Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Назаров Антон Андреевич

Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор, Ляховский Владимир Дмитриевич*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор, Кулиш Петр Петрович*
	кандидат физико-математических наук, ученое звание, Мудров Андрей Игоревич
Ведущая организация:	*Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «____» ____________ 2012 г. в ____ часов на заседании совета *Д 212.232.24* по защите докторских и кандидатских диссертаций при *Санкт-Петербургском государственном университете*, расположенном по адресу: *Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 305*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *Санкт-Петербургского государственного университета.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
ученая степень, ученое звание Подпись *фамилия и. о.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Последние тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает большое внимание исследователей [1]. Эта теория используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически. Помимо математической красоты теория обладает огромной практической ценностью – с ее использованием было получено большое количество результатов и численных предсказаний в изучении критического поведения в двумерных системах [2, 3]. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо [4, 5] и дробного квантового эффекта Холла [6].

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля [7] в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [8–10].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли является важным инструментом изучения моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой обязательно в двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [11, 12]. Первоначально интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей [13, 14]. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена [15], а затем и coset-модели [16], в которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль.

Моделям Весса-Зумино-Новикова-Виттена, coset-моделям и теории представлений аффинных алгебр Ли посвящены тысячи работ. Однако многие проблемы по-прежнему не имеют простых решений. Например, задача вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для различных физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. При этом, в отличие от проблемы вычисления кратностей весов, для вычисления коэффициентов ветвления не существовало особенно эффективных алгоритмов.

Научная новизна и практическая значимость

В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули не максимальных подалгебр. Алгоритм вычисления коэффициентов ветвления реализован в пакете **Affine.m** для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

- Установлена прямая связь инъективного сплинта и ветвлений. Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля иньективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.

- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Показано, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность.

- Построена модель обобщеннного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Отметим, что пакет **Affine.m** может быть использован для решения задач теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли, возникающих в различных областях физики, начиная от изучения атомных и молекулярных спектров и заканчивая конформной теорией поля и интегрируемыми системами.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Продемонстрировано, что сингулярные элементы определяет структуру модулей аффинных алгебр Ли
- Из разложения сингулярных элементов получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Выявлена связь расщепления корневой системы алгебры с разложением сингулярных элементов модулей алгебры в комбинацию сингулярных элементов модулей подалгебр

- Показано, что наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления

- Показано, что условие для мартингала, определяющее классификацию операторов изменения граничных условий в наблюдаемых стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, задает ограничения на структуру сингулярных элементов представлений аффинной алгебры Ли, порожденных граничными состояниями. Изучение структуры сингулярных элементов существенно упрощает поиск операторов смены граничных условий, так как отсекается большое количество лишних вариантов.

- Построена модель обобщеннного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля и показано, что такое обобщение совместно с coset-реализацией минимальных моделей.

- Разработан пакет программ **Affine.m**, реализующий различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых “Workshop on Advanced Computer Simulation Methods” 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: “Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)” 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), “Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011”, 18-23 июля 2011 (Дубна), “Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)”, 7-13 августа 2011 (Прага).

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], 5 статей в сборниках тезисов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 160 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 носит обзорный характер. В ней мы даем аксиоматическую формулировку конформной теории поля, описываем модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели. Затем мы демонстрируем роль аффинных алгебр в описании этих моделей и приводим основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Мы указываем на то, что основные свойства интегрируемых модулей старшего веса определяются структурой сингулярного элемента, что выражается в формуле Вейля-Каца для формальных характеров. Кроме того, мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

В главе 2 мы выводим основное рекуррунтное соотношение на коэффициенты ветвления. Пользуясь тем, что структура сингулярного элемента определяет свойства модуля алгебры Ли, мы формулируем и доказываем лемму о разложении сингулярного элемента. Такое разложение определяет правила ветвления и позволяет сформулировать рекуррентную процедуру редукции. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

Формула Вейля-Каца для формальных характеров интегрируемых модулей старшего веса конечномерных и аффинных алгебр Ли имеет вид

$$\mathrm{ch} V^{(\mu)} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}, \tag{1}$$

где $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент модуля, а $R = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ – знаменатель Вейля. Сингулярный элемент определяется набором сингулярных весов модуля и имеет разный вид для разных типов модулей старшего веса. Например, $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\mu+\rho)-\rho}$ для неприводимых модулей. Про этом знаменатель Вейля является универсальным объектом, характеризующим корневую систему алгебры Ли, а свойства модуля определяются сингулярным элементом.

