Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Назаров Антон Андреевич

Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор, Ляховский Владимир Дмитриевич*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор, Кулиш Петр Петрович*
	кандидат физико-математических наук, ученое звание, Мудров Андрей Игоревич
Ведущая организация:	*Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «____» ____________ 2012 г. в ____ часов на заседании совета *Д 212.232.24* по защите докторских и кандидатских диссертаций при *Санкт-Петербургском государственном университете*, расположенном по адресу: *Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 305*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *Санкт-Петербургского государственного университета.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
ученая степень, ученое звание *Подпись* *фамилия и. о.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Последние тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает большое внимание исследователей [1]. Эта теория используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически. Помимо математической красоты теория обладает огромной практической ценностью – с ее использованием было получено большое количество результатов и численных предсказаний в изучении критического поведения в двумерных системах [2, 3]. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо [4, 5] и дробного квантового эффекта Холла [6].

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля [7] в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [8–10].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли является важным инструментом изучения моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой обязательно в двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [11, 12]. Первоначально интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей [13, 14]. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена [15], а затем и coset-модели [16], в которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль.

Моделям Весса-Зумино-Новикова-Виттена, coset-моделям и теории представлений аффинных алгебр Ли посвящены тысячи работ. Однако многие проблемы по-прежнему не имеют простых решений. Например, задача вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для различных физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. При этом, в отличие от проблемы вычисления кратностей весов, для вычисления коэффициентов ветвления не существовало особенно эффективных алгоритмов.

Научная новизна и практическая значимость

В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули не максимальных подалгебр. Алгоритм вычисления коэффициентов ветвления реализован в пакете **Affine.m** для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

- Установлена прямая связь инъективного сплинта и ветвлений. Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля иньективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.

- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Показано, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность.

- Построена модель обобщеннного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Отметим, что пакет **Affine.m** может быть использован для решения задач теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли, возникающих в различных областях физики, начиная от изучения атомных и молекулярных спектров и заканчивая конформной теорией поля и интегрируемыми системами.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр, с использованием разложения сингулярных элементов

- Установлено, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность

- Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля иньективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.

- Показано, что условие для мартингала, определяющее классификацию операторов изменения граничных условий в наблюдаемых стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, задает ограничения на структуру сингулярных элементов представлений аффинной алгебры Ли, порожденных граничными состояниями. Изучение структуры сингулярных элементов существенно упрощает поиск операторов смены граничных условий. Построена модель обобщеннного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля и показано, что такое обобщение совместно с coset-реализацией минимальных моделей.

- Разработан пакет программ **Affine.m**, реализующий различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых "Workshop on Advanced Computer Simulation Methods" 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: "Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)" 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), "Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011", 18-23 июля 2011 (Дубна), "Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)", 7-13 августа 2011 (Прага).

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], 5 статей в сборниках тезисов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 160 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 носит обзорный характер. В ней мы даем аксиоматическую формулировку конформной теории поля, описываем модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели. Затем мы демонстрируем роль аффинных алгебр в описании этих моделей и приводим основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Мы указываем на то, что основные свойства интегрируемых модулей старшего веса определяются структурой сингулярного элемента, что выражается в формуле Вейля-Каца для формальных характеров. Кроме того, мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

В главе 2 мы выводим основное рекуррунтное соотношение на коэффициенты ветвления. Пользуясь тем, что структура сингулярного элемента определяет свойства модуля алгебры Ли, мы формулируем и доказываем лемму о разложении сингулярного элемента. Такое разложение определяет правила ветвления и позволяет сформулировать рекуррентную процедуру редукции. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

Формула Вейля-Каца для формальных характеров интегрируемых модулей старшего веса конечномерных и аффинных алгебр Ли имеет вид

$$\mathrm{ch} V^{(\mu)} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}, \tag{1}$$

где $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент модуля, а $R = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ – знаменатель Вейля. Сингулярный элемент определяется набором сингулярных весов модуля и имеет разный вид для разных типов модулей старшего веса. Например, $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\mu+\rho)-\rho}$ для неприводимых модулей. Про этом знаменатель Вейля является универсальным объектом, характеризующим корневую систему алгебры Ли, а свойства модуля определяются сингулярным элементом.

