

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

*Подпись*

Назаров Антон Андреевич

**Правила ветвления аффинных алгебр Ли и  
приложения в моделях конформной теории  
поля**

01.04.02 – Теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Ляховский Владимир Дмитриевич

Санкт-Петербург – 2012

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Конформная теория поля</b> . . . . .	7
1.1. Аксиоматическая формулировка конформной теории поля . . .	10
1.2. Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и алгебры Ли . . . . .	16
1.3. Coset-модели конформной теории поля . . . . .	27
1.4. Конформная теория поля на области с границей . . . . .	30
<b>Глава 2. Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления представлений аффинных алгебр Ли</b> . . . . .	31
2.1. Простые алгебры Ли, алгебра петель, центральные расширения и аффинные алгебры Ли . . . . .	33
2.2. Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления . .	43
2.3. Примеры . . . . .	53
2.4. Заключение . . . . .	69
<b>Глава 3. Коэффициенты ветвления и обобщенная резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда</b> . . . . .	71
3.1. Ортогональная подалгебра и сингулярные элементы . . . . .	72
3.2. БГГ резольвента и ветвление . . . . .	81
3.3. Заключение . . . . .	84
<b>Глава 4. Сплиты корневых систем и функции ветвления</b> . .	86
4.1. Вложения и сплиты . . . . .	87
4.2. Как стебли определяют функции кратности . . . . .	91
4.3. Примеры . . . . .	96
4.4. Сплиты и соотношения для аффинных алгебр Ли . . . . .	98

4.5. Заключение . . . . .	102
4.A. Приложение . . . . .	103
<b>Глава 5. Практические приложения . . . . .</b>	<b>108</b>
5.1. Роль сингулярных элементов coset-моделей в установлении со- ответствия между конформной теорией поля и критическим по- ведением в решеточных моделях . . . . .	108
5.2. Вычислительные методы для теории представлений аффинных алгебр Ли . . . . .	125
5.3. Примеры вычислений . . . . .	135
5.4. Заключение . . . . .	140
<b>Литература . . . . .</b>	<b>141</b>

# Введение

Аффинные алгебры Ли были открыты Виктором Кацем [1] и Робертом Муди [2] в 1967 году в результате отказа от требования положительной определенности матрицы Картана. Это требование определяет полупростые конечномерные алгебры Ли. Аффинные алгебры Ли отличаются тем, что матрица Картана, задающая коммутационные соотношения, лишь положительно полуопределена. Оказывается такие алгебры могут быть реализованы как центральные расширения алгебр петель, связанных с полупростыми алгебрами Ли. Эта особенность структуры аффинных алгебр Ли привела к тому, что они приобрели особое значение в физике после появления в 1984 году конформной теории поля [3]. Ведь квантование теорий поля естественным образом приводит к центральным расширениям алгебр симметрии. Теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль при изучении важных классов моделей конформной теории поля – моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-моделей.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- Получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Показана связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Показано, что наличие сплинта приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления

- Продемонстрирована роль алгебраических методов теории представлений аффинных алгебр Ли в изучении критического поведения в двумерных решеточных моделях
- Реализованы различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

**Апробация работы** Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых “Workshop on Advanced Computer Simulation Methods” 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: “Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)” 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), “Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011”, 18-23 июля 2011 (Дубна), “Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)”, 7-13 августа 2011 (Прага).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [4–6], 4 статьи в сборниках тезисов и трудов конференций [7–10], и в препринте [11].

**Структура и объем диссертации** Диссертация состоит из шести глав.

Глава 1 является вводной. В ней мы даем обзор конформной теории поля, моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-моделей. Мы приводим аксиоматическую формулировку конформной теории поля, а также обсуждаем БРСТ-подход к описанию калибровочных моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена, приводящий к реализации coset-конструкции.

Основной проблемой данной диссертации является изучение редукции модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули подалгебр, вычисление коэффициентов ветвления. В главе 2 мы вводим основные понятия теории представлений аффинных алгебр Ли и выводим основное рекуррент-

ное соотношение на коэффициенты ветвления.

В следующей главе 3 мы проясняем связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.

Глава 4 посвящена сплнтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплнт приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплнт корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе

В главе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения.

Заключительная глава 5.2 представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли.

## Глава 1

# Конформная теория поля

Двумерная конформная теория поля возникла в результате обобщения гипотезы конформной инвариантности критического поведения в двумерных системах [12]. Если использовать для описания критического поведения теорию поля, то такая теория должна обладать конформной инвариантностью.

Глобальная конформная инвариантность в произвольном числе измерений ведет к важным физическим следствиям. Например, особый интерес в последнее время привлекла  $N = 4$  суперсимметричная модель Янга-Миллса.

Однако в случае двумерной теории важнейшую роль играет локальная конформная инвариантность. Такая теория обладает богатой симметрией, так что ее даже иногда называют точно решаемой [3].

Конформное преобразование — это преобразование, меняющее только масштаб у метрического тензора:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (1.1)$$

На двумерной мировой поверхности удобно ввести комплексные координаты  $z, \bar{z}$ . В двумерном случае существует бесконечное число локально-конформных преобразований  $z \rightarrow w(z)$ . Это легко видеть из условия конформности преобразований, так как в двумерном случае такое условие эквивалентно уравнению Коши-Римана для голоморфных функций ( $\partial_{\bar{z}}w(z, \bar{z}) = 0$ ).

Таким образом, локально-конформные преобразования находятся в однозначном соответствии с множеством всех аналитических функций  $w(z)$  на плоскости.

Глобальные конформные преобразования имеют вид  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$ .

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования  $w(z) = z + \epsilon(z)$ ,  $\epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}$ . Тогда для бесспинового поля  $\phi(z, \bar{z})$  верно следующее:  $\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z})$ ,  $\delta\phi = -\epsilon(z)\partial\phi - \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi = \sum_n (c_n L_n \phi + \bar{c}_n \bar{L}_n \phi)$ , где  $L_n = -z^{n+1}\partial_z$ ,  $\bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}$

Мы видим, что в классической теории алгебра конформных преобразований — это алгебра Витта, которая порождается генераторами  $\{L_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — модами разложения оператора энергии-импульса  $T$ , с коммутационными соотношениями

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad (1.2)$$

При квантовании возникает конформная аномалия, что соответствует центральному расширению (2.5) алгебры (то есть появлению центрального заряда  $c$ ). В коммутационные соотношения надо добавить член  $\frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$ . В результате получаем алгебру Вирасоро.

Поля теории  $\phi(z, \bar{z})$  должны преобразовываться определенным образом при конформных преобразованиях. Оказывается, что все поля группируются в конформные семейства, в которых есть одно примарное поле

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &\xrightarrow[\substack{z \rightarrow w(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})}]{\left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}}} \phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(w(z), \bar{w}(\bar{z})) \\ L_n \phi &= 0, \quad n > 0 \\ L_0 \phi &= \Delta \phi \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\Delta, \bar{\Delta}$  называются конформными размерностями поля. Все остальные поля называются вторичными и получаются из примарного действием операторов  $L_{-n}$ :

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots \phi_{\Delta} \quad (1.4)$$

Все поля в теории оказываются суммами произведений элементов мультиплетов алгебры Вирасоро.



Алгебраические методы позволяют получать огромное количество точных результатов в двумерных конформных теориях поля. Существуют разнообразные классы моделей двумерной конформной теории поля и даже задача классификации всех таких моделей до конца не решена, несмотря на первоначальный оптимизм [13]. Конформная теория поля привлекла большое внимание также благодаря своей связи с теорией струн.

Двумерная конформная теория поля выделяется как модель квантовой теории поля из-за того, что она может быть сформулирована аксиоматически. В данной главе мы приводим такую аксиоматическую формулировку в разделе 1.1, а затем рассматриваем важнейшие классы моделей конформной теории – модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена 1.2 и coset-модели 1.3. Эти модели обладают дополнительными симметриями, выражающимися на языке теории представлений аффинных алгебр Ли и являются естественным приложением математических результатов данной диссертации.

В том случае, если в теории конечное число примарных полей, такая теория называется минимальной. Обычно соответствие между критическим поведением решеточных моделей и конформной теорией поля устанавливается именно для минимальных моделей [14–16]. Вместе с тем доказательство соответствия между критическим поведением решеточных моделей и конформной теории поля остается серьезной проблемой. Здесь в последнее время получены новые результаты, связанные с использованием эволюции Шрамма-Левнера. Некоторые вопросы такого соответствия мы обсуждаем в главе 5.1. В ней мы обсуждаем соответствие между решеточными моделями и coset-моделями конформной теории поля.

Кроме того, конформные теории классифицируются по значениям центрального заряда  $c$ . Теории с рациональным центральным зарядом называются рациональными. Считается, что все такие теории могут быть получены факторизацией моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена [13].

## 1.1. Аксиоматическая формулировка конформной теории поля

Существуют различные подходы к аксиоматизации двумерной конформной теории поля. В общем случае нам не нужно знать действие, если мы полный знаем набор примарных полей и операторные разложения их произведений.

В данном разделе мы приводим одну из возможных аксиоматических формулировок конформной теории поля, предложенную в работе [17] и изложенную в книге [18]. Другие популярные подходы восходят к работам Сегала [19] или используют вертексные алгебры [20].

Введем пространство  $S(\mathbb{R}^n)$  тест-функций  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Распределения или обобщенные функции – это линейные функционалы на нем  $T : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  со свойством непрерывности. Каждой функции  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  можно поставить в соответствие некоторое распределение  $T_g$  по правилу

$$T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx \quad (1.5)$$

На пространстве обобщенных функций можно ввести операторы дифференцирования с мультииндексами  $\alpha$ :

$$\partial^\alpha := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha f) \quad (1.6)$$

При этом

$$\partial^\alpha T_g = T_{\partial^\alpha g} \quad (1.7)$$

и для любой обобщенной функции  $T$  есть  $n \in \mathbb{N}$ , такое что

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} \partial^\alpha T_{g_\alpha}. \quad (1.8)$$

В квантовой теории поля должны быть поля и состояния. Состояния определяются как элементы некоторого гильбертова пространства  $\mathbb{H}$ . Пространство

операторов на  $\mathbb{H}$  мы обозначим через  $\mathcal{O}$ . Тогда поля – это операторно-значные распределения  $\varphi : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{O}$ , такие, что существует плотное подпространство  $D \subset \mathbb{H}$  и

1. Для любой тест-функции  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  подпространство  $D \subset D_{\varphi(f)}$ , где  $D_{\varphi(f)}$  – область определения оператора  $\varphi(f)$ .
2. Индуцированное отображение  $f \rightarrow \varphi(f)|_D$  из  $S(\mathbb{R}^n)$  в  $\text{End}(D)$  линейно.
3. Для любых  $\nu \in D$  и  $\omega \in \mathbb{H}$  отображение  $f \rightarrow \langle \omega, \varphi(f)(\nu) \rangle$  является распределением.

Можно определять конформную теорию поля путем задания всех полей, как делается в подходе, предложенном в работе [21]. Мы воспользуемся определением из работы [17], подробно изложенном в книге [18]. Чтобы определить конформную теорию поля оказывается достаточно задать все корреляционные функции. Обычно их понимают следующим образом. Пусть  $\Omega \in \mathbb{H}$  – вакуум, тогда  $n$ -точечные корреляционные функции в квантовой теории поля даются выражением

$$G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) := \langle \Omega | \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n) | \Omega \rangle, \quad |z_n| > \dots > |z_1|, \quad (1.9)$$

где  $\varphi_{i_k}$  – поля в теории. Функции  $G_{i_1, \dots, i_n}$  можно аналитически продолжить на пространство  $M_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j, i \neq j\}$ .  $M_n^+$  состоит из наборов, где  $\text{Re } z_i > 0$  для любого  $i$ . Введем последовательность пространств тест-функций  $S_n^+$ , где  $S_0^+ = \mathbb{C}$ , а  $S_n^+ = \{f \in S(\mathbb{C}^n) : \text{supp}(f) \subset M_n^+\}$ . Теперь мы можем определить корреляционные функции не обращаясь к понятию полей.

Пусть  $B_0$  – индексное множество (счетное). Последовательности произвольной длины  $(i_1, \dots, i_n) \in B_0^n$  образуют пространство мультииндексов  $i \in B$ . Корреляционные функции  $G_{i_1, \dots, i_n} : M_n \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют следующим аксиомам.

**Аксиома 1.** (Аксиома локальности) Для всех  $(i_1, \dots, i_n) \in B_0^n$ ,  $(z_1, \dots, z_n) \in M_n$  и  $\pi \in S_n$  — перестановок множества из  $n$  элементов верно равенство

$$G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) = G_{i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(n)}}(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) \quad (1.10)$$

Рассмотрим группу движений двумерного пространства  $E_2$ , генераторами которой являются повороты  $r_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и трансляции  $t_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow z + a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

**Аксиома 2.** (Аксиома ковариантности) Для любого индекса  $i \in B_0$  существуют независимые конформные веса  $h_i, \bar{h}_i \in \mathbb{R}$ , такие, что для всех преобразований  $w \in E_2$

$$G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{dw(z_j)}{dz} \right)^{h_{i_j}} \left( \overline{\frac{dw(z_j)}{dz}} \right)^{\bar{h}_{i_j}} G_{i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(n)}}(w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n), \quad (1.11)$$

где  $w_i = w(z_i)$ , а  $s_i = h_i - \bar{h}_i$ ,  $d_i = h_i + \bar{h}_i$  — конформный спин и скейлинговая размерность.

**Аксиома 3.** (Положительность по отношению к отражениям). Обозначим через  $\Theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  отображение  $z = t + iy \rightarrow \Theta(z) = -t + iy$ . Тогда аксиома утверждает, что существует инволюция  $\star : B_0 \rightarrow B_0$ ,  $\star^2 = \text{id}_{B_0}$ , которая продолжается на  $B$  ( $\star : i \rightarrow i^*$ ), и выполняются свойства

1. Верно равенство

$$G_i(z) = G_{i^*}(\Theta(z)) = G_{i^*}(-z^*) \quad (1.12)$$

2. Обозначим через  $\underline{S}^+$  пространство последовательности тест-функ-

цпц  $\underline{f} = (f_i)_{i \in B}, f_i \in S_n^+$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \underline{f}, \underline{f} \rangle = \\ \sum_{i,j \in B} \sum_{n,m} \int_{M_{n+m}} G_{i^*j}(\Theta(z_1), \dots, \Theta(z_n), w_1, \dots, w_m) f_i(z)^* f_j(w) d^n z d^m w \geq 0, \\ \forall \underline{f} \in \underline{S}^+ \quad (1.13) \end{aligned}$$

Эта аксиома позволяет восстановить гильбертово пространство  $\mathbb{H}$ , так как она дает положительную полуопределенную форму  $H$  на  $\underline{S}^+$ . То есть мы можем определить  $\mathbb{H}$  как пополнение  $\underline{S}^+$  факторизованное по  $\ker H$  с произведением (1.13). Мы можем построить и полевые операторы. Для  $j \in B_0$  определим  $\varphi_j$  как операторно-значную обобщенную функцию. Пусть  $f \in S^+$ ,  $\underline{g} \in \underline{S}^+$ , а через  $[\underline{g}]$  обозначим класс эквивалентности  $\underline{g}$  по отношению к ядру  $H$ . Определим  $\varphi_j(f)([\underline{g}])$  как класс эквивалентности  $\underline{g} \times f$ , такой, что

$$\begin{aligned} \underline{g} \times f = ((\underline{g} \times f)_{i_1, \dots, i_{n+1}}); \quad (i_1, \dots, i_{n+1}) \in B \\ (\underline{g} \times f)_{i_1, \dots, i_{n+1}}(z_1, \dots, z_{n+1}) := g_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) f(z_{n+1}) \delta_{j, i_{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Можно показать, что эта конструкция порождает унитарное представление  $U$  группы  $E_2$  евклидовых движений плоскости на гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$ . Кроме того, существует инвариантное плотное подпространство  $D \subset \mathbb{H}$ , такое, что отображения  $\varphi_j(f) : [\underline{g}] \rightarrow [\underline{g} \times f]$  определены на  $D$  для всех  $j \in B_0$  и  $\varphi_j(f)(D) \subset D$ . Также существует вакуум  $\Omega \in \mathbb{H} : \Omega = [f]; f_\emptyset = 1, f_i = 0 \quad \forall i \neq \emptyset$ . Тогда следующая теорема определяет структуру двумерной евклидовой теории поля

**Теорема 1.** 1. Для всех  $j \in B_0$  отображения  $\varphi_j : S^+ \rightarrow \text{End}(D)$  линейны,  $\varphi_j$  – полевые операторы,  $\varphi_j(D) \subset D, \Omega \in D$  и вакуум  $\Omega$  инвариантен относительно инвариантных представлений  $U$  группы  $E_2$ .

2. Поля  $\varphi_j$  преобразуются ковариантно по отношению к представлению

$U$ , для  $w \in E_2$ :

$$U(w)\varphi_j(z)U(w)^* = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{h_j} \varphi_j(w(z)) \quad (1.15)$$

3. Матричные коэффициенты  $\langle \Omega | \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n) | \Omega \rangle$  представляются аналитическими функциями, которые при  $\text{Re} z_n > \dots > \text{Re} z_1 > 0$  совпадают с корреляционными функциями

$$\langle \Omega | \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n) | \Omega \rangle = G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) \quad (1.16)$$

Доказательство этой теоремы приведено в книге [18].

Теперь добавим аксиомы, специфичные для конформной теории поля.

Во-первых введем масштабную инвариантность.

**Аксиома 4.** (Масштабная инвариантность) Корреляционная функция  $G_i, i \in B$  преобразуется ковариантно (1.11) при масштабных преобразованиях  $w(z) = e^\tau z$ , то есть

$$G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) = (e^\tau)^{h_1 + \dots + h_n + \bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_n} G_{i_1, \dots, i_n}(e^\tau z_1, \dots, e^\tau z_n), \quad (1.17)$$

где  $(z_1, \dots, z_n) \in M_n$ ,  $h_j = h_{i_j}$

Из требований масштабной инвариантности можно вычислить двухточечные функции.

**Аксиома 5.** (Существование тензора энергии-импульса) Среди полей  $\varphi_i, i \in B_0$  есть четыре поля  $T_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, 1$ , такие, что  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ,  $T_{\mu\nu}^* = T_{\nu\mu}(\Theta(z))$ ,  $\partial_0 T_{\mu 0} + \partial_1 T_{\mu 1} = 0$ , скейлинговая размерность поля  $d(T_{\mu\nu}) = h_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} = 2$ , конформный спин  $s(T_{00} - T_{11} \pm 2iT_{01}) = \pm 2$ .

Можно показать, что  $\text{tr} T_{\mu\nu} = 0$  и  $T = T_{00} - iT_{01}$  не зависит от  $\bar{z}$ , то есть  $\bar{\partial} T = 0$ . Операторы

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \quad (1.18)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро.

Примарными называются поля  $\varphi_i, i \in B_0$ , такие, что

$$[L_n, \varphi_i(z)] = z^{n+1} \partial \varphi_i(z) + h_i(n+1)z^n \varphi_i(z), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.19)$$

Для каждого примарного поля  $\varphi_i$  можно определить конформное семейство  $[\varphi_i]$ , состоящее из полей вторичных  $\varphi_i^\alpha(z) = L_{-\alpha_1}(z) \dots L_{-\alpha_n}(z) \varphi_i(z)$ , где  $L_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$ . Заметим, что  $L_n(0) = L_n$  и корреляционные функции вторичных полей могут быть выражены через корреляционные функции примарных. Последняя аксиома определяет операторное разложение

**Аксиома 6.** (*Операторное разложение*). Корреляционные функции примарных полей при  $z_i \rightarrow z_j$  удовлетворяют уравнению:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_i(z_i) \dots \varphi_j(z_j) \dots \varphi_{i_n}(z_n) | \Omega \rangle = \\ \sum_{k \in B_0} C_{ijk}(z_i - z_j)^{h_k - h_i - h_j} \langle \Omega | \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_k(z_k) \dots \varphi_{i_n}(z_n) | \Omega \rangle \\ + \text{регулярные члены} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Если дополнительно предположить, что операторное разложение ассоциативно (так называемый “конформный бутстрап”), то вся теория определяется набором примарных полей  $\varphi_j, j \in B_0$ , их размерностями и коэффициентами операторного разложения  $C_{ijk}$ .

Простейший класс конформных теория поля составляют минимальные модели, в которых число примарных полей конечно. Такие модели проще всего сопоставить с критическим поведением в решеточных моделях. Например, в работе [3] было найдено соответствие между моделью Изинга и несколькими минимальными моделями конформной теории поля, в работе [22] обсуждалось соответствие с моделью Поттса, а в работе [23] предложена модель конформной теории поля для вычисления многоточечных корреляционных

функций в модели Ашкина-Теллера. Обзор этих результатов есть в книге [24].

Уже для модели Поттса приходится принимать во внимание не только алгебру Вирасоро, но и дополнительную дискретную симметрию  $Z_N$ . Более общие модели можно получить при изучении дополнительной бесконечномерной симметрии. Основным класс таких моделей – это модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена.

## 1.2. Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и алгебры Ли

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена обладают дополнительной симметрией. Алгебра токов в них — это алгебра Каца-Муди (аффинная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$ ), полная киральная алгебра — полупрямое произведение  $Vir \ltimes \mathfrak{g}$ , примарные поля классифицируются по неприводимым представлениям алгебры  $\mathfrak{g}$ .

В данном разделе мы показываем, как такие модели можно строить путем квантования нелинейной сигма-модели с дополнительным членом Весса-Зумино следуя обзору [25] и книге [24].

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена можно строить начиная со следующего действия:

$$S = S_0 + k\Gamma \quad (1.21)$$

где  $k$  - целое. Здесь  $S_0$  — действие нелинейной  $\sigma$ -модели.

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int_{S^2} d^2x \operatorname{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g), \quad (1.22)$$

где  $a^2 > 0$  - положительный параметр,  $g(x) \in G$  - поле со значениями в группе  $G$ , которую мы будем считать полупростой. Действие задается на ком-



плексной плоскости с бесконечностью, которая топологически эквивалентна 2-сфере.

В нелинейной  $\sigma$ -модели конформная инвариантность теряется на квантовом уровне. Голоморфный и антиголоморфный токи не сохраняются по отдельности. Поэтому мы добавляем член Весса-Зумино  $\Gamma$  к действию

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} \text{Tr} \left( \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3 y \quad (1.23)$$

Он определен на трехмерном многообразии  $B$ , ограниченном исходным двумерным пространством  $S^2$ . Через  $\tilde{g}$  мы обозначили продолжение поля  $g$  на  $B$ . Такое продолжение не единственно. В компактифицированном трехмерном пространстве компактное двумерное многообразие разделяет два трехмерных многообразия.

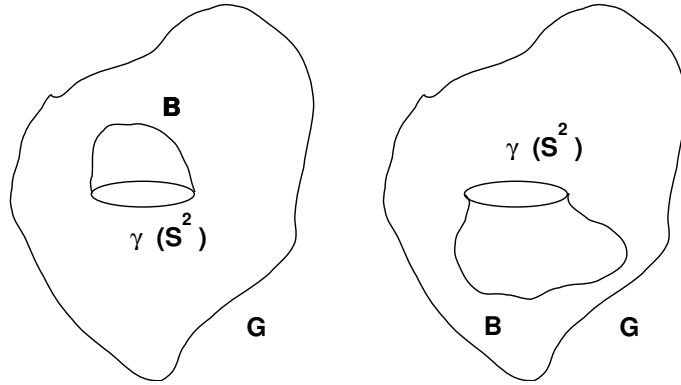


Рис. 1.1. Два продолжения поля на трехмерное многообразие

Разность значений члена Весса-Зумино  $\Delta\Gamma$  на этих многообразиях дается правой частью уравнения (1.23) с интегралом, продолженным на все компактное трехмерное пространство. Так как оно топологически эквивалентно три-сфере, получаем

$$\Delta\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_{S^3} \epsilon_{ijk} \text{Tr}' \left( \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3 y \quad (1.24)$$

$\Delta\Gamma$  определен по модулю  $2\pi i$ , поэтому Евклидов функциональный интеграл с весом  $\exp(-\Gamma)$  хорошо определен. Значит константа связи, умножаемая на этот член, должна быть целочисленной.

Уравнение движения для полного действия (1.21):

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2 ik}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0 \quad (1.25)$$

В комплексных координатах оно записывается в виде

$$(1 + \frac{a^2 k}{4\pi})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) + (1 - \frac{a^2 k}{4\pi})\partial_{\bar{z}}(g^{-1}\partial_z g) = 0 \quad (1.26)$$

Видно, что при  $a^2 = \frac{4\pi}{k}$  у нас имеются законы сохранения

$$\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) = 0 \quad (1.27)$$

Для токов

$$J_z = \partial_z g g^{-1}, \quad J_{\bar{z}} = g^{-1}\partial_{\bar{z}}g \quad (1.28)$$

$$\partial_{\bar{z}}J = 0, \quad \partial_z \bar{J} = 0 \quad (1.29)$$

То есть голоморфная и антиголоморфная части отщепляются, что является указанием на наличие конформной инвариантности.

Решение классического уравнения движения имеет вид

$$g(z, \bar{z}) = f(z)\bar{f}(\bar{z}) \quad (1.30)$$

при произвольных  $f(z)$  и  $\bar{f}(\bar{z})$ .

Сохранение по отдельности токов  $J_z, J_{\bar{z}}$  приводит к инвариантности действия при преобразованиях

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (1.31)$$

где  $\Omega, \bar{\Omega} \in G$ . То есть мы получили локальную  $G(z) \times G(\bar{z})$ -инвариантность.

Для перехода к квантовому случаю мы переопределяем токи

$$J(z) \equiv -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (1.32)$$

При инфинитезимальных преобразованиях  $\Omega = 1 + \omega$ ,  $\bar{\Omega} = 1 + \bar{\omega}$  вариация  $\delta_\omega g = \omega g$ , а вариация действия

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left( \partial_{\bar{z}} \text{Tr}(\omega(z) J(z)) + \partial_z \text{Tr}(\bar{\omega}(\bar{z}) \bar{J}(\bar{z})) \right) \quad (1.33)$$

Заменяем  $d^2x = -\frac{i}{2} dz d\bar{z}$ , интегрируем по частям и переходим к интегралу по контуру, замыкая контур в разных направлениях для голоморфной и антиголоморфной частей. Тогда вариация действия примет вид

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = \frac{i}{4\pi} \oint dz \text{Tr}(\omega(z) J(z)) - \frac{i}{4\pi} \oint d\bar{z} \text{Tr}(\bar{\omega}(\bar{z}) \bar{J}(\bar{z})) \quad (1.34)$$

Раскладывая токи по некоторому базису  $t^a$  в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$

$$J = \sum J^a t^a, \quad \bar{J} = \sum \bar{J}^a t^a \\ \omega = \sum \omega^a t^a \quad (1.35)$$

получаем

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a J^a + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \bar{J}^a \quad (1.36)$$

Мы также получили тождества Уорда  $\delta \langle X \rangle = \langle (\delta S) X \rangle$

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle \quad (1.37)$$

Из явного вида тока и формулы для преобразования  $g$  имеем

$$\delta_\omega J = [\omega, J] - k\partial_z \omega, \quad \delta_\omega J^a = \sum i f_{abc} \omega^b J^c - k\partial_z \omega^a \quad (1.38)$$

Если это подставить в тождество Уорда, то получаем операторное разложение для токов:

$$J^a(z) J^b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum i f_{abc} \frac{J^c(w)}{(z-w)} \quad (1.39)$$

Раскладывая токи в ряд, получаем

$$J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-1} J_n^a \quad (1.40)$$

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f^{abc} J_{n+m}^c + kn \delta^{ab} \delta_{n+m,0}$$

Теперь мы видим, что компоненты токов образуют аффинную алгебру Ли  $\hat{g}$ .

Тензор энергии-импульса вводится при помощи конструкции Сугавары как сумма нормально упорядоченных компонент токов

$$T(z) = \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_a : J^a J^a : (z) \quad (1.41)$$

Здесь  $h^\vee$  - дуальное число Кокстера.  $h^\vee = \sum_i \alpha_i^\vee + 1 = \frac{1}{2}(\theta, \theta + 2\rho)$ , а нормальное упорядочение вводится следующим образом:

$$: AB : (w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-w} A(z) B(w) \quad (1.42)$$

Тензор энергии-импульса можно разложить на моды  $L_n$

$$L_n = \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (1.43)$$

Тогда коммутационные соотношения для мод  $L_n$  имеют вид

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0} \quad (1.44)$$

$$c = \frac{k \dim g}{k + h^\vee}$$

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a.$$

Таким образом, конструкция Сугавары — это способ вложения алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую аффинной алгебры Ли  $\hat{g}$

Полная киральная алгебра модели Весса-Зумино-Виттена равна полупрямому произведению  $Vir \ltimes \hat{g}$

Примарными называются поля, которые преобразуются ковариантно под действием  $G(z) \times G(\bar{z})$ , как  $g(z, \bar{z})$ . В терминах операторного разложения это

свойство переформулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} J^a(z)g(w, \bar{w}) &\sim \frac{-t^a g(w, \bar{w})}{(z - w)} \\ \bar{J}^a(z)g(w, \bar{w}) &\sim \frac{g(w, \bar{w})t^a}{(z - w)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Любое поле  $\phi_{\lambda, \mu}$ , преобразующееся ковариантно по отношению к некоторому представлению, заданному весом  $\lambda$  в голоморфном секторе и весом  $\mu$  в антиголоморфном, является примарным полем WZW-модели.

В модах это свойство записывается в виде

$$\begin{aligned} (J_0^a \phi_\lambda) &= -t_\lambda^a \phi_\lambda \\ (J_n^a \phi_\lambda) &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Мы можем сопоставить состояние  $|\phi_\lambda\rangle$  полю  $\phi_\lambda$

$$|\phi_\lambda\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \phi_\lambda(z) |0\rangle \quad (1.47)$$

Тогда условия (1.46) для примарных полей дают

$$\begin{aligned} J_0^a |\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a |\phi_\lambda\rangle \\ J_n^a |\phi_\lambda\rangle &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Все вторичные состояния имеют вид

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{n_2}^{a_2} \dots |\phi_\lambda\rangle \quad (1.49)$$

Легко видеть, что действие генераторов алгебры Вирасоро на примарные поля имеет вид

$$L_0 |\phi_\lambda\rangle = \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} |\phi_\lambda\rangle \quad (1.50)$$

Здесь использовано явное выражение для собственных значений квадратичного оператора Казимира. То есть конформный вес примарного поля ВЗНВ-модели равен

$$h_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} \quad (1.51)$$

Примарные поля преобразуются интегрируемыми конечномерными представлениями, а бесконечномерные и неинтегрируемые поля зануляют корреляционные функции. В WZW-моделях примарные поля принадлежат тензорному произведению неприводимых представлений аффинной алгебры, так как есть голоморфный и антиголоморфный сектора.