Процедура редукции состоит в разложении модуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в сумму модулей некоторой подалгебры $\mathfrak{a}$

$$L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a}} = \bigoplus_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} L^{\nu}_{\mathfrak{a}}. \tag{2}$$

Используя оператор проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{a}}$), перепишем это разложение для формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}}\circ ch\left(L^{\mu}\right) = \sum_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} ch\left(L^{\nu}_{\mathfrak{a}}\right). \tag{3}$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления $b^{(\mu)}_{\nu}$.

Для любой алгебры $\mathfrak{g}$ и подалгебры $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ можно построить подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ такую, что $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \{\beta\in\Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta\left(h\right)=0\}$.

Обозначим через $W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ подгруппу группы Вейля W, порожденную отражениями w_{β}, соответствующими корням $\beta\in\Delta^+_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Пусть $\mathfrak{h}_{\perp}^{*} := \{\eta \in \mathfrak{h}_{\perp\mathfrak{a}}^{*} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_{\perp}}; \eta(h) = 0\}$, тогда имеет место разложение подалгебры Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$.

Для подалгебр из ортогональной пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ рассмотрим соответствующие векторы Вейля $\rho_{\mathfrak{a}}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}$, и образуем так называемые "дефекты" вложения $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} := \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho$.

Рассмотрим сингулярные веса $\{(w(\mu+\rho)-\rho)\,|w \in W\}$ модуля старшего веса $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ и их проекции на $h_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{*}$ (дополнительно сдвинутые на дефект $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$):

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(w) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}} \circ [w(\mu+\rho)-\rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\left\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(w)\,|w \in W\right\}$ выберем находящиеся в главной камере Вейля $\overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}}$. Множество $U := \left\{u \in W| \quad \mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u) \in \overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}}\right\}$ состоит из элементов группы Вейля, переводящих старший вес в главную камеру Вейля подалгебры $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}$ (с учетом сдвига на ρ и на дефект). Элементы U являются представителями классов смежности $W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Каждому элементу U поставим в соответствие вес $\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}} \circ [u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Аналогичным образом определим $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ и $\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$

Мы доказываем следующую лемму о разложении сингулярного элемента:

Лемма 1. *Пусть* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ *– ортогональная пара редуктивных подалгебр* $\mathfrak{g}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$,

L^{μ} *– модуль старшего веса с сингулярным элементом* $\Psi^{(\mu)}$,

$R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ *– знаменатель Вейля для подалгебры* $\mathfrak{a}_{\perp}$.

Тогда элемент $\Psi_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right)$ *можно разложить в сумму по* $u \in U$ *сингулярных весов* $e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}$ *с коэффициентами* $\epsilon(u)\mathrm{dim}\left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}\right)$*:*

$$\Psi_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \quad \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u)\mathrm{dim}\left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}\right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}. \tag{4}$$

Теперь мы можем ввести "веер вложения", который необходим для формулировки рекуррентных соотношений:

Определение 1. Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp}} \left(1-e^{-\pi_{\mathfrak{a}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)-\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}\alpha)} = -\sum_{\gamma\in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma)e^{-\gamma} \tag{5}$$

и носитель $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}\subset P_{\mathfrak{a}}$ функции $s(\gamma)=\det(\gamma)$:

$$\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}} = \{\gamma\in P_{\mathfrak{a}}|s(\gamma)\neq 0\} \tag{6}$$

Упорядочение корней в $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathfrak{a}}$ индуцирует естественное упорядочение весов в $P_{\mathfrak{a}}$. Обозначим через γ_0 наименьший вектор $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$. Множество

$$\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}} = \{\xi-\gamma_0|\xi\in\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}\}\setminus\{0\} \tag{7}$$

называется *веером вложения.*

Веер вложения универсален и зависит только от вложения $\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}$ и не зависит от модуля $L^{(\mu)}$.

