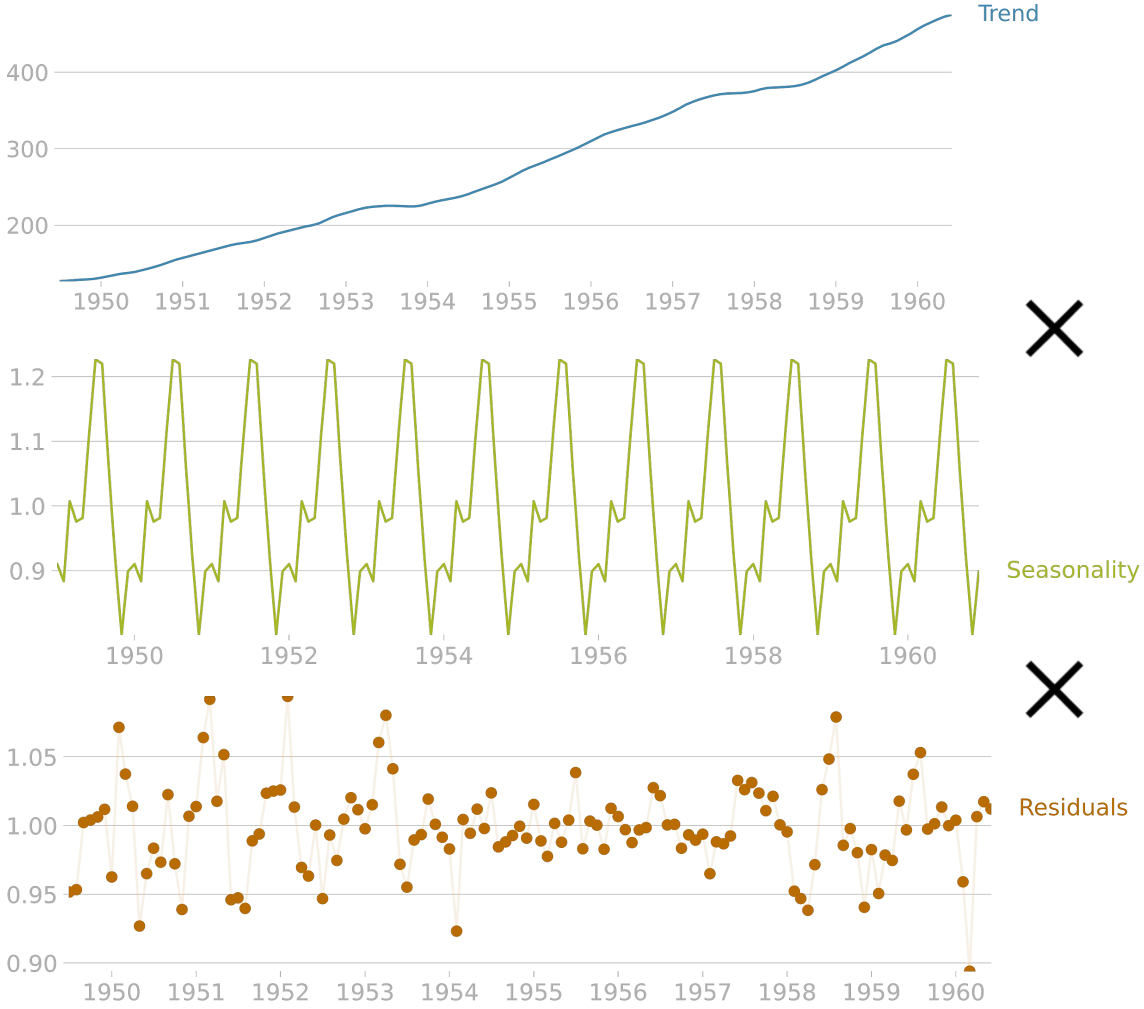
- Tendance quadratique/exponentielle
- Cycles à fréquence et/ou amplitude variable

Dans les faits, souvent difficile à identifier clairement.

Décomposition



=



Py.

```
statsmodels.tsa.seasonal.seasonal_decompose
statsmodels.tsa.seasonal.STL
```

Stationnarité

déf.

- Une série X_t est **covariance-stationnaire** si:

$$E[X_t] = \mu \qquad \text{(constant dans le temps)}$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \text{ (constant dans le temps)}$$

$$Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(t) \text{ (constant pour tout } t\text{)}$$

Autrement dit, une série stationnaire:

- n’a pas de tendance;
- varie autour de la moyenne avec une amplitude constante;
- montre des fluctuations aléatoires à court terme similaires.

Théorème de représentation de Wold

Th.

- **Tout série covariance-stationnaire X_t de moyenne $\mu = 0$ peut s'écrire sous la forme:**

$$X_t = V_t + S_t$$

- V_t est un processus linéaire déterministe, de la forme: $V_t = \alpha_1 V_{t-1} + \ ... + \alpha_p V_{t-p} = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i V_{t-i}$
- S_t est un processus à moyenne mouvante infinie: $S_t = \ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \eta_{t-i} + \eta_t \ (\eta_t \sim WN(\mu, \sigma^2))$

Autrement dit, on admettra que toute série stationnaire de moyenne nulle admet une représentation de type ARMA (*Auto-Regressive – Moving Average*).

Processus autorégressifs (AR(p))

déf.

- $$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \eta_t$$

$$= \alpha_0 + \eta_t + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}$$

- La série ne dépend que de **ses valeurs passées et d'un bruit blanc $\boldsymbol{\eta_t}$**.
- Les $\{\alpha_i\}$ sont les paramètres du modèle. Ils peuvent être estimés par simple **régression linéaire** entre X_t et $[X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}]$.
- Le modèle admet un **hyperparamètre $\boldsymbol{p}$, appelé *lag***, qui détermine **le nombre de sauts dans le passé** $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}$ nécessaires pour **prédire la valeur actuelle $\boldsymbol{X_t}$**.

Processus à moyenne mouvante (MA(q))

déf.

- $$X_t = \phi_0 + \phi_1\eta_{t-1} + \phi_2\eta_{t-2} + \ \ldots + \phi_p\eta_{t-q} + \eta_t$$

$$= \phi_0 + \eta_t + \sum_{i=1}^{q} \phi_i\eta_{t-i}$$

- La série ne dépend que de **ses résidus (ou innovations) passées et courantes** $\boldsymbol{\eta_t}$.
- Les $\{\phi_i\}$ sont les paramètres du modèle. Estimation complexe, car η_t n'est pas directement accessible (algorithmes d'innovations, ***Expectation Maximization*** (**EM**)).
- Le modèle admet un **hyperparamètre q, appelé ordre**, qui détermine **le nombre d'innovations passées** $\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \ldots, \eta_{t-q}$ nécessaires pour **prédire la valeur actuelle** $\boldsymbol{X_t}$.

NB : ne pas confondre avec une moyenne glissante !

