Сингулярные элементы модулей аффинных алгебр Ли в моделях конформной теории поля

Антон Назаров
По материалам кандидатской диссертации
см. также arXiv:1007.0318, 1102.1702, 1107.4681, 1111.6787, 1112.4354
научный руководитель В. Д. Ляховский

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
физического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
198904, Санкт-Петерубрг, Россия
e-mail: anton.nazarov@hep.phys.spbu.ru

2 февраля 2012

Действие WZNW-моделей

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена можно строить начиная со следующего действия:

$$S = S_0 + k\Gamma, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

S_0 — действие нелинейной σ-модели:

$$S_0 = -\frac{k}{8\pi}\int_{S^2} d^2x \; Tr(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g), \quad g(x) : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \sim S^2 \to G \tag{2}$$

Топологический член Весса-Зумино:

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi}\int_B \epsilon_{ijk} Tr\left(\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^i}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^j}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^k}\right) d^3y \tag{3}$$

Γ определен на трехмерном многообразии B, ограниченном S^2. $\tilde{g}$ – продолжение g на B.
$\pi_3(G) = \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}, \; e^{-S[g]}$ определен однозначно.

Аффинная алгебра

- Токи $J(z) = -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1}\partial_{\bar{z}} g$
- Калибровочная инвариантность $g(z,\bar{z}) \to \Omega(z) g(z,\bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$, где $\Omega,\ \bar{\Omega} \in G$
- Тождества Уорда $\Omega = 1 + \omega$:

$$\delta_{\omega,\bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle$$

- $J(z) = \sum_a J^a(z) t^a = \sum_a \sum_n J^a_n t^a z^{n-1} \Rightarrow$ соотношения аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\left[J^a_n, J^b_m \right] = \sum_c i f^{abc} J^c_{n+m} + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0}$$

- Конструкция Сугавары $L_n = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a \sum_m : J^a_m J^a_{n-m} : \Leftrightarrow Vir \subset U(\hat{\mathfrak{g}})$.

Примарные поля

- Полная киральная алгебра $\hat{\mathfrak{g}} \ltimes Vir$:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J^a_m] = -mJ^a_{n+m} \end{aligned} \tag{4}$$

- Примарные поля определяются операторным разложением $J^a_{\mathfrak{g}}(z)\phi_i(w) \sim \frac{-t^a_i\phi_i(w)}{z-w}$.
- Примарные поля ϕ_λ соответствуют старшим весам представлений:

$$J^a_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = -t^a_\lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle \quad J^a_n \left|\phi_\lambda\right\rangle = 0 \quad \text{при } n > 0$$

$$L_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a J^a_0 J^a_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k+h^v)} \left|\phi_\lambda\right\rangle = h_\lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle$$

- Сингулярные векторы

$$\begin{aligned} J^a_n \left|v\right\rangle &= 0 \quad \text{при } n > 0 \\ J^+_0 \left|v\right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Coset-модели и калибровочная WZNW-модель

Добавим в действие калибровочные поля $A, \bar{A}$ со значениями в подалгебре $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$:

$$S(g, A) = S_{WZNW}(g) +$$
$$\frac{k}{4\pi} \int d^2 z \left(\mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{\partial} g) - \mathcal{K}(\bar{A}, (\partial g) g^{-1}) + \mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{A} g) - \mathcal{K}(A, \bar{A}) \right)$$

Теперь токи

$$J_{(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} = -k \partial g g^{-1} - k g A g^{-1}$$

Из тождеств Уорда получаем

$$\left\langle A^b(z) \phi_1 \dots \phi_N \right\rangle = \frac{2}{k + 2h^v_{\mathfrak{a}}} \sum_k \frac{\tilde{t}^b_k}{z - z_k} \langle \phi_1 \dots \phi_N \rangle$$

Алгебраическая структура связана с $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.
Генераторы алгебры Вирасоро – разности выражений Сугавары:

$$L_n = L^{\mathfrak{g}}_n - L^{\mathfrak{a}}_n$$

Примарные поля и сингулярные элементы

Для генераторов подалгебры $\hat{\mathfrak{a}}$:

$$\left[L_n, \tilde{J}^b_m\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{J}^b_m \left|v\right\rangle = 0 \Rightarrow \tilde{J}^b_m L_n \left|v\right\rangle = 0$$

Сингулярные векторы по отношению к $\hat{\mathfrak{a}}$ образуют модули алгебры Вирасоро в coset-моделях. Функции ветвления $b^{\mu}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\hat{\mathfrak{a}})\nu}(q)$ являются характерами модулей алгебры Вирасоро.