Введем сингулярные коэффициенты ветвления следующим образом:

$$\begin{array}{ll} k_\xi^{(\mu)} = b_\xi^{(\mu)} & \text{если} \quad \xi\in\bar{C}_{\mathfrak{a}} \\ k_\xi^{(\mu)} = \epsilon(w) b^{(\mu)}_{w(\xi+\rho_{af})-\rho_{\mathfrak{a}}} & \text{где } w\in W_{\mathfrak{a}} : w(\xi+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}\in\bar{C}_{\mathfrak{a}}. \end{array} \tag{8}$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему, которая позволит нам рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

Теорема 1. *Для сингулярных коэффициентов ветвления $k_\nu^{(\mu)}$ выполняется соотношение*

$$\begin{array}{c} k_\xi^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)}\left(\sum_{u\in U}\epsilon(u)\ \dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}\right)\delta_{\xi-\gamma_0,\pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu+\rho)-\rho)}+\right. \\ \left.+\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}} s\left(\gamma+\gamma_0\right)k^{(\mu)}_{\xi+\gamma}\right). \end{array} \tag{9}$$

Далее мы анализируем пары $(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_\perp)$ для простых алгебр Ли. Оказывается, что для "ортогональной пары" $(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_\perp)$, вообще говоря, $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_\perp\not\subset\mathfrak{g}$. В частности, для серии простых конечномерных алгебр B_n существуют "ортогональные пары" подалгебр (B_k,B_{n-k}).

На основании рекуррентного соотношения (9) сформулирован алгоритм вычисления коэффициентов ветвления. Остальные разделы главы 2 содержат примеры вычислений с использованием предложенного алгоритма, а также описание роли функций ветвления в формулировке конформной теории поля на торе и в coset-моделях конформной теории поля.

В главе 3 мы используем разложение сингулярного элемента, чтобы показать связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Результаты третьей главы опубликованы в работах [A2, A7].

Оказывается, что для полупростой конечномерной алгебры $\mathfrak{g}$ и полупростой конечномерной подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебра $\mathfrak{a}_{\perp}$, определенная в формуле (3), является регулярной. Отношение знаменателей Вейля порождает параболические модули Верма. Сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}. \tag{10}$$

Мы доказываем следующее утверждение, демонстрирующее, что разложение сингулярного элемента связано с разложением характера неприводимого модуля в комбинацию характеров обобщенных модулей Верма

Утверждение 1. *Для ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_{\perp}$ в $\mathfrak{g}$ (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$) характер интегрируемого модуля старшего веса L^{μ} может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)$:*

$$\mathrm{ch}\left(L^{\mu}\right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}, \tag{11}$$

где $U := \left\{ u \in W \middle| \quad \mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right\}$ и I – такое подмножество в S, что Δ_I^+ эквивалентно $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$.

Связь редукции и (обобщенной) резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда дается следующим утверждением:

Утверждение 2. *Пусть L^μ – $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, и пусть регулярная подалгебра $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ является ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (10) определяет как обобщенную резольвенту L^μ по отношению к $\mathfrak{a}_\perp$, так и правила ветвления L^μ по отношению к $\mathfrak{a}_\perp$, так и правила ветвления L^μ по отношению к $\mathfrak{a}$.*

Глава 4 посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплинт приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплинт корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [А3, А10].

Определение 2. Пусть Δ_0 и Δ – корневые системы с соответствующими весовыми решетками P_0 и P. Рассмотрим отображение

$$\phi : \begin{cases} \Delta_0 \hookrightarrow \Delta, \\ P_0 \hookrightarrow P. \end{cases} \tag{12}$$

Оно называется “вложением”, если

(a) оно вкладывает Δ_0 в Δ, и

(b) ϕ действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в P_0 и P:

$$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

для любой тройки $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$, такой, что $\gamma = \alpha + \beta$.

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для образа $\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}_\phi (\mathcal{E}_0)$ можно рассмотреть обратное отображение $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Заметим, что нужно различать два класса вложений: когда скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве P_0 инвариантно по отношению к ϕ и когда оно не ϕ-инвариантно. Вложения первого класса называются “метрическими”, второго – “неметрическими”.

Определение 3. Корневая система Δ “расщепляется” на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ.

Эквивалентно, можно сказать, что (Δ_1, Δ_2) – “сплинт” (расщепление) Δ и мы можем обозначить его через $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$. Каждая из компонент Δ_1 и Δ_2 называется “стеблем” сплинта (Δ_1, Δ_2).

Чтобы показать связь веера вложения со сплинтом рассмотрим случай, когда один из стеблей $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$ является подсистемой корневой системы.