Из тождества Уорда для токов (1.37), конструкции Сугавары (1.41) и операторного разложения для тока и примарного поля (1.45) нетрудно получить уравнение Книжника-Замолодчикова на корреляционные функции:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{j \neq i}^N \sum_a \frac{t_i^a t_j^a}{k + h^\vee} \frac{1}{z_i - z_j} \right) \langle g(z_1, \bar{z}_1) \dots g(z_N, \bar{z}_N) \rangle \quad (1.52)$$

### 1.2.1. Конформные вложения и модулярно-инвариантные статсуммы

При изучении конформной теории поля на плоскости или на сфере голоморфный и антиголоморфный сектора можно рассматривать независимо. Если мы говорим о применении конформной теории для описания поведения струн, то теория должна быть определена на римановых поверхностях большего рода ( $h > 0$ ), чтобы можно было описывать взаимодействия струн. Считается, что для этого необходимо (и, возможно, достаточно) чтобы теория была определена на торе.

В теории критического поведения конформная инвариантность имеет место только в критической точке, где голоморфный и антиголоморфный сектора расцеплены. Но вблизи критической точки эти сектора должны быть связаны, и так как мы предполагаем плавный переход к критической точке в пространстве параметров, то эта связь должна сохраняться и в критической точке. Физический спектр теории должен плавно меняться, когда мы покидаем критическую точку, и связь голоморфного и антиголоморфного сектора вдали от критической точки должна приводить к ограничениям на

набор состояний в критической точке. Этого можно достичь через геометрию, то есть накладывая граничные условия на состояния. Здесь естественно рассматривать периодические граничные условия, которые эквивалентны рассмотрению теории на торе.

Наложим периодические граничные условия с периодами  $\omega_1, \omega_2$ ,  $\tau = \omega_2/\omega_1$ . Мы хотим вычислить статсумму для теории на торе через генераторы алгебры Вирасоро  $L_0, \bar{L}_0$  и выяснить ее зависимость от параметра  $\tau$ . Пусть пространственное направление соответствует вещественной оси, а временное - мнимой. Пусть  $\omega_1$  направлен вдоль вещественной оси. Через  $H$  обозначим гамильтониан, а через  $P$  - общий импульс системы. Тогда оператор трансляции на  $a$  параллельно периоду  $\omega_2$  имеет вид  $\exp(-\frac{a}{|\omega_2|}(H\text{Im}\omega_2 - iP\text{Re}\omega_2))$ . Если считать, что  $a$  - расстояние в решетке, то такой сдвиг переводит нас с одного ряда на другой параллельно периоду  $\omega_2$ . Если полный период содержит  $m$  ячеек решетки ( $|\omega_2| = ma$ ), то статсумма дается следом оператора сдвига в степени  $m$ :

$$Z(\omega_1, \omega_2) = \text{Tr} \exp -\{H\text{Im}\omega_2 - iP\text{Re}\omega_2\} \quad (1.53)$$

Операторы  $H, P$  можно выразить через генераторы алгебры Вирасоро если рассмотреть тор как цилиндр конечной длины со склеенными концами. На цилиндре с длиной окружности  $L$  гамильтониан  $H = (2\pi/L)(L_0 + \bar{L}_0 - c/12)$ . Константа добавлена, чтобы вакуумная энергия исчезала в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Оператор импульса, который генерирует трансляции вокруг окружности, имеет вид  $P = (2\pi i/L)(L_0 - \bar{L}_0)$ . Так как мы выбрали  $\omega_1$  вещественным и равным  $L$ , статсумму можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr} \exp \pi i \{(\tau - \bar{\tau})(L_0 + \bar{L}_0 - c/12) + (\tau + \bar{\tau})(L_0 - \bar{L}_0)\} \\ &= \text{Tr} \exp 2\pi i \{\tau(L_0 - c/24) - \bar{\tau}(\bar{L}_0 - c/24)\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Или, если ввести  $q = \exp 2\pi i\tau$

$$Z(\tau) = \text{Tr} \left( q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right) \quad (1.55)$$

Это выражение, на самом деле — сумма характеров представлений алгебры Вирасоро (конформных семейств).

Двумерный тор представляет собой фактор пространство  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  по отношениям эквивалентности  $z \sim z + w_1$  and  $z \sim z + w_2$ , где  $w_1$  и  $w_2$  не параллельны.

Разные параметризации тора связаны модулярными преобразованиями, таким образом возникает требование модулярной инвариантности статсуммы.

При помощи конформных преобразований можно перейти к таким координатам, в которых соотношения эквивалентности для тора (граничные условия) записываются в виде  $z \sim z + 1$  и  $z \sim z + \tau$ , где  $\tau$  в верхней полуплоскости  $\mathbb{C}$ .

Легко видеть, что  $\tau$ ,  $T(\tau) = \tau + 1$  и  $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$  описывают конформно-эквивалентные торы. Отображения  $T$  и  $S$  порождают группу  $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ , состоящую из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (1.56)$$

и матрицы  $A$  и  $-A$  действуют одинаково на  $\tau$

$$\tau \rightarrow A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (1.57)$$

$\tau$  называется модулярным параметром, а группа  $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$  — модулярной группой.

Конформная теория поля задаётся примарными полями  $\phi_a$  с конформными размерностями  $h_a$ .



Примарные поля живут в пространствах  $\mathcal{H}_{(i,j)}$ , которые представляют собой тензорные произведения неприводимого представления  $\mathcal{H}_j$  киральной алгебры и неприводимого представления  $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{j}}$  антикиральной алгебры. Тогда статсумма на торе (1.55) может быть записана в виде

$$Z(\tau) = \sum_{(j,\bar{j})} \chi_j(q) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{q}) \quad (1.58)$$

где  $\chi_j$  — нормализованный характер представления  $\mathcal{H}_j$ ,

$$\chi_j(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_j}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) \quad \text{где } q = e^{2\pi i \tau} \quad (1.59)$$

Характеры переходят друг в друга при модулярных преобразованиях:

$$\chi_j\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_k S_{jk} \chi_k(\tau) \quad \text{и} \quad \chi_j(\tau+1) = \sum_k T_{jk} \chi_k(\tau), \quad (1.60)$$

где  $S$  и  $T$  — постоянные матрицы.

Для ВЗНВ-моделей примарные поля определяются старшими весами  $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$  соответствующих представлений алгебры  $\mathfrak{g}$ . Тогда

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\hat{\lambda}, \hat{\xi} \in P_+^{(k)}} M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}} L_{\hat{\lambda}} \otimes L_{\hat{\xi}} \quad (1.61)$$

Коэффициенты ветвления для вложения аффинной подалгебры Ли в аффинную алгебру можно использовать для построения модулярно-инвариантной статсуммы в соответствующей ВЗНВ-модели. Когда рассматривается теория на торе, набор физически допустимых полей ограничен требованиями модулярной инвариантности.

Простейший модулярный инвариант можно записать следующим образом:

$$Z(\tau) = \sum_{\mu \in P_{\mathfrak{g}}^+} \chi_{\mu}(\tau) \bar{\chi}_{\mu}(\bar{\tau}) \quad (1.62)$$

Здесь суммирование ведется по всем конформным семействам (то есть по всем представлениям алгебры  $\mathfrak{a}$ ).

Другие модулярные инварианты в WZW-модели с алгеброй  $\mathfrak{a}$  можно получить, если существует алгебра  $\mathfrak{g}$ , в которую  $\mathfrak{a}$  вкладывается конформно.

Представления алгебры  $\mathfrak{g}$  можно рассматривать как сумму представлений подалгебры  $\mathfrak{a}$ .

Если мы рассмотрим редукцию характеров аффинной алгебры

$$\pi_{\mathfrak{a}}(chL_{\mathfrak{g}}^{\mu}) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^{+}} b_{\nu}^{(\mu)} chL_{\mathfrak{a}}^{\nu} \quad (1.63)$$

и подставим разложение в формулу (1.62), то модулярная инвариантность сохранится. То есть из диагонального инварианта для алгебры  $\mathfrak{g}$  мы получаем новый недиагональный инвариант для подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Но возникает вопрос, будет ли теория, полученная таким образом, самосогласованной, сохранится ли в ней конформная инвариантность.

Пусть  $J_{-n_j}^{a_j}$  и  $\tilde{J}_{-n_j}^{a'_j}$  — понижающие операторы алгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ .  $\pi_{\mathfrak{a}}$  — проекционный оператор  $\pi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ . В теории, связанной с  $\mathfrak{g}$  с вакуумом  $|0\rangle$ , примарным полем  $\phi_{\lambda}$  и состоянием старшего веса  $|\lambda\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \phi_{\lambda}(z) |0\rangle$  будут следующие состояния:

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{-n_2}^{a_2} \dots |\lambda\rangle \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots > 0. \quad (1.64)$$

Вакуум  $\mathfrak{g}$ -инвариантен, то есть  $J_0^a |0\rangle = 0$ . При проекции на подалгебру  $\mathfrak{a}$  состояния примут вид

$$\tilde{J}_{-n_1}^{a'_1} \tilde{J}_{-n_2}^{a'_2} \dots |\pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\rangle. \quad (1.65)$$

Из  $\mathfrak{g}$ -инвариантности вакуума следует его  $\mathfrak{a}$ -инвариантность, но для тензора энергии-импульса в общем случае это не так. Поэтому тензор энергии-импульса большей теории должен состоять только из генераторов  $\tilde{J}$ . Тогда из  $T_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{a}}$  следует  $c(\mathfrak{g}) = c(\mathfrak{a})$ . Это приводит к уравнению

$$\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h_{\mathfrak{g}}^{\vee}} = \frac{x_e k \dim \mathfrak{a}}{x_e k + h_{\mathfrak{a}}^{\vee}} \quad (1.66)$$

Здесь  $x_e$  — индекс вложения, а  $g, a$  — дуальные числа Кокстера, которые характеризуют алгебры.

Можно показать, что это равенство удовлетворяется только для представлений уровня 1. То есть класс конформных вложений не слишком широк и существует полная их классификация. Кроме того, для конформных вложений существуют специальные методы разложения представлений.

Модулярная инвариантность статсуммы для полей, принадлежащих представлениям алгебры  $\mathfrak{g}$ , сохраняется при проекции на подалгебру  $\mathfrak{a}$ . Если все представления  $\mathfrak{g}$  в теории удовлетворяют описанным требованиям, то при проекции мы получаем конформную теорию поля.

Существует теорема о том, что для конформного вложения  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  только конечное число коэффициентов ветвления отлично от нуля [26, 27]. Поэтому после того, как мы разложили все представления  $\mathfrak{g}$  мы подставляем результаты в выражение для статсуммы и получаем модулярно-инвариантную статсумму для вложенной теории. Такая статсумма уже не будет иметь диагональный вид:

$$Z_{\mathfrak{a}}(\tau) = \sum_{\nu, \lambda \in P_{\mathfrak{a}}^+} \chi_{\nu}(\tau) M_{\nu\lambda} \bar{\chi}_{\lambda}(\bar{\tau}) \quad (1.67)$$

Таким образом, редукция представлений аффинной алгебры на представления подалгебры, рассмотренная в главе 2, приводит к построению модулярно-инвариантных статсумм методом конформных вложений [28]. Проблема конформных вложений также недавно рассматривалась в работе [29]. Мы приводим примеры таких вычислений в разделе 2.3.2.

### 1.3. Coset-модели конформной теории поля

Coset-конструкция для моделей конформной теории поля была предложена в работе [30]. Первоначально она была введена чисто алгебраически на

языке генераторов, без обращения к действию и лагранжиану. Coset-модели задаются алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$  и ее подалгеброй  $\mathfrak{a}$ . Обозначим через  $J_n^a$  генераторы аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$ , а через  $\tilde{J}_n^b$  – генераторы  $\hat{\mathfrak{a}}$ , так что  $\tilde{J}_n^b = \sum_a m_a^b J_n^a$ . Генераторы алгебры Вирасоро в coset-моделях даются разностями выражений Сугавары для ВЗНВ-моделей, соответствующих алгебрам  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$ :

$$L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{a}}$$

Коммутационные соотношения между генераторам алгебры Вирасоро и генераторами подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$  тривиальны

$$[L_n, \tilde{J}_m^b] = 0 \quad (1.68)$$

Рассмотрим неприводимый модуль  $L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mu}$  как приводимый модуль подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$ :  $L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu} L_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\nu}$ . В силу равенства (1.68) весовые векторы, соответствующие весам  $L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mu}$ , сингулярным по отношению к действию  $\hat{\mathfrak{a}}$ , будут образовывать модуль алгебры Вирасоро. Статсумма такой модели будет даваться функциями ветвления для вложения  $\hat{\mathfrak{a}} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$  (См. раздел 2.3.2 в главе 2).

Coset-модели можно реализовать, как калибровочные модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена, если добавить дополнительные калибровочные полями  $A, \bar{A}$ , принимающие значения в алгебре Ли  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ , в действие ВЗНВ-модели [31]:

$$S(g, A) = S_{WZNW}(g) + \frac{k}{4\pi} \int d^2z \left( \mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{\partial} g) - \mathcal{K}(\bar{A}, (\partial g) g^{-1}) + \mathcal{K}(A, g^{-1} \bar{A} g) - \mathcal{K}(A, \bar{A}) \right) \quad (1.69)$$

Полученная теория поля обладает калибровочной  $G \times G$ -инвариантностью и ее квантование естественно проводить с использованием БРСТ-формализма [32].

Токи в квантовой теории даются выражением

$$J_{(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} = -k \partial g g^{-1} - k g A g^{-1} \quad (1.70)$$

Из тождеств Уорда можно получить равенство

$$\langle A^b(z) \phi_1 \dots \phi_N \rangle = \frac{2}{k + 2h_a^\vee} \sum_k \frac{\tilde{t}_k^b}{z - z_k} \langle \phi_1 \dots \phi_N \rangle$$

В coset-моделях поля нумеруются парами весов  $(\mu, \nu)$ , где  $\mu$  – вес  $\hat{\mathfrak{g}}$ , а  $\nu$  – вес  $\hat{\mathfrak{a}}$ , соответственно. Но появляются правила отбора, так как функции ветвления для некоторых пар весов  $(\mu, \nu)$  исчезают. Кроме того, имеется избыточность, так как функции ветвления для различных пар  $(\mu, \nu)$  могут совпадать [33, 34].

Итак, примарные поля нумеруются парами весов  $(\mu, \nu) \in \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}} \oplus \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$  алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$  и подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$ , такими, что соответствующие функции ветвления  $b_\nu^\mu(q) \neq 0$ . Некоторые пары эквивалентны. Эта эквивалентность дается действием так называемых “простых токов”  $(J, \tilde{J})$ , которые являются элементами группы внешних автоморфизмов  $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{a}}) \approx B(G) \times B(A)$  алгебры  $\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{a}}$ , где  $B(G)$  – это центр группы Ли  $G$ . Мы можем думать о простых токах как о примарных полях, тогда их действие на поля теории дается слиянием [24]. Таким образом, примарные поля coset-моделей нумеруются классами эквивалентности пар весов  $(\mu, \nu) \sim (J * \mu, \tilde{J} * \nu)$ , где  $(J, \tilde{J})$  такие, что конформные веса компонент равны:  $h_J - h_{\tilde{J}} = 0$ .

Конформный вес примарного поля в coset-модели равен

$$L_0 |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle = \left( \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_a J_0^a J_0^a - \frac{1}{2(k + h_a^\vee)} \sum_b \tilde{J}_0^b \tilde{J}_0^b \right) |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle = \left( \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} - \frac{(\nu, \nu + 2\rho_a)}{2(k + h^\vee)} \right) |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle \quad (1.71)$$

Из тождеств Уорда можно получить аналог уравнений Книжника-Замолотчикова для coset-моделей [35]:

$$\left\{ \frac{1}{2} \partial_i + \sum_{i \neq j}^N \left( \frac{t_i^a t_j^a}{k + h^\vee} - \frac{\tilde{t}_i^b \tilde{t}_j^b}{k + h_a^\vee} \right) \frac{1}{z_i - z_j} \right\} \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0 \quad (1.72)$$

Из алгебраического определения coset-моделей следует, что функции ветвления для модулей аффинной алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$  на модули подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$  являются характерами конформных семейств.

Все минимальные унитарные модели можно реализовать как coset-модели типа  $\widehat{su(2)_k/u(1)}$  или  $\widehat{su(2)_k \oplus su(2)_1/su(2)_{k+1}}$  (здесь нижний индекс указывает на уровень модулей старшего веса, соответствующих примарным полям).

## 1.4. Конформная теория поля на области с границей

При изучении критических явлений большое применение находит формулировка конформной теории поля на области с границей. Это естественно как при описании реальных экспериментов, где система всегда имеет конечные размеры, так и при изучении критического поведения отдельных кластеров в решеточных моделях. Формулировка так называемой граничной конформной теории поля восходит к пионерским работам Карди [36–38].

## Глава 2

# Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления представлений аффинных алгебр Ли

В главе 1 мы показали, что для построения модулярно-инвариантных статсумм и в процессе изучения coset-моделей возникает проблема ветвления для аффинных алгебр Ли. В данной главе мы выводим рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления, которые являются важнейшим инструментом данной диссертации. Эти соотношения получены нами в работе [4].

Существуют различные подходы к вычислению коэффициентов ветвления. Некоторые из них используют резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда [39] (См. главу 3, алгоритм вычислений описан в работах [40],[41]), ряды функций Шура [42], когомологии БРСТ [43], формулы Каца-Петерсона [40, 44] или комбинаторные методы [45].

В этой главе мы доказываем, что для произвольной редуктивной подалгебры коэффициенты ветвления описываются набором рекуррентных соотношений и существует эффективный и простой алгоритм для пошагового решения этих соотношений. Общая идея похожа на подход, предложенный в работе [46] для максимальных вложений. Но в данном случае алгоритм существенно отличается, так как использует новые свойства сингулярных весов для работы с произвольными редуктивными вложениями  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

При этом важно рассматривать подалгебру  $\mathfrak{a}$  вместе с ее “ортогональным партнером”  $\mathfrak{a}_\perp \subset \mathfrak{g}$ . Для любой редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a}$  подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp$  регулярна и редуктивна.

Для модуля старшего веса  $L^{(\mu)}$  и ортогональной пары подалгебр  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$  мы рассматриваем так называемый сингулярный элемент  $\Psi^{(\mu)}$  (числитель в формуле Вейля для характеров  $ch(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}}$ , см., например, [47]), знаменатель Вейля  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(0)}$  и проекцию  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}}{\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(0)}}$ .

Мы доказываем, что для произвольного  $\mathfrak{h}$ -диагонализующего модуля старшего веса  $L^{(\mu)}$  и ортогональной пары  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$  элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$  допускает разложение на множество числителей Вейля  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(\mu)}$  модулей подалгебры  $\mathfrak{a}_\perp$ . Это разложение дает возможность построить рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления, соответствующих вложению  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Рекуррентное соотношение формулируется с использованием особого элемента  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  групповой алгебры  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ , который мы называем “веером вложения”. Применение этих инструментов позволяет нам сформулировать простой и явный алгоритм для вычисления коэффициентов ветвления, который может быть использован в случае произвольных (максимальных и не максимальных) подалгебр конечномерных и аффинных алгебр Ли. В случае максимального вложения веер имеет простую форму, сингулярный элемент становится тривиальным  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \Psi_{(\mathfrak{g})}^{(\mu)}$  и мы восстанавливаем соотношения, полученные ранее в работе [46].

Также мы показываем, что предложенный алгоритм эффективен и может использоваться при изучении конформных вложений и coset-моделей в рациональной конформной теории поля.

В следующем разделе 2.1 мы определяем аффинные алгебры Ли и приводим основные определения в теории представлений. Заодно мы фиксируем обозначения. Затем в разделе 2.2 мы выводим формулы разложения, основывающиеся на аномальных коэффициентах ветвления и описываем алгоритм редукции интегрируемых модулей старшего веса  $L_{\mathfrak{g}}$  по отношению к редуктивной подалгебре  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  (см. секцию 2.2). В разделе 2.3 мы представляем различные примеры применения алгоритма для конечномерных (2.3.1) и аф-



финных алгебр Ли и обсуждаем их роль в моделях конформной теории поля (2.3.2). Выводы к главе изложены в разделе 2.4. В следующей главе 3 мы показываем связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Реализация алгоритма на языке *Mathematica* и дополнительные примеры машинных вычислений описаны в главе 5.2.

## 2.1. Простые алгебры Ли, алгебра петель, центральные расширения и аффинные алгебры Ли

**Определение 1.** *Алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  – это векторное пространство с билинейной операцией  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , которая называется *скобкой Ли* или *коммутатором*. Если выбрать некоторый базис  $X_i$  в  $\mathfrak{g}$ , то коммутационные соотношения можно задать при помощи *структурных констант*  $C_{ijk}$ :*

$$[X^i, X^j] = \sum_k C_k^{ij} X^k \quad (2.1)$$

Алгебра Ли называется *простой* если она не содержит нетривиальных идеалов относительно коммутатора. *Полупростая* алгебра Ли – это прямая сумма простых алгебр Ли.

*Подалгеброй Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$*  называется нильпотентная подалгебра алгебры  $\mathfrak{g}$ , совпадающая со своим нормализатором. Мы обозначаем элементы базиса в  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$  через  $H^i$ .

Форма Киллинга на  $\mathfrak{g}$  порождает невырожденную билинейную форму  $(\cdot, \cdot)$  на подалгебре Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ , позволяющую идентифицировать  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$  с подпространством дуального пространства  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$  линейных функционалов на  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ . *Весы* – это элементы  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$ , мы обозначаем их греческими буквами  $\mu, \nu, \omega, \lambda \dots$

Коммутационные соотношения (2.1) можно записать в компактной форме, если выбрать базис специальным образом. Такой базис описывается корневой системой, которая определяется в разделе 2.1.1 (Смотри также [47, 48]).

Чтобы определить аффинные алгебры нам нужно обсудить процедуру центрального расширения алгебры Ли. Напомним несколько определений (см [49],[50], [51]).

**Определение 2.** Будем рассматривать алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  над полем  $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ . Векторное пространство  $A$  над полем  $k$  называется *модулем над  $\mathfrak{g}$*  или  *$\mathfrak{g}$ -модулем*, если задано билинейное отображение  $\mu : \mathfrak{g} \times A \rightarrow A$ , такое что  $\mu([X, Y], a) = \mu(X, \mu(Y, a)) - \mu(Y, \mu(X, a))$  для  $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in A$ . Далее мы будем опускать символ  $\mu$  и писать  $Xa = \mu(X, a)$ .

**Определение 3.**  $n$ -мерная *коцепь с коэффициентами в  $A$*  – это кососимметричный  $n$ -линейный функционал на  $\mathfrak{g}$  со значениями в  $A$ . Пространство  $n$ -коцепей  $C^n(\mathfrak{g}; A) = \text{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}; A)$ .

Заметим, что элементы  $\mathfrak{g}$  действуют на  $C^n(\mathfrak{g}; A)$ .

**Определение 4.** Внешний дифференциал  $d = d_n : C^n(\mathfrak{g}; A) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}; A)$  определяется формулой

$$(dc)(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{1 \leq s < t \leq n+1} (-1)^{s+t-1} c([X_s, X_t], X_1, \dots, \hat{X}_s, \dots, \hat{X}_t, \dots, X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \leq s \leq n+1} (-1)^s X_s c(X_1, \dots, \hat{X}_s, \dots, X_{n+1}) \quad (2.2)$$

Нетрудно проверить, что последовательность

$$\dots \xleftarrow{d_n} C^n(\mathfrak{g}; A) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(\mathfrak{g}; A) \leftarrow \dots \leftarrow C^1(\mathfrak{g}; A) \xleftarrow{d_0} C^0(\mathfrak{g}; A) \leftarrow 0 \quad (2.3)$$

точна. Тогда  $\{C^n(\mathfrak{g}; A), d_n\} = C^*(\mathfrak{g}; A)$  есть комплекс.

**Определение 5.** Соответствующие когомологии называются *когомологиями алгебры  $\mathfrak{g}$  с коэффициентами в  $A$*  и обозначаются через  $H^n(\mathfrak{g}; A) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$ .

Заметим, что поле  $k$  может рассматриваться как тривиальный  $\mathfrak{g}$ -модуль. В этом случае второй член в формуле (2.1) исчезает и используют сокращенные обозначения  $C^n(\mathfrak{g}), H^n(\mathfrak{g})$ .

**Определение 6.** Определим, заодно, и гомологии. Пространство  $n$ -мерных цепей  $C_n(\mathfrak{g}; A) = A \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$ , дифференциал  $\partial = \partial_n : C_n(\mathfrak{g}; A) \rightarrow C_{n-1}(\mathfrak{g}; A)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \partial(a \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)) = \\ \sum_{1 \leq s < t \leq n+1} (-1)^{s+t-1} a \otimes ([X_s, X_t] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge \hat{X}_t \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \leq s \leq n+1} (-1)^s (X_s a) \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогично определяется точная последовательность, комплекс и группа гомологий  $H_n(\mathfrak{g}; A)$ .

**Определение 7.** Одномерным центральным расширением алгебры  $\mathfrak{g}$  называется точная последовательность

$$0 \rightarrow k \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

такая что образ  $k \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  содержится в центре  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Заметим, что всякий 2-коцикл  $c \in C^2(\mathfrak{g}; A)$ ,  $dc = 0$  определяет центральное расширение  $\mathfrak{g}$ :

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{\lambda \rightarrow (0, \lambda)} \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus k \xrightarrow{(X, \lambda) \rightarrow X} \mathfrak{g} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Скобка Ли в алгебре  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , которая равна  $\mathfrak{g} \oplus k$  как векторное пространство, определяется равенством

$$[(X, \lambda), (Y, \mu)] = ([X, Y], c(X, Y)) \quad (2.7)$$

Тождество Якоби для такой скобки равносильно тому, что  $c$  — 2-коцикл. Когомологичным коциклам отвечают эквивалентные расширения.

Два расширения  $\tilde{\mathfrak{g}}$  и  $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$  называются эквивалентными, если существует изоморфизм  $I : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$  такой, что диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow I & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}} & \longrightarrow & k \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.8)$$

Таким образом пространство  $H^2(\mathfrak{g})$  — это множество классов 1-мерных центральных расширений  $\mathfrak{g}$ . Нуль в  $H^2(\mathfrak{g})$  соответствует тривиальному расширению.

Для алгебры Витта (1.2) существует коцикл

$$c(l_n, l_m) = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \quad (2.9)$$

Соответствующее центральное расширение алгебры Витта называется алгеброй Вирасоро. Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид

$$[L_n, c] = 0 \quad (2.10)$$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \quad (2.11)$$

Можно показать, что  $H^2(Witt) \cong \mathbb{C}$  и все нетривиальные коциклы пропорциональны  $c$ . (Доказательство есть в [49], [18]).

Алгебра петель  $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ , соответствующая полупростой алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , определяется коммутационными соотношениями

$$[X^i t^n, X^j t^m] = t^{n+m} \sum_k C_k^{ij} X^k \quad (2.12)$$

Центральное расширение алгебры петель ведет к возникновению дополнительного члена

$$[X^i t^n + \alpha c, X^j t^m + \beta c] = t^{n+m} \sum_k C_k^{ij} X^k + (X^i, X^j) n \delta_{n+m,0} c \quad (2.13)$$

Эта алгебра  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$  называется (не скрученной) *аффинной алгеброй Ли* [40], [41, 52], [53].

### 2.1.1. Модули, веса и корни

Пусть  $\mathfrak{g}$  – конечномерная или аффинная алгебра Ли. Мы ввели модули алгебры  $\mathfrak{g}$  в определении 2. Широко используется альтернативный термин *представление*.

**Определение 8.** Представление алгебры  $\mathfrak{g}$  на векторном пространстве  $V$  называется гомоморфизм  $\mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$  из  $\mathfrak{g}$  в алгебру Ли эндоморфизмов векторного пространства  $V$ , где скобка задана коммутатором:

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v), \quad \text{для } x, y \in \mathfrak{g}, v \in V \quad (2.14)$$

В произвольном представлении операторы, соответствующие генераторам подалгебры Картана  $H^i$  можно одновременно диагонализировать путем специального выбора базиса  $\{v_j\}$  в  $V$ :

$$H^i \cdot v_j = \nu_j^i v_j \quad (2.15)$$

Собственные значения  $\nu_j^i$  генераторов Картана на элементе базиса  $v_j$  определяют вес  $\nu_j \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$ , такой, что  $\nu_j(H^i) = \nu_j^i$ . Вектор  $v \in V$  называется *весовым вектором* веса  $\lambda$ , если  $Hv = \lambda_j(H)v$ ,  $\forall H \in \mathfrak{h}$ . Весовое подпространство состоит из всех весовых векторов  $V_{\lambda} = \{v \in V : Hv = \lambda_j(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$ . Кратностью веса  $m_{\lambda} = \text{mult}(\lambda) = \dim V_{\lambda}$  называется размерность весового подпространства.

Структура модуля определяется набором весов, так как действие генераторов  $E^{\alpha}$  на весовых векторах дается выражением

$$E^{\alpha} \cdot v_{\lambda} \propto v_{\lambda+\alpha} \quad (2.16)$$

Структуру модуля можно записать в виде формального характера

$$\text{ch}V = \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} \quad (2.17)$$

Характер  $\text{ch}V \in \mathcal{E}$  – это элемент алгебры  $\mathcal{E}$ , порожденной формальными экспонентами весов. Характер можно специализировать — взять его значение на некотором элементе  $\xi \in \mathfrak{h}$ .

