

Записки с семинара “Конформная теория поля”

Антон Назаров

21 марта 2011 г.

Содержание

1	14 марта 2011	1
1.1	Классическая теория поля	1
1.2	Симметрии и генераторы	2
1.3	Теорема Нётер	3
2	21 марта 2011	5
2.1	Конформная алгебра в $d \geq 3$	5
2.2	Локальные конформные преобразования в двумерной теории	9
2.3	Глобальные конформные преобразования	10
2.4	Центральное расширение алгебры Витта	11

1 14 марта 2011

1.1 Классическая теория поля

Напоминание про теорию поля.

Лагранжева формулировка классической теории поля.

Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \quad (1)$$

зависит от полей φ и констант связи $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Например:

$$S[\varphi] = \int d^d x \left(-\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{\mu\varphi^2}{2} - \frac{u\varphi^4}{24} + h\varphi \right), \quad (2)$$

1.2 Симметрии и генераторы

При преобразованиях координат

$$x \rightarrow x' \quad (3)$$

поля тоже преобразуются, то есть у них не только меняется аргумент, но и само поле. Тип поля (скалярное, векторное, спинорное) – это вид такого преобразования.

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = F(\varphi(x)) \quad (4)$$

При этом действие тоже преобразуется:

$$S' = \int d^d x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial_\mu \varphi'(x')) = \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(F(\varphi(x)), \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu F(\varphi(x))) \quad (5)$$

Пример 1. Трансляции:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad \varphi'(x + a) = \varphi(x), \quad S' = S \quad (6)$$

Пример 2. Поворот (преобразования Лоренца):

$$x'^\mu = m^\mu_\nu x^\nu, \quad \varphi'(mx) = \Lambda \varphi(x), \quad \Lambda\text{-представление группы} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим инфинитезимальные преобразования. Если действие инвариантно относительно каких-либо преобразований, то говорят, что в теории есть симметрия. В этом случае действие должно быть стационарно по отношению к инфинитезимальным преобразованиям. Мы будем считать, что инфинитезимальные параметры преобразований зависят от координат, то есть рассматривать не только глобальные, но и локальные преобразования.

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \quad (8)$$

(ω_a – бесконечно малые параметры).

Наше поле преобразуется так:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \quad (9)$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) \equiv -i \omega_a G_a \varphi(x) \quad (10)$$

(здесь нет суммирования по a). Действие генератора на поле:

$$iG_a\varphi = \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\partial_\mu\varphi - \frac{\delta F}{\delta\omega_a} \quad (11)$$

Пример 3. Если мы предположим, что поле φ – такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\varphi) = \varphi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu \quad P_\mu = -i\partial_\mu \quad (12)$$

$$\text{поворот} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu \quad L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \quad (13)$$

Если же при поворотах поле преобразуется $\varphi'(x') = \Lambda\varphi(x)$, то при инфинитезимальных преобразованиях $\varphi'(x') = \varphi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ и генератор принимает вид

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu} \quad (14)$$

1.3 Теорема Нётер

Теперь рассмотрим произвольные инфинитезимальные преобразования, при которых действие не меняется. Инфинитезимальные параметры зависят от точки в пространстве, то есть мы рассматриваем локальные преобразования. Преобразования, для которых такой зависимости нет, называются глобальными. Якобиан такого преобразования

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\nu^\mu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a} \right) \quad (16)$$

$$\left| \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right| = 1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a} \right) \quad (17)$$

Вариация действия

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\omega S &= \int \mathcal{L}(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu)dx' - \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x)dx = \\ &= \int d^d x \left[\left(1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a} \right) \right) \mathcal{L}(\varphi + \delta_\omega\varphi, \partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta_\omega\varphi) \right] - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta_\omega\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta_\omega\partial_\mu\varphi + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a} \right) \mathcal{L} \right) \quad (19)$$

Члены, не содержащие производных от ω_a зануляются в случае наличия глобальной симметрии.