Identifier p et q

Fonction d'autocorrélation (ACF)

Dans le cas d'un processus stationnaire (condition nécessaire) de moyenne μ et de variance σ^2:

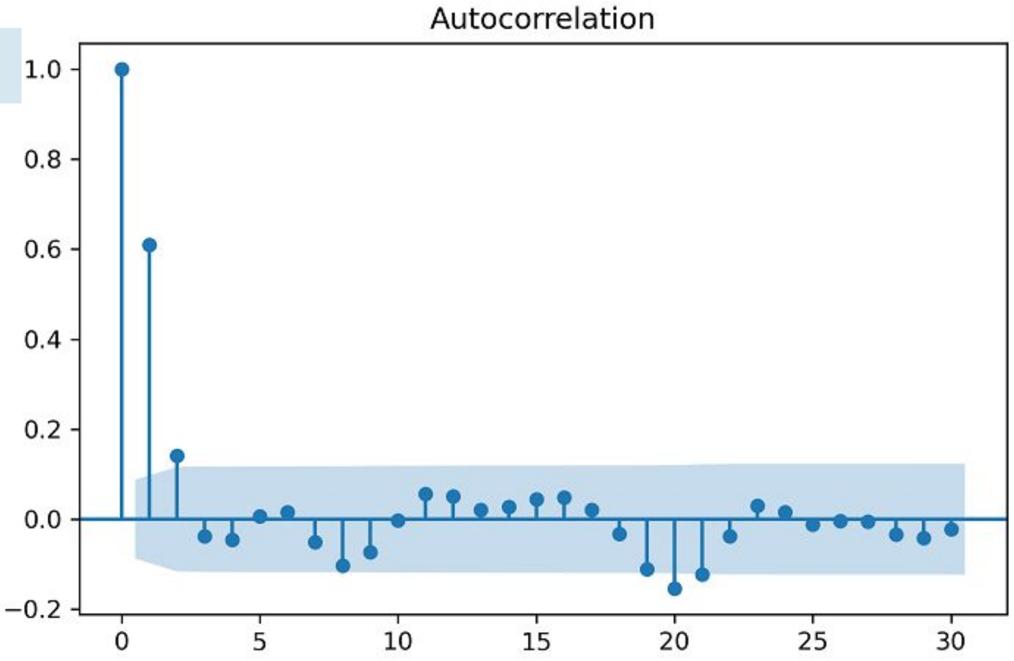
$$R_X(\tau) = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathbb{E}[X_t - \mu, X_{t+\tau} - \mu] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^n (X_i - \mu)(X_{i-\tau} - \mu)$$

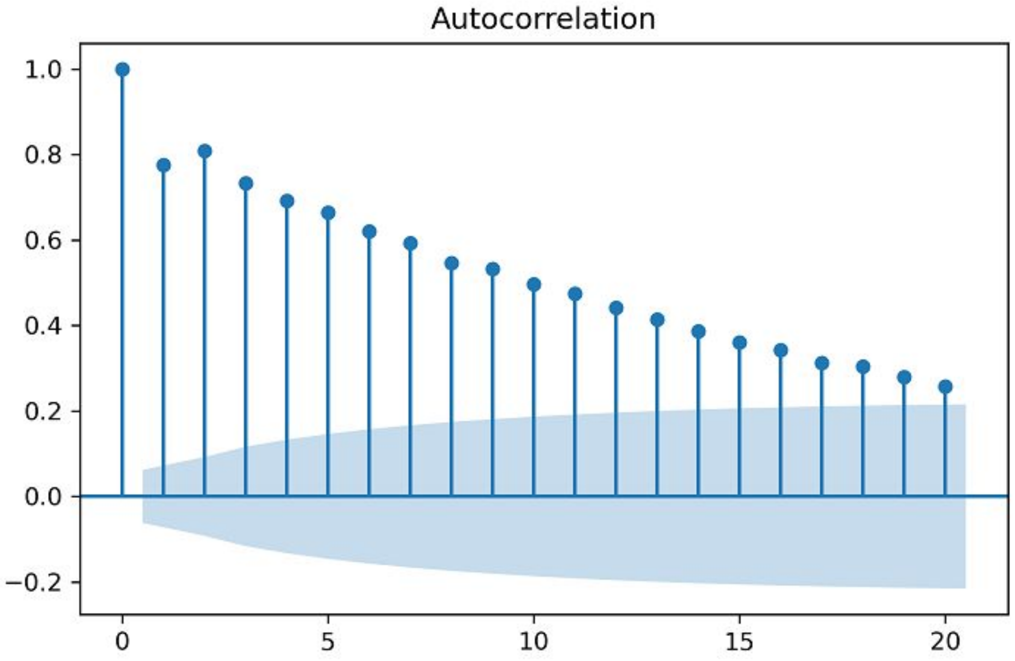
déf. $\boldsymbol{R_X(\tau)}$ **est la corrélation entre** $\boldsymbol{X_t}$ **et lui-même décalé de** $\boldsymbol{\tau}$ **dans le temps,** $\boldsymbol{X_{t-\tau}}$. Si $X_{t-\tau}$ est corrélé à X_t (valeur proche de 1 ou de -1), alors:

- Pour un AR: $X_{t-\tau}$ explique X_t $\rightarrow \boldsymbol{p \geq \tau}$
- Pour un MA: si $R_X(\tau+1), \dots, R_X(\tau+n)$ sont proches de 0, $\boldsymbol{q = \tau}$.

Identifier p et q

ex.