Алгебра Ли является собственным модулем по отношению к специальному представлению, называемому присоединенным. Действие генераторов в этом представлении дается скобкой  $\text{ad}_X Y = [X, Y]$ . *Корни* – это веса присоединенного представления алгебры  $\mathfrak{g}$ . Они определяют коммутационные соотношения в алгебре следующим образом. Обозначим через  $\Delta$  множество корней. Для каждого  $\alpha \in \Delta$  существует корень  $-\alpha \in \Delta$  и генераторы  $E^{\alpha}, E^{-\alpha}$ , такие, что

$$[H^i, E^{\alpha}] = \alpha^i E^{\alpha} \quad (2.18)$$

$$[E^{\alpha}, E^{\beta}] = \begin{cases} N_{\alpha, \beta} E^{\alpha + \beta}, & \text{if } \alpha + \beta \in \Delta \\ \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \sum_i \alpha^i H^i, & \text{if } \alpha = -\beta \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2.19)$$

В корневой системе  $\Delta$  можно выбрать множество положительных корней. Это подмножество  $\Delta^+ \subset \Delta$ , такое, что для любого корня  $\alpha \in \Delta$  ровно один из корней  $\alpha, -\alpha$  содержится в  $\Delta^+$  и для любых двух различных положительных корней  $\alpha, \beta \in \Delta^+$ , таких, что  $\alpha + \beta \in \Delta$  их сумма тоже положительна  $\alpha + \beta \in \Delta^+$ . Элементы множества  $-\Delta^+$  называются отрицательными корнями.

Положительный корень называется *простым* если его нельзя представить в виде суммы положительных корней. Множество простых корней  $\Phi = \{\alpha_i\}$  является базисом в  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$  и каждый корень может быть записан как сумма

$\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$ , где все  $n_i$  не отрицательны или не положительны одновременно. В случае конечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  простые корни можно пронумеровать числами от 1 до ранга алгебры  $i = 1, \dots, r$ ,  $r = \text{rank}(\mathfrak{g})$ . Такая нумерация порождает лексикографическое упорядочение корневой системы. Старший по отношению к этому упорядочению корень обозначается через  $\theta = \sum_{i=1, \dots, r} a_i \alpha_i$ , его координаты в базисе простых корней  $a_i$  называются *марками*.  $\theta$  – это старший вес присоединенного модуля (См. раздел 2.1.2). *Ко-марками* называются числа, равные  $a_i^\vee = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2} a_i$ .

В аффинной алгебре Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$  множество корней  $\Delta$  бесконечно, но набор простых корней  $\Phi$  конечен. Обозначим его элементы через  $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ , где  $r = \text{rank}(\mathfrak{g})$ . Корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  – это корни соответствующей конечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Простой корень  $\alpha_0 = \delta - \theta$  – это разность *мнимого корня*  $\delta$  и  $\theta$  – старшего корня алгебры  $\mathfrak{g}$ . Заметим, что кратность корня  $\text{mult}(\alpha)$  в случае аффинной алгебры Ли может быть больше единицы.

Подалгебра  $\mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{g}$ , порожденная генераторами  $H^i, E^\alpha$ , соответствующими положительным корням  $\alpha \in \Delta^+$ , называется подалгеброй Бореля.

*Параболическая подалгебра*  $\mathfrak{p}_I \supset \mathfrak{b}_+$  содержит подалгебру Бореля и порождена некоторым подмножеством простых корней  $\{\alpha_j : j \in I, I \subset \{1 \dots r\}\}$ . Она образована подмножеством генераторов  $\{H^i\} \cup \{E^\alpha : \alpha \in \Delta^+\} \cup \{E^{-\alpha} : \alpha \in \Delta^+, \alpha = \sum_{j \in I} n_j \alpha_j\}$ . *Регулярная подалгебра*  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  определяется корневой системой  $\Delta_{\mathfrak{a}}$ , множество простых корней которой  $\{\beta_i, i = 1, \dots, r_{\mathfrak{a}}\}$  является подмножеством множества  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \cup \{-\theta\}$  корней алгебры  $\mathfrak{g}$ .

*Группа Вейля*  $W_{\mathfrak{g}}$  порождается отражениями  $\{s_i : \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^* \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*\}$ , соответствующим простым корням  $\{\alpha_i\}$ :

$$s_i \cdot \lambda = \lambda - \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (2.20)$$

Корневая система и характеры представлений инвариантны относительно действия группы Вейля. Корневая система может быть восстановлена из мно-

жества простых корней в результате применения вейлевских отражений.

Группа Вейля конечна для конечномерных алгебр Ли и конечно порождена для аффинных алгебр Ли.

Рассмотрим действие элемента группы Вейля  $s_\alpha s_{\alpha+\delta}$  аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$ , соответствующего простому корню  $\alpha$  конечномерной подалгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Из определения (2.20) легко видеть, что  $s_\alpha s_{\alpha+\delta} \cdot \lambda = \lambda + \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha + \left( \frac{(\alpha, \alpha)}{2(\lambda, \delta)} + (\lambda, \alpha) \right) \delta$ . То есть группа Вейля для аффинной алгебры Ли может быть представлена как полупрямое произведение группы Вейля  $W_{\mathfrak{g}}$  конечномерной подалгебры  $\mathfrak{g}$  и трансляций, соответствующих корням  $\mathfrak{g}$ .

Элемент группы Вейля можно представить как произведение простых отражений различными способами. Число простых отражений в кратчайшей последовательности, представляющей элемент  $w \in W_{\mathfrak{g}}$  называется *длиной*  $w$  и обозначается  $l(w)$ . Мы также используем обозначение  $\epsilon(w) = (-1)^{l(w)}$  для четности числа отражений Вейля, порождающих  $w$ .

Фундаментальная область  $\bar{C}$  для действия группы Вейля  $W_{\mathfrak{g}}$  на  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$  описывается условием  $\xi \in \bar{C} \Leftrightarrow (\xi, \alpha_i) \geq 0$  для всех простых корней  $\alpha_i$ . Ее называют *главной камерой Вейля*.

*Матрица Картана*  $A$  строится из произведений простых корней

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}. \quad (2.21)$$

Она может использоваться для компактного описания алгебры Ли и ее коммутационных соотношений в базисе Шевалле [47], [54], [55].

Форма, заданная матрицей Картана (2.21) определяет базис, дуальный к базису простых корней. Он называется *базисом фундаментальных весов*. Мы обозначаем его элементы через  $\omega_i$ :

$$\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij} \quad (2.22)$$

Для конечномерной алгебры Ли существует  $r$  фундаментальных весов  $\omega_i$ ,  $i =$



$1, \dots, r$ . Для аффинной алгебры Ли есть дополнительный фундаментальный вес  $\omega_0 = \lambda$ ,  $(\lambda, \delta) = 1$ ,  $(\lambda, \lambda) = (\delta, \delta) = 0$ . Другие фундаментальные веса равны  $\omega_i = a_i^\vee \omega_0 + \overset{\circ}{\omega}_i$ , где  $\overset{\circ}{\omega}_i$  – это фундаментальные веса конечномерной подалгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Сумма фундаментальных весов  $\rho = \sum_i \omega_i$  называется *вектором Вейля* и играет большую роль в теории представлений.

### 2.1.2. Модули старшего веса

Мы рассматриваем конечно-порожденные  $\mathfrak{g}$ -модули  $V$ , такие, что  $V = \bigoplus_{\xi \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*} V_{\xi}$ , где каждое подпространство  $V_{\xi}$  конечномерно и существует конечный набор весов  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , порождающий весовую систему модуля  $V$ . То есть, если  $\dim V_{\xi} \neq 0$ , то  $\xi = \lambda_i - \sum_{k=1, \dots, r} n_k \alpha_k$ , где  $n_k \in \mathbb{Z}_+$  (См. [56], [57]).

Модули старшего веса содержат единственный старший вес  $\mu$  и все остальные веса в них могут быть получены вычитанием линейных комбинаций простых корней  $\lambda = \mu - n_1 \alpha_1 - \dots - n_r \alpha_r$ ,  $n_k \in \mathbb{Z}_+$ .

Самый простой тип модулей старшего веса – это модули Верма  $M^{\mu}$ . Модуль Верма можно определить, как пространство

$$M^{\mu} = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b}_+)}{\otimes} D^{\mu}(\mathfrak{b}_+), \quad (2.23)$$

где действие  $\mathfrak{g}$  дается умножением в  $U(\mathfrak{g})$ , а  $\underset{U(\mathfrak{b}_+)}{\otimes}$  значит, что действие элементов  $U(\mathfrak{b}_+)$  “проносится” через левую часть тензорного произведения направо. Здесь  $\mathfrak{b}_+$  – подалгебры Бореля, а  $D^{\mu}(\mathfrak{b}_+)$  – представление  $\mathfrak{b}_+$ , такое, что  $D(E^{\alpha}) = 0$ ,  $D(H) = \mu(H)$  для любого положительного корня  $\alpha$ . Элементы  $\mathfrak{g}$  действуют слева и мы должны прокоммутировать все элементы  $\mathfrak{b}_+$  направо, чтобы они могли подействовать на пространстве  $D^{\lambda}(\mathfrak{b}_+)$ .

Кратности весов в модуле Верма можно определить из формулы Вейля

для характеров

$$\mathrm{ch} M^\mu = \frac{e^\mu}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}} = \frac{e^\mu}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}} \quad (2.24)$$

Здесь мы воспользовались тождеством Вейля для знаменателей

$$R := \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}. \quad (2.25)$$

У модуля Верма  $M^\mu$  есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль  $L^\mu$  является *неприводимым модулем старшего веса*.

Неприводимые модули старшего веса не имеют нетривиальных подмодулей. Формула Вейля-Каца для характеров неприводимых модулей старшего веса имеет вид

$$\mathrm{ch} L^\mu = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu + \rho) - \rho}}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \mathrm{ch} M^{w(\mu + \rho) - \rho} \quad (2.26)$$

То есть характер неприводимого модуля старшего веса можно рассматривать как комбинацию характеров модулей Верма. Этот факт следует из существования резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда [58, 59], см. также [56].

Конструкция обобщенного (или параболического) модуля Верма аналогична формуле (2.23), но представление подалгебры Бореля заменяется на представление параболической подалгебры  $\mathfrak{p}_I \supset \mathfrak{b}_+$ , определяющейся некоторым подмножеством  $\{\alpha_I\}$  простых корней  $I \subset \{1, \dots, r\}$ :

$$M_I^\mu = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{\mathfrak{p}_I}^\mu.$$

Введем формальный элемент  $R_I := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{p}_I}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ . Тогда характер обобщенного модуля Верма можно записать в виде

$$\mathrm{ch} M_I^\mu = \frac{1}{R_I} \mathrm{ch} L_{\mathfrak{p}_I}^\mu. \quad (2.27)$$

Формула Вейля для характеров может быть использована для получения рекуррентных соотношений на кратности весов. Эти соотношения важны для вычислений [60, 61].

Для неприводимых модулей старшего веса рекуррентные соотношения имеют вид

$$m_\xi = - \sum_{w \in W \setminus e} \epsilon(w) m_{\xi - (w(\rho) - \rho)} + \sum_{w \in W} \epsilon(w) \delta_{(w(\mu + \rho) - \rho), \xi}. \quad (2.28)$$

Формулы для модулей Верма и обобщенных модулей Верма отличаются только во вторым членом в правой части. В случае модулей Верма он равен  $\delta_{\xi, \mu}$ . Для обобщенного модуля Верма суммирование во втором члене в правой части равенства (2.28) производится по элементам подгруппы Вейля порожденной отражениями, соответствующими корням  $\{\alpha_I\}$ .

В разделе 2.2 мы покажем, что для модулей старшего веса эти соотношения могут быть получены как частный случай рекуррентных соотношений на коэффициенты ветвления.

Другая рекуррентная формула для кратностей может быть получена из рассмотрения действия элементов Казимира на неприводимых модулях старшего веса [47]:

$$m_\lambda = \frac{2}{(\mu + \rho)^2 - (\lambda + \rho)^2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{k \geq 1} (\lambda + k\alpha, \alpha) m_{\lambda + k\alpha}. \quad (2.29)$$

Эта формула называется формулой Фрейденталю. Заметим, что она применима только для неприводимых модулей

Применение рекуррентных соотношений (2.28) и (2.29) для вычисления кратностей весов обсуждается в разделе 5.2.2.

## 2.2. Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления

Рассмотрим интегрируемый модуль  $L^\mu$  алгебры  $\mathfrak{g}$  со старшим весом  $\mu$  и пусть  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  – редуктивная подалгебра  $\mathfrak{g}$ . Модуль  $L^\mu$  вполне приводим по

отношению к  $\mathfrak{a}$ .

$$L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu.$$

Используем оператор проекции  $\pi_{\mathfrak{a}}$  (на весовое пространство  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ ) и перепишем это разложение в терминах формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}} \circ ch(L^\mu) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} ch(L_{\mathfrak{a}}^\nu). \quad (2.30)$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления  $b_\nu^{(\mu)}$ .

### Ортогональная подалгебра и веер вложения.

В этой секции мы введем простые конструкции, которые будут полезны при изучении ветвлений. Важный объект здесь – это “ортогональный партнер”  $\mathfrak{a}_\perp$  редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a}$  в  $\mathfrak{g}$ .

В формуле Вейля-Каца (2.26) и числитель, и знаменатель могут рассматриваться как формальные элементы, содержащие сингулярные веса модулей Верма  $V^\xi$  со старшими весами  $\xi = \mu$  и  $\xi = 0$  [47]. Мы связываем сингулярные элементы с соответствующими интегрируемыми модулями  $L^\mu$  и  $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ :

$$\Psi^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho},$$

$$\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)} := \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w \circ (\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}}.$$

и используем формулы Вейля-Каца в форме

$$ch(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}. \quad (2.31)$$

Применим формулу (2.31) к правилу ветвления (2.30) и получим соотно-

шение, связывающее сингулярные элементы  $\Psi^{(\mu)}$  and  $\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}$  :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}, \\ \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi^{(\mu)}}{R} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{R_{\mathfrak{a}}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь  $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$  – множество положительных корней подалгебры  $\mathfrak{a}$  (без потери общности мы можем считать их векторами из положительного корневого пространства  $\mathfrak{h}^{*+}$  алгебры  $\mathfrak{g}$ ).

Рассмотрим корневое подпространство  $\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^*$ , ортогональное к  $\mathfrak{a}$ ,

$$\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* := \{ \eta \in \mathfrak{h}^* | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \eta(h) = 0 \},$$

и корни (соответственно – положительные корни)  $\mathfrak{g}$ , ортогональные к  $\mathfrak{a}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} &:= \{ \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0 \}, \\ \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+ &:= \{ \beta^+ \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta^+(h) = 0 \}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  подгруппу группы Вейля  $W$ , порожденную отражениями  $w_{\beta}$ , соответствующими корням  $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$ . Подсистема  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  определяет подалгебру  $\mathfrak{a}_{\perp}$  с подалгеброй Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ . Пусть

$$\mathfrak{h}_{\perp}^* := \{ \eta \in \mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\perp}}; \eta(h) = 0 \},$$

рассмотрим подалгебры

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp} &:= \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp} \\ \widetilde{\mathfrak{a}} &:= \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}. \end{aligned}$$

Алгебры  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{a}_{\perp}$  образуют ”ортогональную пару”  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$  подалгебр в  $\mathfrak{g}$ .

Имеет место разложение подалгебры Картана

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}. \quad (2.33)$$

Для подалгебр из ортогональной пары  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$  рассмотрим соответствующие векторы Вейля  $\rho_{\mathfrak{a}}$  и  $\rho_{\mathfrak{a}_\perp}$ , и образуем так называемые "дефекты" вложения  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$  и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} := \rho_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho. \quad (2.35)$$

Рассмотрим сингулярные веса  $\{(w(\mu + \rho) - \rho) \mid w \in W\}$  модуля старшего веса  $L_{\mathfrak{g}}^\mu$  и их проекции на  $h_{\mathfrak{a}_\perp}^*$  (дополнительно сдвинутые на дефект  $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ ):

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}} \circ [w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad w \in W.$$

Среди весов  $\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) \mid w \in W\}$  выберем находящиеся в главной камере Вейля  $\overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}$  и обозначим через  $U$  множество представителей  $u$  классов смежности  $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$ , таких что

$$U := \{u \in W \mid \mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\} \quad . \quad (2.36)$$

Для множества  $U$  введем веса

$$\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}} \circ [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Чтобы упростить вид соотношений мы будем опускать значок "о" при записи проекций весов.

Воспользуемся техникой, предложенной в работе [46] для записи рекуррентных свойств коэффициентов ветвления  $b_\nu^{(\mu)}$ . Один из инструментов в ней – это множество весов  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , называющееся веером вложения. Так как мы рассматриваем общую ситуацию (где вложение не обязательно максимально) понятие веера вложения нуждается в уточнении:

**Определение 9.** Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}}\alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}\alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \quad (2.37)$$

и носитель  $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} \subset P_{\mathfrak{a}}$  функции  $s(\gamma) = \det(\gamma)$  :

$$\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} = \{\gamma \in P_{\mathfrak{a}} | s(\gamma) \neq 0\} \quad (2.38)$$

Упорядочение корней в  $\Delta_{\mathfrak{a}}^{\circ}$  индуцирует естественное упорядочение весов в  $P_{\mathfrak{a}}$ .

Обозначим через  $\gamma_0$  наименьший вектор  $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$ . Множество

$$\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}\} \setminus \{0\} \quad (2.39)$$

называется *веером вложения*.

В следующем разделе мы покажем, что веер вложения определяет рекуррентные свойства коэффициентов ветвления. Нужно отметить, что веер вложения универсален и зависит только от вложения.

### Разложение сингулярного элемента.

Теперь покажем, что формула Вейля-Каца для характеров (в терминах сингулярных элементов) представляет собой частный случай более общего соотношения:

**Лемма 1.** Пусть  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$  – ортогональная пара редуктивных подалгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ ,  $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ ,

$L^{\mu}$  – модуль старшего веса с сингулярным элементом  $\Psi^{(\mu)}$ ,

$R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  – знаменатель Вейля для подалгебры  $\mathfrak{a}_{\perp}$ .

Тогда элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right)$  можно разложить в сумму по  $u \in U$  (см. (2.36)) сингулярных весов  $e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}$  с коэффициентами  $\epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}(u)} \right)$ :

$$\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}}(u)} \right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}. \quad (2.40)$$

*Доказательство.* Для  $u \in U$  и  $v \in W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  применим разложение

$$u(\mu + \rho) = \pi_{\mathfrak{a}} u(\mu + \rho) + \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}} u(\mu + \rho)$$

к сингулярному весу

$$\begin{aligned} vu(\mu + \rho) - \rho &= \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} + \pi_{\mathfrak{h}_{\perp}}\rho \\ &\quad + v(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{h}_{\perp}}\rho. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Используем дефект  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  (2.35) чтобы упростить в (2.41) первое слагаемое :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} + \pi_{\mathfrak{h}_{\perp}}\rho &= \\ \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho)) - \pi_{\mathfrak{a}}\rho - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} &= \\ = \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho) - \rho) + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \end{aligned}$$

и второе:

$$\begin{aligned} v(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{h}_{\perp}}\rho &= \\ v(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}u(\mu + \rho) - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho - \pi_{\mathfrak{h}_{\perp}}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} &= \\ = v(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} + \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}. \end{aligned}$$

Эти выражения обеспечивают факторизацию аномального элемента  $\Psi^{\mu}$  и мы видим, что они содержат комбинации сингулярных элементов  $\Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\eta}$  модулей  $L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\eta}$  подалгебры  $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}$ :

$$\begin{aligned} \Psi^{\mu} &= \sum_{u \in U} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \epsilon(v)\epsilon(u)e^{vu(\mu+\rho)-\rho} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu+\rho)-\rho]+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \epsilon(v)e^{v(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}+\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}})-\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu+\rho)-\rho]+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \Psi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \end{aligned}$$

Разделим обе части на элемент Вейля  $R_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}(\beta)}$ , спроектируем их на весовое подпространство  $h_{\mathfrak{a}}^*$  и получим итоговое соотношение:

$$\begin{aligned} \Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})}^{(\mu)} &= \sum_{u \in W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \epsilon(u)e^{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu+\rho)-\rho]} \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}(\beta)}} \right) \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)} \right) e^{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu+\rho)-\rho]}. \end{aligned}$$

□



**Замечание 1.** Это соотношение можно рассматривать как обобщение формулы Вейля для сингулярного элемента  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ : векторы  $\mu_{\mathfrak{a}}(u)$  играют роль сингулярных весов, но вместо определителей  $\epsilon(u)$  появляются произведения  $\epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} \right)$ . Действительно, при  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$  подалгебры  $\mathfrak{a}_{\perp}$  и  $\mathfrak{h}_{\perp}$  тривиальны,  $U = W$ , и исходная формула Вейля с легкостью восстанавливается.

## Построение рекуррентных соотношений.

Рассмотрим правую часть равенства (2.32). Числитель описывает ветвление в терминах сингулярных элементов и, как элемент  $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ , допускает разложение в виде:

$$\sum_{\nu \in \bar{C}_{\mathfrak{a}}} b_{\nu}^{(\mu)} \Psi_{(\mathfrak{a})}^{(\nu)} = \sum_{\lambda \in P_{\mathfrak{a}}} k_{\lambda}^{(\mu)} e^{\lambda}. \quad (2.42)$$

Здесь  $k_{\lambda}^{(\mu)}$  – целочисленные коэффициенты, их знаки зависят от длины элементов группы Вейля в  $\Psi_{(\mathfrak{a})}^{(\nu)}$ . Важно заметить, что  $k_{\lambda}^{(\mu)}$  совпадают с коэффициентами ветвления для всех весов  $\nu$  в главной камере Вейля:

$$b_{\nu}^{(\mu)} = k_{\nu}^{(\mu)} \text{ для } \nu \in \bar{C}_{\mathfrak{a}}. \quad (2.43)$$

Мы называем коэффициенты  $k_{\lambda}$  сингулярными коэффициентами ветвления (см. также [46]).

Теперь мы можем сформулировать основную в этой главе теорему, которая позволит нам рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

**Теорема 2.** Для сингулярных коэффициентов ветвления  $k_{\nu}^{(\mu)}$  (2.42) выполняется соотношение

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} \right) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho) - \rho)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \quad (2.44)$$

*Доказательство.* Перепишем соотношение (2.32) для элемента  $\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}\perp}}$  используя определение (2.38) для носителя  $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$ ,

$$\begin{aligned}\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\perp)}^{(\mu)} &= \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}\perp}}\right) = \\ &= \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}}\alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}\alpha)} \left( \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}} \right) = \\ &= - \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \left( \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+, w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) b_{\nu}^{(\mu)} e^{w(\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}} \right) \\ &= - \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \left( \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+, w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) b_{\nu}^{(\mu)} e^{w(\nu + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}}} \right).\end{aligned}$$

Затем раскроем сумму в скобках (по отношению к формальному базису в  $\mathcal{E}$ ):

$$\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\perp)}^{(\mu)} = - \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \sum_{\lambda \in P_{\mathfrak{a}}} k_{\nu}^{(\mu)} e^{\lambda} = - \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} \sum_{\lambda \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) k_{\nu}^{(\mu)} e^{\lambda - \gamma}.$$

Подставим выражение, полученное в Лемме 1 (в левую часть),

$$\begin{aligned}\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\perp)}^{(\mu)} &= \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\pi_{\mathfrak{a}}(\mu_{\mathfrak{a}}(u))} \dim \left( L_{\mathfrak{a}\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}\perp}(u)} \right) \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho]} \dim \left( L_{\mathfrak{a}\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}\perp}(u)} \right) \\ &= - \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} \sum_{\lambda \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) k_{\nu}^{(\mu)} e^{\lambda - \gamma}.\end{aligned}$$

Из этого равенства немедленно следует

$$\sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\mathfrak{a}\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}\perp}(u)} \right) \delta_{\xi, \pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho]} + \sum_{\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}} s(\gamma) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} = 0, \quad \xi \in P_{\mathfrak{a}}. \quad (2.45)$$

Полученная формула означает, что коэффициенты  $k_{\xi + \gamma}^{(\mu)}$  для  $\gamma \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$  не независимы, а удовлетворяют линейным соотношениям. Вид этих соотношений меняется если тестовый вес  $\xi$  совпадает с одним из “сингулярных весов”  $\{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho] \mid u \in U\}$ . В завершение доказательства мы вычитаем наименьший вес  $\gamma_0 \in \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$  и переходим к суммированию по векторам веера вло-

жения  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  (см. определение 9). Итак, мы получили искомое рекуррентное соотношение (2.44).  $\square$

## Вложения и ортогональные пары подалгебр простых алгебр Ли

В этом разделе мы обсудим некоторые свойства “ортогональных пар” подалгебр простых алгебр Ли классических серий.

Когда  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$  – конечномерные, все регулярные вложения можно получить путем последовательного удаления вершин из расширенной диаграммы Дынкина алгебры  $\mathfrak{g}$  (и  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ = \emptyset$  если  $\mathfrak{a}$  максимальна). Если регулярное вложение для классических серий  $A$ ,  $C$  и  $D$  зафиксировано таким образом, то диаграмма Дынкина для  $\mathfrak{a}_\perp$  получается из расширенной диаграммы  $\mathfrak{g}$  путем удаления поддиаграммы  $\mathfrak{a}$  и соседних вершин:

$\mathfrak{g}$	Расширенная диаграмма $\mathfrak{g}$	Диаграммы подалгебр $\mathfrak{a}$ , $\mathfrak{a}_\perp$	
$A_n$			
$C_n$			
$D_n$			

Таблица 2.1. Подалгебры  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}_\perp$  для классических серий

В случае серии  $B$  ситуация отличается. Причина в том, что в данном случае подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp$  может быть больше, чем результат удаления поддиаграммы  $\mathfrak{a}$  и соседних вершин. Подалгебры ортогональной пары  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{a}_\perp$  не обязаны образовывать прямую сумму в  $\mathfrak{g}$ . Можно явно проверить, что при  $\mathfrak{g} = B_r$  и  $\mathfrak{a} = B_{r_\alpha}$  ортогональная подалгебра – это  $\mathfrak{a}_\perp = B_{r-r_\alpha}$ . Рассмотрим вложение  $B_{r_\alpha} \rightarrow B_r$ ,  $1 < r_\alpha < r$ . В результате удаления простого корня  $\alpha_{r_\alpha-1} = e_{r_\alpha-1} - e_{r_\alpha}$  расширенная диаграмма Дынкина для  $B_r$  разбивается на

несвязные диаграммы  $\mathfrak{a} = B_{r_{\mathfrak{a}}}$  и  $D_{r-r_{\mathfrak{a}}}$ . Однако корневая система  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  содержит не только простые корни  $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{r_{\mathfrak{a}}-2} - e_{r_{\mathfrak{a}}-1}, e_1 + e_2\}$ , но и корень  $e_{r_{\mathfrak{a}}-1}$ . То есть  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  образует систему типа  $B_{r-r_{\mathfrak{a}}}$  и ортогональная пара для вложения  $B_{r_{\mathfrak{a}}} \rightarrow B_r$  – это  $(B_{r_{\mathfrak{a}}}, B_{r-r_{\mathfrak{a}}})$ . В следующем разделе мы приводим пример такой ортогональной пары для вложения  $B_2 \rightarrow B_4$  (см. Рис. 2.3).

Полная классификация регулярных подалгебр аффинных алгебр Ли приведена в недавней работе [62]. Из полной классификации максимальных специальных подалгебр классических алгебр Ли [63] мы получаем следующий список пар ортогональных подалгебр  $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp}$ :

$$\begin{aligned} su(p) \oplus su(q) &\subset su(pq) \\ so(p) \oplus so(q) &\subset so(pq) \\ sp(2p) \oplus sp(2q) &\subset so(4pq) \\ sp(2p) \oplus so(q) &\subset sp(2pq) \\ so(p) \oplus so(q) &\subset so(p+q) \text{ для нечетных } p \text{ и } q. \end{aligned}$$

## Алгоритм рекурсивного вычисления коэффициентов ветвления

Рекуррентные соотношения (2.44) позволяют нам сформулировать алгоритм для рекурсивного вычисления коэффициентов ветвления. При этом для работы алгоритма не требуется построение модуля  $L_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  или какого-то из модулей  $L_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}$

Алгоритм состоит из следующих шагов:

- (i) Построить корневую систему  $\Delta_{\mathfrak{a}}$  для вложения  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ .
- (ii) Выбрать все положительные корни  $\alpha \in \Delta^+$ , ортогональные к  $\mathfrak{a}$ , то есть сформировать множество  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$ .
- (iii) Построить множество  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ . Соотношение (2.37) определяет знаковую

функцию  $s(\gamma)$  и множество  $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$ . Вычитание наименьшего веса  $\gamma_0$  дает веер вложения (2.39):  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}\} \setminus \{0\}$ .

- (iv) Построить множество  $\widehat{\Psi^{(\mu)}} = \{w(\mu + \rho) - \rho; w \in W\}$  сингулярных весов для  $\mathfrak{g}$ -модуля  $L^{(\mu)}$ .
- (v) Выбрать веса  $\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) = \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}[w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} \in \overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}}\}$ . Так как множество  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$  фиксировано, легко осуществить проверку принадлежности веса  $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w)$  к главной камере Вейля  $\overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}}$  (достаточно вычислить скалярные произведения с фундаментальными весами  $\mathfrak{a}_\perp^+$ ).
- (vi) Для весов  $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w)$  вычислить размерности соответствующих модулей,  $\dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)} \right)$ , используя формулу Вейля для размерностей. Затем построить сингулярный элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$ .
- (vii) Вычислить аномальные коэффициенты ветвления используя рекуррентное соотношение (2.44) и выбрать среди них те, которые соответствуют весам в главной камере Вейля  $\overline{C_{\mathfrak{a}}}$ .

Можно ускорить работу алгоритма путем однократного вычисления представителей классов смежности  $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$ .

Следующий раздел состоит из примеров, иллюстрирующих применение данного алгоритма.

## 2.3. Примеры

### 2.3.1. Ветвления модулей конечномерных алгебр Ли

#### Регулярное вложение $A_1$ в $B_2$

Рассмотрим регулярное вложение  $A_1 \rightarrow B_2$ . Простые корни  $\alpha_1, \alpha_2$  алгебры  $B_2$  обозначены пунктирными стрелками на Рисунке 2.1. Мы обознача-

ем соответствующие элементарные отражения через  $w_1, w_2$ . Простой корень  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$  алгебры  $A_1$  показан серым цветом.