Примарные поля нумеруются парами весов $(\mu,\nu)\in\mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}}\oplus\mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$, такими, что $b^{\mu}_{\nu}(q)\neq 0$. Некоторые пары эквивалентны. Эквивалентность дается действием т.н. “простых токов” $(J,\tilde{J})$, таких, что $h_J - h_{\tilde{J}} = 0$.

Конформный вес примарного поля

$$L_0\left|\phi_{(\mu,\nu)}\right\rangle = \left(\frac{1}{2(k+h^v)}\sum_a J^a_0 J^a_0 - \frac{1}{2(k+h^v_{\mathfrak{a}})}\sum_b \tilde{J}^b_0\tilde{J}^b_0\right)\left|\phi_\lambda\right\rangle = \left(\frac{(\mu,\mu+2\rho)}{2(k+h^v)} - \frac{(\nu,\nu+2\rho_{\mathfrak{a}})}{2(k+h^v)}\right)\left|\phi_{(\mu,\nu)}\right\rangle \quad (5)$$

Формула Вейля-Каца для характеров и сингулярные элементы

Модуль Верма

$$M^{\mu}=U(\mathfrak{g})\bigotimes_{U(\mathfrak{b}_+)}D^{\mu}(\mathfrak{b}_+)\quad\text{где}\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-,\mathfrak{b}_+=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}$$

$D^{\mu}(\mathfrak{b}_+): D(E^{\alpha})=0,\ D(H)=\mu(H)\quad \forall\alpha>0.$

$$\mathrm{ch}M^{\mu}=\frac{e^{\mu}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}}=\frac{e^{\mu}}{\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w\rho-\rho}},\qquad \epsilon(w):=\det(w)$$

У M^{μ} есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль L^{μ} – *неприводимый модуль старшего веса*.

$$\mathrm{ch}L^{\mu}=\frac{\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w\rho-\rho}}=\sum_{w\in W}\epsilon(w)\,\mathrm{ch}M^{w(\mu+\rho)-\rho}(\text{БГГ})$$

Разложение сингулярного элемента

Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ – конечномерные или аффинные. Можно разложить $L^{\mu}_{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{a}$:

$$L^{\mu}_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\nu} b^{\mu}_{\nu} L^{\nu}_{\mathfrak{a}}$$

В терминах характеров

$$\pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{\omega(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}} \right) = \sum_{\nu \in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} \frac{\sum_{\omega \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(\omega) e^{\omega(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta^+_{\mathfrak{a}}} (1-e^{-\beta})^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}.$$

Хотим домножить на знаменатель и переписать как рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления.

Рассмотрим корни, ортогональные к $\Delta_{\mathfrak{a}}$.

Пусть $\Delta^+_{\mathfrak{b}} = \left\{ \alpha \in \Delta^+_{\mathfrak{g}} : \forall \beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}; \alpha \perp \beta \right\}$ – подмножество положительных корней $\mathfrak{g}$, ортогональных корневой системе $\mathfrak{a}$.

Обозначим $W_{\mathfrak{b}}$ подгруппу группы Вейля W, порожденную отражениями ω_{β}, соотв. корням $\beta \in \Delta^+_{\mathfrak{b}}$.