Процедура редукции состоит в разложении модуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в сумму модулей некоторой подалгебры $\mathfrak{a}$

$$L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a}} = \bigoplus_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} L^{\nu}_{\mathfrak{a}}. \tag{2}$$

Используя оператор проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{a}}$), перепишем это разложение для формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}} \circ ch\left(L^{\mu}\right) = \sum_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} ch\left(L^{\nu}_{\mathfrak{a}}\right). \tag{3}$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления $b^{(\mu)}_{\nu}$.

Для любой алгебры $\mathfrak{g}$ и подалгебры $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ можно построить подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ такую, что $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \{\beta\in\Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta\left(h\right)=0\}$.

Обозначим через $W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ подгруппу группы Вейля W, порожденную отражениями w_{β}, соответствующими корням $\beta\in\Delta^+_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Пусть $\mathfrak{h}^*_{\perp} := \{\eta\in\mathfrak{h}^*_{\perp\mathfrak{a}} | \forall h\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_{\perp}}; \eta\left(h\right)=0\}$, тогда имеет место разложение подалгебры Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}\oplus\mathfrak{h}_{\perp}$.

Для подалгебр из ортогональной пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$ рассмотрим соответствующие векторы Вейля $\rho_\mathfrak{a}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_\perp}$, и образуем так называемые "дефекты" вложения $\mathcal{D}_\mathfrak{a} := \rho_\mathfrak{a} - \pi_\mathfrak{a}\rho$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} := \rho_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho$.

Рассмотрим сингулярные веса $\{(w(\mu+\rho)-\rho)\,|w \in W\}$ модуля старшего веса $L^\mu_\mathfrak{g}$ и их проекции на $h^*_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}$ (дополнительно сдвинутые на дефект $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$):

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}} \circ [w(\mu+\rho)-\rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\left\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w)\,|w \in W\right\}$ выберем находящиеся в главной камере Вейля $\overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}}$. Множество $U := \left\{u \in W| \quad \mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u) \in \overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}}\right\}$ состоит из элементов группы Вейля, переводящих старший вес в главную камеру Вейля подалгебры $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}$ (с учетом сдвига на ρ и на дефект). Элементы U являются представителями классов смежности $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$. Каждому элементу U поставим в соответствие вес $\mu_\mathfrak{a}(u) := \pi_\mathfrak{a} \circ [u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$. Аналогичным образом определим $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ и $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$

Мы доказываем следующую лемму о разложении сингулярного элемента:

Лемма 1. *Пусть $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$ – ортогональная пара редуктивных подалгебр $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$,*

L^μ – модуль старшего веса с сингулярным элементом $\Psi^{(\mu)}$,

$R_{\mathfrak{a}_\perp}$ – знаменатель Вейля для подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$.

Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_\perp)} = \pi_\mathfrak{a}\left(\frac{\Psi^\mu_\mathfrak{g}}{R_{\mathfrak{a}_\perp}}\right)$ можно разложить в сумму по $u \in U$ сингулярных весов $e^{\mu_\mathfrak{a}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)\mathrm{dim}\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}\right)$:

$$\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_\perp)} = \quad \pi_\mathfrak{a}\left(\frac{\Psi^\mu}{R_{\mathfrak{a}_\perp}}\right) = \sum_{u\in U} \epsilon(u)\mathrm{dim}\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}\right) e^{\mu_\mathfrak{a}(u)}. \tag{4}$$

Теперь мы можем ввести "веер вложения", который необходим для формулировки рекуррентных соотношений:

Определение 1. Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp}} \left(1-e^{-\pi_\mathfrak{a}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)-\mathrm{mult}_\mathfrak{a}(\pi_\mathfrak{a}\alpha)} = -\sum_{\gamma\in P_\mathfrak{a}} s(\gamma)e^{-\gamma} \tag{5}$$

и носитель $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}} \subset P_{\mathfrak{a}}$ функции $s(\gamma) = \det(\gamma)$:

$$\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}} = \{\gamma \in P_{\mathfrak{a}} | s(\gamma) \neq 0\} \tag{6}$$

Упорядочение корней в $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathfrak{a}}$ индуцирует естественное упорядочение весов в $P_{\mathfrak{a}}$. Обозначим через γ_0 наименьший вектор $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$. Множество

$$\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}\} \setminus \{0\} \tag{7}$$

называется *веером вложения.*

Веер вложения универсален и зависит только от вложения $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ и не зависит от модуля $L^{(\mu)}$.