Выполним редукцию фундаментального представления  $L_{B_2}^{(1,0)=\omega_1}$  ( $\omega_1$  – черная стрелка на Рисунке 2.1) в соответствии с алгоритмом. Корень  $\alpha_1$  ортогонален к  $\beta$ , так что  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ = \{\alpha_1\}$  (шаг (ii)). В соответствии с Определением 9 веер вложения  $\Gamma_{A_1 \rightarrow B_2}$  (шаг (iii)) состоит из двух весов:

$$\Gamma_{A_1 \rightarrow B_2} = \{(1; 2), (2; -1)\},$$

где вторая компонента – это значение знаковой функции  $s(\gamma)$ . Сингулярные веса  $\{w(\omega_1 + \rho) - \rho; w \in W\}$  (шаг (iv)) показаны кругами с подписанными значениями  $\epsilon(w)$ . Пространство  $U$  представляет собой факторпространство  $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$ , где  $W_{\mathfrak{a}_\perp} = \{e, w_1\}$ . Это означает, что сингулярные веса, находящиеся над прямой, заданной корнем  $\beta$ , принадлежат главной камере Вейля  $\overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}$ . Из формулы (2.35) мы получаем  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} = 0$  и  $\mathfrak{h}_\perp = 0$ , то есть  $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(w) = \pi_{\mathfrak{a}_\perp}[w(\mu + \rho) - \rho]\}$ . Значит есть четыре старших веса для  $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей. В базисе фундаментального веса  $\frac{1}{2}\alpha_1$  алгебры  $\mathfrak{a}_\perp$  координаты этих весов  $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) = \pi_{\mathfrak{a}_\perp}[u(\mu + \rho) - \rho] | u \in U\}$  равны  $\{(1) (2) (2) (1)\}$  (шаг v). На Рисунке (2.2) соответствующие весовые диаграммы  $\{\mathcal{N}_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}\}$  построены из весов  $\{\mu_{\mathfrak{a}}(u)\} = \{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho]\} = \{(1) (0) (-4) (-5)\}$  подалгебры  $\mathfrak{a}$ . В действительности весовые диаграммы нам не нужны, достаточно знать лишь размерности модулей  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  умноженные на  $\epsilon(u)$  (шаг vi). Полученные значения должны быть связаны с точками  $\{(1) (0) (-4) (-5)\}$  в  $P_{\mathfrak{a}}$ . Сингулярный элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$  содержит следующий набор весов и их сингулярных кратностей:

$$\{(1; 2), (0; -3), (-4; 3), (-5; -2)\}. \quad (2.46)$$

Применяя формулу (2.44) с веером  $\Gamma_{A_1 \rightarrow B_2}$  к множеству (2.46) (шаг vii) мы получаем нули для весов больше старшего сингулярного вектора  $(1; 2)$  и  $k_1^{(1,0)} = 2$  для самого вектора  $(1; 2)$ . Для сингулярного веса  $(0; -3)$  на границе

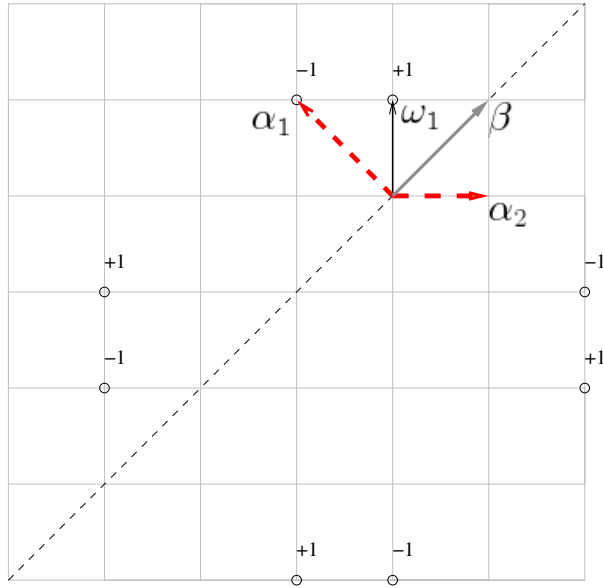


Рис. 2.1. Регулярное вложение  $A_1$  в  $B_2$ . Простые корни  $\alpha_1, \alpha_2$  алгебры  $B_2$  обозначены пунктирными стрелками. Простой корень  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$  подалгебры  $A_1$  показан серым цветом. Старший вес фундаментального представления  $L_{B_2}^{(1,0)=\omega_1}$  выделен черным. Веса сингулярного элемента  $\Psi^{(\omega_1)}$  отмечены кругами с подписанными значениями соответствующих определителей  $\epsilon(w)$ .

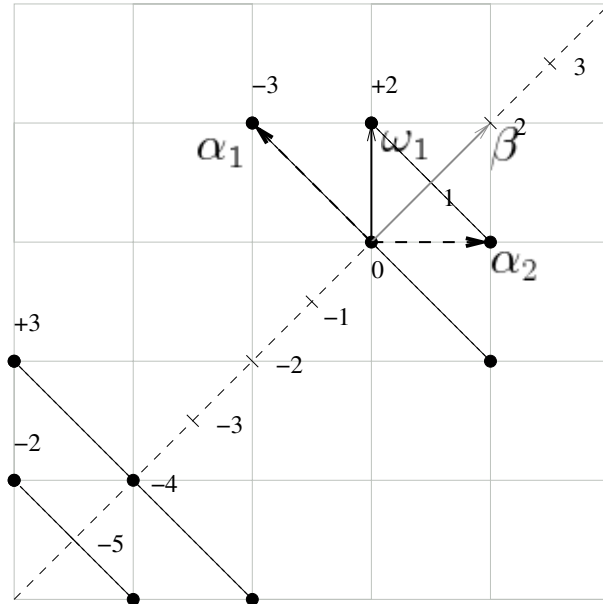


Рис. 2.2. Здесь диаграмма, показанная выше (Рисунок 2.1), дополнена весами  $(\mathfrak{a}_\perp = A_1)$ -модулей  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ , построенных в точках  $\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho]$  и показанных пунктирными линиями. Подписи к старшим весам  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$  представляют собой значения произведений  $\epsilon(u) \dim \left( L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \right)$ . Координаты вдоль корня  $\beta$  указаны по отношению к фундаментальному весу  $\mathfrak{a}$ .

$\bar{C}_a^{(0)}$  рекуррентное соотношение дает

$$k_0^{(1,0)} = -1 \cdot k_2^{(1,0)} + 2 \cdot k_1^{(1,0)} - 3 \cdot \delta_{0,0} = 1,$$

и редукция завершена:  $L_{B_2 \downarrow A_1}^{\omega_1} = 2L_{A_1}^{\omega_{(A_1)}} \oplus L_{A_1}^{2\omega_{(A_1)}}$ .

### Вложение $B_2$ в $B_4$

Рассмотрим регулярное вложение  $B_2 \rightarrow B_4$ . Соответствующие диаграммы Дынкина показаны на Рисунке 2.3.

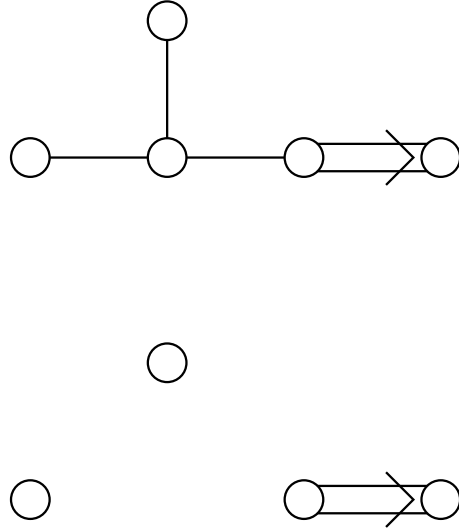


Рис. 2.3. Регулярное вложение  $B_2 \rightarrow B_4$  получается путем исключения вершины из диаграммы Дынкина. Напомним, что в данном случае  $\mathfrak{a}_\perp$  равна  $B_2$ , тогда как на диаграмме видна только подалгебра  $A_1 \oplus A_1$  (см. раздел 2.2).

В ортогональном базисе  $\{e_1, \dots, e_4\}$  простые и положительные корни алгебры  $B_4$  равны

$$S_{B_4} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4\},$$

$$\Delta_{B_4}^+ = \{(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, e_1 - e_3, e_2 - e_4, e_3 + e_4, e_3, e_1 - e_4, \\ e_2 + e_4, e_2, e_1 + e_4, e_2 + e_3, e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)\}$$



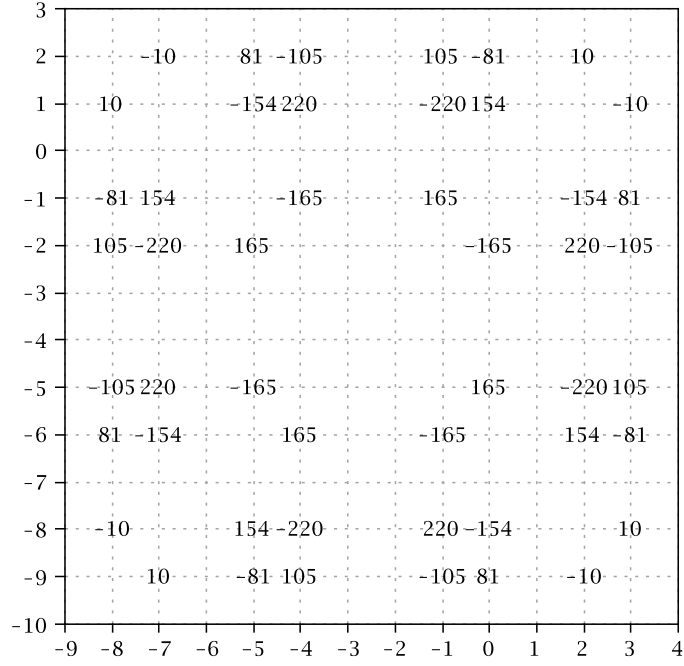


Рис. 2.4. Сингулярный элемент  $e^{\gamma_0} \Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$  показан в весовом подпространстве  $P_{\mathfrak{a}}$ , где  $\mathfrak{a} = B_2$  и базис равен  $\{e_3, e_4\}$ . Показаны спроектированные сингулярные веса  $\{\pi_{\mathfrak{a}}[u(\mu + \rho) - \rho] + \gamma_0 | u \in U\}$ , сдвинутые на  $\gamma_0$  и снабженные множителям  $\epsilon(u) \dim(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)})$ .

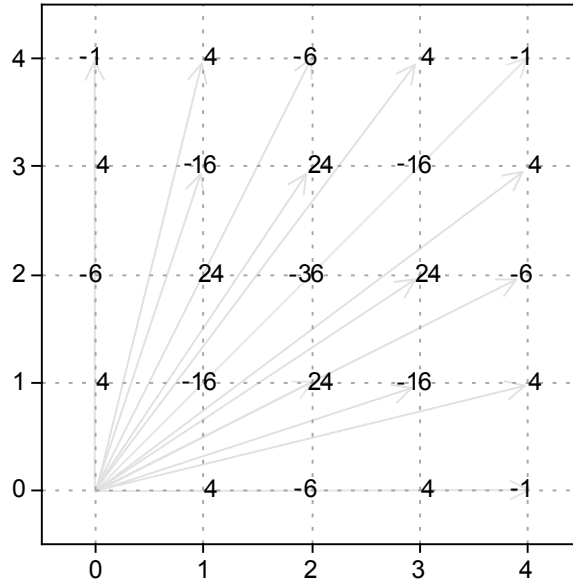


Рис. 2.5. Веер  $\Gamma$  для вложения  $B_2 \rightarrow B_4$  со значениями функции  $s(\gamma + \gamma_0)$ , указанными при соответствующих весах  $\gamma \in \Gamma$ .

Подалгебра  $\mathfrak{a} = B_2$  задается простыми корнями

$$S_{B_2} = \{e_3 - e_4, e_4\}.$$

Ее ортогональный партнер  $\mathfrak{a}_\perp = B_2$  определяется корнями

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{a}_\perp} &= \{e_1 - e_2, e_2\}, \\ \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ &= \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_1, e_2\}. \end{aligned}$$

После определения множества  $\Delta_{B_4}^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$  можно построить веер вложения  $\Gamma_{B_2 \rightarrow B_4}$  применяя Определение 9. Так как для этого вложения  $s(\gamma_0) = -1$ , в рекуррентном соотношении нам нужен только множитель  $s(\gamma + \gamma_0)$ . Результат построения веера показан на Рисунке 2.5.

Рассмотрим модуль  $L^\mu$  алгебры  $B_4$  со старшим весом  $\mu = 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ ;  $\dim(L^{[0,1,0,2]}) = 2772$ . В данном случае дефект не тривиален,  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} = -2(e_1 + e_2)$ , тогда как  $\mathfrak{h}_\perp = 0$ . Среди сингулярных весов есть 48 векторов со свойством  $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) = \pi_{\mathfrak{a}_\perp}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\}$ . Таким образом мы определили множество  $U = \{u\}$ . Вычислим размерности соответствующих  $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей со старшими весами  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$  (используем формулу Вейля для размерностей) и умножим их на  $\epsilon(u)$ . В результате получим сингулярный элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$ , показанный на Рисунке 2.4.

Теперь поместим веер  $\Gamma$  (см. Рисунок 2.5) в старший из весов, показанных на Рисунке 2.4 и проведем рекурсивное вычисление коэффициентов ветвления (с использованием соотношения (2.44)):

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}} \left( chL_{B_4}^{[0,1,0,2]} \right) &= 6 chL_{B_2}^{[0,0]} + 60 chL_{B_2}^{[0,2]} + 30 chL_{B_2}^{[1,0]} + 19 chL_{B_2}^{[2,0]} + \\ &\quad 40 chL_{B_2}^{[1,2]} + 10 chL_{B_2}^{[0,4]}. \end{aligned}$$

### 2.3.2. Примеры приложений в конформной теории поля

#### Конформные вложения

Как мы уже объясняли в разделе 1.2.1, коэффициенты ветвления для вложения аффинной алгебры Ли в аффинную алгебру Ли можно использовать для построения модулярно-инвариантной статсуммы для моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена в двумерной конформной теории поля ([24], [25], [28], [64]). В этих моделях аффинные алгебры Ли являются алгебрами токов.

Модулярная инвариантность статсуммы необходима для самосогласованности теории на торе и римановых поверхностях высшего рода, что важно для приложений конформной теории поля в теории струн и описании критического поведения.

Простейшая модулярно-инвариантная статсумма имеет диагональный вид:

$$Z(\tau) = \sum_{\mu \in P_{\mathfrak{g}}^+} \chi_{\mu}(\tau) \bar{\chi}_{\mu}(\bar{\tau}) \quad (2.47)$$

Здесь суммирование ведется по множеству старших весов интегрируемых модулей в ВЗНВ-модели, а  $\chi_{\mu}(\tau)$  – это нормированные характеры (см. [24]) этих модулей.

Построение недиагональных модулярных инвариантов – это нетривиальная проблема, хотя для некоторых моделей известна полная классификация модулярных инвариантов [65, 66].

Рассмотрим модель Весса-Зумино-Новикова-Виттена с аффинной алгеброй Ли  $\mathfrak{a}$ . Недиагональные модулярные инварианты этой модели могут быть построены из диагонального инварианта, если существует аффинная алгебра  $\mathfrak{g}$ , такая, что  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Тогда мы можем заменить характеры  $\mathfrak{g}$ -модулей в

диагональной модулярно-инвариантной статсумме (2.47) на разложения

$$\sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \chi_{\nu},$$

содержащие нормированные характеры  $\chi_{\nu}$  соответствующих  $\mathfrak{a}$ -модулей. В результате мы получим недиагональную модулярно-инвариантную статсумму для теории с алгеброй токов  $\mathfrak{a}$ ,

$$Z_{\mathfrak{a}}(\tau) = \sum_{\nu, \lambda \in P_{\mathfrak{a}}^+} \chi_{\nu}(\tau) M_{\nu\lambda} \bar{\chi}_{\lambda}(\bar{\tau}). \quad (2.48)$$

Эффективная процедура редукции существенна для этой конструкции. Вложение должно сохранять конформную инвариантность. Пусть  $X_{-n_j}^{\alpha_j}$  и  $\tilde{X}_{-n_j}^{\alpha'_j}$  – понижающие операторы для алгебры  $\mathfrak{g}$  и подалгебры  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  соответственно. Обозначим через  $\pi_{\mathfrak{a}}$  оператор проекции  $\pi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ . В теории, связанной с  $\mathfrak{g}$  и вакуумом  $|\lambda\rangle$  состояния строятся как

$$X_{-n_1}^{\alpha_1} X_{-n_2}^{\alpha_2} \dots |\lambda\rangle \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots > 0.$$

А для подалгебры  $\mathfrak{a}$  соответствующие состояния имеют вид

$$\tilde{X}_{-n_1}^{\alpha'_1} \tilde{X}_{-n_2}^{\alpha'_2} \dots |\pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\rangle.$$

Инвариантность вакуума под действием  $\mathfrak{g}$  влечет его инвариантность относительно действия  $\mathfrak{a}$ , но это неверно для тензора энергии-импульса. Необходимо, чтобы тензор энергии-импульса объемлющей теории содержал только генераторы  $\tilde{X}$ . Тогда соотношение

$$T_{\mathfrak{g}}(z) = T_{\mathfrak{a}}(z) \quad (2.49)$$

ведет к равенству центральных зарядов

$$c(\mathfrak{g}) = c(\mathfrak{a})$$

и к уравнению

$$\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h_{\mathfrak{g}}^{\vee}} = \frac{x_e k \dim \mathfrak{a}}{x_e k + h_{\mathfrak{a}}^{\vee}}. \quad (2.50)$$

Здесь  $x_e$  – так называемый “индекс вложения”:  $x_e = \frac{|\pi_{\mathfrak{a}} \theta|^2}{|\theta_{\mathfrak{a}}|^2}$ , где  $\theta, \theta_{\mathfrak{a}}$  – старшие корни алгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$ , а  $h_{\mathfrak{g}}^{\vee}$  и  $h_{\mathfrak{a}}^{\vee}$  – дуальные числа Кокстера.

Можно показать, что решения уравнения (2.50) существуют только для уровня  $k = 1$  [24].

Полная классификация конформных вложения дана в работе [64].

Если рассмотреть соотношение (2.50) и асимптотику функций ветвления, то можно доказать теорему о конечной приводимости [26]. Она утверждает, что для конформного вложения  $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$  лишь конечное число коэффициентов ветвления отлично от нуля.

**Замечание 2.3.1.** *Ортогональная подалгебра  $\mathfrak{a}_{\perp}$  всегда тривиальна в случае конформного вложения  $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим разложение тензора энергии-импульса на моды:

$$T(z) = \frac{1}{2(k + h^v)} \sum_n z^{-n-1} L_n.$$

Моды  $L_n$  представляют собой комбинации нормально упорядоченных произведений генераторов алгебры  $\mathfrak{g}$ ,

$$L_n = \frac{1}{2(k + h^v)} \sum_{\alpha} \sum_m : X_m^{\alpha} X_{n-m}^{\alpha} : .$$

При конформном вложении тензоры энергии-импульса  $T_{\mathfrak{g}}(z)$  и  $T_{\mathfrak{a}}(z)$  равны (см. (2.49)).

В эти комбинации мы должны подставить генераторы подалгебры  $\mathfrak{a}$  выраженные через генераторы  $\mathfrak{g}$  и получить тензор энергии-импульса  $T_{\mathfrak{g}}$ . Но если набор генераторов, связанных с  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$  не пуст, это не возможно, так как  $T_{\mathfrak{g}}$  содержит генераторы  $X_n^{\alpha}$ , где  $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ .  $\square$

## Специальное вложение $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2$ .

Рассмотрим следующие пример аффинной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и аффинной подалгебры  $\mathfrak{a}$ :  $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2$  и вложение является аффинным расширением специального вложения  $A_1 \rightarrow A_2$  с индексом вложения  $x_e = 4$ . Так как мы должны рассматривать  $\mathfrak{g}$ -модули уровня один, соответствующие  $\mathfrak{a}$ -модули будут иметь уровень  $\tilde{k} = kx_e = 4$ .

Существует три фундаментальных веса алгебры  $\hat{A}_2$  имеющих уровень один. Легко видеть, что множество  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}$  пусто и подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp = 0$ . Тогда  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} = 0$ ,  $\mathfrak{h}_\perp$  – одномерная абелева подалгебра и размерность  $\tilde{\mathfrak{a}}_\perp = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$  также равна 1. Удобно выбрать классический корень для подалгебры  $\hat{A}_1$  равным  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

Используем Определение (9) и построим веер  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2}$ . В этом случае  $\gamma_0 = 0$  и знак  $s(0) = -1$ , то есть мы используем знаковую функцию  $s(\gamma)$  (см. Рисунок 2.6).

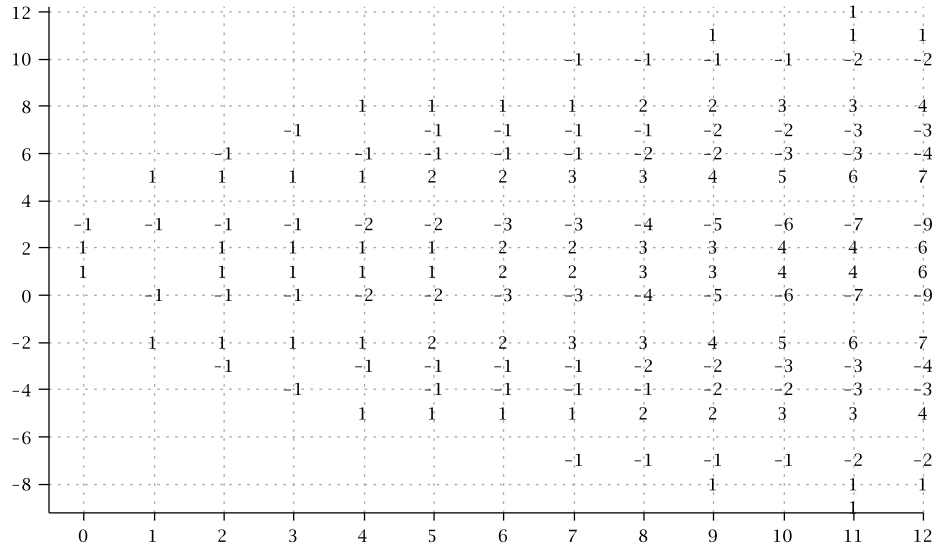


Рис. 2.6. Веер  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2}$  для вложения  $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2$  в базисе  $\{\beta, \delta\}$ . Заметим, что  $\gamma_0 = 0$  и значения  $s(\gamma)$  приписаны к весам  $\gamma \in \Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2}$

Рассмотрим модуль  $L^{\omega_0=(0,0;1;0)}$ . Здесь мы используем обозначение (конечномерная часть; уровень; грейд) для старшего веса и координаты конеч-

номерной части даются индексами Дынкина (см. раздел 2.1.1).

Множество весов  $\widehat{\Psi^{(\omega_0)}}$  показано на Рисунке 2.7 вплоть до шестого грейда.

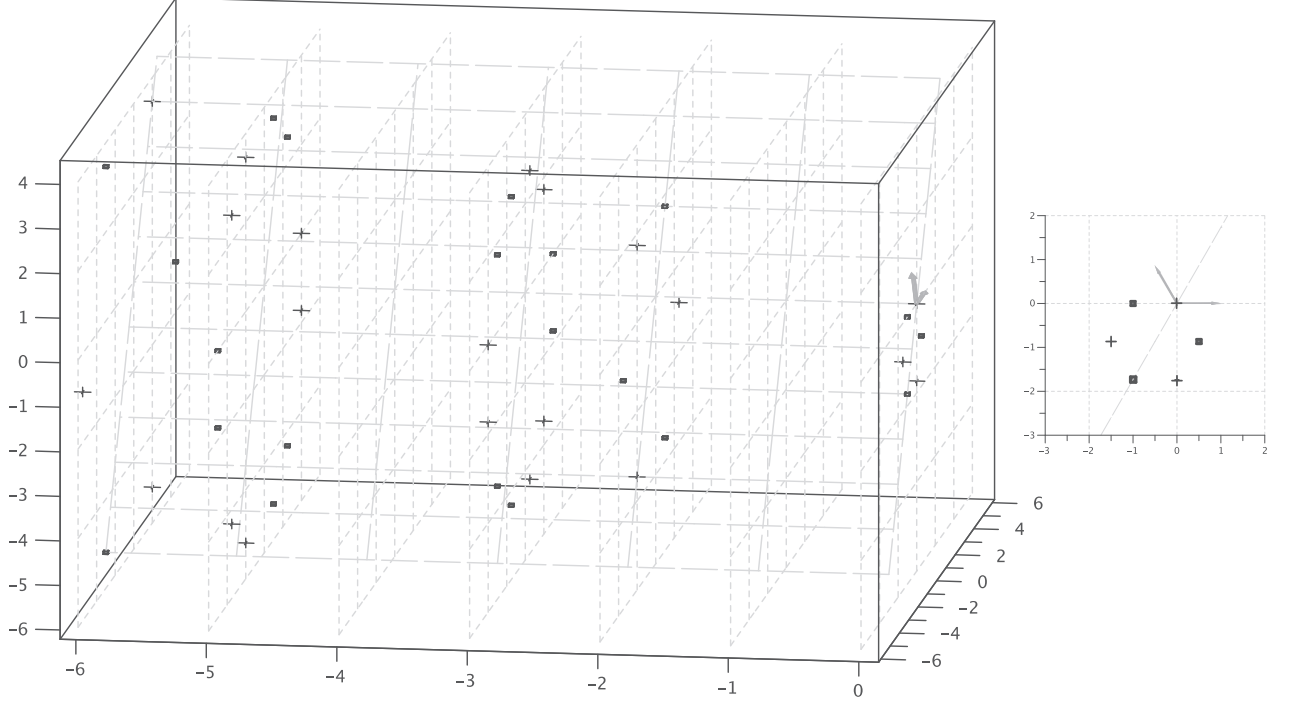


Рис. 2.7. Сингулярные веса модуля  $L_{A_2}^{\omega_0} = L_{A_2}^{(0,0;1;0)}$ . Классическое сечение (нулевой грейд) диаграммы показано отдельно в правой части рисунка. Мы используем ортогональный базис с единичным вектором, равным  $\alpha_1$ . Веса  $w(\omega_0 + \rho) - \rho$  показаны крестами, если  $\epsilon(w) = 1$  и квадратами при  $\epsilon(w) = -1$ . Простые корни классической подалгебры  $A_2$  показаны серым, а диагональная плоскость соответствует подалгебре Картана вложенной алгебры  $\hat{A}_1$ .

Следующий шаг состоит в проектировании сингулярных весов на  $P_{\hat{A}_1}$ . В результате получается элемент  $\Psi_{(\hat{A}_1, \mathfrak{a}_\perp=0)}^{(\omega_0)}$ , изображенный на Рисунке 2.8 вплоть до двенадцатого грейда.

Используя рекуррентное соотношение (2.44) с веером  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2}$  и сингулярными весами  $\Psi_{(\hat{A}_1, \mathfrak{a}_\perp=0)}^{(\omega_0)}$ , мы получаем сингулярные коэффициенты ветвления, показанные на Рисунке 2.9. Внутри камеры Вейля  $\bar{C}_{\hat{A}_1}$  (ее границы

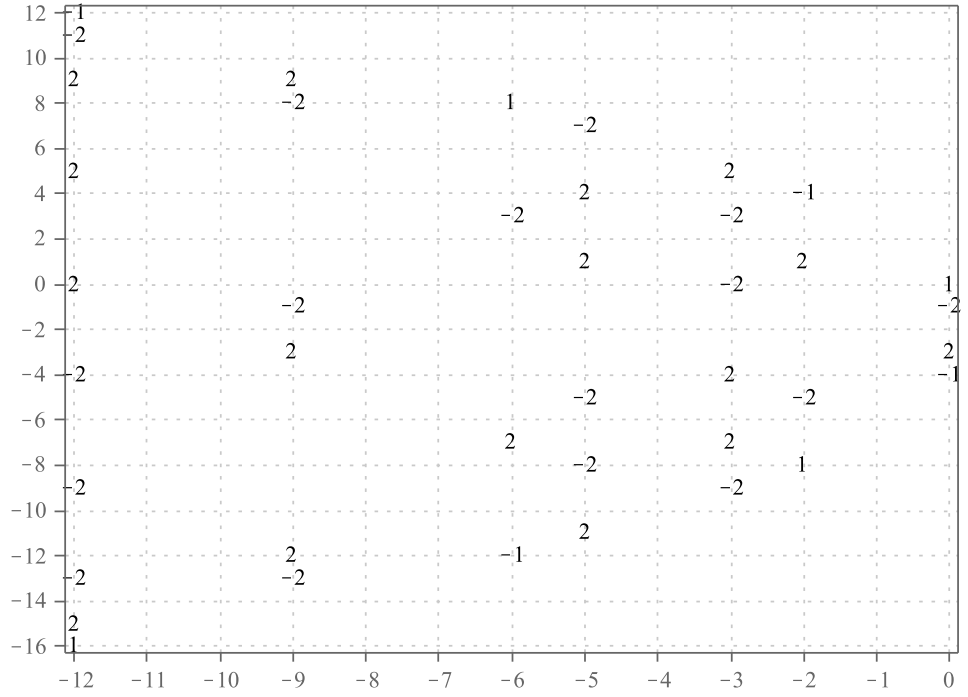


Рис. 2.8. Сингулярный элемент  $\Psi_{(\hat{A}_1, \mathfrak{a}_\perp=0)}^{(\omega_0)}$  показан в  $P_{\hat{A}_1}$  с базисом  $\{\beta, \delta\}$ .

показаны на Рисунке 2.9) находятся только два ненулевых сингулярных веса и оба они имеют кратность 1. Это старшие веса подмодулей  $\mathfrak{a}$  и их кратности равны коэффициентам ветвления. То есть мы получаем разложение

$$L_{\hat{A}_2 \downarrow \hat{A}_1}^{(0,0;1;0)} = L_{\hat{A}_1}^{(0;4;0)} \oplus L_{\hat{A}_1}^{(4;4;0)}.$$

Заметим, что теорема о конечной приводимости выполняется.