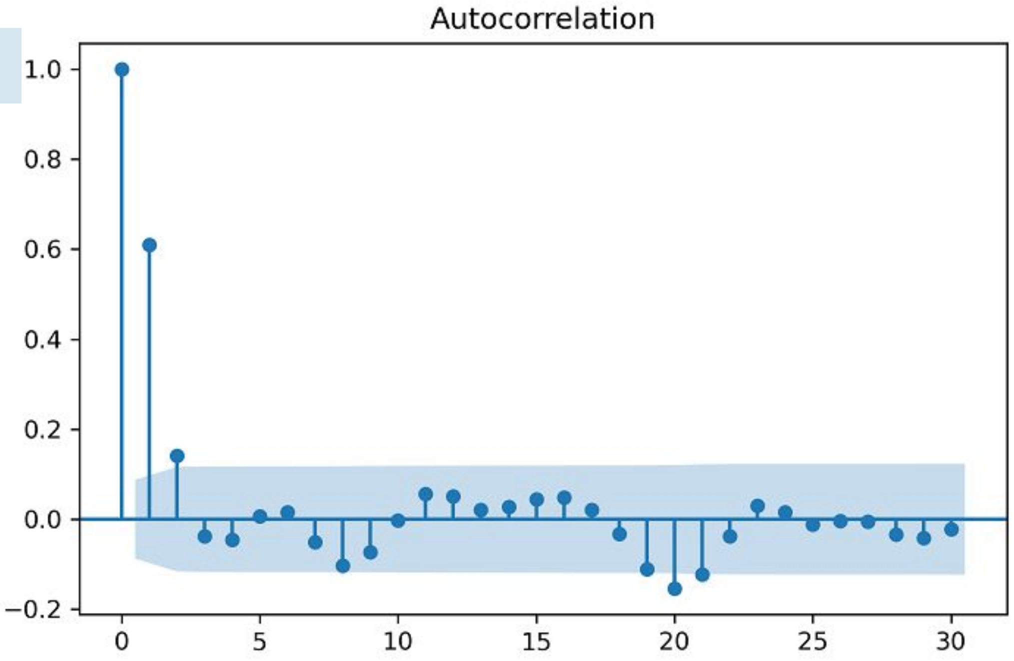




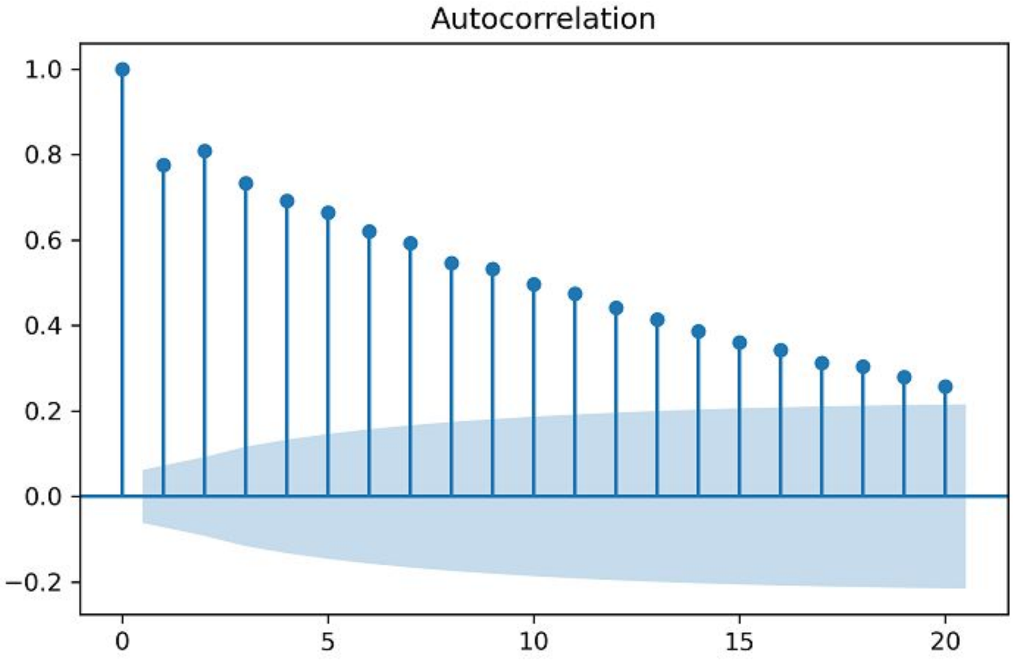
`Py.` *statsmodels.graphics.tsaplots.plot_acf*

Identifier p et q

ex.



Probablement MA(2)



Probablement AR(p)
(PACF pour plus d'info)

Identifier p et q

Fonction d'autocorrélation partielle (PACF)

déf. **Toujours dans le cas d'un processus stationnaire, $\boldsymbol{\phi_X(\tau)}$ permet d'évaluer la corrélation entre $\boldsymbol{X_t}$ et $\boldsymbol{X_{t+\tau}}$ et seulement $\boldsymbol{X_{t+\tau}}$.**

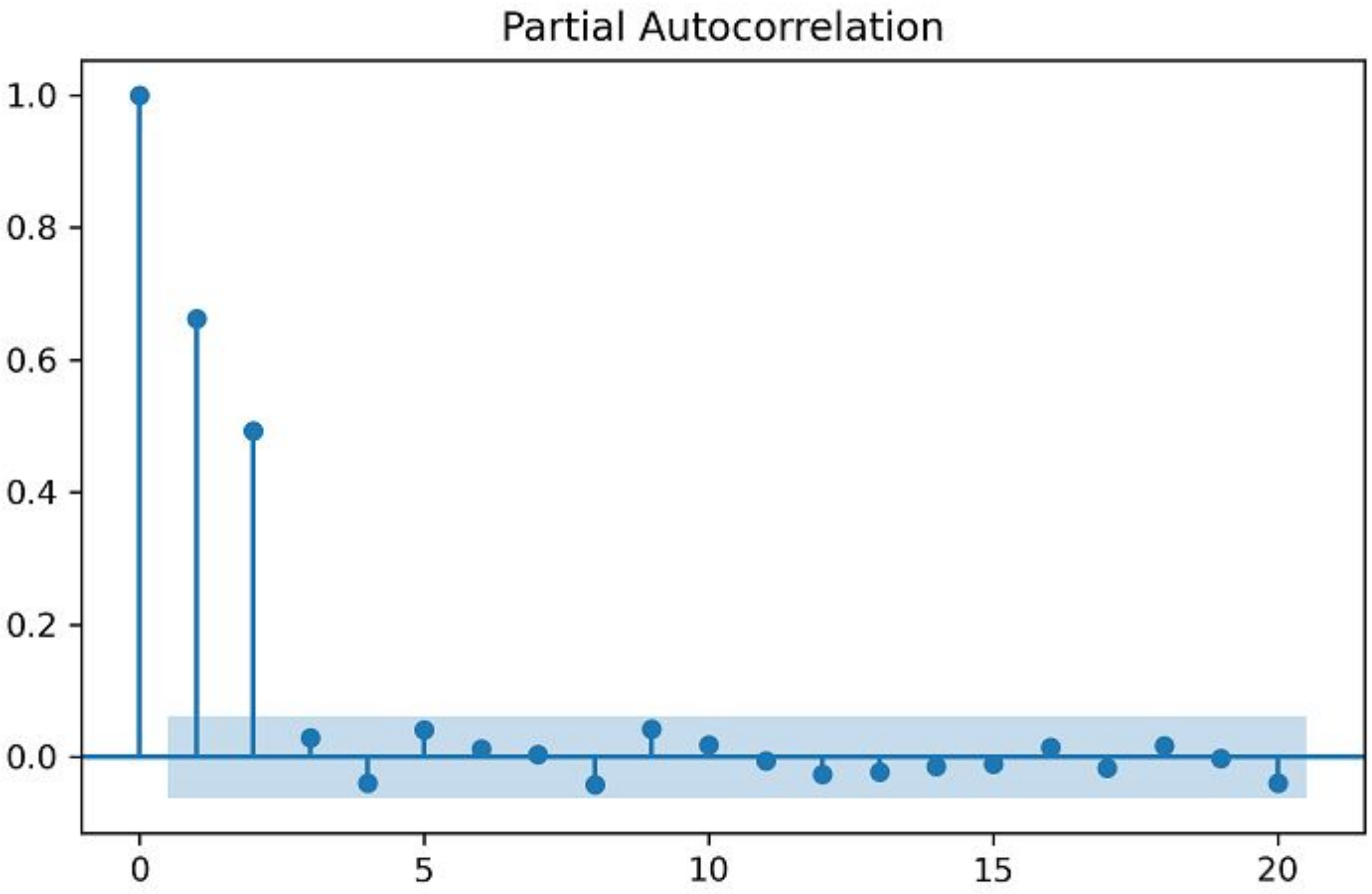
Similaire à l'ACF, mais enlevant les effets des valeurs entre X_t et $X_{t+\tau}$, permettant de clairement identifier les dépendances.