Введем сингулярные коэффициенты ветвления следующим образом:

$$\begin{array}{l} k_{\xi}^{(\mu)} = b_{\xi}^{(\mu)} \quad \text{если} \quad \xi \in \bar{C}_{\mathfrak{a}} \\ k_{\xi}^{(\mu)} = \epsilon(w) b_{w(\xi+\rho_{af})-\rho_{\mathfrak{a}}}^{(\mu)} \quad \text{где } w \in W_{\mathfrak{a}} : w(\xi+\rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}} \in \bar{C}_{\mathfrak{a}}. \end{array} \tag{8}$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему, которая позволит нам рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

Теорема 1. *Для сингулярных коэффициентов ветвления $k_{\nu}^{(\mu)}$ выполняется соотношение*

$$\begin{array}{c} k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left(\sum_{u\in U} \epsilon(u)\ \dim\left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}\right) \delta_{\xi-\gamma_0, \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu+\rho)-\rho)} + \right. \\ \left. + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}} s\left(\gamma+\gamma_0\right) k_{\xi+\gamma}^{(\mu)} \right). \end{array} \tag{9}$$

Далее мы анализируем пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ для простых алгебр Ли. Оказывается, что для "ортогональной пары" $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$, вообще говоря, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\perp} \not\subset \mathfrak{g}$. В частности, для серии простых конечномерных алгебр B_n существуют "ортогональные пары" подалгебр (B_k, B_{n-k}).

На основании рекуррентного соотношения (9) сформулирован алгоритм вычисления коэффициентов ветвления. Остальные разделы главы 2 содержат примеры вычислений с использованием предложенного алгоритма, а также описание роли функций ветвления в формулировке конформной теории поля на торе и в coset-моделях конформной теории поля.

В главе 3 мы используем разложение сингулярного элемента, чтобы показать связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Результаты третьей главы опубликованы в работах [A2, A7].

Оказывается, что для полупростой конечномерной алгебры $\mathfrak{g}$ и полупростой конечномерной подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебра $\mathfrak{a}_{\perp}$, определенная в формуле (3), является регулярной. Отношение знаменателей Вейля порождает параболические модули Верма. Сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}. \tag{10}$$

Мы доказываем следующее утверждение, демонстрирующее, что разложение сингулярного элемента связано с разложением характера неприводимого модуля в комбинацию характеров обобщенных модулей Верма

Утверждение 1. *Для ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_{\perp}$ в $\mathfrak{g}$ (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$) характер интегрируемого модуля старшего веса L^{μ} может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)$:*

$$\mathrm{ch}\left(L^{\mu}\right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}, \tag{11}$$

где $U := \left\{ u \in W | \quad \mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right\}$ и I – такое подмножество в S, что Δ_I^+ эквивалентно $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$.

Связь редукции и (обобщенной) резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда дается следующим утверждением:

Утверждение 2. *Пусть L^{μ} – $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\mu \in P^{+}$, и пусть регулярная подалгебра $\mathfrak{a}_{\perp} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ является ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (10) определяет как обобщенную резольвенту L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}_{\perp}$, так и правила ветвления L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}_{\perp}$, так и правила ветвления L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}$.*

Глава 4 посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплинт приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплинт корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [A3, A10].

Определение 2. Пусть Δ_0 и Δ – корневые системы с соответствующими весовыми решетками P_0 и P. Рассмотрим отображение

$$\phi : \begin{cases} \Delta_0 \hookrightarrow \Delta, \\ P_0 \hookrightarrow P. \end{cases} \qquad (12)$$

Оно называется “вложением”, если

(a) оно вкладывает Δ_0 в Δ, и

(b) ϕ действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в P_0 и P:

$$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

для любой тройки $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$, такой, что $\gamma = \alpha + \beta$.

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для образа $\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}_\phi(\mathcal{E}_0)$ можно рассмотреть обратное отображение $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Заметим, что нужно различать два класса вложений: когда скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве P_0 инвариантно по отношению к ϕ и когда оно не ϕ-инвариантно. Вложения первого класса называются "метрическими", второго – "неметрическими".

Определение 3. Корневая система Δ "расщепляется" на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ.

Эквивалентно, можно сказать, что (Δ_1, Δ_2) – "сплинт" (расщепление) Δ и мы можем обозначить его через $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$. Каждая из компонент Δ_1 и Δ_2 называется "стеблем" сплинта (Δ_1, Δ_2).