Первые два члена переписываются с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа и интегрирования по частям:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta_\omega \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \varphi \right) \quad (20)$$

В итоге имеем:

$$0 = \int d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \varphi + \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right) \quad (21)$$

Если подставить явный вид вариации поля и ввести обозначение

$$j_a^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta F}{\delta \omega_a}, \quad (22)$$

то для вариации действия выходит:

$$\delta_\omega S = - \int d^d x j_a^\mu \partial_\mu \omega_a \quad (23)$$

j_a^μ называется Нётеровским током, соответствующим данной симметрии. Проинтегрируем по частям и получим:

$$\delta_\omega S = \int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \omega_a \quad (24)$$

Если поля удовлетворяют уравнениям движения, то действие инвариантно относительно любой вариации полей, то есть вариация действия должна зануляться для любого $\omega(x)$. Тогда

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (25)$$

Таким образом каждой симметрии соответствует ток j_μ^a и сохраняющийся заряд:

$$Q_a = \int d^{d-1} x j_a^0 \quad (26)$$

Пример 4. Рассмотрим инфинитезимальное масштабное преобразование $\lambda = 1 + \omega$. При этом вариация x_ν будет $\delta_\omega x_\nu = \omega x_\nu$. При инфинитезимальных преобразованиях $x \rightarrow x + dl x$ вариация плотности лагранжиана дается Нётеровским током:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu dl \quad (27)$$

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \quad (28)$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса. Через Θ мы обозначим след тензора энергии-импульса $\Theta = \partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu$. Он задает вариацию действия

$$\delta S = dl \int d^d x \Theta(x) \quad (29)$$

Если теория масштабно-инвариантна, то $\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = \Theta = 0$. В масштабно-инвариантной теории тензор энергии-импульса бесследовый.

2 21 марта 2011

2.1 Конформная алгебра в $d \geq 3$

Сейчас мы обсудим, какие ограничения накладывает на теорию конформная инвариантность, а затем покажем, что в двух измерениях она следует из масштабной, трансляционной и вращательной инвариантностей.

Сперва рассмотрим конформную группу в произвольном числе измерений d . Метрический тензор обозначим через $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, d$. Конформными называются преобразования $x \rightarrow x'$, сохраняющие метрический тензор с точностью до масштаба:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (30)$$

Заметим, что группа Пуанкаре является подгруппой конформной группы с $\Lambda(x) = 1$, а также что конформные преобразования сохраняют углы.

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu. \quad (31)$$

Метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad (32)$$

Перепишем условие (30) в таком виде:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - f(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (33)$$

Отсюда вытекает условие на вид преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (34)$$

Для простоты рассмотрим преобразования, действующие на плоскую метрику $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, кроме того, с учетом приложений к статистической физике, будем работать в евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Так что $\eta = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. В этом случае условие (34) перепишется в простом виде

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (35)$$

Теперь подставим $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ в уравнение (34) и продифференцируем:

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \quad (36)$$

Переставим два раза значки и скомбинируем три уравнения в одно:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f \quad (37)$$

Свернем это уравнение с $\eta^{\mu\nu}$ и получим

$$2\partial^2 \epsilon_\rho = (2 - d) \partial_\rho f \quad (38)$$

Теперь продифференцируем его по x^ν и поменяем значок ρ на μ :

$$2\partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = (2 - d) \partial_\mu \partial_\nu f \quad (39)$$

Сравним полученное равенство с результатом применения оператора ∂^2 к уравнению (36):

$$\partial^2 \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \quad (40)$$

Из равенств (39), (40) следует, что

$$(2 - d) \partial_\mu \partial_\nu f = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f. \quad (41)$$

Свернув с $\eta^{\mu\nu}$ получим

$$(d - 1) \partial^2 f = 0. \quad (42)$$

Сразу можно отметить, что при $d = 1$ любое гладкое преобразование будет конформным. Рассмотрим случай $d \geq 3$. Функция $f(x)$ должна иметь вид

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu. \quad (43)$$

Тогда из (35) получаем для ϵ

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \quad (44)$$

Так как равенства (34), (35), (37) должны выполняться для любых x^μ , то мономы в ϵ можно рассматривать независимо. На a_μ не возникает никаких ограничений. Этот член соответствует трансляциям. Теперь подставляем линейный член в (34), (35) и получаем условие

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b_\lambda^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad (45)$$

То есть $b_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \quad (46)$$

Первый член соответствует масштабному преобразованию, а второй - повороту. В результате подстановки квадратичного члена ϵ в (35), (37) получаем следующее условие на $c_{\mu\nu\rho}$:

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} h_\nu + \eta_{\mu\nu} h_\rho - \eta_{\nu\rho} h_\mu, \quad h_\mu = \frac{1}{d} c_{\alpha\mu}^\alpha \quad (47)$$

Ему соответствует преобразование

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x^\nu h_\nu)x^\mu - h^\mu x^\nu x_\nu \quad (48)$$

Такое преобразование называется специальным конформным преобразованием. Это преобразование можно естественно интерпретировать, если переписать в виде

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - h^\mu. \quad (49)$$

Видно, что специальное конформное преобразование — это инверсия, трансляция и обратная инверсия.