Si $X_{t-\tau}$ est corrélé partiellement à X_t ($\phi_X(\tau)$ proche de 1 ou de -1), alors:

- Pour un AR: si $\phi_X(\tau+1), \ldots, \phi_X(\tau+n)$ sont proches de 0, $\boldsymbol{p=\tau}$.
- Pour un MA: pas de conclusion.

Identifier p et q

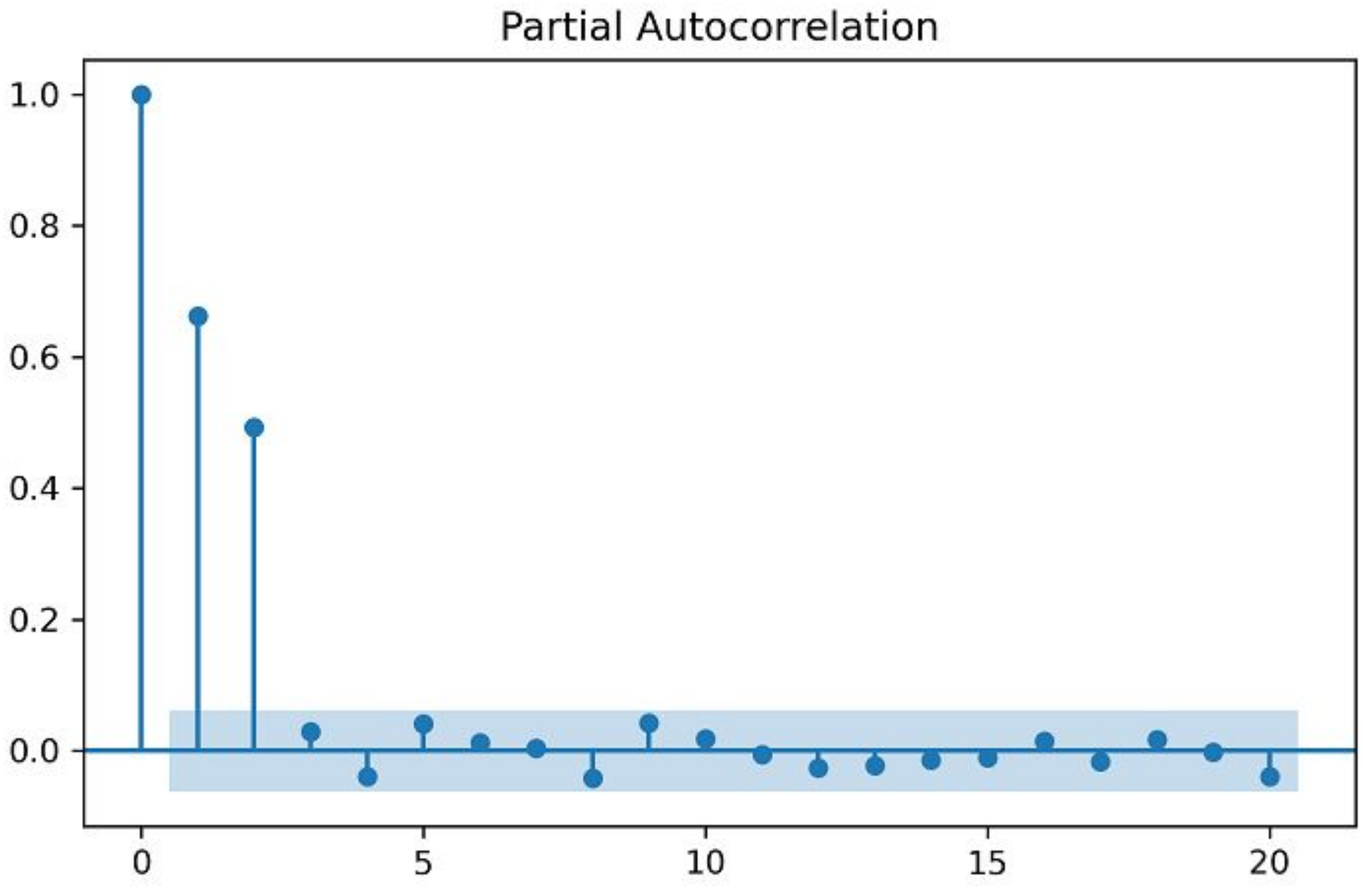
ex.



Py. *statsmodels.graphics.tsaplots.plot_pacf*

Identifier p et q

ex.



Probablement AR(2)

Cas non-stationnaires et opérateur I^d

- **Evaluer la stationnarité:** **test augmenté de Dickey-Fuller** ou **test KPSS**

Py. *statsmodels.tsa.stattools.adfuller*   *statsmodels.tsa.stattools.kpss*

Traiter les séries non-stationnaires:

- Variance non constante, amplitude exponentielle: **essayer de prédire $\log(X_t)$** (mutliplicatif → additif)
- Tendance, comportement non stationnaire complexe: **essayer de différencier la série.**

déf. **Opérateur de différenciation I^d:**

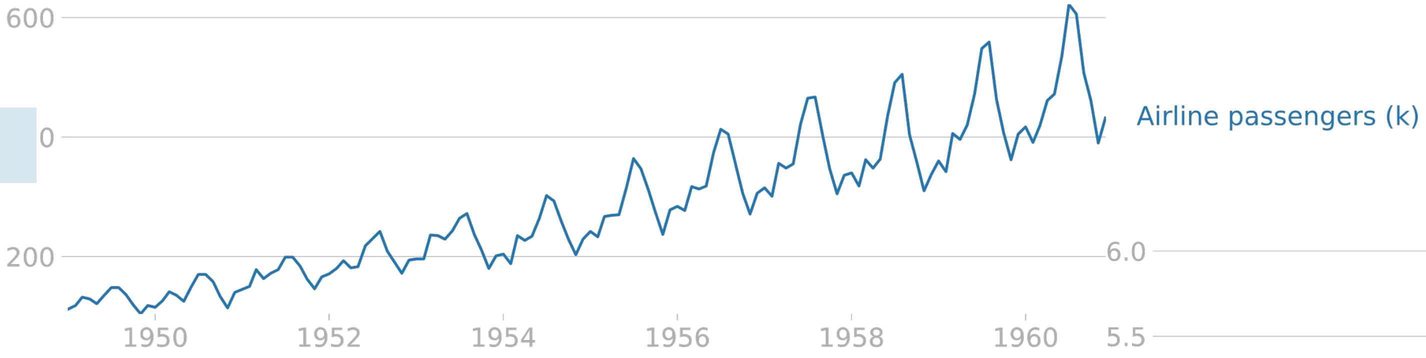
$$I(X_t) = X_t - X_{t-1}$$
$$I^2(X_t) = I\big(I(X_t)\big) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