Чтобы показать связь веера вложения со сплинтом рассмотрим случай, когда один из стеблей $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$ является подсистемой корневой системы.

Сплинт $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$ называется "инъективным", если $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$, – подсистема корневой системы Δ, соответствующая регулярной редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

В случае инъективного сплинта второй стебель $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ может быть переписан как произведение (аналогично формуле (5)) и определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{s}0}$ кообраз второго вложения $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \rightarrow \Delta_{\mathfrak{g}}$. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Каждый инъективный сплинт $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$ определяет веер вложения с носителем $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$, задающимся произведением*

$$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} \left(1 - e^{-\beta}\right) = -\sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma} \qquad (13)$$

В случае инъективного сплинта мы можем сказать, что подалгебра $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ расщепляется Δ (и назовем $\mathfrak{a}$ “расщепляющей подалгеброй” алгебры $\mathfrak{g}$). Сплинты были классифицированы в работе [17] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплинтов в этой классификации инъективны.

Если выполнено техническое требование на структуру сингулярного элемента, то верно следующее свойство:

Свойство 1.

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{s}}^{+}}(1-e^{-\beta})}\left(\Psi^{\widetilde{\mu}+\rho_{\mathfrak{s}}}\right)=\sum_{\widetilde{\nu}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}} M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}} e^{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))}=\sum_{\nu\in P_{\mathfrak{a}}^{++}} b_{\nu}^{(\mu)} e^{\nu}. \tag{14}$$

Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства, равен одному из старших весов в разложении. Кратность $M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}$ *веса* $\widetilde{\nu}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}$ *определяет коэффициент ветвления* $b_{\nu}^{(\mu)}$ *для старшего веса* $\nu=(\mu-\phi\left(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}\right))$*:*

$$b_{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))}^{(\mu)}=M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}.$$

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации.

В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы нами в работах [A4, A6].

Стохастический процесс, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t}=\frac{2}{g_t(z)-\sqrt{\kappa}\xi_t}, \tag{15}$$

называется *эволюцией Шрамма-Левнера* на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Здесь ξ_t – Броуновское движение. Динамика конца z_t критической кривой γ_t (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением $z_t=g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$. Нам удобнее использовать отображение $w_t(z)=g_t(z)-\sqrt{\kappa}\xi_t$.

Мы обобщаем анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей [16]. Такие модели задаются алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгеброй $\mathfrak{a}$. G/A-coset модель конформной теории поля может быть реализована как ВЗНВ-модель (с калибровочной группой G), взаимодействующая с чисто калибровочными полями, с калибровочной группой $A \subset G$ [18, 19]. Действие записывается через поля $\gamma : \mathbb{C} \to G$ и $\alpha, \bar{\alpha} : \mathbb{C} \to A$:

$$
\begin{aligned}
&S_{G/A}(\gamma,\alpha) = \\
&-\frac{k}{8\pi}\int\limits_{S^2} d^2x\, \mathcal{K}(\gamma^{-1}\partial^{\mu}\gamma, \gamma^{-1}\partial_{\mu}\gamma) - \frac{k}{24\pi}\int\limits_{B} \epsilon_{ijk}\mathcal{K}\left(\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^i}, \left[\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^j}\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^k}\right]\right) d^3y + \\
&\quad + \frac{k}{4\pi}\int\limits_{S^2} d^2z \left(\mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\partial}\gamma) - \mathcal{K}(\bar{\alpha}, (\partial\gamma)\gamma^{-1}) + \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\alpha}\gamma) - \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha})\right). \quad (16)
\end{aligned}
$$

Здесь через $\mathcal{K}$ обозначена форма Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе Ли G.

Если мы фиксируем A-калибровку, у нас останется G/A калибровочная инвариантность. Значит мы должны добавить случайные калибровочные преобразования к эволюции Шрамма-Левнера, аналогично случаю ВЗНВ-моделей (См. [20]). Обозначим через t_i^a ($\tilde{t}_i^b$) генераторы представления алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно, представления $\mathfrak{a}$), соответствующего примарному полю φ_i.