Подсистема $\Delta_{\mathfrak{b}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\perp} \subset \mathfrak{g}$.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – "ортогональная пара" подалгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ регулярная.
Подалгебра Картана раскладывается $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{h}_{\perp} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$.
Введем

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho.$$
$$\mathcal{D}_{\mathfrak{b}} := \rho_{\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{b}}\rho.$$

Лемма

Пусть $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$,
L^{μ} *– модуль старшего веса с сингулярным элементом* $\Psi^{(\mu)}$,
$R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ *– знаменатель Вейля для подалгебры* $\mathfrak{a}_{\perp}$. $U \sim W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$.
Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}_{\mathfrak{g}}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right)$ *можно разложить в сумму по* $u \in U$:

$$\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) = \sum_{u\in U} \epsilon(u) \dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}.$$

Рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)}\left(\sum_{u\in W/W_{\mathfrak{b}}} \epsilon(u)\,\dim\left(L_{\mathfrak{b}}^{\pi_{(\mathfrak{b})}[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_{\mathfrak{b}}}\right)\right.$$
$$\left.\delta_{\xi-\gamma_0,\pi_{(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{h}_{\perp})}[u(\mu+\rho)-\rho]+\mathcal{D}_{\mathfrak{b}}} + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}}} s(\gamma+\gamma_0)\,k_{\xi+\gamma}^{(\mu)}\right).$$

Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}}$ весов $\{\xi\}$, появляющихся в разложении

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_{\mathfrak{b}}^+}\left(1-e^{-\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)-\mathrm{mult}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha)} = -\sum_{\gamma\in P_{\hat{\mathfrak{a}}}} s(\gamma)e^{-\gamma}$$

Веса надо сдвинуть на γ_0 – минимальный вес в $\{\xi\}$ – и исключить нулевой элемент:

$$\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}} = \{\xi-\gamma_0\}\setminus\{0\}.$$

Простой пример: $A_1 \subset B_2$

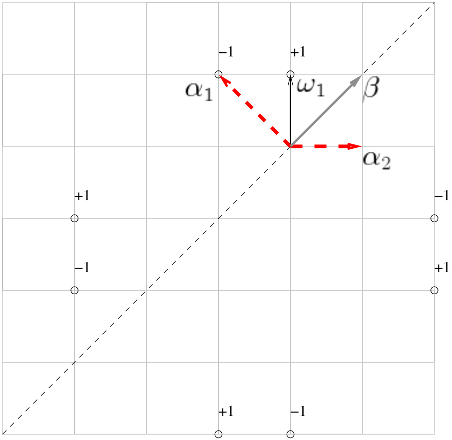


Рис.: Корни алгебр B_2, A_1 и Ψ^{ω_1}

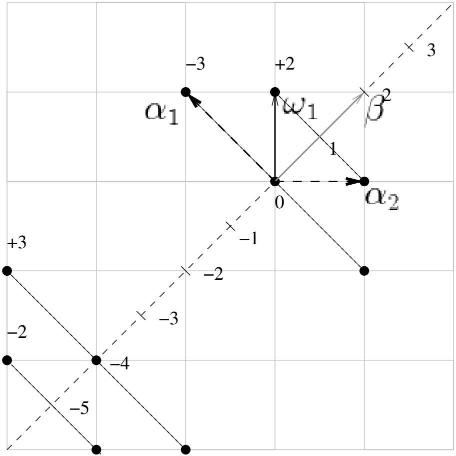


Рис.: Ортогональная подалгебра $\mathfrak{b}$ и размерности $\mathfrak{b}$-модулей