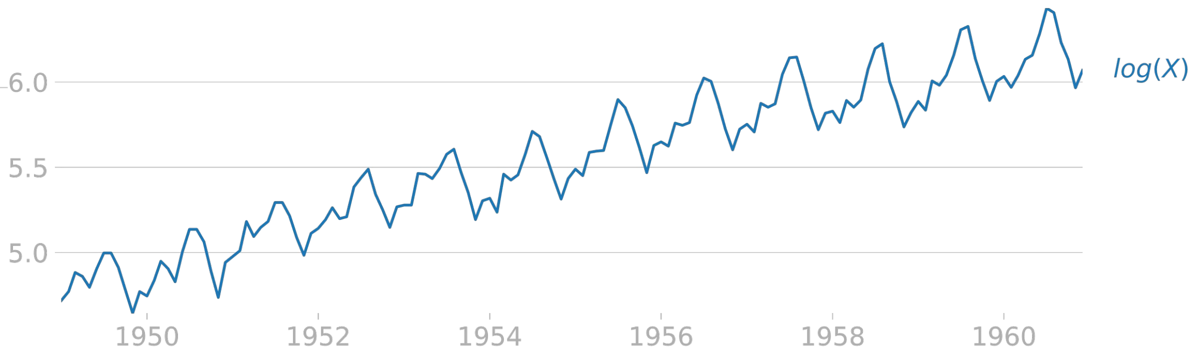
$$I^d(X_t) = \sum_k^d \binom{d}{k} - X_{t-k}$$

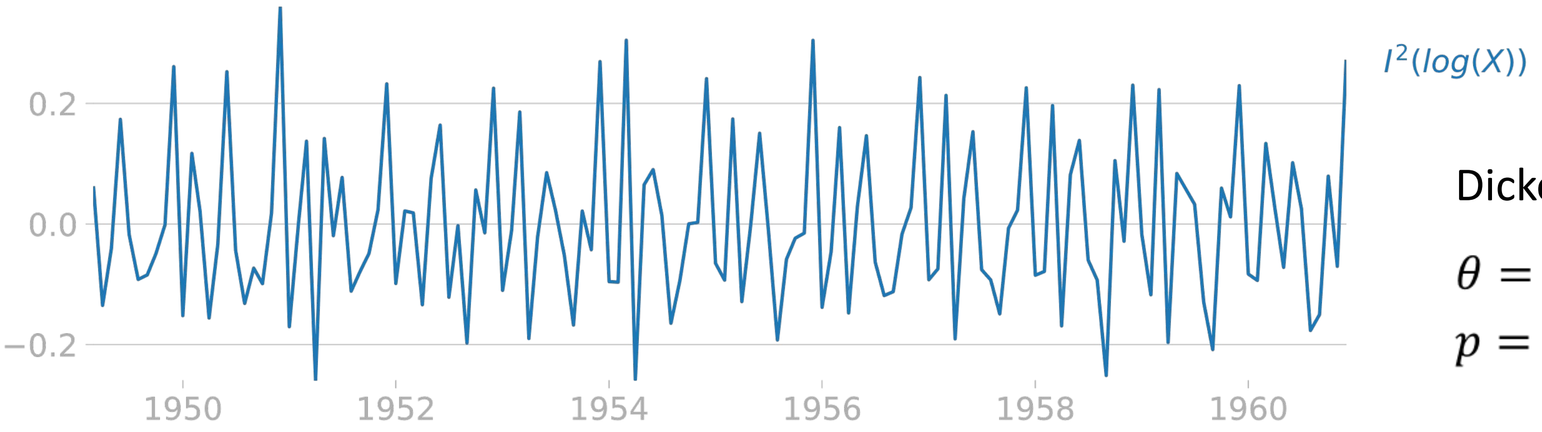
Un paramètre: son ordre d. **On doit avoir $I^d(X_t)$ stationnaire, avec d le plus faible possible.**

Cas non-stationnaires et opérateur I^d

ex.







Dickey-Fuller test: (H0 rejetée)

$$\theta = -8{,}196 \ll 0$$

$$p = 7{,}42 \times 10^{-13} \ll 0{,}05$$

Processus ARIMA(p, d, q)

déf.

- Modèle complet, $I^d(X_t) = AR(p) + MA(q) + \eta_t$ avec $\boldsymbol{I^d(X_t)}$ **stationnaire** et $\eta_t \sim WN(\mu, \sigma^2)$

Correspond au cas le plus général, lorsque AR ou MA n'apparaissent pas clairement seuls lors de l'analyse, et **lorsque $\boldsymbol{X_t}$ n'est pas stationnaire**.

Par extension:

- un modèle AR ↔ ARIMA$(0, d, q)$
- un modèle MA ↔ ARIMA$(p, d, 0)$
- un modèle ARMA ↔ ARIMA$(p, 0, q)$

Processus SARIMA(S, P, D, Q, p, d, q)

déf.

- Extension de ARIMA aux séries présentant un saisonnalité:

$$I_D^d(X_t) = AR_1(p) + MA_1(q) + AR_S(P) + MA_S(Q) + \eta_t$$

$$= \sum_k^p \alpha_k X_{t-k} + \sum_k^q \phi_k \eta_{t-k} + \sum_k^P A_k X_{t-Sk} + \sum_k^Q \Phi_k \eta_{t-Sk} + \eta_t$$

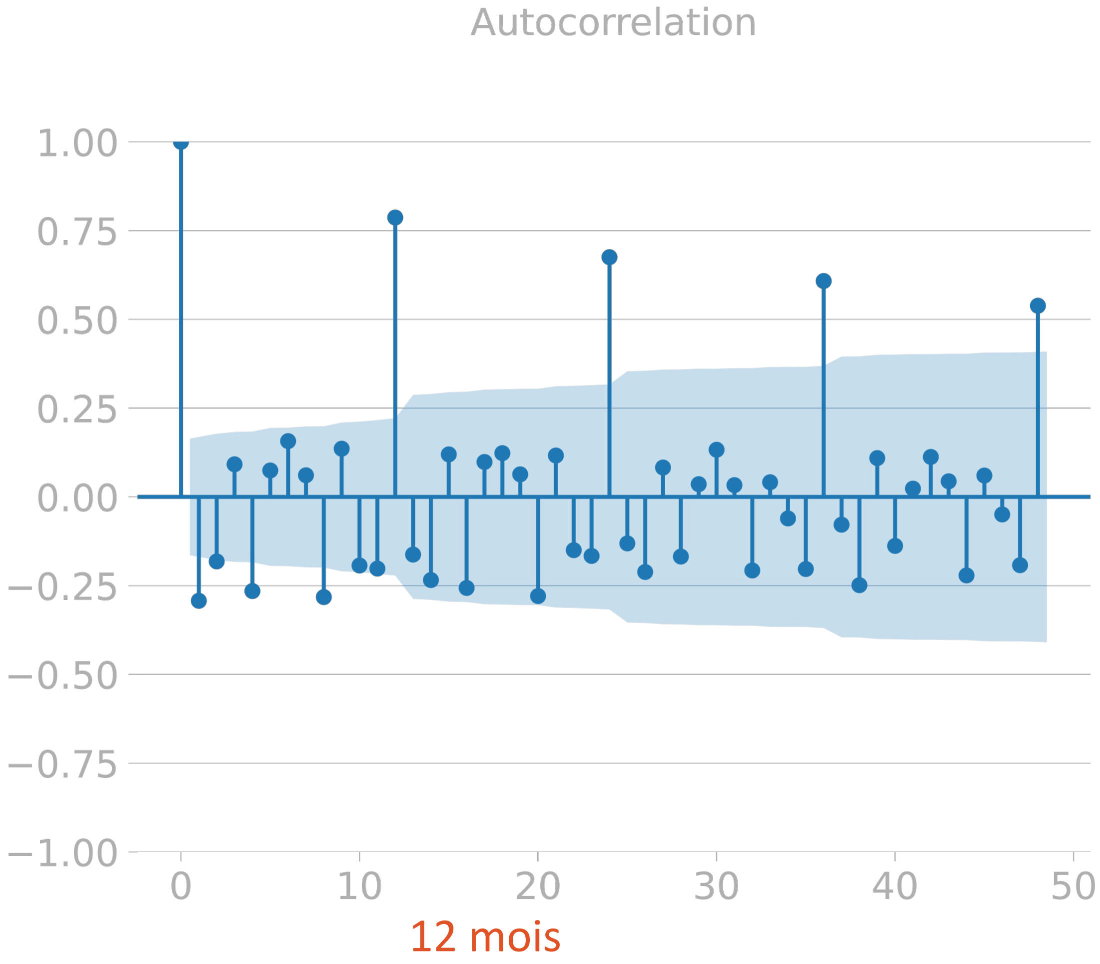
Permet de pallier aux ARIMA dans le cas de processus non stationnaires saisonniers.

