

Сингулярные элементы модулей аффинных алгебр Ли в моделях конформной теории поля

Антон Назаров

Кандидатская диссертация

см. также arXiv:1007.0318, 1102.1702, 1107.4681, 1111.6787, 1112.4354
научный руководитель В. Д. Ляховаский

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
физического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
198904, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: anton.nazarov@hep.phys.spbu.ru

31 января 2012

Действие WZNW-моделей

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена можно строить начиная со следующего действия:

$$S = S_0 + k\Gamma, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

S_0 — действие нелинейной σ -модели:

$$S_0 = -\frac{k}{8\pi} \int_{S^2} d^2x \operatorname{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g), \quad g(x) : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim S^2 \rightarrow G \quad (2)$$

Топологический член Весса-Зумино:

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} \operatorname{Tr} \left(\tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3y \quad (3)$$

Γ определен на трехмерном многообразии B , ограниченном S^2 . \tilde{g} — продолжение g на B .

$\pi_3(G) = \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$, $e^{-S[g]}$ определен однозначно.

Аффинная алгебра

- Токи $J(z) = -k\partial_z g g^{-1}$ $\bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g$
- Калибровочная инвариантность $g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z) g(z, \bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$, где $\Omega, \bar{\Omega} \in G$
- Тождества Уорда $\Omega = 1 + \omega$:

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle$$

- $J(z) = \sum_a J^a(z) t^a = \sum_a \sum_n J_n^a t^a z^{n-1} \Rightarrow$ соотношения аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f^{abc} J_{n+m}^c + k n \delta^{ab} \delta_{n+m, 0}$$

- Конструкция Сугавары $L_n = \frac{1}{2(k+h\nu)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \Leftrightarrow Vir \subset U(\hat{\mathfrak{g}})$.

Примарные поля

- Полная киральная алгебра $\hat{g} \ltimes Vir$:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J_m^a] &= -mJ_{n+m}^a \end{aligned} \quad (4)$$

- Примарные поля определяются операторным разложением $J_g^a(z)\phi_i(w) \sim \frac{-t_i^a \phi(w)}{z-w}$.
- Примарные поля ϕ_λ соответствуют старшим весам представлений:

$$\begin{aligned} J_0^a |\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a |\phi_\lambda\rangle \quad J_n^a |\phi_\lambda\rangle = 0 \quad \text{при } n > 0 \\ L_0 |\phi_\lambda\rangle &= \frac{1}{2(k + h^\nu)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\nu)} |\phi_\lambda\rangle = h_\lambda |\phi_\lambda\rangle \end{aligned}$$

- Сингулярные векторы

$$\begin{aligned} J_n^a |v\rangle &= 0 \quad \text{при } n > 0 \\ J_0^+ |v\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Coset-модели и калибровочная WZNW-модель

Добавим в действие калибровочные поля A, \bar{A} со значениями в подалгебре $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$:

$$S(g, A) = S_{WZNW}(g) + \frac{k}{4\pi} \int d^2z \left(\mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{\partial} g) - \mathcal{K}(\bar{A}, (\partial g) g^{-1}) + \mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{A} g) - \mathcal{K}(A, \bar{A}) \right)$$

Теперь токи

$$J_{(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} = -k \partial g g^{-1} - k g A g^{-1}$$

Из тождеств Уорда получаем

$$\left\langle A^b(z) \phi_1 \dots \phi_N \right\rangle = \frac{2}{k + 2h_a^v} \sum_k \frac{\tilde{t}_k^b}{z - z_k} \langle \phi_1 \dots \phi_N \rangle$$

Алгебраическая структура связана с $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Генераторы алгебры Вирасоро – разности выражений Сугавары:

$$L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{a}}$$

Примарные поля и сингулярные элементы

Для генераторов подалгебры \hat{a} :

$$[L_n, \tilde{J}_m^b] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{J}_m^b |v\rangle = 0 \Rightarrow \tilde{J}_m^b L_n |v\rangle = 0$$

Сингулярные векторы по отношению к \hat{a} образуют модули алгебры Вирасоро в coset-моделях. Функции ветвления $b_{(\hat{g} \downarrow \hat{a})\nu}^\mu(q)$ являются характеристиками модулей алгебры Вирасоро.

Примарные поля нумеруются парами весов $(\mu, \nu) \in \mathfrak{h}_{\hat{g}} \oplus \mathfrak{h}_{\hat{a}}$, такими, что $b_\nu^\mu(q) \neq 0$. Некоторые пары эквивалентны. Эквивалентность дается действием т.н. “простых токов” (J, \tilde{J}) , таких, что $h_J - h_{\tilde{J}} = 0$.