Тот же веер  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2}$  можно использовать для других модулей старшего веса  $L_{\hat{A}_2}^\mu$ . В частности для неприводимых модулей уровня один мы получаем тривиальное ветвление:

$$\begin{aligned} L_{\hat{A}_2 \downarrow \hat{A}_1}^{(1,0;1;0)} &= L_{\hat{A}_1}^{(2;4;0)}, \\ L_{\hat{A}_2 \downarrow \hat{A}_1}^{(0,1;1;0)} &= L_{\hat{A}_1}^{(2;4;0)}. \end{aligned}$$

Используя эти результаты легко получить модулярно-инвариантную статсумму:

$$Z = \left| \chi_{(4;4;0)} + \chi_{(0;4;0)} \right|^2 + 2\chi_{(2;4;0)}^2.$$



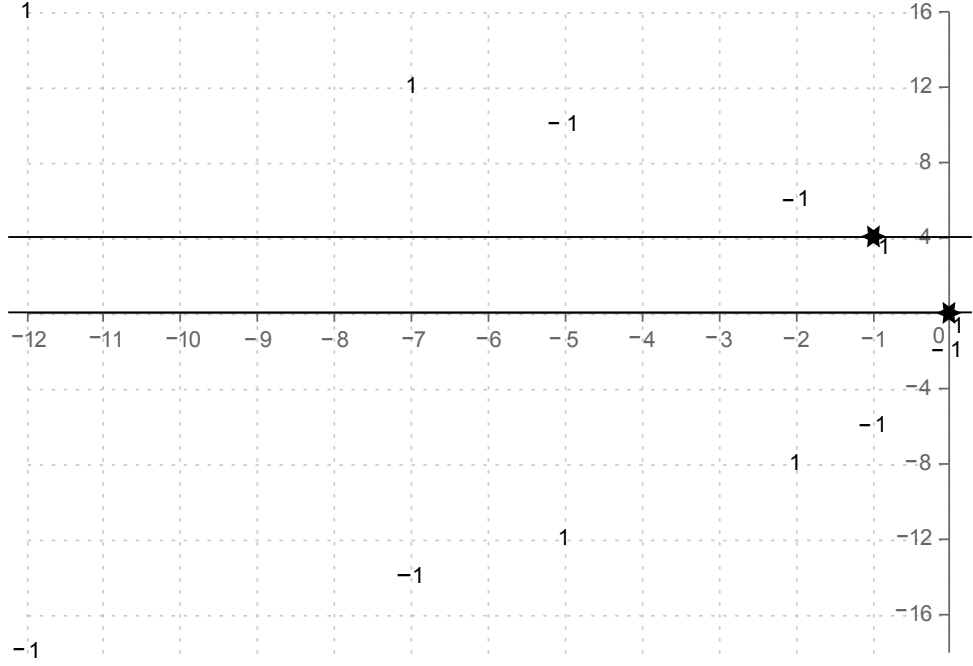


Рис. 2.9. Сингулярные коэффициенты ветвления для вложения  $\hat{A}_1 \subset \hat{A}_2$ . Границы главной камеры Вейля  $\bar{C}_{\hat{A}_1}$  показаны черными линиями. Два сингулярных веса, расположенные в главной камере Вейля, отмечены звездочками. Они оба имеют кратность 1, то есть соответствующие коэффициенты ветвления равны 1.

## Coset-модели

Coset-модели [30], тесно связанные с калибровочными ВЗНВ-моделями, активно изучаются в теории струн, особенно в струнных моделях в пространстве анти де Ситтера [67–71]. Характеры в coset-моделях пропорциональны функциям ветвления.

$$\chi_\nu^{(\mu)}(\tau) = e^{2\pi i \tau (m_\mu - m_\nu)} b_\nu^{(\mu)}(\tau), \quad (2.51)$$

где

$$m_\mu = \frac{|\mu + \rho|^2}{2(k + g)} - \frac{|\rho|^2}{2g}.$$

Проблема построения функций ветвления для coset-моделей рассматривалась в работах [72], [43], [73].

Вернемся к нашему примеру 2.3.1 и рассмотрим аффинное расширение

вложения  $A_1 \rightarrow B_2$ . Так как вложение регулярно и индекс  $x_e = 1$ , модули подалгебры и исходный модуль имеют одинаковый уровень. Множество положительных корней с нулевой проекцией на корневое пространство подалгебры  $\hat{A}_1$  то же, что и в конечномерном случае:  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ = \{\alpha_1\}$  и  $\mathfrak{a}_\perp = A_1$ . Легко видеть, что здесь  $\mathfrak{h}_\perp$  тривиальна и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} = 0$ .

Используя Определение 9 мы получаем веер вложения  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2}$ . Заметим, что наименьший вес веера  $\gamma_0$  равен нулю и  $s(\gamma_0) = -1$ . Значения знаковой функции  $s(\gamma)$  для  $\gamma \in \Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2}$  показаны на Рисунке 2.10. Мы ограничили вычисление двенадцатым грейдом.

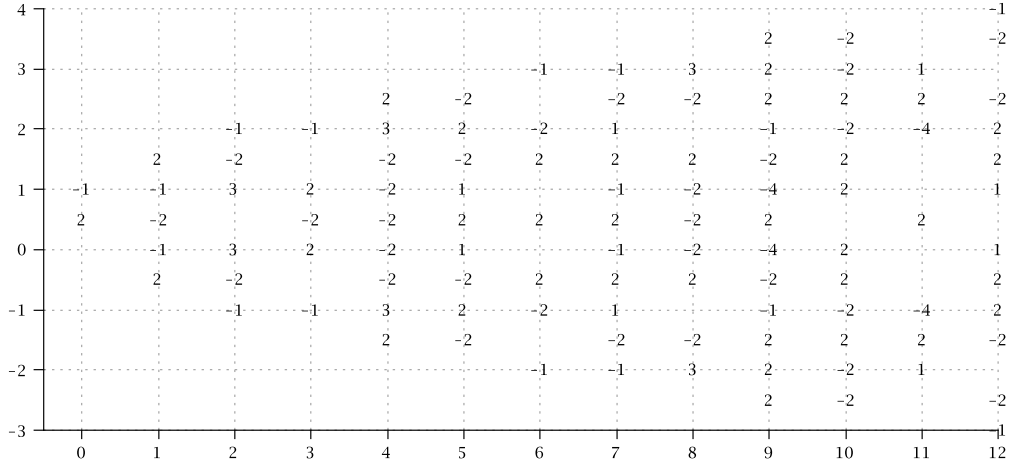


Рис. 2.10. Веер  $\Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2}$  для вложения  $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2$  в базисе  $\{\beta, \delta\}$ . Значения  $s(\gamma)$  показаны для весов  $\gamma \in \Gamma_{\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2}$

Рассмотрим модуль уровня один  $L_{\hat{B}_2}^{(1,0;1;0)}$  со старшим весом  $\omega_1 = (1, 0; 1; 0)$ , где координаты конечномерной части даны в ортогональном базисе  $e_1, e_2$ . Множество сингулярных весов для этого модуля вплоть до шестого грейда приведено на Рисунке 2.11.

В соответствии с рекурсивным алгоритмом 2.2 мы проектируем сингулярные веса на  $P_{\hat{A}_1}$  и вычисляем размерности  $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}(w(\mu+\rho))-\rho_{\mathfrak{a}_\perp}}$ . В нулевом грейде эта проекция дает в точности множество  $\Psi_{(A_1, A_1)}^{(\mu)}$ , соответствующее вложению классической алгебры Ли  $A_1 \rightarrow B_2$ . Это можно заме-

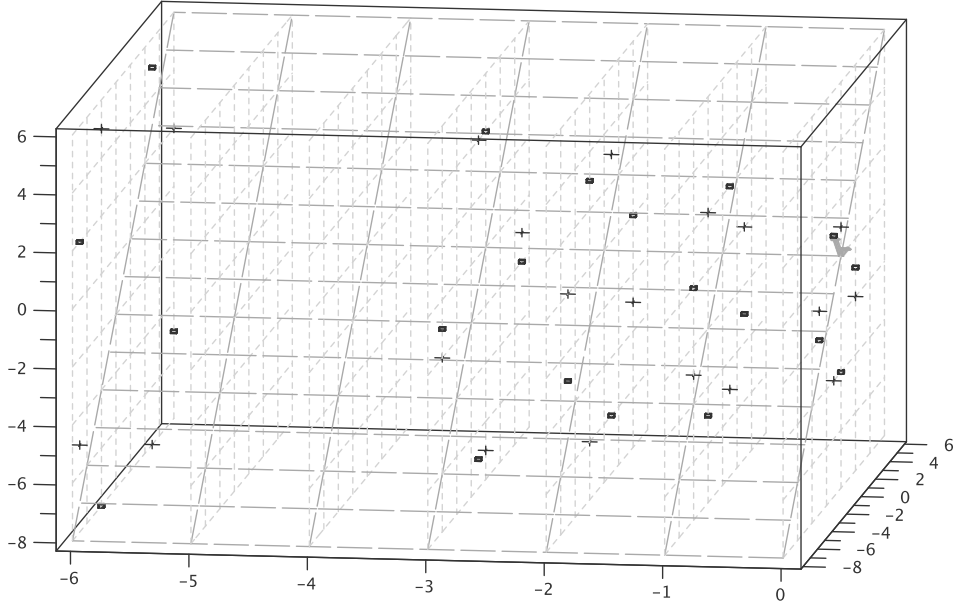
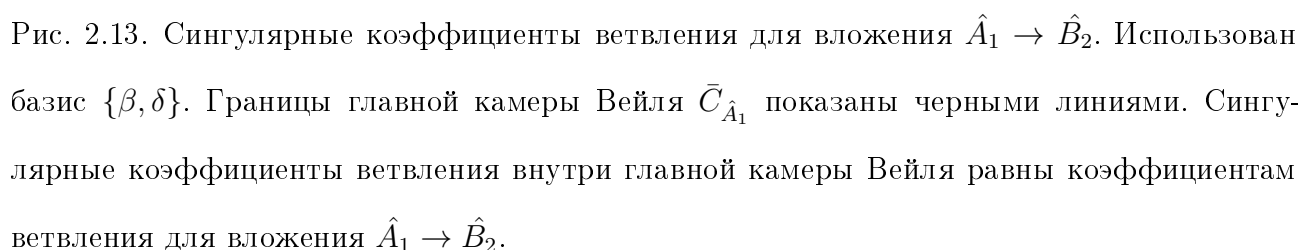
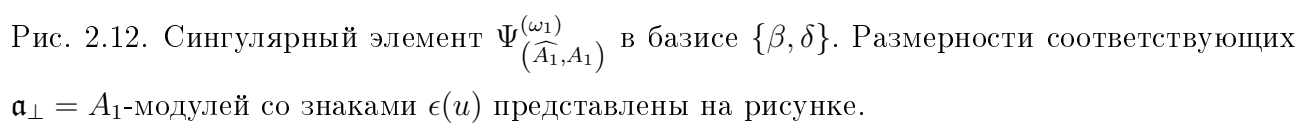


Рис. 2.11. Сингулярные веса модуля  $L_{B_2}^{(1,0;1;0)}$ . В классическом сечении используется стандартный базис  $\{e_1, e_2\}$ . Веса в нулевом грейде те же, что и на Рисунке 2.1. Веса  $w(\omega_1 + \rho) - \rho$  отмечены крестами, если  $\epsilon(w) = 1$  и квадратами при  $\epsilon(w) = -1$ . Простые корни классической подалгебры  $B_2$  показаны серым, а диагональная плоскость соответствует подалгебре Картана вложенной алгебры  $\hat{A}_1$ .

Сравнивая Рисунок 2.1 и Рисунок 2.12, на котором сингулярный элемент  $\Psi_{(\hat{A}_1, A_1)}^{(\mu)}$  для аффинного вложения  $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2$  показан вплоть до двенадцатого грейда.

Кратности старших весов внутри главной камеры Вейля  $\bar{C}_{\hat{A}_1}^{(0)}$  определяют



следующие значения коэффициентов ветвления (до двенадцатого грейда):

$$\begin{aligned}
L_{\hat{B}_2 \downarrow \hat{A}_1}^{\omega_1} = & 2L_{\hat{A}_1}^{\omega_1} \oplus 1L_{\hat{A}_1}^{\omega_0} \oplus 4L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - \delta} \oplus \\
& 2L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - \delta} \oplus 8L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 2\delta} \oplus 8L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 2\delta} \oplus 15L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 3\delta} \oplus \\
& 12L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 3\delta} \oplus 26L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 4\delta} \oplus 29L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 4\delta} \oplus 51L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 5\delta} \oplus \\
& 42L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 5\delta} \oplus 78L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 6\delta} \oplus 85L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 6\delta} \oplus 120L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 7\delta} \oplus \\
& 139L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 7\delta} \oplus 202L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 8\delta} \oplus 222L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 8\delta} \oplus 306L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 9\delta} \oplus \\
& 346L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 9\delta} \oplus 530L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 10\delta} \oplus 482L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 10\delta} \oplus 714L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 11\delta} \oplus \\
& 727L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 11\delta} \oplus 1000L_{\hat{A}_1}^{\omega_1 - 12\delta} \oplus 1100L_{\hat{A}_1}^{\omega_0 - 12\delta}
\end{aligned}$$

Этот результат можно представить в виде набора функций ветвления:

$$b_0^{(\omega_1)} = 1 + 4q^1 + 8q^2 + 15q^3 + 29q^4 + 51q^5 + 85q^6 + 139q^7 + \\ 222q^8 + 346q^9 + 530q^{10} + 797q^{11} + 1180q^{12} + \dots$$

$$b_1^{(\omega_1)} = 2 + 2q^1 + 8q^2 + 12q^3 + 26q^4 + 42q^5 + 78q^6 + 120q^7 + \\ 202q^8 + 306q^9 + 482q^{10} + 714q^{11} + 1080q^{12} + \dots$$

Здесь  $q = \exp(2\pi i\tau)$  и нижний индекс нумерует функции ветвления по их старшим весам в  $P_{\hat{A}_1}^+$ , равным фундаментальным весам  $\omega_0 = \lambda_0 = (0, 1, 0)$ ,  $\omega_1 = \alpha/2 = (1, 1, 0)$ .

Теперь мы можем вернуться к равенству (2.51) и получить выражение для характеров coset-модели  $B_2/A_1$ :

$$\chi_1^{(\omega_1)}(q) = q^{\frac{7}{12}} (2 + 2q^1 + 8q^2 + 12q^3 + 26q^4 + 42q^5 + 78q^6 + 120q^7 + \\ 202q^8 + 306q^9 + 482q^{10} + 714q^{11} + 1080q^{12} + \dots), \\ \chi_0^{(\omega_1)}(q) = q^{\frac{5}{6}} (1 + 4q^1 + 8q^2 + 15q^3 + 29q^4 + 51q^5 + 85q^6 + 139q^7 + \\ 222q^8 + 346q^9 + 530q^{10} + 797q^{11} + 1180q^{12} + \dots).$$

## 2.4. Заключение

Мы продемонстрировали, что техника веера вложения может использоваться для работы с произвольными редуктивными подалгебрами (как максимальными, так и не максимальными). Также показано, что проблема редукции для  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  тесно связана со свойствами ортогонального партнера  $\mathfrak{a}_\perp$  подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp$  соответствует подмножеству положительных корней  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$  в  $\Delta_{\mathfrak{g}}^+$ , которое тривиализует подалгебру Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Веер вложения и множества сингулярных весов для модулей старшего веса алгебры  $\mathfrak{g}$  существенным образом зависят от структуры  $\mathfrak{a}_\perp$  и ее подмодулей. Для веера  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  эта зависимость почти очевидна: в элементе  $\Phi_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  исключены множители, соответствующие корням  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ . Преобразование множества спроектированных сингулярных весов более интересно. Мы показали, что в

новом сингулярном элементе  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$  коэффициенты зависят от  $\mathfrak{a}_\perp$ -подмодулей (их старшие веса  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(u)$  заданы вложением и весами первоначального элемента  $\Psi^\mu$ ). К счастью, для вычислений не требуется никакой информации о  $L_{\{\mathfrak{a}_\perp\}}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(u)}$ -подмодулях, кроме их размерностей. В новом сингулярном элементе  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)}$  кратности весов равны размерностям  $\dim \left( L_{\{\mathfrak{a}_\perp\}}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(u)} \right)$  соответствующих  $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей, умноженным на значения  $\epsilon(u)$ . В результате старшие веса подмодулей  $\mathfrak{a}$  и их кратности удовлетворяют набору линейных соотношений (2.45). Эти свойства выполняются для любой редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$  и уравнения могут быть переписаны в виде рекуррентных соотношений, которые можно решать последовательно.

Эффективность полученного алгоритма была продемонстрирована на различных примерах. В частности, мы рассмотрели построение модулярно-инвариантных статсумм в методе конформных вложений и coset-конструкцию моделей рациональной конформной теории поля. Эти конструкции полезны при изучении ВЗНВ-моделей, возникающих в контексте AdS/CFT соответствия [67–69].

Дальнейшее улучшение алгоритма может быть достигнуто при использовании техники сложенных вееров [60]. Нужно отметить, что даже в случае струнных функций явное решение соответствующих рекуррентных соотношений представляет собой сложную проблему (см. подробности в работе [60]). Тем не менее, мы надеемся, что развитие процедуры сложения позволит получить явные решения хотя бы для некоторых функций ветвления и соответствующих характеров coset-моделей.

## Глава 3

# Коэффициенты ветвления и обобщенная резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда

Как мы показали в предыдущей главе, рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления основываются на определенном разложении сингулярного элемента. В данной главе мы показываем, что такое разложение может использоваться для построения параболических модулей Верма и получения обобщенных формул Вейля-Верма для характеров. Также мы демонстрируем, что ветвление для произвольной редуктивной подалгебры связано с БГГ резольвентой и демонстрирует свойства резольвенты в категории  $\mathcal{O}^p$  [74] (параболического обобщения категории  $\mathcal{O}$  [58]).

Резольвента для неприводимых модулей в терминах бесконечномерных модулей важна для теории интегрируемых спиновых цепочек [75]. В подходе  $\mathcal{Q}$ -оператора Бакстера [76] общие трансфер-матрицы, соответствующие (обобщенным) модулям Верма, факторизуются в произведение операторов Бакстера. Резольвента позволяет вычислить трансфер-матрицы для конечномерных вспомогательных пространств.

Чтобы продемонстрировать связь БГГ резольвенты с ветвлением мы используем рекурсивный подход, представленный в работе [4] (аналогичный подход для максимальных вложений использовался в работе [46]) и изложенный в главе 2. Мы рассматриваем подалгебру  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  вместе с  $\mathfrak{a}_\perp$  – “ортогональным партнером”  $\mathfrak{a}$  по отношению к форме Киллинга, а также подалгебру  $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$ , где  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$ . Для любой редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a}$  алгебра  $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$  регулярна и редуктивна. Для интегрируемого модуля старшего веса  $L^{(\mu)}$  и ортогональной подалгебры  $\mathfrak{a}_\perp$  мы рассматриваем сингулярный элемент  $\Psi^{(\mu)}$  (числитель в формуле Вейля для характеров  $ch(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}}$ , см.,

например, [47]) и знаменатель Вейля  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(0)}$  для ортогонального партнера. Ниже мы показываем, что элемент  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  может быть разложен в комбинацию числителей Вейля  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{(\nu)}$ , где  $\nu \in P_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ . Это разложение дает возможность построить множество модулей старшего веса  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}$ . В том случае, если вложение  $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$  удовлетворяет “стандартным параболическим” условиям, эти модули порождают параболические модули Верма  $M_{(\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g})}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}$ , так что исходный характер  $ch(L^\mu)$  в итоге раскладывается в знакопеременную сумму таких модулей. С другой стороны, если параболическое условие нарушено, конструкция сохраняется и порождает разложение по отношению к набору обобщенных модулей Верма  $M_{(\widetilde{\mathfrak{b}}_\perp, \mathfrak{g})}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp}}$ , где  $\widetilde{\mathfrak{b}}_\perp$  уже не является подалгеброй в  $\mathfrak{g}$ , а оказывается сжатием  $\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp$ .

Некоторые общие свойства предложенного разложения формулируются в терминах формального элемента  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , называемого “веером вложения”. Использование этого инструмента позволило сформулировать простой и явный алгоритм для вычисления правил ветвления, подходящий для произвольной (максимальной или не максимальной) подалгебры в аффинной алгебре Ли [4].

Возможные обобщения полученных результатов обсуждаются в Разделе 3.3.

### 3.1. Ортогональная подалгебра и сингулярные элементы

В этом разделе мы покажем, как рекуррентный подход к проблеме ветвления естественным образом приводит к представлению формального характера  $\mathfrak{g}$ -модуля в виде комбинации характеров, соответствующих параболическим (обобщенным) модулям Верма. Рассмотрим редуктивную алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  и ее редуктивную подалгебру  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Пусть  $L^\mu$  – интегрируемый модуль старшего веса алгебры  $\mathfrak{g}$ ,  $\mu \in P^+$ . Будем считать  $L^\mu$  вполне приводимым по



отношению к подалгебре  $\mathfrak{a}$ ,

$$L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu.$$

Это разложение может быть записано в терминах формальных характеров с использованием оператора проекции  $\pi_{\mathfrak{a}}$  (на весовое пространство  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ ):

$$\pi_{\mathfrak{a}} ch(L^\mu) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} ch(L_{\mathfrak{a}}^\nu). \quad (3.1)$$

Для модуля  $L^\mu$  существует БГГ резольвента (см. [39, 58, 59] и [56]). Все члены фильтрующей последовательности представляются суммами модулей Верма со старшими весами  $\nu$ , сильно связанными с  $\mu$ :

$$\{\nu\} = \{w(\mu + \rho) - \rho \mid w \in W\}.$$

### 3.1.1. Ортогональная подалгебра

Пусть  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$  – подалгебра Картана в  $\mathfrak{g}$ . Для  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  введем “ортогонального партнера”  $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ .

Рассмотрим корневое подпространство  $\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^*$ , ортогональное к  $\mathfrak{a}$ ,

$$\mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* := \{\eta \in \mathfrak{h}^* \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \eta(h) = 0\},$$

и корни  $\mathfrak{g}$  (соответственно, положительные корни), ортогональные к  $\mathfrak{a}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{a}_\perp} &:= \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0\}, \\ \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+ &:= \{\beta^+ \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta^+(h) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обозначим символом  $W_{\mathfrak{a}_\perp}$  подгруппу  $W$ , порожденную отражениями  $w_\beta$  с корнями  $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ . Корневая подсистема  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}$  определяет подалгебру  $\mathfrak{a}_\perp$ , имеющую подалгебру Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Пусть

$$\mathfrak{h}_\perp^* := \{\eta \in \mathfrak{h}_{\perp \mathfrak{a}}^* \mid \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp}; \eta(h) = 0\};$$

выделим в  $\mathfrak{g}$  подалгебры

$$\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp} := \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}, \quad \widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}. \quad (3.3)$$

Заметим, что  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\perp}$  в общем случае не является подалгеброй в  $\mathfrak{g}$ .

Для подалгебр Картана имеет место разложение

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим векторы Вейля  $\rho_{\mathfrak{a}}$  и  $\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ , соответствующие  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{a}_{\perp}$ . Введем так называемые “дефекты” вложения  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$  и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho, \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} := \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho. \quad (3.5)$$

Для  $\mu \in P^+$  рассмотрим связанные веса  $\{(w(\mu + \rho) - \rho) \mid w \in W\}$  и их проекции на  $h_{\mathfrak{a}_{\perp}}^*$ , дополнительно сдвинутые на вектор дефекта  $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ :

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(w) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad w \in W.$$

Среди весов  $\{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(w) \mid w \in W\}$  всегда можно выбрать те, которые попадают в фундаментальную камеру  $\overline{C_{\mathfrak{a}_{\perp}}}$ . Пусть  $U$  – множество представителей  $u$  классов  $W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ , таких что

$$U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\} \quad . \quad (3.6)$$

Тогда можно выделить подмножества:

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad u \in U, \quad (3.7)$$

и

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad u \in U. \quad (3.8)$$

Заметим, что подалгебра  $\mathfrak{a}_{\perp}$  по определению регулярна, так как она построена на подмножестве корней алгебры  $\mathfrak{g}$ .

Для интересующих нас модулей формула Вейля-Каца для  $\text{ch}(L^\mu)$  может быть записана через сингулярные элементы [47],

$$\Psi^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho},$$

а именно:

$$\text{ch}(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}. \quad (3.9)$$

То же верно и для подмодулей  $\text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^\nu)$  в формуле (3.1)

$$\text{ch}(L_{\mathfrak{a}}^\nu) = \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(0)}} = \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{R_{\mathfrak{a}}},$$

где

$$\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)} := \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}.$$

Применяя формулу (3.9) к правилу ветвления (3.1) мы получаем соотношение, связывающее сингулярные элементы  $\Psi^{(\mu)}$  и  $\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}$ :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\beta})^{\text{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}, \\ \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi^{(\mu)}}{R} \right) &= \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \frac{\Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}}{R_{\mathfrak{a}}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.1.2. Разложение сингулярного элемента.

Теперь мы выполним разложение сингулярного элемента  $\Psi^{(\mu)}$  на сингулярные элементы модулей ортогонального партнера:

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{a}_{\perp}$  – ортогональный партнер редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ ,  $\widetilde{\mathfrak{a}}_{\perp} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ ,  $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ .

Пусть  $L^{\mu}$  – интегрируемый модуль старшего веса  $\mu \in P^+$  и

$\Psi^{(\mu)}$  – сингулярный элемент  $L^{\mu}$ .

Тогда элемент  $\Psi^{(\mu)}$  может быть разложен в сумму по  $u \in U$  (см. (3.6)) сингулярных элементов  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  с коэффициентами  $\epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)}$ :

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \quad (3.11)$$

*Доказательство.* Пусть

$$u(\mu + \rho) = \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})} u(\mu + \rho) + \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu + \rho),$$

где  $u \in U$ . Для произвольного  $v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}$  рассмотрим сингулярный вес  $vu(\mu + \rho) - \rho$  и выполним разложение:

$$\begin{aligned} vu(\mu + \rho) - \rho &= \pi_{(\mathfrak{a})}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} \\ &+ v(\pi_{(\tilde{\mathfrak{a}}_\perp)} u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используем дефект  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$  (3.5), чтобы упростить первую строку в формуле (3.12):

$$\begin{aligned} \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho)) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho)) - \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} \rho - \pi_{\mathfrak{a}_\perp} \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ = \pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})}(u(\mu + \rho) - \rho) + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \end{aligned}$$

и вторую строку

$$\begin{aligned} v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu + \rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu + \rho) - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} &= \\ = v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} [u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{aligned}$$

В результате получаем требуемое разложение сингулярного элемента  $\Psi^\mu$  на сингулярные элементы  $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$  модулей  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$  подалгебры  $\mathfrak{a}_\perp$ :

$$\begin{aligned} \Psi^\mu &= \sum_{u \in U} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v) \epsilon(u) e^{vu(\mu + \rho) - \rho} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v) e^{v(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} [u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}} = \\ &= \sum_{u \in U} \epsilon(u) \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} [u(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} e^{\pi_{(\tilde{\mathfrak{a}})} [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

□

**Замечание 2.** Это соотношение можно рассматривать как обобщение формулы Вейля для сингулярного элемента  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ : векторы  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$  играют роль сингулярных весов, в то время как множители  $\epsilon(u)$  расширены до  $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}$ .

Действительно, при  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$  подалгебры  $\mathfrak{a}_{\perp}$ , и  $\mathfrak{h}_{\perp}$  тривиальны,  $U = W$  и оригинальная формула Вейля восстанавливается, так как сингулярные элементы  $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} = \epsilon(u)$  становятся тривиальными.

В противоположном пределе, когда  $\mathfrak{a} = 0$ ,  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \Delta_{\mathfrak{g}}$ ,  $\mathfrak{h}_{\perp}^* = 0$ ,  $\mathfrak{a}_{\perp} = \mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} = 0$  и  $U = W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}} = e$ , вновь приходим к выражению для сингулярного элемента  $\Psi^{\mu}$ , теперь – в результате тривиализации множества векторов  $\mu_{\mathfrak{a}}(e) = 0$ .

**Замечание 3.** В предыдущей главе (и в нашей работе [4]) разложение, аналогичное формуле (3.13), было использовано для построения рекуррентных соотношений для коэффициентов ветвления  $k_{\xi}^{(\mu)}$ , соответствующих вложению  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ :

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} \right) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u(\mu + \rho) - \rho)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \quad (3.14)$$

Рекурсия задается множеством  $\Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , которое носит название веера вложения. Это множество определяется как носитель  $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  коэффициентной функции  $s(\xi)$

$$\{\xi\}_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}} := \{\xi \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}} | s(\xi) \neq 0\},$$

возникающей в разложении

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} \alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} \alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}}} s(\gamma) e^{-\gamma}. \quad (3.15)$$

Веса из множества  $\{\xi\}_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}$  сдвигаются на  $\gamma_0$  – младший вектор в  $\{\xi\}$ , и исключается нулевой элемент:

$$\Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \{\xi\}\} \setminus \{0\}. \quad (3.16)$$

Рекуррентное соотношение (3.14) первоначально использовалось для описания ветвления интегрируемых модулей. Заметим, что существует важный класс модулей, которые также могут быть редуцированы при помощи веера вложения – это модули Верма.

### 3.1.3. Формулы Вейля-Верма.

**Утверждение 1.** *Для ортогональной подалгебры  $\mathfrak{a}_\perp$  в  $\mathfrak{g}$  (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ ) характер интегрируемого модуля старшего веса  $L^\mu$  может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$ :*

$$\mathrm{ch}(L^\mu) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \quad (3.17)$$

где  $U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\}$  и  $I$  – такое подмножество в  $S$ , что  $\Delta_I^+$  эквивалентно  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ .

*Доказательство.* Подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp$  регулярна и редуктивна по определению (3.2). Рассмотрим её знаменатель Вейля  $R_{\mathfrak{a}_\perp} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$  и элемент  $R_J := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$  как сомножители в  $R$ :

$$R = R_J R_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Согласно этой факторизации и разложению (3.11) характер  $\mathrm{ch}(L^\mu)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(L^\mu) &= (R_J)^{-1} (R_{\mathfrak{a}_\perp})^{-1} \Psi^\mu = (R_J)^{-1} \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) (R_{\mathfrak{a}_\perp})^{-1} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \\ &= (R_J)^{-1} \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \mathrm{ch} \left( L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \right), \end{aligned}$$

где  $\{L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \mid u \in U\}$  – множество конечномерных  $\mathfrak{a}_\perp$ -модулей со старшими весами  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$ . Нас интересуют нетривиальные подалгебры  $\mathfrak{a}$  и, соответствен-

но, нетривиальные  $\mathfrak{a}_\perp$  (случай тривиальной ортогональной подалгебры рассматривался выше в (см. Замечание 1)). Значит  $r_{\mathfrak{a}} \geq 1$  и  $r_{\mathfrak{a}_\perp} < r$ . Так как диаграмма Дынкина для любой регулярной подалгебры получается в результате исключения одной, двух или более вершин из расширенной диаграммы Дынкина алгебры, а расширенная диаграмма содержит не более одного зависимого корня (старший корень), множество корней  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$  всегда эквивалентно некоторому множеству  $\Delta_I^+$ , порожденному набором простых корней  $I \subset S$ .