Соответствующие конечные конформные преобразования имеют вид

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad \text{— трансляция} \quad (50)$$

$$x'^\mu = \alpha x^\mu \quad \text{— растяжение} \quad (51)$$

$$x'^\mu = m_\nu^\mu x^\nu \quad \text{— поворот} \quad (52)$$

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - h^\mu x^2}{1 - 2h_\mu x^\mu + h^2 x^2} \quad \text{— специальное конформное преобразование} \quad (53)$$

Теперь выпишем вид генераторов конформных преобразований для скалярного поля. Напомним, что при произвольном конечном преобразовании скалярное поле преобразуется как

$$\Phi'(x') = F(\Phi(x)). \quad (54)$$

При соответствующем инфинитезимальном преобразовании

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \quad (55)$$

скалярное поле преобразуется так:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \quad (56)$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \Phi(x) \quad (57)$$

(здесь нет суммирования по a). Из (9) получаем действие генератора на скалярное поле:

$$iG_a \Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \quad (58)$$

Если мы предположим, что поле Φ такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\Phi) = \Phi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \quad P_\mu = -i\partial_\mu \quad (59)$$

$$\text{поворот} \quad L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (60)$$

$$\text{растяжение} \quad D = -ix^\mu \partial_\mu \quad (61)$$

$$\begin{array}{l} \text{специальное конформное} \\ \text{преобразование} \end{array} \quad K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \quad (62)$$

Отсюда легко найти коммутационные соотношения алгебры конформных преобразований в случае $d \geq 3$:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \quad (63)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \quad (64)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}) \quad (65)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu) \quad (66)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}) \quad (67)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Чтобы понять, о какой алгебре идет речь, переопределим генераторы следующим образом. Введем генераторы J_{ab} , $a, b = -1, 0, \dots, d$, $J_{ab} = -J_{ba}$:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad (68)$$

$$J_{-1,0} = D \quad (69)$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (70)$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (71)$$

Коммутационные соотношения для таких генераторов запишутся в виде

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}), \quad (72)$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Видно, что мы получили алгебру $so(d+1, 1)$. В случае пространства Минковского была бы $so(d, 2)$.

2.2 Локальные конформные преобразования в двумерной теории

Мы получили общее условие на вид инфинитезимальных конформных преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu}. \quad (73)$$

Теперь у нас $d = 2$, $\mu, \nu = 0, 1$ и $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, так как мы работаем в евклидовой теории. Расписывая компоненты уравнения (73), получаем

$$\partial_0 \epsilon_1 + \partial_1 \epsilon_0 = 0 \Rightarrow \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0 \quad (74)$$

$$2\partial_0 \epsilon_0 = \partial_0 \epsilon_0 + \partial_1 \epsilon_1 \Rightarrow \partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1 \quad (75)$$

То есть мы получили уравнения Коши-Римана. Введем комплексные координаты

$$z = x_0 + ix_1 \quad (76)$$

$$\bar{z} = x_0 - ix_1 \quad (77)$$

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) \quad (78)$$

$$\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \quad (79)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1 \quad (80)$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - i\epsilon_1, \quad (81)$$

тогда уравнения (74) можно переписать в виде

$$\bar{\partial}\epsilon = 0 \quad (82)$$

$$\partial\bar{\epsilon} = 0. \quad (83)$$

Решениями будут любые голоморфные и антиголоморфные функции: $\epsilon = \epsilon(z)$ – голоморфная функция и $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ – антиголоморфная. Таким образом мы видим, что алгебра локальных конформных преобразований

в двумерном случае оказывается бесконечномерной алгеброй преобразований

$$z \rightarrow f(z) \quad (84)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \quad (85)$$

Введем в алгебре конформных преобразований следующий базис:

$$z' = z + \epsilon_n(z) \quad (86)$$

$$\bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) \quad (87)$$

$$\epsilon_n(z) = -z^{n+1} \quad (88)$$

$$\bar{\epsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{z}^{n+1} \quad (89)$$