Конформный вес примарного поля

$$L_0 |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle = \left(\frac{1}{2(k + h^\nu)} \sum_a J_0^a J_0^a - \frac{1}{2(k + h_a^\nu)} \sum_b \tilde{J}_0^b \tilde{J}_0^b \right) |\phi_\lambda\rangle = \left(\frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(k + h^\nu)} - \frac{(\nu, \nu + 2\rho_a)}{2(k + h^\nu)} \right) |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle \quad (5)$$

Формула Вейля-Каца для характеров и сингулярные элементы

Модуль Верма

$$M^\mu = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} D^\mu(\mathfrak{b}_+) \quad \text{где} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}_-$$

$$D^\mu(\mathfrak{b}_+) : D(E^\alpha) = 0, \quad D(H) = \mu(H) \quad \forall \alpha > 0.$$

$$\text{ch} M^\mu = \frac{e^\mu}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}} = \frac{e^\mu}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}}, \quad \epsilon(w) := \det(w)$$

У M^μ есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль L^μ – неприводимый модуль старшего веса.

$$\text{ch} L^\mu = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu + \rho) - \rho}}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{ch} M^{w(\mu + \rho) - \rho}(\text{БГГ})$$

Разложение сингулярного элемента

Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ – конечномерные или аффинные. Можно разложить $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ на модули \mathfrak{a} :

$$L_{\mathfrak{g}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu} b_{\nu}^{\mu} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$$

В терминах характеров

$$\pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{\omega(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}} \right) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\sum_{\omega \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(\omega) e^{\omega(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}.$$

Хотим домножить на знаменатель и переписать как рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления.

Рассмотрим корни, ортогональные к $\Delta_{\mathfrak{a}}$.

Пусть $\Delta_{\mathfrak{b}}^+ = \{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ : \forall \beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}; \alpha \perp \beta\}$ – подмножество положительных корней \mathfrak{g} , ортогональных корневой системе \mathfrak{a} .

Обозначим $W_{\mathfrak{b}}$ подгруппу группы Вейля W , порожденную отражениями ω_{β} , соотв. корням $\beta \in \Delta_{\mathfrak{b}}^+$.

Подсистема $\Delta_{\mathfrak{b}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\perp} \subset \mathfrak{g}$.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – “ортогональная пара” подалгебр \mathfrak{g} , \mathfrak{b} регулярная.
 Подалгебра Картана раскладывается $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{d}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$.
 Введем

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho.$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{b}} := \rho_{\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{b}}\rho.$$

и получим

Лемма

Пусть $\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$,

L^{μ} – модуль старшего веса с сингулярным элементом $\Psi^{(\mu)}$,

$R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ – знаменатель Вейля для подалгебры \mathfrak{a}_{\perp} . $U \sim W/W_{\text{aff}}$.

Тогда элемент $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right)$ можно разложить в сумму по $u \in U$:

$$\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}(u)} \right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}.$$

Рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left(\sum_{u \in W/W_b} \epsilon(u) \dim \left(L_b^{\pi(b)[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_b} \right) \right. \\ \left. \delta_{\xi-\gamma_0, \pi(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{d}})[u(\mu+\rho)-\rho]+\mathcal{D}_b} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi+\gamma}^{(\mu)} \right).$$

Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}}$ весов $\{\xi\}$, появляющихся в разложении

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_b^+} (1 - e^{-\pi_{\hat{\mathfrak{a}}} \alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\pi_{\hat{\mathfrak{a}}} \alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\hat{\mathfrak{a}}}} s(\gamma) e^{-\gamma}$$

Веса надо сдвинуть на γ_0 – минимальный вес в $\{\xi\}$ – и исключить нулевой элемент:

$$\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}} = \{\xi - \gamma_0\} \setminus \{0\}.$$