Теперь рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой $\mathcal{O}$ на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера γ_t вплоть до некоторого времени t, умноженных на вероятность этой траектории:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}\right] = \sum_{\gamma_t} P\left[C_{\gamma_t}\right] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

Решеточная наблюдаемая $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t, следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$

– мартингал. Это должно выполняться и для ее непрерывного предела, дающегося комбинацией корреляционных функций в конформной теории поля [21]:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \rightarrow \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\left\langle \mathcal{O}(\{z_i\})\phi(z_t)\phi^\dagger(\infty) \right\rangle_{\mathbb{H}_t}}{\left\langle \phi(z_t)\phi^\dagger(\infty) \right\rangle_{\mathbb{H}_t}} \tag{17}$$

Мы рассматриваем теорию с границей, так что мы должны использовать модели граничной конформной теории поля и накладывать соответствующие граничные условия. В случае верхней полуплоскости корреляционные функции в граничной конформной теории поля могут быть переписаны как корреляционные функции для теории на всей плоскости, но с удвоенным числом полей.

Мы предполагаем, что $\mathcal{F}$ содержит некоторый набор примарных полей φ_i с конформными весами h_i. Так как мы рассматриваем граничную конформную теорию поля, мы должны добавить объемные поля в сопряженных точках $\bar{z}_i$. Кроме того, у нас есть операторы смены граничного условия ϕ на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности.

Рассмотрим, что происходит с наблюдаемыми при эволюции следа SLE γ_t с момента t до $t + dt$.

Через $\mathcal{G}_i$ мы обозначили генераторы инфинитезимальных преобразований примарных φ_i:$d\varphi_i(w_i) = \mathcal{G}_i\varphi_i(w_i)$. Нормируем дополнительное $(\dim \mathfrak{g})$-мерное Броуновское движение следующим образом: $\mathbb{E}\left[d\theta^a\, d\theta^b\right] = \mathcal{K}(t^a, t^b)dt$. Тогда генератор преобразования поля равен

$$\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a:\mathcal{K}(t^a,\tilde{t}^b)=0}(d\theta^a t_i^a)\right). \tag{18}$$

То есть мы фиксировали A-калибровку, разрешив случайное блуждание только в направлении, ортогональном подалгебре $\mathfrak{a}$.

Формула Ито, дает выражение для дифференциала $\mathcal{F}$, который равняется нулю в силу условия мартингала. Это равенство можно переписать в виде следующего алгебраического условия на граничное состояние $\phi(0)\,|0\rangle$:

$$\langle 0\,|\phi(\infty)\varphi_1(w_1)\ldots\varphi_{2N}(w_{2N}) \left(-2L_{-2}+\frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2+\frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}J_{-1}^aJ_{-1}^a-\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right) \phi(0)|0\rangle=0. \quad (19)$$

Так как набор $\{\phi_i\}$ состоит из произвольных примарных полей, мы заключаем, что

$$|\psi>=\left(-2L_{-2}+\frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2+\frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}J_{-1}^aJ_{-1}^a-\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right)\cdot\phi(0)|0> \quad (20)$$

является нулевым состоянием, то есть соответствуют сингулярному весу в представлении алгебры Вирасоро. Действуя повышающими операторами мы получаем соотношения, связывающие параметры стохастического процесса и coset-модели конформной теории поля:

$$(3\kappa-8)h_{(\mu,\nu)}-c+\tau(k\dim\mathfrak{g}-x_e k\dim\mathfrak{a})=0. \quad (21)$$

$$-12h_{(\mu,\nu)}+2\kappa h_{(\mu,\nu)}(2h_{(\mu,\nu)}+1)+\tau(C_\mu-\tilde{C}_\nu)=0, \quad (22)$$

здесь $C_\mu=(\mu,\mu+2\rho)$ и $\tilde{C}_\nu=(\nu,\nu+2\rho_{\mathfrak{a}})$ – это собственные значения квадратичных операторов Казимира $\sum_a t^at^a$ и $\sum_b \tilde{t}^b\tilde{t}^b$ алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Из уравнения (21),(22) мы сразу получаем значения κ,τ для каждой пары весов (μ,ν) алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Для coset-реализаций минимальных и парафермионных моделей эти результаты совпадают с тем, что было ранее получено путем введения стохастического процесса с дополнительным дискретным случайным блужданием [22].

Остальная часть главы представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализованного с использованием методов диссертации. Вычислительным методам посвящены наши работы [A5, A9, A8].

Список публикаций

[A1] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov*. Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205.

[A2] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov*. Recursive properties of branching and BGG resolution // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2011. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 1551–1560.

[A3] *V. Laykhovsky, A. Nazarov*. Fan, splint and branching rules // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI.* — 2012. — Vol. 398. — Pp. 162–179.