Сплинт $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$ называется “инъективным”, если $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$, – подсистема корневой системы Δ, соответствующая регулярной редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

В случае инъективного сплинта второй стебель $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ может быть переписан как произведение (аналогично формуле (5)) и определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{s}0}$ кообраз второго вложения $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \to \Delta_{\mathfrak{g}}$. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Каждый инъективный сплинт $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$ определяет веер вложения с носителем $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}}$, задающимся произведением*

$$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} \left(1 - e^{-\beta}\right) = -\sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma} \tag{13}$$

В случае инъективного сплинта мы можем сказать, что подалгебра $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ расщепляется Δ (и назовем $\mathfrak{a}$ “расщепляющей подалгеброй” алгебры $\mathfrak{g}$). Сплинты были классифицированы в работе [17] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплинтов в этой классификации инъективны.

Если выполнено техническое требование на структуру сингулярного элемента, то верно следующее свойство:

Свойство 1.

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{s}}^{+}}(1-e^{-\beta})}\left(\Psi^{\widetilde{\mu}+\rho_{\mathfrak{s}}}\right)=\sum_{\widetilde{\nu}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}}M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}e^{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))}=\sum_{\nu\in P_{\mathfrak{a}}^{++}}b_{\nu}^{(\mu)}e^{\nu}. \qquad (14)$$

Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства, равен одному из старших весов в разложении. Кратность $M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}$ *веса* $\widetilde{\nu}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}$ *определяет коэффициент ветвления* $b_{\nu}^{(\mu)}$ *для старшего веса* $\nu=(\mu-\phi\left(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}\right))$*:*

$$b_{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))}^{(\mu)}=M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}.$$

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации.

В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы нами в работах [A4, A6].

Стохастический процесс, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t}=\frac{2}{g_t(z)-\sqrt{\kappa}\xi_t}, \qquad (15)$$

называется *эволюцией Шрамма-Левнера* на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Здесь ξ_t – Броуновское движение. Динамика конца z_t критической кривой γ_t (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением $z_t=g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$. Нам удобнее использовать отображение $w_t(z)=g_t(z)-\sqrt{\kappa}\xi_t$.

Мы обобщаем анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей [16]. Такие модели задаются алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгеброй $\mathfrak{a}$. G/A-coset модель конформной теории поля может быть реализована как ВЗНВ-модель (с калибровочной группой G), взаимодействующая с чисто калибровочными полями, с калибровочной группой $A \subset G$ [18, 19]. Действие записывается через поля $\gamma : \mathbb{C} \to G$ и $\alpha, \bar{\alpha} : \mathbb{C} \to A$:

$$
\begin{aligned}
&S_{G/A}(\gamma, \alpha) = \\
&-\frac{k}{8\pi}\int\limits_{S^2} d^2x\, \mathcal{K}(\gamma^{-1}\partial^{\mu}\gamma, \gamma^{-1}\partial_{\mu}\gamma) - \frac{k}{24\pi}\int\limits_{B} \epsilon_{ijk}\mathcal{K}\left(\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^i}, \left[\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^j}\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^k}\right]\right) d^3y + \\
&\quad + \frac{k}{4\pi}\int\limits_{S^2} d^2z \left(\mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\partial}\gamma) - \mathcal{K}(\bar{\alpha}, (\partial\gamma)\gamma^{-1}) + \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\alpha}\gamma) - \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha})\right). \quad (16)
\end{aligned}
$$

Здесь через $\mathcal{K}$ обозначена форма Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе Ли G.

Если мы фиксируем A-калибровку, у нас останется G/A калибровочная инвариантность. Значит мы должны добавить случайные калибровочные преобразования к эволюции Шрамма-Левнера, аналогично случаю ВЗНВ-моделей (См. [20]). Обозначим через t_i^a ($\tilde{t}_i^b$) генераторы представления алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно, представления $\mathfrak{a}$), соответствующего примарному полю φ_i.