Тогда соответствующие генераторы будут равны

$$l_n = -z^{n+1} \partial \quad (90)$$

$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial} \quad (91)$$

Легко видеть, что коммутационные соотношения имеют вид

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n} \quad (92)$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n) \bar{l}_{m+n} \quad (93)$$

$$[l_n, \bar{l}_m] = 0 \quad (94)$$

Мы видим, что алгебра распадается в прямую сумму $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$, каждая компонента — это алгебра Витта (Witt algebra). Оказывается удобно продолжить теорию на случай независимых z, \bar{z} . Тогда теория распадется на два независимых сектора. Условие же $z^* = \bar{z}$ можно наложить в самом конце. Такая процедура соответствует комплексному продолжению всех функций от x_0, x_1 на $x_0, x_1 \in \mathbb{C}^2$. Заметим, что вещественная плоскость сохраняется подалгеброй, натянутой на генераторы $l_n + \bar{l}_n$ и $i(l_n - \bar{l}_n)$.

2.3 Глобальные конформные преобразования

Глобальными называются те преобразования, которые определены на всей сфере Римана $S^2 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$. Понятно, что это может быть только при $n \geq -1$. Кроме того, чтобы рассмотреть окрестность точки $z = \infty$ можно сделать преобразование координат $z = -\frac{1}{w}$. Тогда

$$l_n = -z^{n+1} \partial = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n+1} \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) \partial_w = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n-1} \partial_w. \quad (95)$$

Это выражение должно быть хорошо определено при $w \rightarrow 0$, то есть $n \leq 1$. Значит глобальные конформные преобразования генерируются $l_{\pm 1}, l_0, \bar{l}_{\pm 1}, \bar{l}_0$. Заметим, что генераторы l_{-1}, \bar{l}_{-1} порождают трансляции, $i(l_0 - \bar{l}_0)$ – вращения, $l_0 + \bar{l}_0$ – масштабные преобразования. Конечные глобальные преобразования имеют вид

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (96)$$

(И аналогично для \bar{z}). Если собрать коэффициенты a, b, c, d в матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то ясно, что мы имеем дело с группой $SL_2(\mathbb{C})/Z_2 \approx SO(3, 1)$. Факторизация по Z_2 соответствует тому, что изменение знака у a, b, c, d разом не меняет преобразования. Эта группа называется также группой проективных конформных преобразований.

Трансляции, дилатации и вращения в матричном виде записываются следующим образом:

$$\text{трансляции} \quad x \rightarrow x + a, B = a^0 + ia^1, \quad \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\text{вращения} \quad \begin{pmatrix} e^{i\Theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Theta/2} \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$\text{дилатации} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (99)$$

$$\begin{array}{ll} \text{специальные конформные} & C = h_0 - ih_1 \\ \text{преобразования} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (100)$$

Глобальные конформные преобразования образуют группу, локальные же преобразования не обратимы, поэтому по отношению к ним говорят только об алгебре.

Глобальные преобразования полезны для описания физических состояний. Допустим, мы работаем в базисе собственных состояний операторов l_0, \bar{l}_0 , соответствующие собственные значения h, \bar{h} – независимые, вещественные, называются конформными весами или голоморфной и антиголоморфной размерностями. Так как $l_0 + \bar{l}_0$ – генератор дилатации, то скейлинговая размерность $\Delta = h + \bar{h}$, а поскольку $i(l_0 - \bar{l}_0)$ порождает вращения, то спин $s = h - \bar{h}$.

2.4 Центральное расширение алгебры Витта

Напомним несколько определений (см [1],[2], [3]).

Определение 1. Будем рассматривать алгебру Ли \mathfrak{g} над полем $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Векторное пространство A над полем k называется *модулем над \mathfrak{g}* или *\mathfrak{g} -модулем*, если задано билинейное отображение $\mu : \mathfrak{g} \times A \rightarrow A$, такое что $\mu([X, Y], a) = \mu(X, \mu(Y, a)) - \mu(Y, \mu(X, a))$ для $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in A$. Далее мы будем опускать символ μ и писать $Xa = \mu(X, a)$.

Определение 2. n -мерная *коцепь с коэффициентами в A* – это косо-симметричный n -линейный функционал на \mathfrak{g} со значениями в A . Пространство n -коцепей $C^n(\mathfrak{g}; A) = \text{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}; A)$.

Заметим, что элементы \mathfrak{g} действуют на $C^n(\mathfrak{g}; A)$.