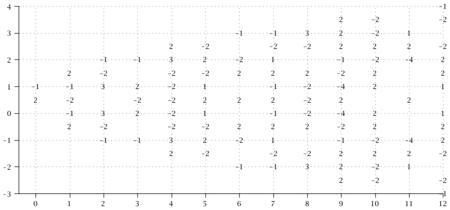


Рис.: $\Gamma_{\hat{A}_1 \subset \hat{B}_2}$

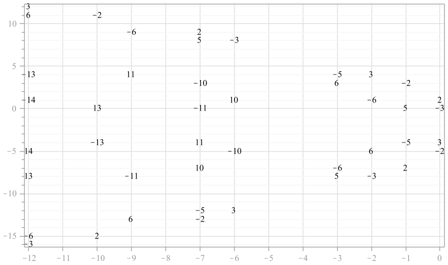
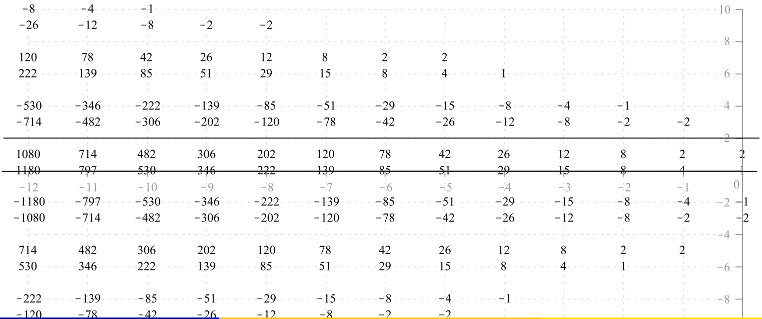


Рис.: $\pi_{\hat{A}_1}\left(\Psi^{\omega_1}_{\hat{B}_2}\right)$



Связь с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда

Рассмотрим ситуацию без проекции $(\mathrm{rank}\mathfrak{a} = \mathrm{rank}\mathfrak{g})$.

$$M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \quad \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ \sim \Delta_I^+, \text{ где } I \subset S$$

Введем $R_I := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{p}_I}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$. Тогда $\mathrm{ch} M_I^{\mu} = \frac{1}{R_I} \mathrm{ch} L_{\mathfrak{p}_I}^{\mu}$

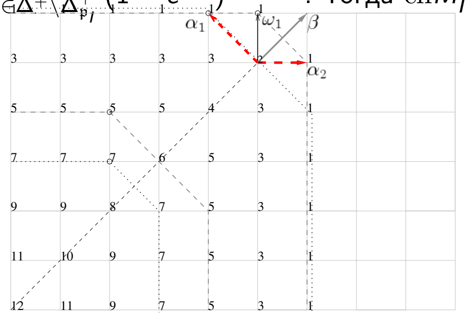


Рис.: Вложение $A_1 \oplus u(1) \subset B_2$ и обобщенные модули Верма. Пунктир – с положительным знаком $\epsilon(u)$, точки – с отрицательным.

Точная последовательность

$$0 \to M_r^I \xrightarrow{\delta_r} M_{r-1}^I \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M_0^I \xrightarrow{\varepsilon} L^\mu \to 0,$$

$$M_k^I = \bigoplus_{u \in U,\ \mathrm{length}(u)=k} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M_0^I = M_I^\mu$$

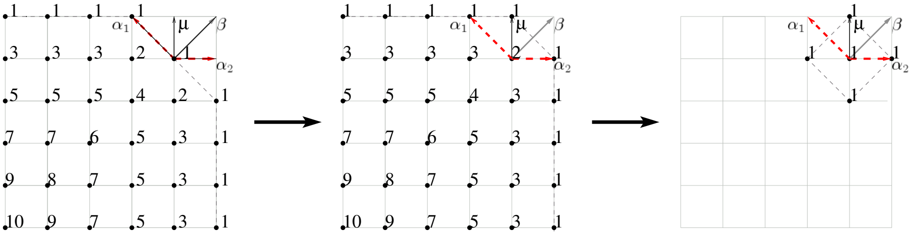


Рис.: Резольвента модуля L^{ω_1}. Центральная часть точной последовательности $0 \to Im(\delta_2) \to \left(e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(e)} \mathrm{ch} M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\omega_1]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} = M_I^{\omega_1}\right) \to L^{\omega_1} \to 0$. Здесь $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(e) = \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[\mu] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$.

Сплинты

Определение

ϕ – "вложение" $\Delta_0 \hookrightarrow \Delta$:
$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in P_0 : \gamma = \alpha + \beta$.

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для $\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}_\phi (\mathcal{E}_0)$ есть $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Определение

Корневая система Δ "расщепляется" на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ.