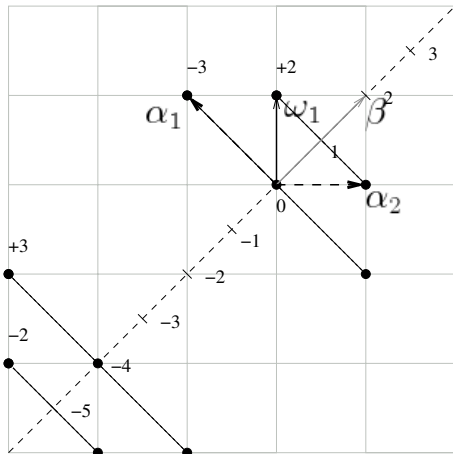


Рис.: Ортогональная подалгебра \mathfrak{b} и размерности \mathfrak{b} -модулей

Рис.: Корни алгебр B_2, A_1 и Ψ^{ω_1}

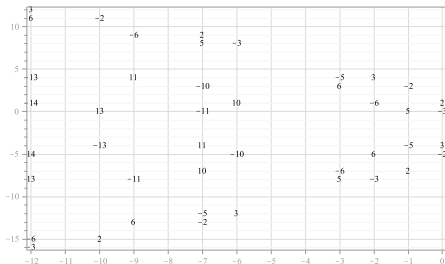
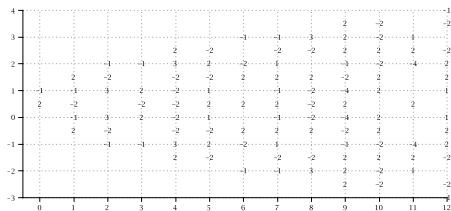


Рис.: $\Gamma_{\hat{A}_1 \subset \hat{B}_2}$

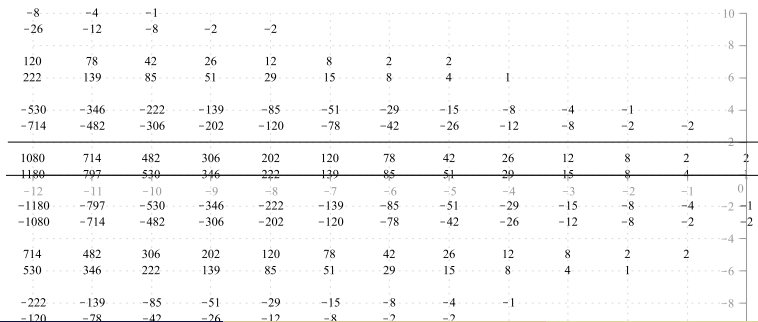


Рис.: $\pi_{\hat{A}_1} \left(\psi_{\hat{B}_2}^{\omega_1} \right)$

$$M_I^{\mu_{a\perp}(u)} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{a\perp}^{\mu_{a\perp}(u)} \quad \Delta_{a\perp}^+ \sim \Delta_I^+, \text{ где } I \subset S$$

Антон Назаров (СПбГУ)

Сплинты

Определение

ϕ – “вложение” $\Delta_0 \hookrightarrow \Delta$:

$$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in P_0 : \gamma = \alpha + \beta.$$

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для $\mathcal{E}_i = \text{Im}_\phi(\mathcal{E}_0)$ есть $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Определение

Корневая система Δ “расщепляется” на (Δ_1, Δ_2) , если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2 , и (b) ни ранг Δ_1 , ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ .

Пусть $\Delta_1 = \Delta_a$. $\Delta_s := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_a$ определяет веер вложения $\Gamma_{a \hookrightarrow g}$.

$$\prod_{\beta \in \Delta_s^+} (1 - e^{-\beta}) = - \sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma}$$

$$\Psi_g^{(\mu)} = e^{-\rho} \sum_{w \in W_a} w \circ (e^{\rho_a} \Psi_s^{\tilde{\mu} + \rho_s}) \quad \tilde{\mu} = \sum m_k \omega_s^k \tilde{\mu} = \sum m_k \omega_s^k$$

Пример

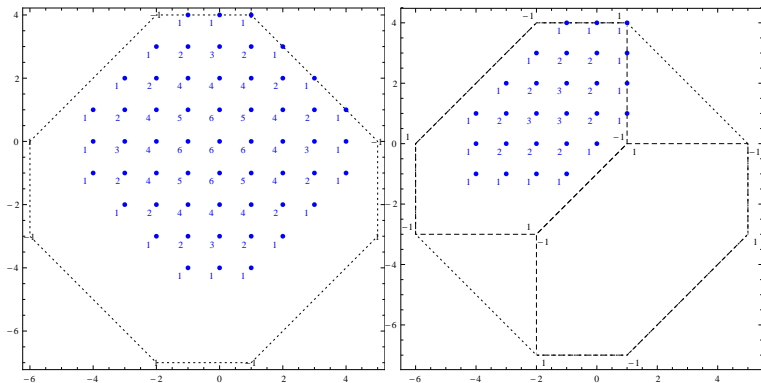
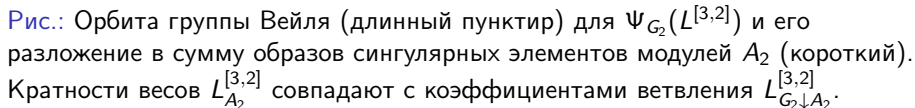


Рис.: Веса $L_{B_2}^{[3,2]}$ с кратностями показаны слева. Короткий пунктир – контур сингулярного элемента. Справа – разложение сингулярного элемента $\Psi_{B_2}(L_{B_2}^{[3,2]})$ в сумму образов сингулярных элементов $\Psi_{A_2}(L_{A_2}^{[3,2]})$ (длинный пунктир). Кратности $L_{A_2}^{[3,2]} =$ коэффициентам ветвления $L_{B_2 \downarrow A_1 \oplus u(1)}^{[3,2]}$.