Определение 3. Внешний дифференциал $d = d_n : C^n(\mathfrak{g}; A) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}; A)$ определяется формулой

$$(dc)(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{1 \leq s < t \leq n+1} (-1)^{s+t-1} c([X_s, X_t], X_1, \dots, \hat{X}_s, \dots, \hat{X}_t, \dots, X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \leq s \leq n+1} (-1)^s X_s c(X_1, \dots, \hat{X}_s, \dots, X_{n+1}) \quad (101)$$

Оставляем в качестве упражнения проверку того факта, что последовательность

$$\dots \xleftarrow{d_n} C^n(\mathfrak{g}; A) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(\mathfrak{g}; A) \leftarrow \dots \leftarrow C^1(\mathfrak{g}; A) \xleftarrow{d_0} C^0(\mathfrak{g}; A) \leftarrow 0 \quad (102)$$

точна. Тогда $\{C^n(\mathfrak{g}; A), d_n\} = C^*(\mathfrak{g}; A)$ есть комплекс.

Определение 4. Соответствующие когомологии называются *когомологиями алгебры \mathfrak{g} с коэффициентами в A* и обозначаются через $H^n(\mathfrak{g}; A) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$.

Заметим, что поле k может рассматриваться как тривиальный \mathfrak{g} -модуль. В этом случае второй член в формуле (101) исчезает и используют сокращенные обозначения $C^n(\mathfrak{g}), H^n(\mathfrak{g})$.

Определение 5. Определим, заодно, и гомологии. Пространство n -мерных цепей $C_n(\mathfrak{g}; A) = A \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$, дифференциал $\partial = \partial_n : C_n(\mathfrak{g}; A) \rightarrow C_{n-1}(\mathfrak{g}; A)$ определяется формулой

$$\partial(a \otimes (X_1 \wedge \dots \wedge X_n)) = \sum_{1 \leq s < t \leq n+1} (-1)^{s+t-1} a \otimes ([X_s, X_t] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_s \wedge \dots \wedge \hat{X}_t \wedge \dots \wedge X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \leq s \leq n+1} (-1)^s (X_s a) \otimes (X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_s \wedge \dots \wedge X_{n+1}) \quad (103)$$

Аналогично определяется точная последовательность, комплекс и группа гомологий $H_n(\mathfrak{g}; A)$.

Определение 6. *Одномерным центральным расширением алгебры \mathfrak{g} называется точная последовательность*

$$0 \rightarrow k \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0, \quad (104)$$

такая что образ $k \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ содержится в центре $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Заметим, что всякий 2-коцикл $c \in C^2(\mathfrak{g}; A)$ определяет центральное расширение \mathfrak{g} :

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{\lambda \rightarrow (0, \lambda)} \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus k \xrightarrow{(X, \lambda) \rightarrow X} \mathfrak{g} \rightarrow 0 \quad (105)$$

Скобка Ли в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, которая равна $\mathfrak{g} \oplus k$ как векторное пространство, определяется равенством

$$[(X, \lambda), (Y, \mu)] = ([X, Y], c(X, Y)) \quad (106)$$

Тождество Якоби для такой скобки равносильно тому, что c – 2-коцикл. Когомологичным коциклам отвечают эквивалентные расширения.

Два расширения $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $I : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ такой, что диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow I & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}} & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \end{array} \quad (107)$$

Упражнение 1. Построить изоморфизм I .

Таким образом пространство $H^2(\mathfrak{g})$ – это множество классов 1-мерных центральных расширений \mathfrak{g} . Нуль в $H^2(\mathfrak{g})$ соответствует тривиальному расширению.

Вернемся к алгебре Витта (92). Существует коцикл

$$c(l_n, l_m) = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{-n, m} \quad (108)$$

Упражнение 2. Проверить, что c – коцикл алгебры Витта.

Соответствующее центральное расширение алгебры Витта называется алгеброй Вирасоро. Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид

$$[L_n, c] = 0 \quad (109)$$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \quad (110)$$

Можно показать, что $H^2(Witt) \cong \mathbb{C}$ и все нетривиальные коциклы пропорциональны c . (Доказательство есть в [1], [4]).

Список литературы

- [1] D. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*. Consultants bureau, 1986.
- [2] Д. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*. Наука, Грав. ред. физико-математической лит-ры, Москва, 1984.
- [3] Б. Фейгин and Д. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли,” *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»* **21** (1988) no. 0, 121–209.
- [4] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*. Springer Verlag, 2008.