Следовательно мы можем (переопределяя множество  $\Delta^+$ ) отождествить  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$  с подмножеством  $\Delta_I^+$ , где  $I \subset S$ . В результате мы можем определить объекты, необходимые для построения обобщенных модулей Верма [56, 74]. У нас есть два множества корневых векторов  $\{x_\xi \in \mathfrak{g}_\xi | \xi \in \Delta_I^+\}$  и  $\{x_\eta \in \mathfrak{g}_\eta | \eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+\}$  и соответствующие нильпотентные подалгебры в  $\mathfrak{n}^+$ :

$$\mathfrak{n}_I^+ := \sum_{\xi \in \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\xi, \quad \mathfrak{u}_I^+ := \sum_{\eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\eta.$$

Первая подалгебра вместе со своей отрицательной копией  $\mathfrak{n}_I^-$  порождает простую подалгебру

$$\mathfrak{s}_I = \mathfrak{n}_I^- + \mathfrak{h}_I + \mathfrak{n}_I^+.$$

Мы расширяем ее оставшимися картановскими генераторами:

$$\mathfrak{l}_I = \mathfrak{n}_I^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_I^+.$$

Полупрямое произведение  $\mathfrak{l}_I$  и  $\mathfrak{u}_I^+$  дает параболическую подалгебру  $\mathfrak{p}_I \hookrightarrow \mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \triangleright \mathfrak{u}_I^+. \quad (3.18)$$

Ее универсальная обертывающая  $U(\mathfrak{p}_I)$  является подалгеброй в  $U(\mathfrak{g})$ . Модули  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  алгебры  $\mathfrak{l}_I$  легко поднимаются до  $\mathfrak{p}_I$ -модулей при помощи тривиального действия нильрадикала  $\mathfrak{u}_I^+$ . Последний стандартным образом индуцирует  $U(\mathfrak{g})$ -модули:

$$M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}.$$

Это *обобщенные модули Верма* [74], порожденные старшими весами  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$ . Как  $U(\mathfrak{u}_I^-)$ -модуль каждый  $M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  изоморфен  $U(\mathfrak{u}_I^-) \otimes L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  и его характер можно записать при помощи функции Костанта-Хекмана [77], соответствующей вложению ортогонального партнера  $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ :

$$\mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}} \mathrm{ch} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}.$$

Функция  $\mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}}$  генерируется знаменателем  $R_I$ , так что последнее выражение можно переписать следующим образом

$$\mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \frac{1}{R_I} \mathrm{ch} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}.$$

Таким образом мы получили обобщенную формулу Вейля-Верма для характеров – разложение  $\mathrm{ch}(L^\mu)$  на характеры обобщенных модулей Верма:

$$\mathrm{ch}(L^\mu) = \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \quad (3.19)$$

□

**Замечание 4.** Здесь обобщенная формула Вейля-Верма для характеров (называемая формулой переменного суммирования в книге [56]) имеет специальный вид: веса  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}$  отличны от старших весов обобщенных модулей Верма  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Причина в том, что старший вес  $M_I$ -модуля не равен проекции его максимального веса на  $h_{\mathfrak{a}_\perp}^*$  (он должен быть дополнительно сдвинут на дефект).

**Пример 1.** Рассмотрим обобщенные модули Верма для вложения  $A_1 \hookrightarrow B_2$ , где подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp$  связана с корнем  $\alpha_1$  алгебры  $B_2$ . Обобщенный модуль Верма  $M_I^{\omega_1}$  со старшим весом  $\omega_1 = e_1$  показан на Рисунке 3.1.

**Замечание 5.** Как доказано, например, в книге [56] (см. утверждение 9.6), характеры обобщенных модулей Верма  $M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  могут также описываться как линейные комбинации обычных модулей Верма алгебры  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(w) \mathrm{ch} M^{w(\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}}$$



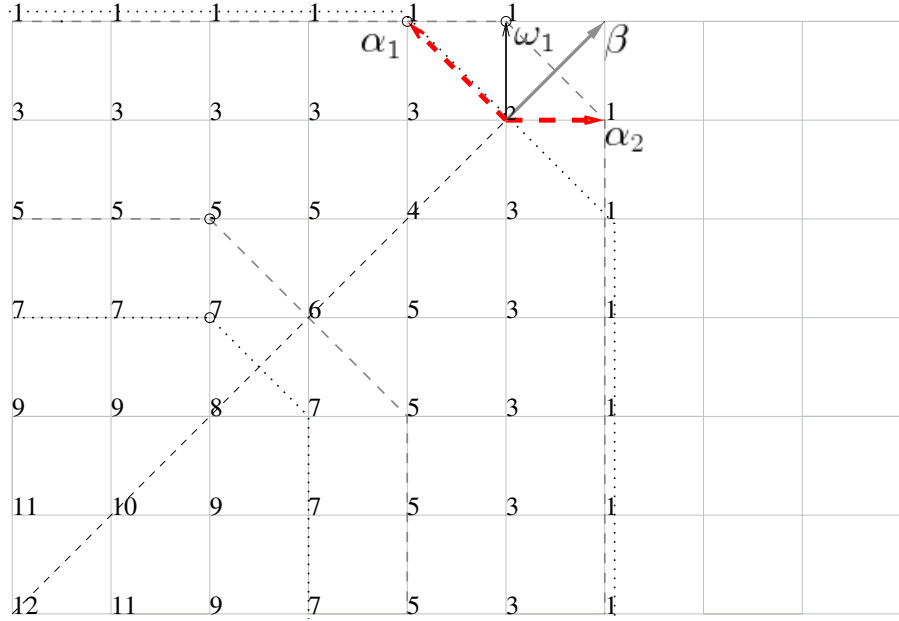


Рис. 3.1. Обобщенные модули Верма для регулярного вложения  $A_1$  в  $B_2$ . Простые корни  $\alpha_1, \alpha_2$  алгебры  $B_2$  показаны пунктирными стрелками. Простой корень  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$  алгебры  $A_1$  изображен серым вектором. Разложение  $L^{\omega_1}$  представлено набором контуров входящих в него обобщенных модулей Верма. Пунктирные контуры соответствуют положительным значениям  $\epsilon(u)$ , а точечные – отрицательным.

Подставляя это выражение в формулу (3.19) и используя определения (3.7, 3.8) и (3.5), мы восстанавливаем стандартное разложение Вейля-Верма для характера:

$$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{ch} M^{w(\mu+\rho)-\rho}.$$

## 3.2. БГГ резольвента и ветвление

В работе [74] показано, что для модуля старшего веса  $L^\mu$ , где  $\mu \in P^+$ , последовательность (обобщенная БГГ резольвента)

$$0 \rightarrow M_r^I \xrightarrow{\delta_r} M_{r-1}^I \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M_0^I \xrightarrow{\varepsilon} L^\mu \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

где

$$M_k^I = \bigoplus_{u \in U, \text{length}(u)=k} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M_0^I = M_I^\mu \quad (3.21)$$

является точной и формула (3.17) следует из этого разложения.

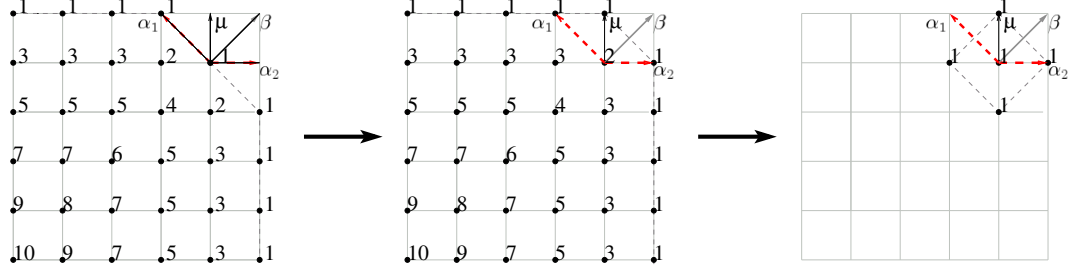


Рис. 3.2. Вложение  $A_1 \hookrightarrow B_2$  (см. Рисунок 3.1). Ортогональный партнер, подалгебра  $A_1$ , соответствует корню  $\alpha_1$ . Резольвента простого модуля  $L^{\omega_1}$ . Показана центральная часть точной последовательности  $0 \rightarrow \text{Im}(\delta_2) \rightarrow \left( e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(e)} \text{ch} M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\omega_1] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} = M_I^{\omega_1} \right) \rightarrow L^{\omega_1} \rightarrow 0$ . Здесь  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(e) = \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[\mu] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $L^\mu$  –  $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом  $\mu \in P^+$ , и пусть регулярная подалгебра  $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$  ортогональна редуктивной подалгебре  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ . Тогда разложение (3.11) определяет как обобщенную резольвенту  $L^\mu$  по отношению к  $\mathfrak{a}_\perp$ , так и правила ветвления  $L^\mu$  по отношению к  $\mathfrak{a}_\perp$ , так и правила ветвления  $L^\mu$  по отношению к подалгебре  $\mathfrak{a}_\perp$ , так и правила ветвления  $L^\mu$  по отношению к  $\mathfrak{a}$ .

*Доказательство.* Положим

$$\text{ch} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho} = e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \quad \text{ch} M_I^\mu = e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(e)} \text{ch} M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\mu] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}},$$

где  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$ ,  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$  и  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$  заданы как в Лемме 2,  $u \in U$  определено формулой (3.6). В результате получим элементы фильтрующей последовательности (3.20).

Рассмотрим множество  $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \mid u \in U\}$  как множество старших весов простых модулей  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$  и вычислим размерности этих модулей. Вместе с

$\{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u) \mid u \in U\}$  мы получим набор сингулярных весов

$$\left\{ \epsilon(u) e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \dim \left( L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} \right) \right\}.$$

Ветвление  $L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$  определяется веером вложения  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  и соотношением (3.14), которое дает нам коэффициенты  $k_{\xi}^{(\mu)}$ , а значит определяет и  $b_{\nu}^{(\mu)}$ , так как  $b_{\nu}^{(\mu)} = k_{\nu}^{(\mu)}$  при  $\nu \in \overline{C_{\mathfrak{a}}}$ .  $\square$

**Следствие 2.1.** Пусть  $L^{\mu}$  –  $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом  $\mu \in P^+$  и  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  – редуктивная подалгебра  $\mathfrak{g}$ . Пусть  $\mathfrak{a}_{\perp}$  – ортогональный партнер для  $\mathfrak{a}$ , – эквивалентен  $A_1$ ,  $\mathfrak{a}_{\perp} \approx A_1$ , и  $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$  с  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$ . Пусть  $L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{\nu}$  – ветвление модуля  $L^{\mu}$  относительно подалгебры  $\tilde{\mathfrak{a}}$ . Тогда коэффициенты  $b_{\nu}^{(\mu)}$  определяют обобщенную резольвенту (3.20) модуля  $L^{\mu}$  по отношению к  $\mathfrak{a}_{\perp}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha$  – простой корень  $A_1$ . Используем преобразования из группы Вейля чтобы перевести его в некоторый простой корень алгебры  $\mathfrak{g}$ , например  $\alpha_1$ . Построим сингулярный элемент для модуля  $L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^{\mu}$ , то есть  $\Psi_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{(L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^{\mu})} = \sum_{\nu \in P_{\tilde{\mathfrak{a}}}^+, b_{\nu}^{(\mu)} > 0} b_{\nu}^{(\mu)} \Psi_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{(\nu)}$ , и разложим его  $\Psi_{\tilde{\mathfrak{a}}}^{(L_{\mathfrak{g} \downarrow \tilde{\mathfrak{a}}}^{\mu})} = k_{\xi}^{(\mu)} e^{\xi}$ . В нашем случае представители  $u$  в рекуррентном соотношении (3.14) определяются весом  $\xi$  однозначно:

$$\epsilon(u(\xi)) \dim \left( L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi))} \right) = -s(\gamma_0) k_{\xi}^{(\mu)} - \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)}.$$

Тогда

$$\dim \left( L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi))} \right) = \left| s(\gamma_0) k_{\xi}^{(\mu)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right|$$

и

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi)) = \frac{1}{2} \left( \dim \left( L_{A_1}^{\mu(\xi)} \right) - 1 \right) \alpha_1$$

Таким образом, множество обобщенных модулей Верма  $e^{\xi+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \text{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u(\xi))}$  полностью фиксировано:

$$\left\{ e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \mid u \in U \right\}.$$

Упорядочивая эти модули по длине  $u$ , мы получаем компоненты (3.21) резольвенты (3.20).  $\square$

### 3.3. Заключение

В главе 2 было показано, что метод веера вложения работает также и для специальных вложений. Надо заметить, что разложения Вейля-Верма также могут быть получены в этом случае. Резольвенты, соответствующие специальным подалгебрам, описывают соотношения между проекциями характера начального модуля и обобщенными модулями Верма со старшими весами в подпространстве  $h^*$ .

Рассмотрим ситуацию, когда выбор простых корней зафиксирован какими-то внешними факторами (возникающими, например, из требований физических приложений). В этом случае ортогональный партнер не может порождаться только простыми корнями. Элементы  $\mathbf{u}_I^+ := \sum_{\eta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I^+} \mathfrak{g}_\eta$  не образуют подалгебру в  $\mathfrak{g}$ , так как некоторые не простые корни отсутствуют в  $\Delta^+ \setminus \Delta_I^+$ . Важно отметить, что в этом случае формула Вейля-Верма по-прежнему существует. В ней обобщенные модули Верма соответствуют сжатиями [78] алгебры  $\mathfrak{n}^+$  и соотношения Вейля-Верма описывают разложение пространства представления  $L^\mu$  в набор обобщенных модулей Верма сжатой алгебры  $U(\mathfrak{n}_c^+)$ . Весовые векторы образованы базисом Пуанкаре-Биркгофа-Витта алгебр  $U(\mathfrak{n}_c^+)$  и  $U(\mathfrak{a}_\perp)$ . Чтобы рассмотреть такое пространство как  $\mathfrak{g}$ -модуль мы должны выполнить деформацию [79] алгебры  $\mathfrak{n}_c^+$  (то есть восстановить первоначальный закон композиции). Пространство сохраняется, и

после такой деформации генераторы начальной алгебры будут действовать на нем правильным образом.

## Глава 4

# Сплинты корневых систем и функции ветвления

Сплинт корневой системы простой алгебры Ли возникает при изучении регулярных вложений редуктивных подалгебр. Сплинт можно использовать для получения правил ветвления. Мы показываем, что использование свойств сплинта позволяет сильно упростить вычисление коэффициентов ветвления.

Вложение  $\phi$  корневой системы  $\Delta_1$  в корневую систему  $\Delta$  – это биективное отображение корней из  $\Delta_1$  в (собственное) подмножество  $\Delta$ , коммутирующее с законом сложения векторов в  $\Delta_1$  и  $\Delta$ .

$$\phi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta$$

$$\phi \circ (\alpha + \beta) = \phi \circ \alpha + \phi \circ \beta, \quad \alpha, \beta \in \Delta_1$$

Заметим, что образ  $Im(\phi)$  не обязан обладать свойствами корневой системы за исключением правил сложения, эквивалентных правилам сложения в  $\Delta_1$  (для прообразов). Два вложения  $\phi_1$  и  $\phi_2$  *расщепляют* корневую систему  $\Delta$  если она может быть представлена, как несвязное объединение образов  $Im(\phi_1)$  и  $Im(\phi_2)$ . Термин *сплинт* (расщепление) предложил D. Richter в работе [80], где были получены все сплинты для простых алгебр Ли. В работе так же упоминалось, что сплинт должен быть тесно связан с конструкцией веера вложения. Веер вложения  $\Gamma \subset \Delta$  был введен в работе [81] как подмножество корневой системы, описывающее рекуррентные свойства коэффициентов ветвления для максимальных вложений. Веер вложения – это эффективный инструмент для изучения правил ветвления. Позднее в работах [4, 46] эта конструкция была обобщена на не-максимальные вложения и бесконечномерные

алгебры Ли.

В данной главе мы изучаем связь между сплинтом и веером вложения для регулярных вложений редуктивных подалгебр  $\mathfrak{a}$  в простую алгебру Ли  $\mathfrak{g}$ . Мы демонстрируем, что (при выполнении определенных условий, описанных в разделе 4.2) спллит является естественным инструментом для изучения свойств редукции  $\mathfrak{g}$ -модулей по отношению к подалгебре  $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ . Используя этот инструмент мы получаем основной результат данной главы – однозначное соответствие между кратностями весов неприводимых модулей сплита и коэффициентов ветвления для редуцированного модуля  $L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu$ .

Затем мы обсуждаем аффинное расширение корневой системы допускающей сплит и получаем новые соотношения, связывающие функции ветвления неприводимых модулей на модули конечномерных подалгебр (см. Раздел 4.4).

## 4.1. Вложения и сплиты

Рассмотрим простую алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  и ее регулярную подалгебру  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ , такую, что  $\mathfrak{a}$  – редуктивную подалгебру  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  и корневые системы согласованы  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^* \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$ . Пусть  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{s}}$  – полупростое слагаемое в  $\mathfrak{a}$ , то есть  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{s}} \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \dots$ . Мы будем считать, что  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{s}}$  – собственная регулярная подалгебра и что  $\mathfrak{a}$  – максимальная подалгебра с заданной  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{s}}$ , то есть ранг  $r$  подалгебры  $\mathfrak{a}$  равен рангу  $\mathfrak{g}$ .

Пусть  $L^\mu$  – вполне приводимый по отношению к  $\mathfrak{a}$  модуль алгебры  $\mathfrak{g}$ ,

$$L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu.$$

$$\pi_{\mathfrak{a}} \text{ch} (L^\mu) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \text{ch} (L_{\mathfrak{a}}^\nu). \quad (4.1)$$

Для модулей, которые мы исследуем, формула Вейля для характеров  $\text{ch} (L^\mu)$

может быть записана через сингулярные элементы [47]

$$\Psi^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho},$$

а именно,

$$\text{ch}(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}. \quad (4.2)$$

Это же верно и для подмодулей  $\text{ch}(L_\mathfrak{a}^\nu)$  в уравнении (4.1)

$$\text{ch}(L_\mathfrak{a}^\nu) = \frac{\Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)}}{\Psi_\mathfrak{a}^{(0)}} = \frac{\Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)}}{R_\mathfrak{a}},$$

где

$$\Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)} := \sum_{w \in W_\mathfrak{a}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_\mathfrak{a})-\rho_\mathfrak{a}}.$$

Применяя формулу (4.2) к правилам ветвления (4.1) мы получаем соотношение, связывающее сингулярные элементы  $\Psi^{(\mu)}$  и  $\Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})} &= \sum_{\nu \in P_\mathfrak{a}^+} b_\nu^{(\mu)} \frac{\sum_{w \in W_\mathfrak{a}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_\mathfrak{a})-\rho_\mathfrak{a}}}{\prod_{\beta \in \Delta_\mathfrak{a}^+} (1 - e^{-\beta})}, \\ \frac{\Psi^{(\mu)}}{R} &= \sum_{\nu \in P_\mathfrak{a}^+} b_\nu^{(\mu)} \frac{\Psi_\mathfrak{a}^{(\nu)}}{R_\mathfrak{a}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В работе [4] (см. главу 2) было доказано, что коэффициенты ветвления  $b_\xi^{(\mu)}$ , отвечающие вложению  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ , удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} b_\xi^{(\mu)} &= -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{u \in W/W_\perp} \epsilon(u) \dim \left( L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \right) \delta_{\xi-\gamma_0, \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu+\rho)-\rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) b_{\xi+\gamma}^{(\mu)} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\mathfrak{a}_\perp$  – подалгбера, задающаяся корнями  $\mathfrak{g}$ , ортогональными ко всем корням  $\mathfrak{a}$  и  $W_\perp$  – подгруппа Вейля, соответствующая  $\mathfrak{a}_\perp$ ,

$$\Delta_{\mathfrak{a}_\perp} : = \{ \beta \in \Delta_\mathfrak{g} | \forall h \in \mathfrak{h}_\mathfrak{a}; \beta(h) = 0 \}, \quad (4.5)$$

$$\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp \quad \widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp \quad (4.6)$$



и  $\pi$  – оператор проекции. Если вложение максимально, то оператор проекции становится тривиальным и соотношение (4.4) упрощается:

$$b_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{u \in W} \epsilon(u) \delta_{\xi - \gamma_0, u(\mu + \rho) - \rho} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) b_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \quad (4.7)$$

Рекурсия задается множеством  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , называемым “веер вложения”. Оно определяется как носитель  $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$  для коэффициентной функции  $s(\xi)$

$$\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}} := \{\xi \in P_{\mathfrak{a}} | s(\xi) \neq 0\}$$

возникающей в разложении

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\alpha}) = - \sum_{\gamma \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) e^{-\gamma}; \quad (4.8)$$

Теперь мы приведем два определения, введенные в работе [80]

**Определение 10.** Пусть  $\Delta_0$  и  $\Delta$  – корневые системы с соответствующими весовыми решетками  $P_0$  и  $P$ . Тогда отображение  $\phi$  – “вложение”

$$\phi : \begin{cases} \Delta_0 \hookrightarrow \Delta, \\ P_0 \hookrightarrow P, \end{cases} \quad (4.9)$$

если

- (а) оно вкладывает  $\Delta_0$  в  $\Delta$ , и
- (б)  $\phi$  действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в  $P_0$  и  $P$ :

$$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

для любой тройки  $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$ , такой, что  $\gamma = \alpha + \beta$ .

$\phi$  индуцирует вложение формальных алгебр:  $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$  и для образа  $\mathcal{E}_i = \text{Im}_{\phi}(\mathcal{E}_0)$  можно рассмотреть обратное отображение  $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$ .

Заметим, что нужно различать два класса вложений: когда скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве  $P_0$  инвариантно по отношению к  $\phi$  и когда оно не  $\phi$ -инвариантно. Вложения первого класса называются “метрическими”, второго – “неметрическими”.

**Определение 11.** Корневая система  $\Delta$  “расщепляется” на  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , если существует два вложения  $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$  и  $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$ , где (а)  $\Delta$  – несвязное объединение образов  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , и (б) ни ранг  $\Delta_1$ , ни ранг  $\Delta_2$  не превосходит ранга  $\Delta$ .

Эквивалентно, можно сказать, что  $(\Delta_1, \Delta_2)$  – “спллит” (расщепление)  $\Delta$  и мы можем обозначить его через  $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$ . Каждая из компонент  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  называется “стеблем” спллита  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Чтобы показать связь веера вложения со спллитом рассмотрим случай, когда один из стеблей  $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$  является подсистемой корневой системы.

Сплит  $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$  называется “инъективным”, если  $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$ , – подсистема корневой системы  $\Delta$ , соответствующая регулярной редуктивной подалгебре  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ .

В случае инъективного спллита второй стебель  $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$  может быть переписан как произведение (4.8) и определяет веер вложения  $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$ . Обозначим через  $\Delta_{\mathfrak{s}0}$  кообраз второго вложения  $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \rightarrow \Delta_{\mathfrak{g}}$ . Верна следующая гипотеза.

**Гипотеза 1.** Каждый инъективный сплит  $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$  определяет веер вложения с носителем  $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , задающимся произведением

$$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta}) = - \sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma} \quad (4.10)$$

В случае инъективного сплиты мы можем сказать, что подалгебра  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  расщепляется  $\Delta$  (и назовем  $\mathfrak{a}$  “расщепляющей подалгеброй” алгебры  $\mathfrak{g}$ ).

Сплинты были классифицированы в работе [80] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплинтов в этой классификации инъективны.

## 4.2. Как стебли определяют функции кратности

В этом разделе мы рассмотрим свойства инъективных сплинтов  $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$ . Мы покажем, что в этом случае вычисление коэффициентов ветвления для расщепляющего вложения  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  эквивалентно нахождению кратностей весов неприводимого  $\mathfrak{s}$ -модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{\nu}$  с определенным старшим весом  $\nu$ . Заметим, что алгебра  $\mathfrak{s}$  не обязательно должна быть подалгеброй  $\mathfrak{g}$ .

Вернемся к соотношению (4.3) и домножим обе стороны на  $R_{\mathfrak{a}}$ :

$$\frac{1}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} \Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \Psi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}. \quad (4.11)$$

Здесь первый множитель в левой части – это формальный элемент, обратный к вееру  $\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ . Рассмотрим модуль старшего веса  $L_{\mathfrak{s}}^{\nu}$ . Вложение  $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \longrightarrow \Delta_{\mathfrak{g}}$  переводит сингулярный элемент  $\Psi_{\mathfrak{s}}^{(\nu)}$  в  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ . Применяя обратный морфизм  $\phi^{-1}$  к произведению  $\left( \prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta}) \right)^{-1} \phi \left( \Psi_{\mathfrak{s}}^{(\nu)} \right)$ , мы получаем характер модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{\nu}$ ,

$$\phi^{-1} \left( \frac{1}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} \phi \left( \Psi_{\mathfrak{s}}^{(\nu)} \right) \right) = \frac{1}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}0}^+} (1 - e^{-\beta})} \Psi_{\mathfrak{s}}^{(\nu)} = \text{ch} (L_{\mathfrak{s}}^{\nu}). \quad (4.12)$$

Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что сингулярный элемент  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  содержит элемент  $\Psi_{\mathfrak{s}}^{(\xi)}$  для модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{\xi}$ , однозначно определяемого модулем  $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$  и что коэффициенты ветвления  $b_{\nu}^{(\mu)}$  в правой части равенства (4.11) совпадают с кратностями  $m_{\zeta}^{(\xi)}$  соответствующих весов в  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\xi}$ .

Для неприводимого модуля старшего веса  $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$  сингулярный элемент  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  – это элемент  $\mathcal{E}$ , соответствующий сдвинутой орбите группы веса  $(\mu + \rho) \in$

$P^+$ , со знаковой функцией  $\epsilon(w)$ . Удобно использовать также не сдвинутые сингулярные элементы

$$\Phi^{(\mu)} := \Psi^{(\mu)} e^\rho. \quad (4.13)$$

В этих обозначениях соотношение (4.11) имеет вид

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}} - \rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} \Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \Phi_{\mathfrak{a}}^{(\nu)}. \quad (4.14)$$

Орбита, связанная с  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ , полностью определяется набором ребер  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,r}$  построенным из конца вектора старшего веса  $\mu + \rho$ . Для  $\mu = \sum m_i \omega_i$  эти ребра равны

$$\lambda_i = -(m_i + 1) \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.15)$$

Каждая формальная экспонента  $e^{\mu + \rho + \lambda_i}$  in  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  снабжена знаковым коэффициентом  $\epsilon = (-)$ . Можно определить  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  следующим свойством. Рассмотрим любую пару ребер  $\lambda_i, \lambda_j$  и соответствующие веса  $\mu + \rho$ ,  $\mu + \rho + \lambda_i$  и  $\mu + \rho + \lambda_j$ . Применим отражение  $s_{\alpha_i}$  (или  $s_{\alpha_j}$ ),

$$s_{\alpha_i} \circ \begin{cases} (\mu + \rho) \\ (\mu + \rho + \lambda_i) \\ (\mu + \rho + \lambda_j) \end{cases} = \begin{cases} (\mu + \rho + \lambda_i) \\ (\mu + \rho) \\ (\mu + \rho + \lambda_i - (m_j + 1)s_{\alpha_i} \circ \alpha_j) \end{cases} \quad (4.16)$$

**Свойство 4.2.1.** Ребро  $\lambda_{i,j}$  сингулярного элемента  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ , начинающееся в весе  $(\mu + \rho + \lambda_i)$  и направленное вдоль корня  $-s_{\alpha_i} \circ \alpha_j$  имеет такую же длину, выраженную в длинах корня  $(s_{\alpha_i} \circ \alpha_j)$ , как и  $\lambda_j$  в длинах  $\alpha_j$ . (Это же верно для ребра  $\lambda_{j,i}$ , его длина в единицах  $(s_{\alpha_j} \circ \alpha_i)$  равна длине  $\lambda_i$  в единицах  $\alpha_i$ .)

В  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  элементы  $e^{(\mu + \rho + \lambda_i - (m_j + 1)s_{\alpha_i} \circ \alpha_j)}$  и  $e^{(\mu + \rho + \lambda_j - (m_i + 1)s_{\alpha_j} \circ \alpha_i)}$  имеют знаковый коэффициент  $\epsilon = (+)$ .

Вспомним, что только три типа сплинтов инъективны и имеют естественную связь с ветвлениями. Ниже мы приводим часть таблицы сплинтов из

работы [80], соответствующую инъективным сплинтам:

тип	$\Delta$	$\Delta_{\mathfrak{a}}$	$\Delta_{\mathfrak{s}}$
(i)	$G_2$	$A_2$	$A_2$
	$F_4$	$D_4$	$D_4$
(ii)	$B_r(r \geq 2)$	$D_r$	$\oplus^r A_1$
	$C_r(r \geq 3)$	$D_r$	$\oplus^r A_1$
(iii)	$A_r(r \geq 2)$	$A_{r-1} \oplus u(1)$	$\oplus^r A_1$
	$B_2$	$A_1 \oplus u(1)$	$A_2$

Каждая строка в таблице соответствует спленту  $(\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$  корневой системы  $\Delta$ . В случае первых двух типов и  $\Delta_{\mathfrak{a}}$ , и  $\Delta_{\mathfrak{s}}$  вложены метрически. Стебли для первого типа эквивалентны, а для второго – нет. В случае третьего типа сплентов только корневая система  $\Delta_{\mathfrak{a}}$  вложена метрически. Слагаемые  $u(1)$  добавлены, чтобы совпадали ранги  $r_{\mathfrak{a}} = r$ . Такая добавка не меняет основных свойств ветвления, но позволяет использовать кратности весов  $\mathfrak{s}$ -модулей без последующей проекции весов.