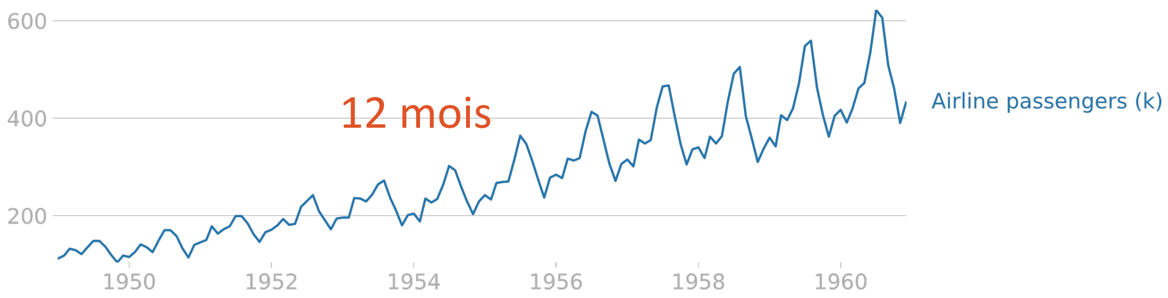
Un SARIMA est la combinaison d'un ARIMA(p, d, q) liant les observations du processus à chaque pas de temps t et d'un ARIMA(P, D, Q) liant les observations à chaque pas de temps $S \times t$.

S **est la période des saisons.**

Processus SARIMA(S, P, D, Q, p, d, q)

ex.





→Processus AR(P), MA($Q = 0$), $S = 12$

Voir la PACF pour déterminer P

Méthode de Box-Jenkins

déf.

1. **Identifier:**
   - **Saisonnalité**, **stationnarité**, additif/multiplicatif
   - Pré-traitements (**différenciation,** modèle de la tendance…)
   - **Sélectionner** le(s) modèle(s) et **hyperparamètres** (p, d, q …)
2. **Estimer**
   - Stratégie de **recherche des paramètres**/modèles (*cross-validation, walk-forward training, grid/random search*…)
3. **Evaluer**
   - **Mesures sur les données de test/nouvelles données**
   - Inférence sur un horizon fixe (***predict***)/prédictions sur un intervalle (***forecast***)

Estimation des modèles

- Cross-validation and *walk-forward training*

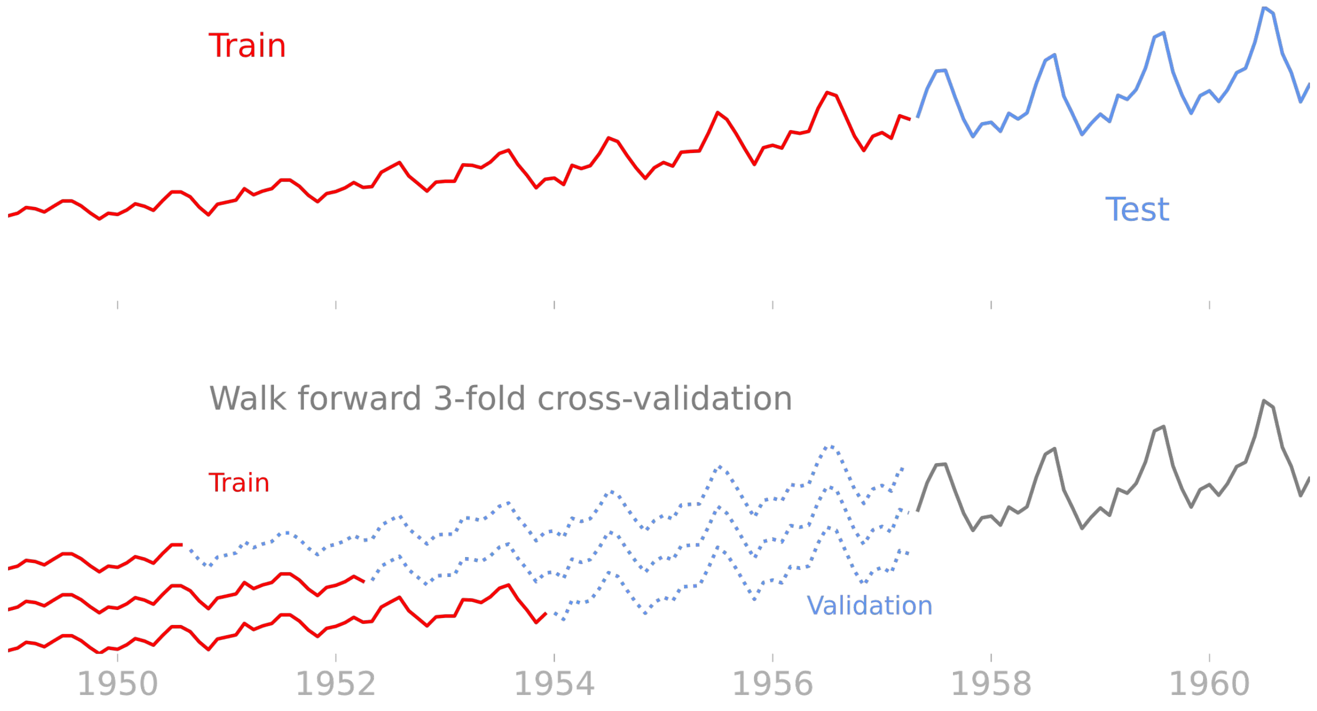
Toujours considérer une liste de paramètres p, d, q, P, D, Q … en cas de doute.