Пусть $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$. $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$.
$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} \left(1 - e^{-\beta}\right) = -\sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma}$
$\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = e^{-\rho} \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} w \circ \left(e^{\rho_{\mathfrak{a}}} \phi_2 \left(\Psi^{\widetilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}}\right)\right) \qquad \mu = \sum m_k \omega^k, \; \widetilde{\mu} = \sum m_k \omega_{\mathfrak{s}}^k$

Пример

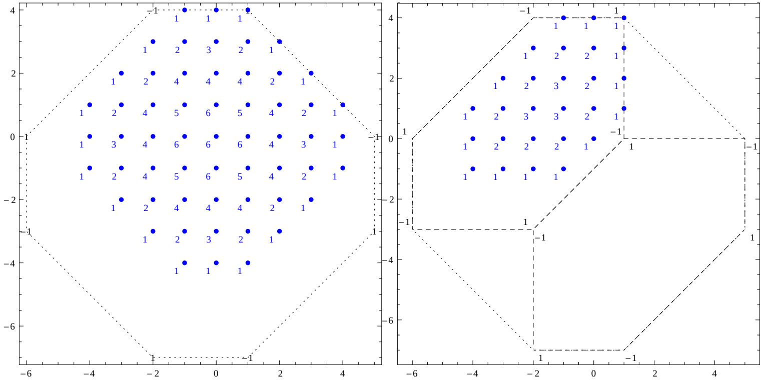


Рис.: Веса $L_{B_2}^{[3,2]}$ с кратностями показаны слева. Короткий пунктир – контур сингулярного элемента. Справа – разложение сингулярного элемента $\Psi_{B_2}(L_{B_2}^{[3,2]})$ в сумму образов сингулярных элементов $\Psi_{A_2}(L^{[3,2]})$ (длинный пунктир). Кратности $L_{A_2}^{[3,2]}$ = коэффициентам ветвления $L_{B_2 \downarrow A_1 \oplus u(1)}^{[3,2]}$.

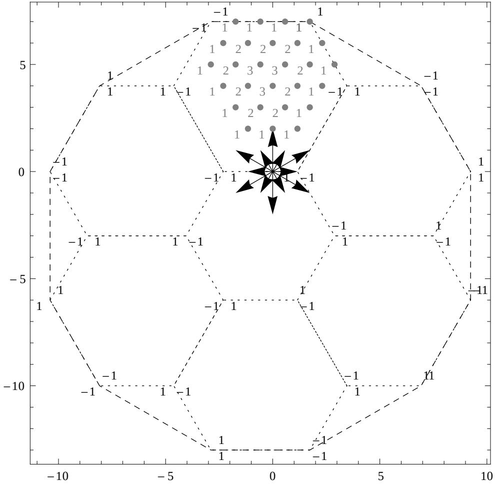


Рис.: Орбита группы Вейля (длинный пунктир) для $\Psi_{G_2}(L^{[3,2]})$ и его разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей A_2 (короткий). Кратности весов $L^{[3,2]}_{A_2}$ совпадают с коэффициентами ветвления $L^{[3,2]}_{G_2\downarrow A_2}$.

Аффинное расширение $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$. Так как $\mathrm{rank}\mathfrak{g} \leq \mathrm{rank}\mathfrak{a} + \mathrm{rank}\mathfrak{s}$, для знаменателей Вейля

$$\prod_{\alpha\in\hat{\Delta}_1^+} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)} \prod_{\beta\in\hat{\Delta}_2^+} (1-e^{\phi\circ\beta})^{\mathrm{mult}(\beta)} =$$

$$\prod_{\gamma\in\hat{\Delta}^+} (1-e^{-\gamma})^{\mathrm{mult}(\gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1-e^{-n\delta})^{\mathrm{rank}\mathfrak{a}+\mathrm{rank}\mathfrak{s}-\mathrm{rank}\mathfrak{g}}$$

$$\Theta^{(\hat{\mathfrak{g}})}_{\hat{\lambda}=(\lambda,k,0)}(\tau,z) = \sum_{\xi\in Q_{\mathfrak{g}}+\frac{\lambda}{k}} e^{2\pi i k\left(\frac{1}{2}(\xi,\xi)\tau+(\xi,z)\right)}$$