Сплент индуцирует разложение множества  $S = S_{\mathfrak{c}} \cup S_{\mathfrak{d}}$ , где  $S_{\mathfrak{c}} = S \cap S_{\mathfrak{a}}$  и  $S_{\mathfrak{d}} = S \cap S_{\mathfrak{s}}$ . Легко проверить, что для любого инъективного сплента подмножество  $S_{\mathfrak{d}}$  не пусто. Следовательно, в множестве  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, r}$  всегда найдется простые корни  $\beta_k \in \Delta_{\mathfrak{s}}$  и орбита, соответствующая  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  будет содержать ребра

$$\lambda_k = -(m_k + 1) \beta_k, \quad (4.17)$$

построенные из веса  $\mu + \rho$ . Так как  $\Delta_{\mathfrak{a}}$  – корневая система и для любой пары простых корней из  $S_{\mathfrak{c}}$  выполнено свойство 4.2.1, элемент  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  является сингулярным элементом для набора  $\mathfrak{a}$ -модулей. Рассмотрим корень  $\beta_l \in \Delta_{\mathfrak{s}}$ , кообраз которого в  $\Delta_{\mathfrak{s}0}$  простой. В разделе 4.A мы показываем, что для каждого такого  $\beta_l$  существует корень  $\alpha_l \in S_{\mathfrak{c}}$ , такой, что  $\beta_l = \alpha_l + \beta_k$ . Легко видеть, что в этом случае соответствующее ребро пересекает гиперплоскость,

ограничивающую главную камеру Вейля  $\bar{C}_a$  и ортогональную к корню  $\alpha_l$ ,

$$s_{\alpha_l}(\mu + \rho - p\beta_l) = s_{\alpha_l}(\mu + \rho) - ps_{\alpha_l}\beta_l = \mu + \rho - p\beta_l, \quad (4.18)$$

$$\mu + \rho - s_{\alpha_l}(\mu + \rho) = (m_l + 1)\alpha_l = (m_l + 1)\beta_l - (m_l + 1)\beta_k = p\beta_l - ps_{\alpha_l}\beta_l. \quad (4.19)$$

Следовательно,  $p = (m_l + 1)$  и  $s_{\alpha_l}\beta_l = \beta_k$ . Теперь применим оператор  $s_{\beta_k}$  и заметим, что ребро, построенное вдоль корня  $s_{\beta_k}\alpha_l$  из веса  $s_{\beta_k}(\mu + \rho)$  тоже равно  $-ps_{\beta_k}\alpha_l$ . Значит, для тройки корней  $\beta_k, \beta_l$  и  $s_{\beta_k}\alpha_l$  в  $\Delta_{\mathfrak{s}}$  ребра  $\lambda_k = -(m_k + 1)\beta_k$ ,  $\lambda_l = -(m_l + 1)\beta_l$  и  $\lambda_{kl} = -(m_l + 1)s_{\beta_k}\alpha_l$  удовлетворяют свойству 4.2.1. Эту процедуру можно продолжить далее в двумерном подпространстве, заданном корнями  $\beta_k$  и  $\beta_l$  и показать, что множество формальных экспонент, снабженных соответствующими знаковыми множителями, составляет кообраз сингулярного элемента модуля подалгебры в  $\mathfrak{s}$  (ранг этой подалгебры  $r = 2$ ).

Аналогичное рассуждение можно провести для любого положительного корня  $\beta_l \in \Delta$ , являющегося простым в  $\Delta_{\mathfrak{s}_0}$  и, соответственно, для любой подалгебры ранга  $r = 2$  в  $\mathfrak{s}$ . То есть чтобы “найти” сингулярный элемент  $\mathfrak{s}$ -модуля в  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  необходимо сгруппировать с ним дополнительные формальные элементы  $\{-e^{\mu+\rho-(m_l+1)\beta_l}|\beta_l \in S_{\mathfrak{c}}\}$ . Эта процедура определяет начальные ребра диаграммы  $\phi^{-1}(\Phi_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}})$ . Как следует из процедуры восстановления, старший вес  $\tilde{\mu}$  полностью определяется весом  $\mu$ , эти веса имеют следующие индексы Дынкина:

$$\mu = \sum m_k \omega_k \quad \implies \quad \tilde{\mu} = \sum m_k \tilde{\omega}_k. \quad (4.20)$$

Следующим шагом построим полную  $W_{\mathfrak{s}}$ -орбиту элемента  $\Phi_{\mathfrak{s}}^{(\tilde{\mu})}$  в  $P_{\mathfrak{s}}$ . Легко видеть, что его кообраз принадлежит  $\bar{C}_a$  и что множество  $\phi^{-1}(\Phi_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}) \setminus \Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}|_{\bar{C}_a}$  соответствует весам, принадлежащим границе  $\bar{C}_a$  (включая подмножество  $\{-e^{\mu+\rho-(m_l+1)\beta_l}|\beta_l \in S_{\mathfrak{c}}\}$ ). То есть мы построили все формальные элементы

с соответствующими знаковыми множителями, которые после сложения с  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}|_{\bar{C}_a}$  образуют диаграмму  $\phi^{-1}(\Phi_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}})$  в  $\bar{C}_a$ .

Теперь вернемся к равенству (4.14). Можно добавить к  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  пары формальных элементов, построенные выше, с противоположными знаками:  $\epsilon(w)|_{w \in W_{\mathfrak{s}}}$  и  $-\epsilon(w)|_{w \in W_{\mathfrak{s}}}$ . Припишем знаки  $\epsilon(w)|_{w \in W_{\mathfrak{s}}}$  элементам, веса которых попадут в главную камеру  $\bar{C}_a$ . К соседним камерам  $\bar{C}_a^{(l)}$  относятся те же элементы, но с противоположным знаком (Эти камеры связаны с главной простыми отражениями  $s_{\alpha_l}$ , так что противоположные знаки  $-\epsilon(w)|_{w \in W_{\mathfrak{s}}}$  здесь естественны). Можно повторить эту процедуру и получить дополнительные сингулярные веса в любой камере Вейля  $\bar{C}_a^{(m)}$ , причем эти веса будут иметь знаки, противоположные знакам в соседних камерах. То есть не меняя элемент  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  его можно представить в виде суммы

$$\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = \sum_{w \in W_a} w \circ (e^{\rho_a} \Psi^{\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}}) \quad (4.21)$$

где вес  $\tilde{\mu} = \sum m_k \omega_{\mathfrak{s}}^k$  был введен выше. Разложение (4.21) позволяет применить множитель  $\left(\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})\right)^{-1}$  к каждому слагаемому сингулярного элемента  $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  по отдельности, так как множества весов различных слагаемых Вейля не пересекаются. Воспользовавшись изоморфизмом  $\phi$  мы видим, что в главной камере Вейля  $\bar{C}_a$  множество весов, порожденное действием  $\left(\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})\right)^{-1}$  изоморфно весовой диаграмме  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}$  модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}$  алгебры  $\mathfrak{s}$ . Теперь можно ограничить равенство (4.14) на главную камеру Вейля  $\bar{C}_a$  и получить основной результат этого раздела:

#### Свойство 4.2.2.

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} (\Psi^{\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}}) = \sum_{\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}} M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} e^{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))} = \sum_{\nu \in P_a^{++}} b_{\nu}^{(\mu)} e^{\nu}. \quad (4.22)$$

Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства, равен одному из старших весов в разложении. Кратность  $M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}$  веса  $\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}$

определяет коэффициент ветвления  $b_\nu^{(\mu)}$  для старшего веса  $\nu = (\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))$ :

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}.$$

### 4.3. Примеры

**Пример 2.** Рассмотрим алгебру Ли  $A_2 = \mathfrak{sl}(3)$  и ветвление ее неприводимого модуля  $L_{A_2}^{[3,2]}$  по отношению к редуктивной подалгебре  $A_1 \oplus u(1)$ . Корневая система  $\Delta_{\mathfrak{a}} = \Delta_{A_1 \oplus u(1)}$  содержит простой корень  $\alpha_1 = e_1 - e_2$  алгебры  $A_2$ . Сингулярный элемент  $\Psi_{\mathfrak{a}}^{[3,2]}$  раскладывается в сумму образов сингулярных элементов модулей алгебры  $A_1 \oplus A_1$ . Коэффициенты ветвления  $b_\nu^{[3,2]}$  совпадают с кратностями весов модуля  $L_{A_1 \oplus A_1}^{[3,2]}$  (см. Рисунок. 4.1).

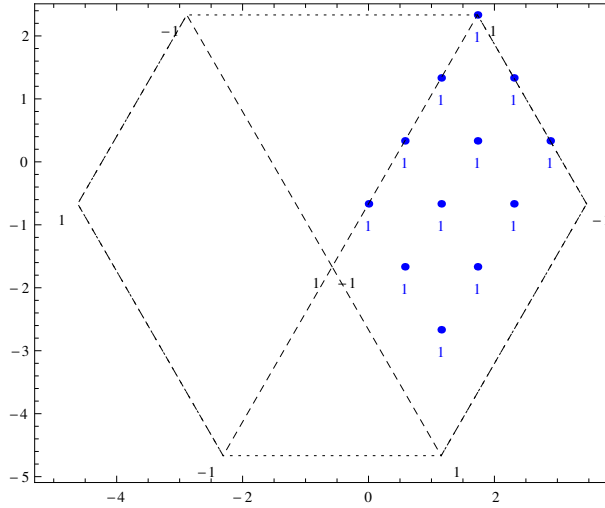


Рис. 4.1. Орбита группы Вейля (точечный контур), соответствующая сингулярному элементу  $L_{A_2}^{[3,2]}$  и ее разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей  $L_{A_1 \oplus A_1}^{[3,2]}$  (пунктирные контуры). Кратности весов модуля  $L_{A_1 \oplus A_1}^{[3,2]}$  совпадают с коэффициентами ветвления для редукции  $L_{A_2 \downarrow A_1 \oplus u(1)}^{[3,2]}$ .

**Пример 3.** Рассмотрим алгебру Ли  $B_2 = \mathfrak{so}(5)$  и редукцию ее неприводимого модуля  $L^{[3,2]}$  на модули редуктивной подалгебры  $A_1 \oplus u(1)$  с корневой системой, натянутой на первый простой корень  $\alpha_1 = e_1 - e_2$  алгебры  $B_2$ .



Сингулярный элемент  $\Psi_{B_2}^{[3,2]}$  раскладывается в сумму образов сингулярных элементов модулей  $A_2$  и коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов в модуле  $A_2$  (см. Рисунок 4.2).

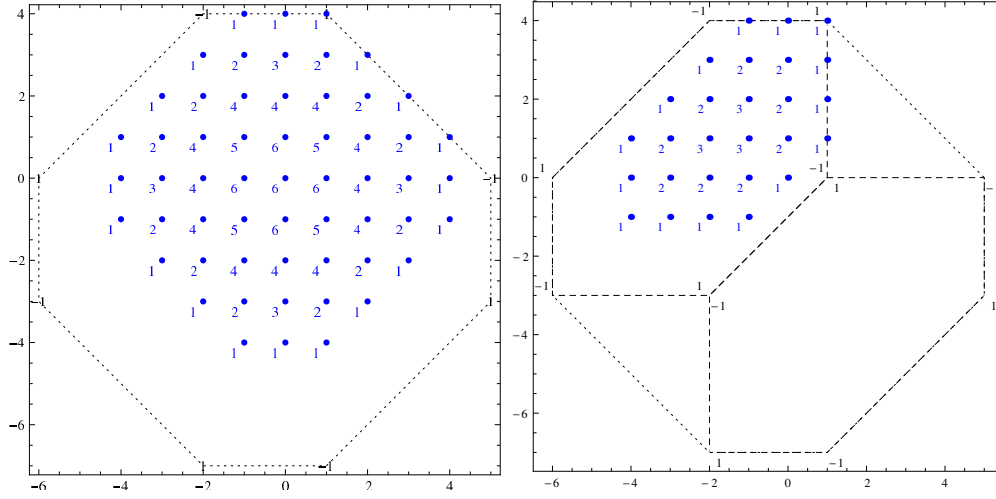


Рис. 4.2. Веса модуля  $L^{[3,2]}$  алгебры  $B_2$  показаны точками на левом рисунке (кратности подписаны). Контур сингулярного элемента показан коротким пунктиром. На правом рисунке представлено разложение сингулярного элемента  $\Psi_{B_2}(L_{B_2}^{[3,2]})$  в сумму образов сингулярных элементов  $\Psi_{A_2}(L_{A_2}^{[3,2]})$  (длинный пунктир). Кратности весов модуля  $L_{A_2}^{[3,2]}$  совпадают с коэффициентами ветвления для редукции  $L_{B_2 \downarrow A_1 \oplus u(1)}^{[3,2]}$ .

**Пример 4.** Алгебра Ли  $G_2$  содержит регулярную подалгебры  $A_2$  с корневой системой  $\Delta_{\mathfrak{a}} = \Delta_{A_2}$ , содержащей длинные корни  $G_2$ . Рассмотрим ветвление неприводимого модуля  $L_{G_2}^{(3,2)}$  на модули подалгебры  $A_2$ . Сингулярный элемент  $\Psi_{G_2}(L_{G_2}^{[3,2]})$  раскладывается в сумму образов сингулярных элементов  $\Psi_{A_2}(L_{A_2}^{[3,2]})$  и коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов модуля  $L_{A_2}^{[3,2]}$  (см. Рисунок 4.3).

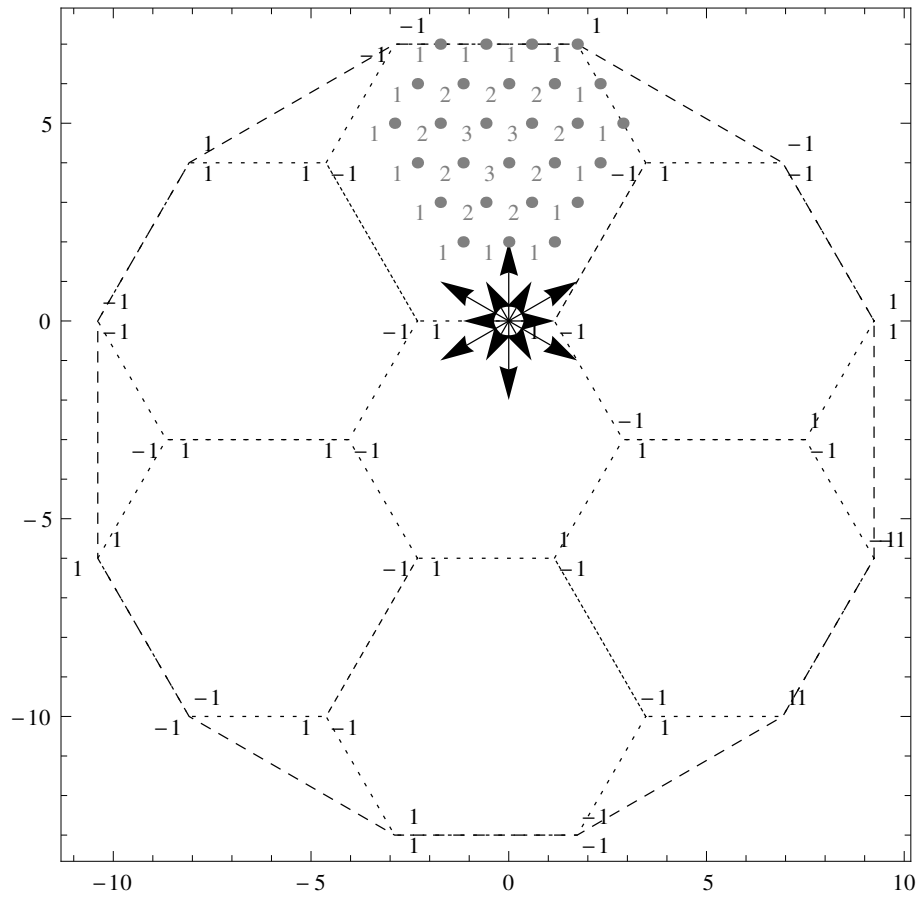


Рис. 4.3. Орбита группы Вейля (короткий пунктир) для сингулярного элемента  $\Psi_{G_2}(L^{[3,2]})$  и его разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей алгебры  $A_2$  (длинный пунктир). Кратности весов модуля  $L_{A_2}^{[3,2]}$  совпадают с коэффициентами ветвления для редукции  $L_{G_2 \downarrow A_2}^{[3,2]}$ .

#### 4.4. Сплиты и соотношения для аффинных алгебр Ли

Как мы показали в предыдущих разделах, сплиты корневых систем простых алгебр Ли возникают при изучении регулярных вложений редуктивных подалгебр. Сплит может использоваться для вывода правил ветвления, его свойства сильно облегчают вычисления коэффициентов ветвления. В этом разделе мы используем свойства сплита конечномерной алгебры Ли для получения новых соотношений на тета-функции и функции ветвления, связанные с аффинным расширением алгебры.

Веер вложения для аффинных алгебр Ли допускает разложение, аналогичное разложению веера для простых алгебр Ли, следующему из существования сплинта. Такое разложение приводит к соотношению на тета-функции. Затем мы рассматриваем градуированное ветвление модуля аффинной алгебры Ли на модули конечномерной подалгебры и получаем соотношения на функции ветвления.

Рассмотрим простую алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  с корневой системой  $\Delta$ . Пусть  $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}$  – ее редуктивная подалгебра того же ранга, такая, что  $\Delta_{\mathfrak{a}} \equiv \Delta_1 \subset \Delta$  и  $Q_{\mathfrak{a}} \subset Q$ , где  $Q$  – корневая решетка. Неприводимые модули старшего веса алгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$  мы обозначаем через  $L^\mu$  и  $L_{\mathfrak{a}}^\nu$ . Формула Вейля для характеров неприводимых модулей имеет вид  $\text{ch} L^\mu = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\prod_{\alpha \in \Delta} (1 - e^{-\alpha})}$ , где  $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu + \rho) - \rho}$  – сингулярный элемент модуля,  $W$  – группа Вейля алгебры  $\mathfrak{g}$ . Формальный характер неприводимого модуля допускает разложение

$$\text{ch} L^\mu = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}} b_{\nu}^{\mu} \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}, \quad (4.23)$$

где  $P, P_{\mathfrak{a}}$  – весовые решетки  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$ . Мы хотим рассмотреть аффинное расширение данной конструкции:  $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}, \hat{\Delta} \subset \hat{\Delta}$  и  $\text{ch} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{\hat{\nu}} b_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} \text{ch} L_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\hat{\nu}}$ . Веса аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$  имеют вид  $\hat{\mu} = (\mu, k, n)$ , где  $\mu$  – вес алгебры  $\mathfrak{g}$ ,  $k$  – уровень представления, а  $n$  – грейд веса  $\hat{\mu}$

Пусть  $(\Delta_1, \Delta_2)$  – сплонт корневой системы  $\Delta$  алгебры  $\mathfrak{g}$ , причем  $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$  является корневой системой редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Как было показано ранее, второй стебель  $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$  можно переписать в виде произведения  $\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta}) = - \sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma}$ , которое определяет веер вложения  $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$  [4, 46, 81].

Так как сингулярный элемент модуля  $L^\mu$  можно переписать в виде  $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = e^{-\rho} \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) w \circ (e^{\rho_{\mathfrak{a}}} \Psi^{\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}})$ , для коэффициентов ветвления имеет место равенство [6]:

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} \quad (4.24)$$

Здесь старший вес  $\tilde{\mu}$  однозначно определяется весом  $\mu$ , так как они оба имеют одинаковые индексы Дынкина:  $\mu = \sum m_k \omega_k \implies \tilde{\mu} = \sum m_k \omega_{(\mathfrak{s})k}$ . То есть коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов в модулях алгебры  $\mathfrak{s}$ .

Теперь рассмотрим аффинное расширение  $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ . Так как  $\text{rank } \mathfrak{g} \leq \text{rank } \mathfrak{a} + \text{rank } \mathfrak{s}$ , для знаменателей Вейля мы получаем

$$\prod_{\alpha \in \hat{\Delta}_1^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)} \prod_{\beta \in \hat{\Delta}_2^+} (1 - e^{\phi \circ \beta})^{\text{mult}(\beta)} = \prod_{\gamma \in \hat{\Delta}^+} (1 - e^{-\gamma})^{\text{mult}(\gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-n\delta})^{\text{rank } \mathfrak{a} + \text{rank } \mathfrak{s} - \text{rank } \mathfrak{g}} \quad (4.25)$$

Воспользуемся специализацией [26, 40, 82] и определением  $\eta$ -функции Декинда  $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ , где  $q = e^{2\pi i \tau}$ , чтобы переписать предыдущее равенство в виде соотношения на тета-функции

$$\Theta_{\hat{\lambda}=(\lambda, k, 0)}^{(\hat{\mathfrak{g}})}(\tau, z) = \sum_{\xi \in Q_{\mathfrak{g}} + \frac{\lambda}{k}} e^{2\pi i k \left( \frac{1}{2}(\xi, \xi)\tau + (\xi, z) \right)}$$

:

$$\eta(\tau)^{\dim(\mathfrak{a})} \prod_{\alpha \in \Delta_1^+} \frac{\Theta_{\alpha}^{(\hat{A}_1)}(\tau, z)}{\eta(\tau)} \eta(\tau)^{\dim(\mathfrak{s})} \prod_{\beta \in \Delta_2^+} \frac{\Theta_{\phi \circ \beta}^{(\hat{A}_1)}(\tau, z)}{\eta(\tau)} = \eta(\tau)^{\text{rank}(\mathfrak{a}) + \text{rank}(\mathfrak{s}) - \text{rank}(\mathfrak{g})} \eta(\tau)^{\dim(\mathfrak{g})} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\Theta_{\alpha}^{(\hat{A}_1)}(\tau, z)}{\eta(\tau)} \quad (4.26)$$

Здесь  $z \in P_{\geq 0} \otimes \mathbb{C}$ . При помощи тождества Вейля для знаменателей это равенство можно переписать как нетривиальное соотношение, связывающее тета-функции алгебр  $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{a}}$ :

$$\left( \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(v) \Theta_{v\rho_{\mathfrak{a}}}^{(\hat{\mathfrak{a}})}(\tau, z) \right) \cdot \left( \sum_{u \in W_{\mathfrak{s}}} \epsilon(u) \Theta_{\phi \circ (u\rho_{\mathfrak{s}})}^{(\hat{\mathfrak{s}})}(\tau, z) \right) = \left( \sum_{w \in W} \epsilon(w) \Theta_{w\rho_{\mathfrak{g}}}^{(\hat{\mathfrak{g}})}(\tau, z) \right) \quad (4.27)$$

Теперь рассмотрим ветвление модуля алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$  на модули подалгебры  $\mathfrak{g}$ . Для формальных характеров верно следующее выражение:

$$\mathrm{ch} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \mathrm{ch} L_{\mathfrak{g}}^{\nu}. \quad (4.28)$$

Переписывая это уравнения для кратностей весов мы получаем  $m_{\hat{\nu}=(\nu,k,n)}^{(\hat{\mu})} = \sum_{\xi \in P} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(n) m_{\nu}^{(\xi)}$ . Теперь мы можем ввести функции ветвления аналогично случаю аффинной подалгебры [26, 40]:  $b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) q^n$ . Эти функции ветвления связаны с  $q$ -размерностью модуля  $\dim_q L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu} = \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu}$ . Известно, что  $q$ -размерность является модулярной функцией по отношению к действию некоторой подгруппы  $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$  [83], так что функции ветвления  $b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q)$  обладают модулярными свойствами.

Для струнных функций модуля  $L^{\hat{\mu}}$  верно соотношение

$$\sigma_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) = \sum_{\xi \in P} m_{\nu}^{(\xi)} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(q). \quad (4.29)$$

Введем порядок на множестве весов  $\xi$  следующим образом: припишем весу  $\xi$  значение его скалярного произведения  $(\rho, \xi)$  с вектором Вейля  $\rho$  и упорядочим веса по этим значениям. Тогда соотношение (4.29) можно переписать в матричном виде:  $\sigma(q) = Mb(q)$  и обратно,  $b(q) = M^{-1}\sigma(q)$ . Здесь  $\sigma(q)$  и  $b(q)$  – бесконечные векторы струнных функций и функций ветвления. Матрица  $M$  содержит кратности весов в  $\mathfrak{g}$ -модулях, аналогично Таблице 1 в работе [84]. Обратная матрица  $M^{-1}$  содержит рекуррентные соотношения на кратности весов [60].

Теперь рассмотрим ветвление модулей алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$  на модули подалгебры  $\mathfrak{a}$  в предположении существовании сплинта  $\Delta_{\mathfrak{g}}^+ = \Delta_{\mathfrak{a}}^+ \cup \phi(\Delta_{\mathfrak{s}}^+)$ . Разложим

$\mathfrak{g}$ -модули в равенстве (4.28) на  $\mathfrak{a}$ -модули используя свойство (4.24):

$$\begin{aligned} \text{ch} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} b_{(\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a})\xi}^{(\nu)} \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\xi} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} M_{\tilde{\nu}-\phi^{-1}(\nu-\xi)}^{\nu} \text{ch} L_{\mathfrak{a}}^{\xi} \quad (4.30) \end{aligned}$$

Мы видим, что аналогичное матричное соотношение выполняется для функций ветвления  $b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})}(q) = M_{\mathfrak{s}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{g})}(q)$  и мы можем написать  $\sigma(q) = M_{\mathfrak{a}} b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{a})}(q)$ . Так что если мы знаем коэффициенты ветвления для вложения  $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$  (см., например, книгу [53]) мы сразу получаем (градуированные) функции ветвления для вложения  $\mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ .

## 4.5. Заключение

Мы продемонстрировали, что сплнт представляет собой очень эффективный инструмент для вычисления коэффициентов ветвления. В частности, инъективные сплнты дают возможность свести определение правил ветвления модулей старшего веса к вычислению кратностей весов для модуля с теми же индексами Дынкина алгебры Ли  $\mathfrak{s}$ . Эта алгебра  $\mathfrak{s}$  не обязательно является подалгеброй в  $\mathfrak{g}$ , ее ранг  $r_{\mathfrak{s}} = r$  совпадает с рангом  $\mathfrak{g}$ , но сама она “проще” чем  $\mathfrak{g}$ , так как только подмножество корней корневой системы включено во второй “стебель”  $\Delta_{\mathfrak{s}}$ .

Важно отметить, что для вложений  $D_r \hookrightarrow B_r$ ,  $D_r \hookrightarrow C_r$  и  $A_{r-1} \oplus u(1) \hookrightarrow A_r$  техника сплнта ведет к появлению правил ветвления Гельфанда-Цейтлина: редукция свободна от множественности (все ненулевые коэффициенты ветвления равны 1). В данном случае это немедленное следствие структуры второго стебля, который является прямой суммой алгебр  $A_1$ , и того факта, что соответствующий модуль  $L_{\mathfrak{s}}^{\mu}$  неприводим.

Также мы продемонстрировали, что сплнт для аффинных алгебр Ли

ведет к новым соотношениям на тета-функции и функции ветвления для редукции на модули конечномерных подалгебр, что может быть полезно для вычислений. Возможно дальнейшее обобщение этого анализа на аффинные подалгебры и применение результатов изучению coset-моделей конформной теории поля.

## 4.A. Приложение

Покажем, что для инъективного сплинта классической алгебры Ли выполняется следующее свойство:

**Свойство 4.A.1.** Пусть  $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$  – инъективный сплнт с разложением множества простых корней  $S = S_{\mathfrak{c}} \cup S_{\mathfrak{d}}$ , где  $S_{\mathfrak{c}} = S \cap S_{\mathfrak{a}}$  и  $S_{\mathfrak{d}} = S \cap S_{\mathfrak{s}}$ .

Тогда для каждого простого корня  $\beta \in S_{\mathfrak{s}}$  существует пара корней  $(\alpha, \beta')$ , где  $\alpha \in S_{\mathfrak{c}}, \beta' \in S_{\mathfrak{s}}$ , такая, что  $\alpha = \beta - \beta'$

- Тип 1.  $\Delta_{G_2} \approx (\Delta_{A_2}, \Delta_{A_2})$ .

Здесь оба стебля метрические и соответствующие корневые системы эквивалентны. На Рисунке 4.4 показана часть сингулярного элемента  $\Phi_{G_2}^{(0)}$ . Границы  $\bar{C}_{\mathfrak{a}}$  изображены пунктирными линиями, начинающимися в центре сингулярного элемента. Они содержат ребро  $\lambda_2 = -\alpha_2 = -\beta_2$  и корни  $-\beta_1 = -s_{\alpha_2} \circ \beta_3$  и  $-\beta_3$  ( $\beta_3$  показан, как  $\beta_l$ ). Для корня  $\beta_1$  искомая пара – это  $(\alpha_1, \beta_2)$ :  $\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2$ . Ребро  $\lambda_{2,3}^{\mathfrak{s}} = \beta_3$  равно  $\lambda_1^{\mathfrak{s}} = \beta_1 = s_{\alpha_2} \circ \beta_3$  и  $\mathfrak{s}$ -модуль получает индекс Дынкина  $m_1$  и наследует второй индекс  $m_2$ . В этом частном случае  $m_1 = m_2 = 0$ . Общий случай с начальным модулем  $L^{\mu}$ , где  $\mu = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ , может быть рассмотрен аналогично: необходимо найти ребро  $\lambda_2 = -(m_2 + 1)\beta_2$  и положить  $\lambda_1^{\mathfrak{s}} = -(m_1 + 1)\beta_1$ , его конец принадлежит границе  $\bar{C}_{\mathfrak{a}}$ . Отражение  $s_{\beta_2}$  переводит  $\beta_1$  в  $\beta_3$  и

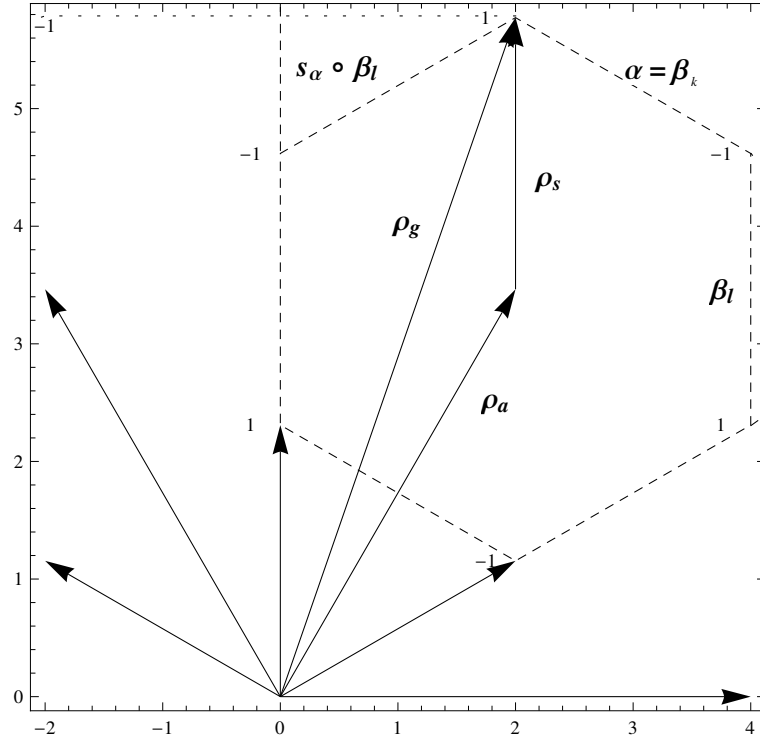


Рис. 4.4. Положительные корни  $G_2$  и образование сингулярного элемента  $\Phi_{\mathfrak{s}}^{(0)}$  в главной камере Вейля алгебры  $\mathfrak{a} = A_2$ .