- Métriques

Métriques de régression (MAE, MSE…)

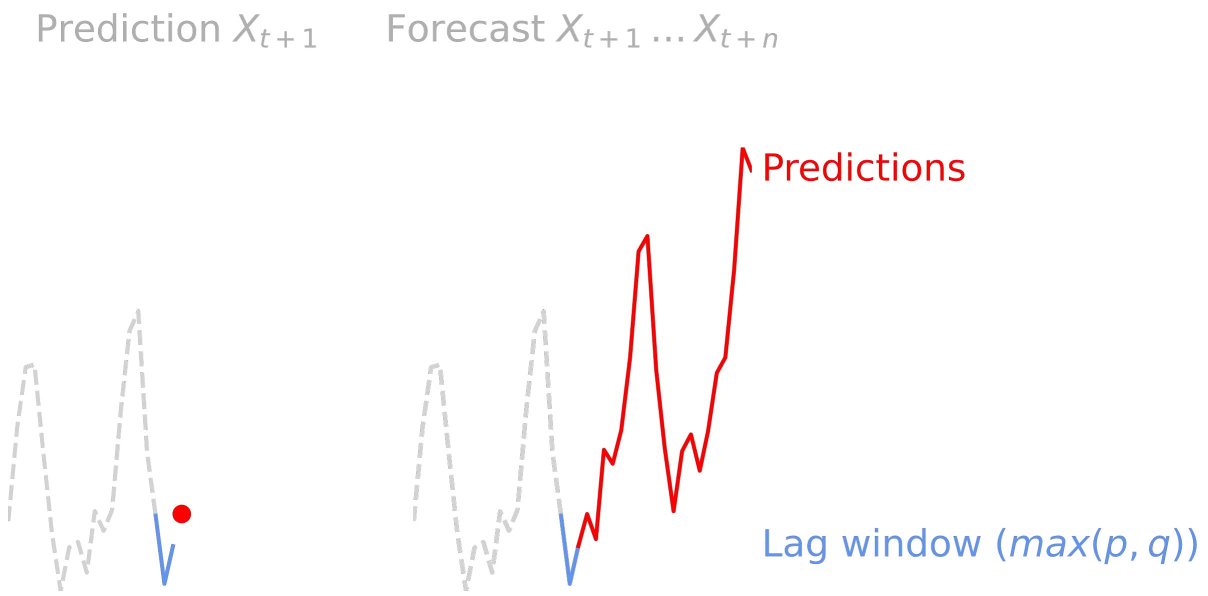
AIC pour la sélection des paramètres

Vérifier que $\boldsymbol{\eta \sim WN(\mu, \sigma^2)}$ (Q-Q plot, tests)



Evaluation des modèles - Inférence

- Sur les données de test



- *Warmup*

déf. **Un modèle d'ordre p a besoin d'au moins p pas de temps de données avant de commencer à prédire le pas de temps $p+1$.**

« Echauffer » le modèle avec des données d'entraînement avant de commencer à prédire. Si ces données ne sont pas disponibles, trouver une initialisation (aléatoire, fenêtre de p pas de temps issue de données similaires…).

Ouverture

- Limites des modèles ARIMA:
    - $p, q \to \infty$ (séries **chaotiques**);
    - observations partielles (bruit important, points manquants, fonction d'observation très incomplète);
    - changements de régime (stationnarité locale uniquement, cassures structurelles)…

- Autres modèles

Prophet, Theta forecaster, Exponential smoothing, ARIMAX/SARIMAX (données exogènes), modèles à changement d'état…

- Modèles multivariés (séries longitudinales ou *panel*)

VAR (Vector Auto-Regressive), NVAR (Non-linear Vector Autoregressive)…

- Réseaux de neurones

(Partie II du cours)

I.2. Séquences

Modèle de Markov cachés (HMM)

déf.

Soit X_n et Y_n deux processus aléatoires. En domaine discret, $(\boldsymbol{X_n}, \boldsymbol{Y_n})$ **est un modèle de Markov caché** si:

- $\boldsymbol{X_n}$ **n'est pas directement observable (états cachés);**
- $\boldsymbol{P(Y_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_n = x_n) = P(Y_n \mid X_n = x_n), \forall n \geq 1}$ **(probabilité d'émission).**

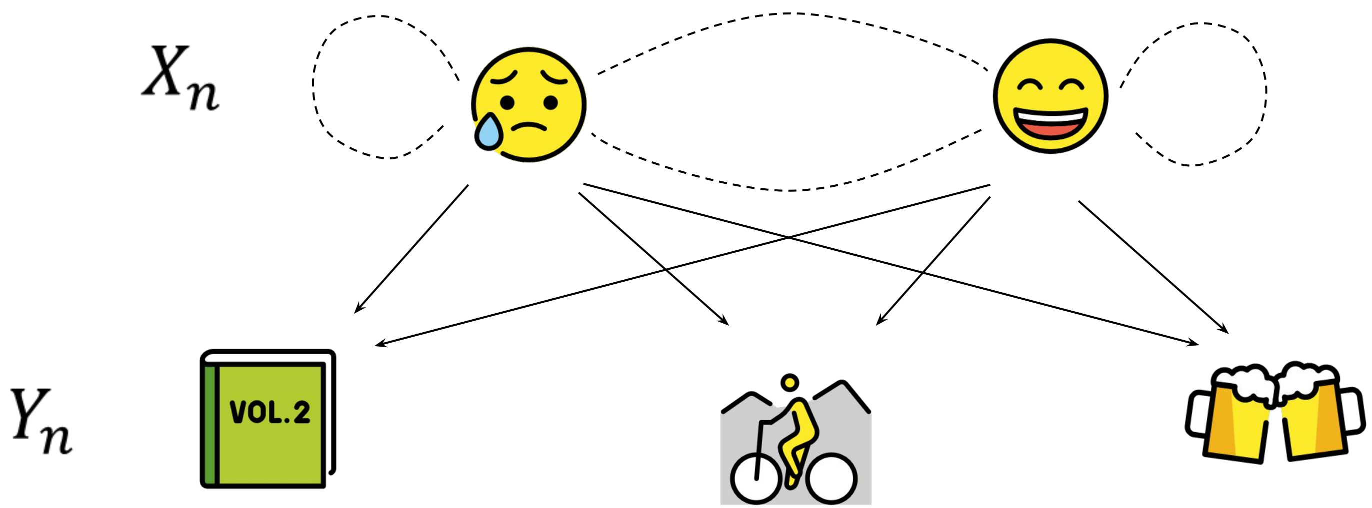
Autrement dit:

déf.