Теперь рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой $\mathcal{O}$ на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера γ_t вплоть до некоторого времени t, умноженных на вероятность этой траектории:

$$
\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}\right] = \sum_{\gamma_t} P\left[C_{\gamma_t}\right] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}
$$

Решеточная наблюдаемая $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t, следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$

– мартингал. Это должно выполняться и для ее непрерывного предела, дающегося комбинацией корреляционных функций в конформной теории поля [21]:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \to \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\left\langle \mathcal{O}(\{z_i\})\phi(z_t)\phi^{\dagger}(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}_t}}{\left\langle \phi(z_t)\phi^{\dagger}(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}_t}} \tag{17}$$

Мы рассматриваем теорию с границей, так что мы должны использовать модели граничной конформной теории поля и накладывать соответствующие граничные условия. В случае верхней полуплоскости корреляционные функции в граничной конформной теории поля могут быть переписаны как корреляционные функции для теории на всей плоскости, но с удвоенным числом полей.

Мы предполагаем, что $\mathcal{F}$ содержит некоторый набор примарных полей φ_i с конформными весами h_i. Так как мы рассматриваем граничную конформную теорию поля, мы должны добавить объемные поля в сопряженных точках $\bar{z}_i$. Кроме того, у нас есть операторы смены граничного условия ϕ на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности.

Рассмотрим, что происходит с наблюдаемыми при эволюции следа SLE γ_t с момента t до $t + dt$.

Через $\mathcal{G}_i$ мы обозначили генераторы инфинитезимальных преобразований примарных φ_i:$d\varphi_i(w_i) = \mathcal{G}_i\varphi_i(w_i)$. Нормируем дополнительное $(\dim \mathfrak{g})$-мерное Броуновское движение следующим образом: $\mathbb{E}\left[d\theta^a \, d\theta^b\right] = \mathcal{K}(t^a, t^b)dt$. Тогда генератор преобразования поля равен

$$\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a:\mathcal{K}(t^a,\tilde{t}^b)=0} (d\theta^a t_i^a)\right). \tag{18}$$

То есть мы фиксировали A-калибровку, разрешив случайное блуждание только в направлении, ортогональном подалгебре $\mathfrak{a}$.

Формула Ито, дает выражение для дифференциала $\mathcal{F}$, который равняется нулю в силу условия мартингала. Это равенство можно переписать в виде следующего алгебраического условия на граничное состояние $\phi(0)\,|0\rangle$:

$$\langle 0\,|\phi(\infty)\varphi_1(w_1)\dots\varphi_{2N}(w_{2N}) \left(-2L_{-2}+\frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2+\frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a-\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right) \phi(0)|0\rangle=0. \quad (19)$$

Так как набор $\{\phi_i\}$ состоит из произвольных примарных полей, мы заключаем, что

$$|\psi>=\left(-2L_{-2}+\frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2+\frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a-\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right)\cdot\phi(0)|0> \quad (20)$$

является нулевым состоянием, то есть соответствуют сингулярному весу в представлении алгебры Вирасоро. Действуя повышающими операторами мы получаем соотношения, связывающие параметры стохастического процесса и coset-модели конформной теории поля:

$$(3\kappa-8)h_{(\mu,\nu)}-c+\tau(k\dim\mathfrak{g}-x_e k\dim\mathfrak{a})=0. \quad (21)$$

$$-12h_{(\mu,\nu)}+2\kappa h_{(\mu,\nu)}(2h_{(\mu,\nu)}+1)+\tau(C_\mu-\tilde{C}_\nu)=0, \quad (22)$$

здесь $C_\mu=(\mu,\mu+2\rho)$ и $\tilde{C}_\nu=(\nu,\nu+2\rho_{\mathfrak{a}})$ – это собственные значения квадратичных операторов Казимира $\sum_a t^a t^a$ и $\sum_b \tilde{t}^b\tilde{t}^b$ алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Из уравнения (21),(22) мы сразу получаем значения κ,τ для каждой пары весов (μ,ν) алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Для coset-реализаций минимальных и парафермионных моделей эти результаты совпадают с тем, что было ранее получено путем введения стохастического процесса с дополнительным дискретным случайным блужданием [22].

Остальная часть главы представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализованного с использованием методов диссертации. Вычислительным методам посвящены наши работы [A5, A9, A8].

Список публикаций

[A1] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov.* Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205.

[A2] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov.* Recursive properties of branching and BGG resolution // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2011. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 1551–1560.

[A3] *V. Laykhovsky, A. Nazarov.* Fan, splint and branching rules // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI.* — 2012. — Vol. 398. — Pp. 162–179.