[A4] *A. Nazarov*. SLE martingales in coset conformal field theory // *JETP lett.* — 2012. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 93–96.

[A5] *A. Nazarov*. Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *Computer Physics Communications.* — 2012. `http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.06.014`.

[A6] *A. Nazarov*. Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085. `http://stacks.iop.org/1742-6596/343/i=1/a=012085`.

[A7] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov*. Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // Models in Quantum Field Theory. — 2010. `http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/`.

[A8] *A. Nazarov*. Comparison of algorithms for construction of representations of

Lie algebras // Physics and Progress / SPbSU. — Physics and Progress. — 2008.

[A9] *A. Nazarov.* Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI. — ACSM. — 2009.

[A10] *V. Laykhovsky, A. Nazarov.* On affine extension of splint root systems // Supersymmetries & Quantum Symmetries / JINR. — SQS'2011.

Цитированная литература

[1] *AA Belavin, AM Polyakov, AB Zamolodchikov.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // *Nuclear Physics.* — 1984. — Vol. 241. — Pp. 333–380.

[2] *P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal.* Conformal field theory. — Springer, 1997.

[3] *M. Henkel.* Conformal invariance and critical phenomena. — Springer Verlag, 1999.

[4] *DL Cox, A. Zawadowski.* Exotic Kondo effects in metals: magnetic ions in a crystalline electric field and tunnelling centres // *Advances in Physics.* — 1998. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 599–942.

[5] *I. Affleck, A.W.W. Ludwig.* Exact conformal-field-theory results on the multichannel kondo effect: Single-fermion green's function, self-energy, and resistivity // *Physical Review B.* — 1993. — Vol. 48, no. 10. — P. 7297.

[6] *G. Moore, N. Read.* Nonabelions in the fractional quantum Hall effect // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Vol. 360, no. 2. — Pp. 362–396.

[7] *J.L. Cardy*. Critical percolation in finite geometries // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1992. — Vol. 25. — P. L201.

[8] *S. Smirnov*. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics.* — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.

[9] *H. Duminil-Copin, S. Smirnov*. Conformal invariance of lattice models // *Arxiv preprint arXiv:1109.1549.* — 2011.

[10] *S. Smirnov*. Discrete complex analysis and probability // *Arxiv preprint arXiv:1009.6077.* — 2010.

[11] *V.G. Kac*. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya.* — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.

[12] *R.V. Moody*. A new class of Lie algebras // *Journal of algebra.* — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.

[13] *V.G. Kac, D.H. Peterson*. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // *Adv. in Math.* — 1984. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 125–264.

[14] *I.G. Macdonald*. Affine root systems and Dedekind'sη-function // *Inventiones Mathematicae.* — 1971. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 91–143.

[15] *E. Witten*. Non-abelian bosonization in two dimensions // *Communications in Mathematical Physics.* — 1984. — Vol. 92, no. 4. — Pp. 455–472.

[16] *P. Goddard, A. Kent, D. Olive*. Virasoro algebras and coset space models // *Physics Letters B.* — 1985. — Vol. 152, no. 1-2. — Pp. 88 – 92.

[17] *David Richter*. Splints of classical root systems // *Journal of Geometry.* — 2012. — Vol. 103. — Pp. 103–117. — 10.1007/s00022-012-0109-3. `http://dx.doi.org/10.1007/s00022-012-0109-3`.

[18] *A. Gawdzki et al.* G/H conformal field theory from gauged WZW model // *Physics Letters B.* — 1988. — Vol. 215, no. 1. — Pp. 119–123.

[19] *J.M. Figueroa-O'Farrill.* The equivalence between the gauged WZNW and GKO conformal field theories // *ITP Stony Brook preprint ITP-SB-89-41.* — 1989.

[20] *E. Bettelheim, IA Gruzberg, AWW Ludwig, P. Wiegmann.* Stochastic Loewner evolution for conformal field theories with Lie group symmetries // *Physical review letters.* — 2005. — Vol. 95, no. 25. — P. 251601.

[21] *M. Bauer, D. Bernard.* SLE martingales and the Virasoro algebra // *Physics Letters B.* — 2003. — Vol. 557, no. 3-4. — Pp. 309–316.

[22] *R. Santachiara.* SLE in self-dual critical Z (N) spin systems: CFT predictions // *Nuclear Physics B.* — 2008. — Vol. 793, no. 3. — Pp. 396–424.