Соотношение, связывающее тета-функции алгебр $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{a}}$:

$$\left(\sum_{v\in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(v)\Theta^{(\hat{\mathfrak{a}})}_{v\rho_{\mathfrak{a}}}(\tau,z)\right) \cdot \left(\sum_{u\in W_{\mathfrak{s}}} \epsilon(u)\Theta^{(\hat{\mathfrak{s}})}_{\phi\circ(u\rho_{\mathfrak{s}})}(\tau,z)\right) =$$

$$\left(\sum_{w\in W} \epsilon(w)\Theta^{(\hat{\mathfrak{g}})}_{w\rho_{\mathfrak{g}}}(\tau,z)\right)$$

Ветвление на конечномерные подалгебры

Рассмотрим ветвление модуля $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{ch}L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu\in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n)\mathrm{ch}L_{\mathfrak{g}}^{\nu} \quad m_{\hat{\nu}=(\nu,k,n)}^{(\hat{\mu})} = \sum_{\xi\in P} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(n) m_{\nu}^{(\xi)}$$

Введем $b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n)q^n$, они связаны с q-размерностью $\mathrm{dim}_q L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{\nu\in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n)\mathrm{dim}L_{\mathfrak{g}}^{\nu} = \sum_{\nu\in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q)\mathrm{dim}L_{\mathfrak{g}}^{\nu}$.
$\sigma_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) = \sum_{\xi\in P} m_{\nu}^{(\xi)} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(q)$.
Введем порядок на множестве весов ξ следующим образом: припишем весу ξ значение (ρ,ξ) и упорядочим веса по этим значениям. Тогда

$$\sigma(q) = Mb(q) \quad b(q) = M^{-1}\sigma(q)$$

$\sigma(q)$ и $b(q)$ – бесконечные векторы струнных функций и функций ветвления. Матрица M содержит кратности весов в $\mathfrak{g}$-модулях. Обратная матрица M^{-1} содержит рекуррентные соотношения на кратности весов.

Матричные соотношения для сплинтов

Рассмотрим ветвление модулей $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{a}$ в предположении существовании сплинта $\Delta^{+}_{\mathfrak{g}} = \Delta^{+}_{\mathfrak{a}} \cup \phi(\Delta^{+}_{\mathfrak{s}})$. Разложим $\mathfrak{g}$-модули на $\mathfrak{a}$-модули используя свойство сплинта:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch} L^{\hat{\mu}}_{\hat{\mathfrak{g}}} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})\nu}(n) \mathrm{ch} L^{\nu}_{\mathfrak{a}} = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})\nu}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} b^{(\nu)}_{(\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a})\xi} \mathrm{ch} L^{\xi}_{\mathfrak{a}} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})\nu}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} M^{\widetilde{\nu}}_{\widetilde{\nu}-\phi^{-1}(\nu-\xi)} \mathrm{ch} L^{\xi}_{\mathfrak{a}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Матричное соотношение выполняется для функций ветвления $b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})}(q) = M_{\mathfrak{s}}\, b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})}(q)$ и мы можем написать $\sigma(q) = M_{\mathfrak{a}}\, b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})}(q)$. Зная коэффициенты ветвления для вложения $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ сразу получаем (градуированные) функции ветвления для вложения $\mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Заключение

- Сингулярные элементы модулей аффинных алгебр Ли появляются в coset-моделях CFT
- Структура модуля определяется сингулярным элементом
- Разложение сингулярного элемента позволяет вычислять функции ветвления
- Проясняется связь с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Особый тип разложения – сплинт. Он сильно упрощает вычисление коэффициентов ветвления.
- Из существования сплинта следуют соотношения на тета-функции и функции ветвления.

Спасибо за внимание!