[A4] *A. Nazarov.* SLE martingales in coset conformal field theory // *JETP lett.* — 2012. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 93–96.

[A5] *A. Nazarov.* Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *Computer Physics Communications.* — 2012. `http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.06.014`.

[A6] *A. Nazarov.* Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085. `http://stacks.iop.org/1742-6596/343/i=1/a=012085`.

[A7] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov.* Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // Models in Quantum Field Theory. — 2010. `http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/`.

[A8] *A. Nazarov.* Comparison of algorithms for construction of representations of

Lie algebras // Physics and Progress / SPbSU. — Physics and Progress. — 2008.

[A9] *A. Nazarov.* Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI. — ACSM. — 2009.

[A10] *V. Laykhovsky, A. Nazarov.* On affine extension of splint root systems // Supersymmetries & Quantum Symmetries / JINR. — SQS'2011.

Цитированная литература

[1] *AA Belavin, AM Polyakov, AB Zamolodchikov.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // *Nuclear Physics.* — 1984. — Vol. 241. — Pp. 333–380.

[2] *P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal.* Conformal field theory. — Springer, 1997.

[3] *M. Henkel.* Conformal invariance and critical phenomena. — Springer Verlag, 1999.

[4] *DL Cox, A. Zawadowski.* Exotic Kondo effects in metals: magnetic ions in a crystalline electric field and tunnelling centres // *Advances in Physics.* — 1998. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 599–942.

[5] *I. Affleck, A.W.W. Ludwig.* Exact conformal-field-theory results on the multichannel kondo effect: Single-fermion green's function, self-energy, and resistivity // *Physical Review B.* — 1993. — Vol. 48, no. 10. — P. 7297.

[6] *G. Moore, N. Read.* Nonabelions in the fractional quantum Hall effect // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Vol. 360, no. 2. — Pp. 362–396.

[7] *J.L. Cardy*. Critical percolation in finite geometries // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1992. — Vol. 25. — P. L201.

[8] *S. Smirnov*. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics.* — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.

[9] *H. Duminil-Copin, S. Smirnov*. Conformal invariance of lattice models // *Arxiv preprint arXiv:1109.1549.* — 2011.

[10] *S. Smirnov*. Discrete complex analysis and probability // *Arxiv preprint arXiv:1009.6077.* — 2010.

[11] *V.G. Kac*. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya.* — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.

[12] *R.V. Moody*. A new class of Lie algebras // *Journal of algebra.* — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.

[13] *V.G. Kac, D.H. Peterson*. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // *Adv. in Math.* — 1984. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 125–264.

[14] *I.G. Macdonald*. Affine root systems and Dedekind'sη-function // *Inventiones Mathematicae.* — 1971. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 91–143.

[15] *E. Witten*. Non-abelian bosonization in two dimensions // *Communications in Mathematical Physics.* — 1984. — Vol. 92, no. 4. — Pp. 455–472.

[16] *P. Goddard, A. Kent, D. Olive*. Virasoro algebras and coset space models // *Physics Letters B.* — 1985. — Vol. 152, no. 1-2. — Pp. 88 – 92.

[17] *David Richter*. Splints of classical root systems // *Journal of Geometry.* — 2012. — Vol. 103. — Pp. 103–117. — 10.1007/s00022-012-0109-3. `http://dx.doi.org/10.1007/s00022-012-0109-3`.

[18] *A. Gawdzki et al.* G/H conformal field theory from gauged WZW model // *Physics Letters B.* — 1988. — Vol. 215, no. 1. — Pp. 119–123.

[19] *J.M. Figueroa-O'Farrill.* The equivalence between the gauged WZNW and GKO conformal field theories // *ITP Stony Brook preprint ITP-SB-89-41.* — 1989.

[20] *E. Bettelheim, IA Gruzberg, AWW Ludwig, P. Wiegmann.* Stochastic Loewner evolution for conformal field theories with Lie group symmetries // *Physical review letters.* — 2005. — Vol. 95, no. 25. — P. 251601.

[21] *M. Bauer, D. Bernard.* SLE martingales and the Virasoro algebra // *Physics Letters B.* — 2003. — Vol. 557, no. 3-4. — Pp. 309–316.

[22] *R. Santachiara.* SLE in self-dual critical Z (N) spin systems: CFT predictions // *Nuclear Physics B.* — 2008. — Vol. 793, no. 3. — Pp. 396–424.