- X_n correspond à u**ne chaîne de Markov inconnue a priori** (ni états, ni transitions);
- $\boldsymbol{Y_n}$ **ne dépend que de la valeur du dernier état** $\boldsymbol{X_n}$**.**

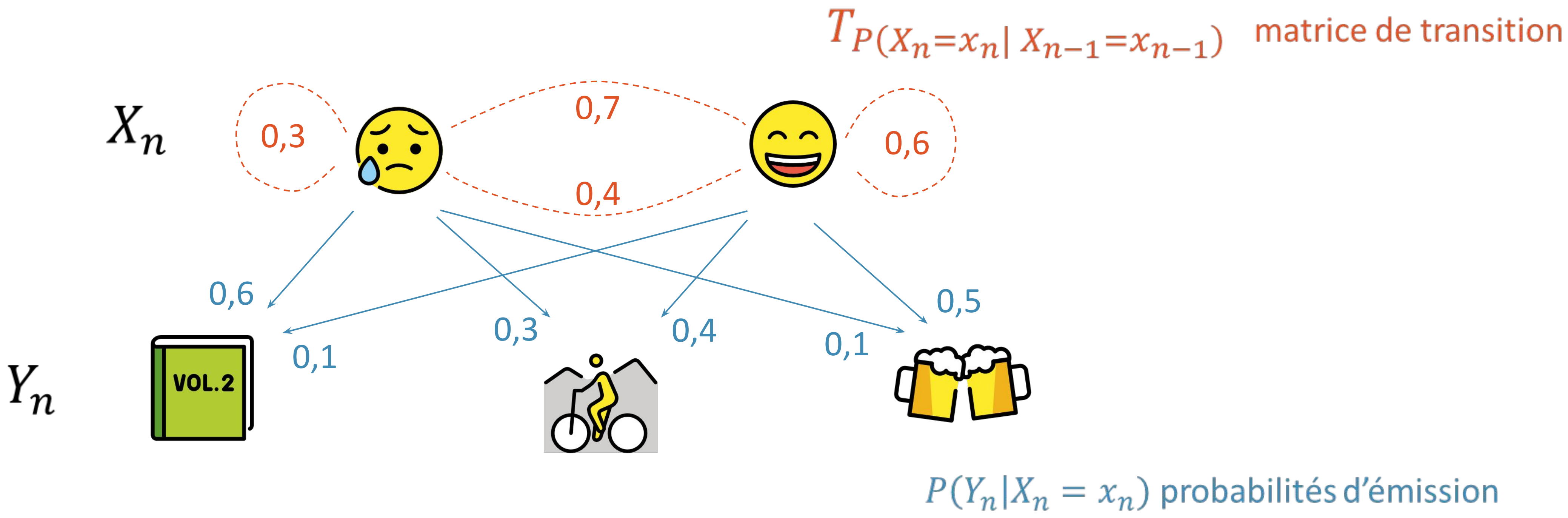
Modèle de Markov cachés (HMM)

ex. Journal d’une personne lunatique



Modèle de Markov cachés (HMM)

ex. Journal d'une personne lunatique



Estimation

- Paramètres

Matrice de transition T_X, probabilités d'émission $P(Y_n|X_n = x_n)$, état initial X_0.

- Méthode d'estimation

A partir d'une ou plusieurs séquences d'observations Y_n:

$Y = \{$ 

$\ldots\}$

***Expectation Maximization* et Méthodes MCMC (Markov Chain Monte Carlo) :** méthodes d'estimation bayésiennes en grande dimension (algorithme de Baum-Welch, Gibbs *sampling*…)

Tâches d’inférences

déf.

- ***Forward algorithm (filtering)***: Connaissant $Y_0, \dots, Y_n$, quelle est la probabilité d’être dans l’état $X_n = x_n$ à la fin?

- ***Forward-Backward algorithm (smoothing)****:* Connaissant $Y_0, \dots Y_k, \dots, Y_n$, quelle est la probabilité d’être dans l’état $X_k = x_k$ à $t = k$?

- **Viterbi algorithm**: Connaissant $Y_0, \dots, Y_n$, quelle est la séquence d’états $X_0, \dots, X_n$ la plus probable ?

- **Prédiction**: Connaissant X_n, évident grâce aux paramètres du modèle.

Exemple : *POS tagging*

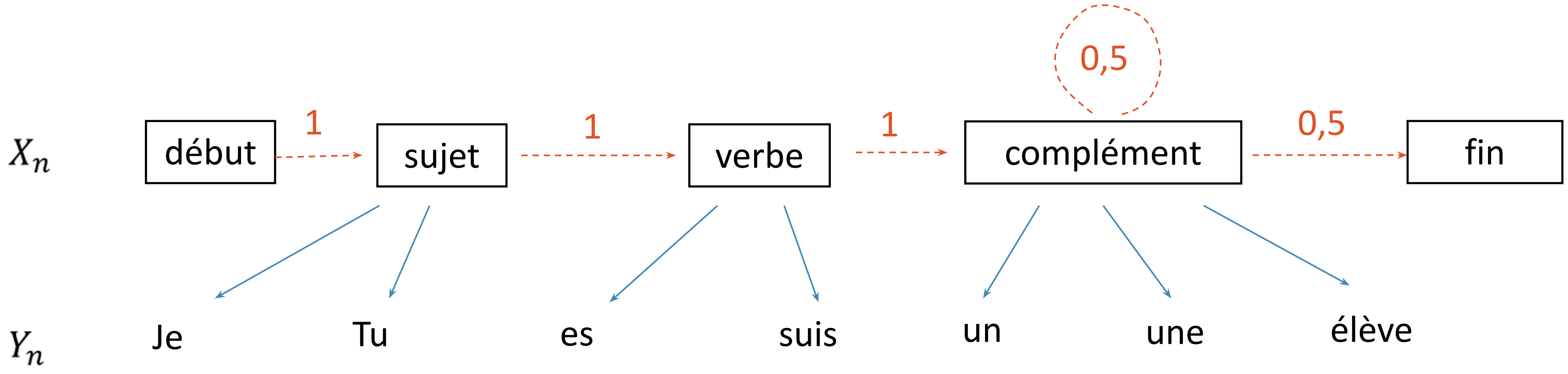
ex.

- Soit X_n un processus décrivant l'évolution de la nature des mots (part of speech ou POS) dans une phrase.

Soit Y_n une phrase.

- Modélisation: 3 états cachés (sujet, verbe, complément); Lexique de taille 7 (« je », « tu », « es », « suis », « un », « une », « élève »).

Exemple : *POS tagging*



Je suis une élève

Tu es un élève

Tu es une élève

Je suis un élève

Exemple : *POS tagging*

- ***Forward algorithm (filtering)***: Connaissant un bout de phrase, quelle est la nature du dernier mot ?

- ***Forward-Backward algorithm (smoothing)****:* Connaissant un bout de phrase, quelle est la nature d’un des mots la composant ?

- **Viterbi algorithm**: Connaissant une phrase, quelle est la nature de tous ses mots?

- **Prédiction**: Connaissant un bout de phrase et la nature du dernier mot, quel est le mot le plus probable le suivant ?

Ouverture

- Les HMM sont un concept permettant de modéliser de nombreux cas de figures relatifs aux séquences.

- Modélisation coûteuse en calculs.

- Vers les réseaux de neurones (modélisation implicite ou explicite de X_n de manière itérative par rétropropagation du gradient.)