Аффинное расширение $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$. Так как $\text{rank } \mathfrak{g} \leq \text{rank } \mathfrak{a} + \text{rank } \mathfrak{s}$, для знаменателей Вейля

$$\prod_{\alpha \in \hat{\Delta}_1^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)} \prod_{\beta \in \hat{\Delta}_2^+} (1 - e^{\phi \circ \beta})^{\text{mult}(\beta)} = \prod_{\gamma \in \hat{\Delta}^+} (1 - e^{-\gamma})^{\text{mult}(\gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-n\delta})^{\text{rank } \mathfrak{a} + \text{rank } \mathfrak{s} - \text{rank } \mathfrak{g}} \quad (6)$$

$$\Theta_{\hat{\lambda}=(\lambda, k, 0)}^{(\hat{\mathfrak{g}})}(\tau, z) = \sum_{\xi \in Q_{\mathfrak{g}} + \frac{\lambda}{k}} e^{2\pi i k \left(\frac{1}{2}(\xi, \xi)\tau + (\xi, z) \right)}$$

Соотношение, связывающее тета-функции алгебр $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{a}}$:

$$\left(\sum_{v \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(v) \Theta_{v\rho_{\mathfrak{a}}}^{(\hat{\mathfrak{a}})}(\tau, z) \right) \cdot \left(\sum_{u \in W_{\mathfrak{s}}} \epsilon(u) \Theta_{\phi \circ (u\rho_{\mathfrak{s}})}^{(\hat{\mathfrak{s}})}(\tau, z) \right) = \left(\sum_{w \in W} \epsilon(w) \Theta_{w\rho_{\mathfrak{g}}}^{(\hat{\mathfrak{g}})}(\tau, z) \right) \quad (7)$$

Ветвление на конечномерные подалгебры

Рассмотрим ветвление модуля $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули \mathfrak{g}

$$\mathrm{ch} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \mathrm{ch} L_{\mathfrak{g}}^{\nu} \quad m_{\hat{\nu}=(\nu, k, n)}^{(\hat{\mu})} = \sum_{\xi \in P} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(n) m_{\nu}^{(\xi)}$$

Введем $b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) q^n$, они связаны с q -размерностью

$$\dim_q L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu} = \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu}.$$

$$\sigma_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) = \sum_{\xi \in P} m_{\nu}^{(\xi)} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(q).$$

Введем порядок на множестве весов ξ следующим образом: припишем весу ξ значение (ρ, ξ) и упорядочим веса по этим значениям. Тогда

$$\sigma(q) = Mb(q) \quad b(q) = M^{-1}\sigma(q)$$

$\sigma(q)$ и $b(q)$ – бесконечные векторы струнных функций и функций ветвления. Матрица M содержит кратности весов в \mathfrak{g} -модулях.

Обратная матрица M^{-1} содержит рекуррентные соотношения на кратности весов.

Матричные соотношения для сплитов

Рассмотрим ветвление модулей $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули \mathfrak{a} в предположении существовании сплита $\Delta_{\hat{\mathfrak{g}}}^+ = \Delta_{\mathfrak{a}}^+ \cup \phi(\Delta_{\mathfrak{s}}^+)$. Разложим \mathfrak{g} -модули на \mathfrak{a} -модули используя свойство сплита:

$$\begin{aligned}
 \text{ch} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\nu} = \\
 &\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} b_{(\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a})\xi}^{(\nu)} \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\xi} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} M_{\nu - \phi^{-1}(\nu - \xi)}^{\nu} \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\xi} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Матричное соотношение выполняется для функций ветвления $b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})}(q) = M_{\mathfrak{s}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})}(q)$ и мы можем написать $\sigma(q) = M_{\mathfrak{a}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})}(q)$. Зная коэффициенты ветвления для вложения $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ сразу получаем (градуированные) функции ветвления для вложения $\mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Заклучение

- Сингулярные элементы модулей аффинных алгебр Ли появляются в coset-моделях CFT
- Структура модуля определяется сингулярным элементом
- Разложение сингулярного элемента позволяет вычислять функции ветвления
- Проясняется связь с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Особый тип разложения – спллит. Он сильно упрощает вычисление коэффициентов ветвления.
- Из существования сплита следуют соотношения на тета-функции и функции ветвления.

Спасибо за внимание!