

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи



Назаров Антон Андреевич

**Правила ветвления аффинных алгебр Ли и
приложения в моделях конформной теории
поля**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
профессор,
Ляховский Владимир Дмитриевич*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,
профессор,
Кулиш Петр Петрович
кандидат физико-математических наук,
ученое звание,
Мудров Андрей И*

Ведущая организация: *Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «_____» _____ 2012 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.24 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете, расположенном по адресу: Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 305

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» _____ 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

ученая степень, ученое звание

Подпись

фамилия и. о.

Общая характеристика работы

Актуальность работы Почти тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает огромное внимание исследователей [1]. Эта теория используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически. Помимо математической красоты теория обладает огромной практической ценностью – с ее использованием было получено множество результатов и численных предсказаний в изучении критического поведения в двумерных системах [2, 3]. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо [4, 5] и дробного квантового эффекта Холла [6].

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля [7] в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [8–10].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли играет определяющую роль в изучении моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой является определяющим для двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [11, 12]. Первоначально интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей [13, 14]. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена [15], а затем и coset-модели [16], в которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую

роль.

Моделям Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-моделям в последние десятилетия были посвящены тысячи работ. Большой интерес вызывает и теория представлений аффинных алгебр Ли. Вместе с тем, в теории представлений многие вопросы по-прежнему остаются не решенными. Например, проблема вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для различных физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. Вместе с тем, в отличие от проблемы вычисления кратностей весов, для вычисления коэффициентов ветвления не существовало особенно эффективных алгоритмов.

Цели и задачи работы Разработка рекуррентного подхода к функциям ветвления аффинных алгебр Ли, его связь с проблемами теории представлений и его приложения в моделях конформной теории поля.

Научная новизна Предложен эффективный алгоритм для вычисления коэффициентов ветвления, показана его связь с резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Продемонстрирована роль сингулярных элементов в описании структуры модулей аффинных алгебр Ли
- Из разложения сингулярных элементов получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Показана связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Выявлена связь расщепления корневой системы алгебры с разложением

сингулярных элементов модулей алгебры в комбинацию сингулярных элементов модулей подалгебр

- Показано, что наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления
- Предложено обобщение стохастического процесса Шрамма-Лёвнера на случай систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля
- Продемонстрирована роль сингулярных элементов в построении мартингалов стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, то есть проиллюстрировано применение алгебраических методов теории представлений аффинных алгебр Ли в изучении критического поведения в двумерных решеточных моделях
- Реализованы различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

Апробация работы Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых “Workshop on Advanced Computer Simulation Methods” 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: “Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)” 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), “Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011”, 18-23 июля 2011 (Дубна), “Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)”, 7-13 августа 2011 (Прага).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4], 5 статей в

сборниках тезисов и трудов конференций [A5, A6, A7, A8, A9], и в препринте [A10].

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 157 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 носит обзорный характер. В ней мы даем аксиоматическую формулировку конформной теории поля, описываем модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели. Затем мы демонстрируем роль аффинных алгебр в описании этих моделей и приводим основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Кроме того, мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

Основной проблемой данной диссертации является изучение редукции модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули подалгебр, вычисление коэффициентов ветвления.

В главе 2 мы вводим основные понятия теории представлений аффинных алгебр Ли и выводим основное рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

В следующей **главе 3** мы проясняем связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Результаты третьей главы опубликованы в работах [A2, A6]

Глава 4 посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры

Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплнит приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления — они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплнит корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [A3, A9].

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации. В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы нами в работах [A4, A5]. Раздел 5.2 представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализованного с использованием методов диссертации. Вычислительным методам посвящены наши работы [A10, A8, A7].

Список публикаций

- [A1] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205.
- [A2] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive properties of branching and BGG resolution // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 1551–1560.

- [A3] V. *Laykhovsky*, A. *Nazarov*. Fan, splint and branching rules // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. — 2012. — Vol. 398. — Pp. 162–179.
- [A4] A. *Nazarov*. SLE martingales in coset conformal field theory // *ArXiv e-prints*.
- [A5] A. *Nazarov*. Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085. <http://stacks.iop.org/1742-6596/343/i=1/a=012085>.
- [A6] V. *Lyakhovsky*, A. *Nazarov*. Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // *Models in Quantum Field Theory*. — 2010. <http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/>.
- [A7] A. *Nazarov*. Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras // *Physics and Progress / SPbSU*. — *Physics and Progress*. — 2008.
- [A8] A. *Nazarov*. Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // *second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI*. — *ACSM*. — 2009.
- [A9] V. *Laykhovsky*, A. *Nazarov*. On affine extension of splint root systems // *ArXiv e-prints*.
- [A10] A. *Nazarov*. Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *ArXiv e-prints*. — 2011.

Цитированная литература

- [1] *AA Belavin, AM Polyakov, AB Zamolodchikov*. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // *Nuclear Physics*. — 1984. — Vol. 241. — Pp. 333–380.
- [2] *P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal*. Conformal field theory. — Springer, 1997.
- [3] *M. Henkel*. Conformal invariance and critical phenomena. — Springer Verlag, 1999.
- [4] *DL Cox, A. Zawadowski*. Exotic Kondo effects in metals: magnetic ions in a crystalline electric field and tunnelling centres // *Advances in Physics*. — 1998. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 599–942.
- [5] *I. Affleck, A.W.W. Ludwig*. Exact conformal-field-theory results on the multichannel kondo effect: Single-fermion green’s function, self-energy, and resistivity // *Physical Review B*. — 1993. — Vol. 48, no. 10. — P. 7297.
- [6] *G. Moore, N. Read*. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 360, no. 2. — Pp. 362–396.
- [7] *J.L. Cardy*. Critical percolation in finite geometries // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1992. — Vol. 25. — P. L201.
- [8] *S. Smirnov*. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.
- [9] *H. Duminil-Copin, S. Smirnov*. Conformal invariance of lattice models // *Arxiv preprint arXiv:1109.1549*. — 2011.

- [10] *S. Smirnov*. Discrete complex analysis and probability // *Arxiv preprint arXiv:1009.6077*. — 2010.
- [11] *V.G. Kac*. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.
- [12] *R.V. Moody*. A new class of Lie algebras // *Journal of algebra*. — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.
- [13] *V.G. Kac, D.H. Peterson*. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // *Adv. in Math.* — 1984. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 125–264.
- [14] *I.G. Macdonald*. Affine root systems and Dedekind's η -function // *Inventiones Mathematicae*. — 1971. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 91–143.
- [15] *E. Witten*. Non-abelian bosonization in two dimensions // *Communications in Mathematical Physics*. — 1984. — Vol. 92, no. 4. — Pp. 455–472.
- [16] *P. Goddard, A. Kent, D. Olive*. Virasoro algebras and coset space models // *Physics Letters B*. — 1985. — Vol. 152, no. 1-2. — Pp. 88 – 92.