соответствующее ребро  $\lambda_{2,3}^5 = -(m_1 + 1)\beta_3$  имеет длину  $(m_1 + 1)$ . Теперь рассмотрим ребра  $\lambda_1^5$  (или  $\lambda_{2,3}^5$ ) и  $\lambda_{1,3}^5$  (или  $\lambda_{2,3,1}^5$ ), и обнаружим, что они принадлежат границе  $\bar{C}_{\mathfrak{a}}$  и Вейлевская симметрия предсказывает, что  $\lambda_{1,3}^5 = -(m_2 + 1)\beta_3$  ( $\lambda_{2,3,1}^5 = -(m_2 + 1)\beta_1$ ). Наконец, ребро  $\lambda_{1,3,2}^5 = -(m_1 + 1)\beta_2$  замыкает многогранник. Его вершины соответствуют весам сингулярного элемента  $\Phi_{\mathfrak{s}}^{(\tilde{\mu})} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{s}}} \varepsilon(w) e^{w \circ (\tilde{\mu} + \rho_s)}$  модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{(\tilde{\mu})}$ , где  $\tilde{\mu} = m_1 \tilde{\omega}_1 + m_2 \tilde{\omega}_2$ . Заметим, что в этом случае знаковые множители можно получить прямо в первоначальной весовой системе, так как стебли метрические.

- Тип 1.  $\Delta_{F_4} \approx (\Delta_{D_4}, \Delta_{D_4})$ .

Оба стебля здесь метрические и соответствующие корневые системы эквивалентны. Система  $\Delta_{D_4}$  подалгебры  $\mathfrak{a} = D_4$  формируется множеством  $\{\pm e_i \pm e_j\}_{i,j=1,\dots,4, i \neq j}$ . Простые корни  $S_{\mathfrak{c}}$  – это  $\{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$



и  $S_{\mathfrak{d}} = \{e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$ . Для модуля  $L^\mu$ , где  $\mu = \sum m_k \omega_k$  рассмотрим ребро  $\lambda_3 = -(m_3 + 1)e_4 = -(m_3 + 1)\beta_3$ . Построим ребро  $\lambda_2^5 = -(\tilde{m}_2 + 1)\beta_2$ . Искомая пара корней – это  $(\alpha_2 = e_3 - e_4, \beta_3)$ . Пересечение  $\lambda_2^5$  с  $\alpha_2$ -границей камеры  $\bar{C}_{\mathfrak{a}}$  определяет длину  $\lambda_2^5 = -(m_2 + 1)\beta_2$  и длины ребра  $\lambda_{3,2}^5$  равна длине  $\lambda_2^5$ . Далее рассмотрим ребро  $\lambda_2^5 = -(m_2 + 1)\beta_2$  и пару  $(\alpha_1 = e_2 - e_3, \beta_1 = e_2)$ . Длина  $\lambda_1^5$  становится равной  $\lambda_1^5 = -(m_1 + 1)\beta_1$ . Продолжаем эту процедуру, пока не замкнем многогранник. Ребра, направленные вдоль корней типа  $\alpha_4$ ,  $\alpha_4 = \beta_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$ , рассматриваются аналогично и, наконец, сингулярный элемент  $\Phi_{\mathfrak{s}}^{(\tilde{\mu})} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{s}}} \varepsilon(w) e^{w \circ (\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}})}$  для модуля  $L_{\mathfrak{s}}^{(\tilde{\mu})}$ , где  $\tilde{\mu} = \sum m_k \tilde{\omega}_k$  возникает в камере  $\bar{C}_{\mathfrak{a}}$ .

- Тип 2.  $\Delta_{B_r} \approx (\Delta_{D_r}, \Delta_{\oplus^r A_1})$ .

Оба стебля метрические. Вложения дается стеблем  $\Delta_{D_r}$  с простыми корнями  $S_{\mathfrak{a}} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{r-1} - e_r, e_{r-1} + e_r\}$ . Второй стебель соответствует прямой сумме алгебр  $A_1$  с простыми корнями  $S_{\mathfrak{s}} = \{e_1, e_2, \dots, e_{r-1}\}$ . Рассмотрим ребро  $\lambda_r = -(m_r + 1)\beta_r$  (здесь  $\beta_r = e_r$ ) и ребро  $\lambda_{r-1} = -(\tilde{m}_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$ , присоединенное к нему (здесь  $\beta_{r-1} = e_{r-1}$ ). Соответствующая пара корней – это  $(\alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \beta_{r-1} = e_{r-1})$ . Из условия пересечения определяется второе ребро  $\lambda_{r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$ , оно ортогонально к  $\beta_r$ , так что противоположное ребро имеет ту же длину. Индекс Дынкина  $m_{r-1}$  теперь связан также с простым корнем  $\beta_{r-1}$ . Далее рассмотрим полученное ребро  $\lambda_{r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$  и  $\lambda_{r-2} = -(\tilde{m}_{r-2} + 1)\beta_{r-2}$ , чтобы определить индекс  $\tilde{m}_{r-2} = m_{r-2}$  и ребро  $\lambda_{r-2} = -(m_{r-2} + 1)\beta_{r-2}$ , и так далее, пока все пары ребер не будут определены. Наконец, в  $\bar{C}_{D_r}$  элемент  $\Phi_{\oplus^r A_1}^{(\tilde{\mu})} = \sum_{w \in W_{\oplus^r A_1}} \varepsilon(w) e^{w \circ (\tilde{\mu} + \frac{1}{2} \sum e_k)}$  может быть построен для модуля  $L_{\oplus^r A_1}^{(\tilde{\mu})}$ , где  $\tilde{\mu} = \sum m_k \frac{1}{2} e_k$ .

- Тип 2.  $\Delta_{C_r} \approx (\Delta_{D_r}, \Delta_{\oplus^r A_1})$ .

Ситуация в этом случае эквивалентна предыдущему и дополнительные ребра строятся аналогично.

- Тип 3  $\Delta_{A_r} \approx (\Delta_{A_{r-1} \oplus u_1}, \Delta_{\oplus^r A_1})$ .

Здесь только первый стебель метрический и он определяет вложение с простыми корнями  $S_a = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{r-1} - e_r\}$ . Вторым стеблем, соответствующий прямой сумме  $r$  копий алгебры  $A_1$ , имеет простые корни  $S_s = \{e_1 - e_{r+1}, e_2 - e_{r+1}, \dots, e_r - e_{r+1}\}$ . Рассмотрим ребро  $\lambda_r = -(m_r + 1)\beta_r$  с  $\beta_r = e_r - e_{r+1}$  и  $\lambda_{r-1} = -(\tilde{m}_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$  с  $\beta_{r-1} = e_{r-1} - e_{r+1}$  присоединенным к нему. Тогда соответствующая пара равна  $(\alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r, \beta_{r-1} = e_{r-1} - e_{r+1})$ . Пересечение с границей  $\bar{C}_{A_{r-1}}$ , ортогональной  $\alpha_{r-1}$  определяет второе ребро  $\lambda_{r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$ . Индекс Дынкина  $m_{r-1}$  должен использоваться для фундаментального веса  $\omega_{r-1}$ . Отражение  $s_{\beta_r}$  переводит  $\lambda_{r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$  в  $\lambda_{r,r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$ . Далее рассмотрим полученное ребро edge  $\lambda_{r-1} = -(m_{r-1} + 1)\beta_{r-1}$  и  $\lambda_{r-2} = -(\tilde{m}_{r-2} + 1)\beta_{r-2}$  с  $\beta_{r-2} = e_{r-2} - e_{r+1}$ , чтобы получить индекс  $\tilde{m}_{r-2} = m_{r-2}$  и ребро  $\lambda_{r-2} = -(m_{r-2} + 1)\beta_{r-2}$ , и так далее, пока не получим все пары ребер. Наконец, в  $\bar{C}_{D_r}$  элемент  $\Phi_{\oplus^r A_1}^{(\tilde{\mu})} = \sum_{w \in W_{\oplus^r A_1}} \varepsilon(w) e^{w \circ (\tilde{\mu} + \tilde{\rho})}$  может быть построен для модуля  $L_{\oplus^r A_1}^{(\tilde{\mu})}$ , где  $\tilde{\mu} = \sum m_k \beta_k$ . Простейший случай  $\Delta_{A_2} \approx (\Delta_{A_1 \oplus u_1}, \Delta_{A_1 \oplus A_1})$  показан в примере 2 и на Рисунке 4.1.

- Тип 3  $\Delta_{B_2} \approx (\Delta_{A_1}, \Delta_{A_2})$ .

Этот сплнит показан в примере 3 и на Рисунке 4.2,  $S_{A_{-1}} = \{e_1 - e_2\}$ ,  $S_{A_{-2}} = \{e_1, e_2\}$ . Ребро  $\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\beta_2} = -(m_2 + 1)\beta_2$  продолжается ребром  $\lambda_{\beta_1} = -(\tilde{m}_1 + 1)\beta_1$ . Рассмотрим пару  $(\alpha_1 = e_1 - e_2, \beta_1 = e_1)$ . Конец ребра  $\lambda_{\beta_1}$  должен указывать вес, инвариантный по отношению к отражению  $s_{\alpha_1}$ . Его длина таким образом фиксирована:  $\lambda_{\beta_1} = -(m_1 + 1)\beta_1$ . В кообразе второго стебля, то есть в корневой системе  $\Delta_{A_2}$ , отражение

$s_{\beta_2}$  переводит  $\lambda_{\beta_1} = -(m_1 + 1)\beta_1$  в  $\lambda_{2,3}$ , то есть это ребро имеет ту же длину в  $\beta_3 = e_1 + e_3$ , и  $\lambda_{2,3} = -(m_1 + 1)\beta_3$  с  $\beta_3 = e_1 + e_3$ . Неприводимый  $\mathfrak{g}$ -модуль имеет старший вес  $\tilde{\mu} = m_1\tilde{\omega}_1 + m_2\tilde{\omega}_2$ . На Рисунке 4.2 мы видим детали этих соотношений и, в частности, случай, когда  $L_{B_2}^{[3,2]}$  редуцируется на подалгебру  $A_1 \oplus u(1)$  и соответствующие старшие веса (вместе с их кратностями) образуют диаграмму  $\mathcal{N}_{A_2}^{[3,2]}$ .

## Глава 5

### Практические приложения

В этой главе мы рассматриваем роль сингулярных элементов модулей аффинных алгебр Ли в приложениях к задачам конформной теории поля. Мы используем установленные в главах 2, 3, 4 свойства для эффективных вычислений.

#### **5.1. Роль сингулярных элементов coset-моделей в установлении соответствия между конформной теорией поля и критическим поведением в решеточных моделях**

Алгебраические методы в конформной теории поля позволяют получать явные уравнения на корреляционные функции (например, уравнения Книжника-Замолодчикова (1.52) в ВЗНВ-моделях и их аналоги в coset-моделях (1.72)). Во многих случаях эти уравнения можно решить аналитически либо численно и получить конкретные значения для физических величин, например, для критических индексов. Таким образом конформная теория поля является мощным инструментом для описания критического поведения в решеточных моделях.

Однако соответствие между решеточными моделями и конформной теорией поля, описывающей их критическое поведение, не так легко установить. В случае простых моделей (Изинга, Поттса, Ашкина-Теллера и т.д.) и минимальных моделей конформной теории поля такое соответствие первоначально устанавливалось путем сравнения центральных зарядов и конформных размерностей. Но соответствие корреляторов нуждается в строгом доказа-

тельстве. Один из инструментов изучения решеточных моделей – эволюция Шрамма-Левнера – позволяет в некоторых случаях доказать такое соответствие (см. [14, 15, 85–93]). Класс моделей конформной теории поля, для которых получены такие результаты, в основном ограничивается минимальными унитарными моделями.

Введение дополнительного случайного блуждания на группе позволяет построить стохастический аналог для ВЗНВ-моделей [94–96]. В данном разделе мы обсуждаем обобщение этой конструкции на случай coset-моделей. В установлении соответствия между корреляторами в стохастических моделях и моделях конформной теории поля существенную роль играют сингулярные элементы, что связано со структурой модулей алгебры Вирасоро в ВЗНВ и coset-моделях (см. разделы 1.21.3). К сожалению, пока не известно, пределами каких решеточных моделей могут являться такие стохастические конструкции.

Эволюция Шрамма-Левнера появляется как скейлинговый предел интерфейсов в решеточных моделях в критической точке. Критическое поведение этих моделей можно описывать при помощи минимальных моделей конформной теории поля. Оказывается, что некоторые корреляционные функции в моделях конформной теории поля являются мартингалами по отношению к эволюции Шрамма-Левнера. В этой главе мы обобщаем эволюцию Шрамма-Левнера с дополнительным броуновским движением на группе Ли  $G$  на случай фактор-пространства  $G/A$ . Замет мы изучаем, как связано такое описание критического поведения с coset-моделями конформной теории поля. В качестве критерия согласованности мы используем тот факт, что минимальные модели могут быть реализованы как coset-модели при некотором выборе групп  $G, A$ .

### 5.1.1. Введение

Эволюция Шрамма-Левнера – это стохастический процесс, который предложил Oded Schramm [97] для описания скейлингового предела критических интерфейсов в двумерных статистических решеточных моделях. Этот подход к критическим системам дал много строгих результатов в теории критического поведения (см. обзоры [98], [99], [89]). В разделе 5.1.2 мы приводим необходимые определения.

Вероятностная мера, порожденная эволюцией Шрамма-Левнера на случайных кривых, конформно-инвариантна. Так как конформная теория поля представляет собой другой метод для изучения двумерных критических систем, естественно изучать ее связь с эволюцией Шрамма-Левнера. Такая связь изучалась, например, в работах [14, 15, 90, 93] (и многих других), но в основном для минимальных унитарных моделей. Идея состоит в рассмотрении определенных наблюдаемых в области с разрезом. Эта конструкция обсуждается в разделе 5.1.3.

Более общие модели конформной теории поля обладают дополнительными симметриями. Например, в моделях Весса-Зумино-Новикова-Виттена возникают аффинные алгебры Ли. Чтобы реализовать такие симметрии при изучении эволюции Шрамма-Левнера нужно ввести дополнительное случайное блуждание на группе Ли [94], [95]. Такое случайное блуждание определяется в разделе 5.1.4. Соответствие между мартингалами эволюции Шрамма-Левнера и корреляционными функциями в моделях Весса-Зумино-Новикова-Виттена изучалось в работе [96]. Аналогичное обобщение на  $\mathbb{Z}(N)$ -парафермионную модель было предложено в статьях [100, 101].

Основная задача данной главы состоит в обобщении эволюции Шрамма-Левнера с дополнительным случайным блужданием на группе Ли на случай фактор-пространства  $G/A$  и в изучении связи с coset-конструкцией конформ-

ной теории поля. В разделе 5.1.5 мы напоминаем некоторые детали coset-конструкции, вводим эволюцию Шрамма-Левнера на фактор-пространстве и связываем ее с конформной теорией поля. По аналогии со случаем моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена мы получаем систему алгебраических уравнений на оператор смены граничного условия из условия на мартингал. При помощи coset-конструкции можно реализовать минимальные и парафермионные модели конформной теории поля (см. [24]), так что мы можем сравнить наши уравнения на оператор смены граничных условий с результатами работы [100].

В разделе 5.1.6 мы обсуждаем возможность сравнения классификации операторов смены граничных условий, следующей из свойства мартингалов с общей классификацией операторов смены граничных условий в граничной конформной теории поля, связанной с D-бранными решениями [70, 102–106].

### 5.1.2. Эволюция Шрамма-Левнера

Рассмотрим модель Изинга на треугольной решетке в верхней полуплоскости (см. Рисунок 5.1). Наложим следующее граничное условие: потребуем, чтобы на одной половине границы все спины были направлены вверх, а на другой половине – вниз. Тогда при любой конфигурации спинов на полуплоскости будет интерфейс, разделяющий два кластера и соединяющий точку ноль с бесконечностью (см. Рисунок 5.1).

Мы можем наложить условие существования части интерфейса конечной длины и рассмотреть конфигурации статистической модели, удовлетворяющие этому условию. Очевидно, такие конфигурации эквивалентны конфигурациям модели на области с разрезом вдоль интерфейса.

Теперь рассмотрим непрерывный предел решеточной модели с (частью) интерфейса конечной длины. Интерфейсы в случайных конфигурациях моде-

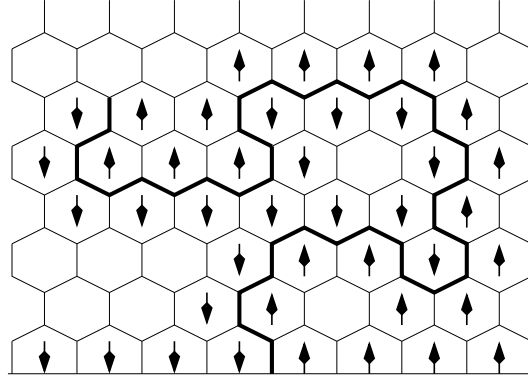


Рис. 5.1. Интерфейс в модели Изинга на треугольной решетке

ли сходятся к случайной кривой. Старая гипотеза [12] о конформной инвариантности в критической точке была недавно строго доказана для некоторых решеточных моделей (см. [87], [85]). Мы предполагаем наличие конформной инвариантности в критической точке и рассматриваем верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}$  с разрезом вдоль критического интерфейса  $\gamma_t$ . Такую область с разрезом мы обозначим через  $\mathbb{H}_t = \mathbb{H} \setminus \gamma_t$ . Конформное отображение из  $\mathbb{H}_t$  в  $\mathbb{H}$  обозначим через  $g_t : \mathbb{H}_t \rightarrow \mathbb{H}$  (см. Рисунок 5.2).

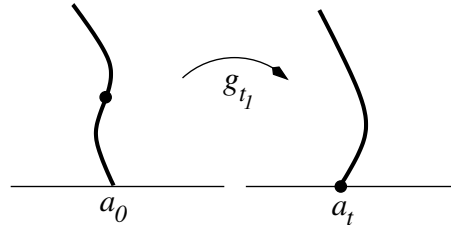


Рис. 5.2. Конформное отображение  $g_t(z) : \mathbb{H}_t \rightarrow \mathbb{H}$ .

В статье [97] было показано, что  $g_t(z)$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t}, \quad (5.1)$$

здесь  $\xi_t$  — Броуновское движение. Динамика конца  $z_t$  критической кривой  $\gamma_t$  (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением  $z_t = g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$ .



Стохастический процесс, который удовлетворяет уравнению (5.1) называется *эволюцией Шрамма-Левнера* на верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ . Для нас будет удобнее использовать отображение  $w_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t$ , так что уравнение (5.1) переписывается в виде

$$dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa}\xi_t \quad (5.2)$$

Эволюция Шрамма-Левнера порождает конформно-инвариантную вероятностную меру на кривых  $\gamma_t$  в  $\mathbb{H}$ .

### 5.1.3. Мартингалы эволюции Шрамма-Левнера и корреляционные функции в конформной теории поля

Теперь рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой  $\mathcal{O}$  на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера  $\gamma_t$  вплоть до некоторого времени  $t$ , умноженных на вероятность этой траектории:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E} [\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = \sum_{\gamma_t} P[C_{\gamma_t}] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

Решеточная наблюдаемая  $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$  не зависит от  $t$ , следовательно  $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$  — мартингал.

В непрерывном пределе решеточные наблюдаемые сходятся к корреляционным функциям в конформной теории поля [15, 16, 93]. Мы должны учесть изменение граничных условий на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности, так что соотношение имеет вид:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \rightarrow \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\langle \mathcal{O}(\{z_i\}) \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}}{\langle \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}} \quad (5.3)$$

Мы рассматриваем теорию с границей, так что мы должны использовать модели граничной конформной теории поля и накладывать соответствующие

граничные условия [36, 37, 107]. В случае верхней полуплоскости корреляционные функции в граничной конформной теории поля могут быть переписаны как корреляционные функции для теории на всей плоскости, но с удвоенным числом полей.

Мы предполагаем, что  $\mathcal{F}$  содержит некоторый набор примарных полей  $\varphi_{\lambda_i}$  с конформными весами  $h_{\lambda_i}$ . Так как мы рассматриваем граничную конформную теорию поля, мы должны добавить объемные поля в сопряженных точках  $\bar{z}_i$ . Для дальнейшего использования в моделях Весса-Зумино-Новикова-Виттена мы обозначим конформные веса этих сопряженных полей через  $h_{\lambda_i^*}$ . Кроме того, у нас есть операторы смены граничного условия  $\phi$  на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности. Воспользуемся конформным отображением  $w(z) : \mathbb{H} \setminus \gamma_t \rightarrow \mathbb{H}$ , чтобы переписать выражение (5.3) на верхней полуплоскости без разреза:

$$\mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \prod \left( \frac{\partial w(z_i)}{\partial z_i} \right)^{h_{\lambda_i}} \prod \left( \frac{\partial \bar{w}(\bar{z}_i)}{\partial \bar{z}_i} \right)^{h_{\lambda_i^*}} \mathcal{F}(\{w_i, \bar{w}_i\})_{\mathbb{H}} \quad (5.4)$$

Теперь нам нужно рассмотреть, как преобразуется конец следа эволюции Шрамма-Левнера  $\gamma_t$  при переходе от времени  $t$  к  $t + dt$ . Первый множитель в правой части уравнения (5.4) дает нам

$$-\frac{2h_{\lambda_i}}{w_i^2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^{h_{\lambda_i}}.$$

Для преобразования примарных полей  $\varphi_{\lambda_i}$  имеет место равенство

$$d\varphi_{\lambda_i}(w_i) = \mathcal{G}_i \varphi_{\lambda_i}(w_i) = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} \varphi_{\lambda_i}(w_i) \quad (5.5)$$

Мы обозначим генератор этого преобразования через  $\mathcal{G}_i$ .

Так как  $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$  — мартингал, математическое ожидание его приращения при эволюции от  $t$  к  $t + dt$  равняется нулю

$$\mathbb{E}[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = \mathbb{E}[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_{t+dt}}], \quad d\mathbb{E}[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = 0 \quad (5.6)$$

Используем исчисление Ито и получим выражение для дифференциала  $\mathcal{F}$ :

$$d\mathcal{F}_{\mathbb{H}_t} = \left( \prod_{i=1}^{2N} \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^{h_i} \right) \left( - \sum_{i=1}^{2N} \frac{2h_i dt}{w_i^2} + \left[ \sum_{i=1}^{2N} \mathcal{G}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{G}_i \mathcal{G}_j \right] \right) \mathcal{F}_{\mathbb{H}} = 0 \quad (5.7)$$

Подставим формулу (5.5) и получим уравнение

$$\left( \sum_i \left[ -\frac{2h_i}{w_i^2} + \frac{2}{w_i} \partial_{w_i} \right] + \frac{\kappa}{2} \sum_{i,j} \partial_{w_i} \partial_{w_j} \right) \mathcal{F}(\{z_i\}) = 0 \quad (5.8)$$

Для корреляционных функций вторичных полей  $L_{-n}\phi$  имеет место уравнение

$$\langle (L_{-n}\phi)(z) \varphi_1 \dots \varphi_N \rangle = \mathcal{L}_{-n} \langle \phi \varphi_1 \dots \varphi_N \rangle, \quad (5.9)$$

где  $n \geq 1$  и

$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{(n-1)h_i}{(w_i - z)^n} - \frac{1}{(w_i - z)^{n-1}} \partial_{w_i} \right)$$

(См. [24]). То есть мы можем переписать дифференциальное уравнение (5.8) как алгебраическое уравнение на поле  $\phi$ , соответствующее оператору смены граничных условий:

$$\left\langle \left( [L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2] \phi \right) (0) \varphi_{\lambda_1} \dots \varphi_{\lambda_{2N}} \right\rangle = 0. \quad (5.10)$$

В случае минимальных моделей набор примарных полей конечен и все состояния можно получить через соответствие между полями и состояниями [3], [24]. Равенство (5.10) верно для произвольной наблюдаемой  $\mathcal{O}$  и для произвольных примарных поле  $\varphi_{\lambda_i}$ , так что  $\psi = [L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2] \phi$  – нулевое поле уровня два и  $\psi(0) |0\rangle$  – нулевое состояние уровня два. В минимальных унитарных моделях существует только два примарных поля, порождающих модули Верма алгебры Вирасоро с нулевыми состояниями на уровне два. Это поля  $\phi_{1,2}$  и  $\phi_{2,1}$ , так что  $\phi \sim \phi_{1,2}$  от  $\phi_{2,1}$ .

#### 5.1.4. Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и эволюция Шрамма-Левнера

Чтобы обобщить анализ предыдущего раздела 5.1.3 на не-минимальные модели мы должны принять во внимание дополнительные симметрии. Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена обладают симметрией Каца-Муди в дополнение к конформной инвариантности, приводящей к появлению алгебры Вирасоро. Сначала мы напомним свойства ВЗНВ-моделей [24], которые нужны для изучения мартингалов эволюции Шрамма-Левнера.

Действие модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена записывается в терминах отображения  $g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim S^2 \rightarrow G$  из комплексной плоскости с бесконечностью (сферы Римана) в некоторую (простую) группу Ли  $G$ :

$$S = -\frac{k}{8\pi} \int d^2x \mathcal{K}(g^{-1}\partial^\mu g, g^{-1}\partial_\mu g) - \frac{k}{24\pi^2} \int_B \epsilon_{ijk} \mathcal{K}\left(\tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i}, \left[\tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k}\right]\right) d^3y \quad (5.11)$$

Здесь  $\mathcal{K}$  – форма Киллинга на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G$ . Первый член – это просто нелинейная сигма-модель, а второй записывается при помощи продолжения  $\tilde{g}$  с два-сферы  $S^2$  на трехмерное многообразие  $B$ , границей которого является два-сфера. Так как это продолжение не единственно, а экспонента действия должна быть определена однозначно, константа  $k$  должна быть целочисленной.

Сохраняющиеся токи в этой модели даются выражениями:

$$J(z) = -k\partial_z g g^{-1} \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (5.12)$$

Модель обладает калибровочной инвариантностью по отношению к преобразованиям  $g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$ , здесь  $\Omega, \bar{\Omega} \in G$  независимы. Из рассмотрения инфинитезимальных калибровочных преобразований  $\Omega = 1 + \omega$

получаем тождества Уорда

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle, \quad (5.13)$$

из которых следует операторное разложение для токов:

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum_c if_{abc} \frac{J^c}{z-w}, \quad (5.14)$$

здесь  $f_{abc}$  – структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Разложим токи на моды  $J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-1} J_n^a$ , воспользуемся операторным разложением (5.14) и получим коммутационные соотношения аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$ :

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c if_{abc} J_{n+m}^c + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0}.$$

Конформная инвариантность в этой модели следует из конструкции Сугавары, которая представляет собой способ вложения алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую алгебры аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$  ( $Vir \subset U(\hat{\mathfrak{g}})$ ):

$$L_n = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \left( \sum_a \sum_{m \leq -1} J_m^a J_{n-m}^a + \sum_{m \geq 0} J_{n-m}^a J_m^a \right), \quad (5.15)$$

где  $h^\vee$  – дуальное число Кокстера алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Полная киральная алгебра модели представляет собой полупрямое произведение аффинной алгебры и алгебры Вирасоро  $\hat{\mathfrak{g}} \ltimes Vir$  с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [J_n^a, J_m^b] &= \sum_c if_{abc} J_{n+m}^c + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0} \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J_m^a] &= -mJ_{n+m}^a \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь центральный заряд  $c$  алгебры Вирасоро дается выражением

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee} \quad (5.17)$$

В модели существует бесконечное число полей, примарных по отношению к действию алгебры Вирасоро, но они организованы в модули старшего веса аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$ . Примарные поля полной киральной алгебры  $\phi_\lambda$  нумеруются старшими весами  $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулей. Покажем, как генераторы алгебры Вирасоро и аффинной алгебры Ли действуют на примарные поля:

$$\begin{aligned} J_0^a |\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a |\phi_\lambda\rangle \quad J_n^a |\phi_\lambda\rangle = 0 \quad \text{для } n > 0 \\ L_0 |\phi_\lambda\rangle &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k+h^\vee)} |\phi_\lambda\rangle = h_\lambda |\phi_\lambda\rangle, \end{aligned}$$

где  $\rho$  – вектор Вейля алгебры  $\mathfrak{g}$ .

Теперь рассмотрим эволюцию Шрамма-Левнера в ВЗНВ-моделях. Подобно минимальным моделям мы рассматриваем наблюдаемые

$$\mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\langle \phi_\Lambda(z_t) \phi_{\lambda_1}(z_1) \dots \phi_{\lambda_n}(z_n) \phi_{\lambda_1^*}(\bar{z}_1) \dots \phi_{\lambda_n^*}(\bar{z}_n) \phi_{\Lambda^*}(\infty) \rangle}{\langle \phi_\Lambda(z_t) \phi_{\Lambda^*}(\infty) \rangle}$$

Мы опять используем конформное отображение  $w(z) : \mathbb{H} \setminus \gamma_t \rightarrow \mathbb{H}$  чтобы переписать формулу для наблюдаемых на всей верхней полуплоскости.

$$\mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \prod \left( \frac{\partial w(z_i)}{\partial z_i} \right)^{h_{\lambda_i}} \prod \left( \frac{\partial \bar{w}(\bar{z}_i)}{\partial \bar{z}_i} \right)^{h_{\lambda_i^*}} \mathcal{F}(\{w_i, \bar{w}_i\})_{\mathbb{H}}$$

В результате эволюции от  $t$  к  $t+dt$  первый множитель дает нам  $-\frac{2h_{\lambda_i}}{w_i^2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^{h_{\lambda_i}}$ .

При рассмотрении полей нам нужно добавить случайное калибровочное преобразование (случайное блуждание в  $G$ ) к стохастическому процессу [94], [96]. Для полей мы имеем

$$d\phi_{\lambda_i}(w_i) = \mathcal{G}_i \phi_{\lambda_i}(w_i),$$

так что в генераторе преобразования поля появляется дополнительный член

$$\mathcal{G}_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} (d\theta^a t_i^a) \quad (5.18)$$

Здесь  $d\theta^a$  – генераторы  $\dim \mathfrak{g}$ -мерного Броуновского движения, с  $\mathbb{E}[d\theta^a d\theta^b] = \delta_{ab} dt$ . Мы предполагаем, что  $t^a$  – это базис в  $\mathfrak{g}$ , ортогональный по отношению к форме Киллинга  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}(t^a, t^b) = \delta_{ab}$ .

Воспользуемся формулой (5.7) и получим следующее уравнение из условий для мартингала:

$$\left( -2\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{2}\kappa\mathcal{L}_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \sum_a \mathcal{J}_{-1}^a \mathcal{J}_{-1}^a \right) \mathcal{F}(\{w_i, \bar{w}_i\})_{\mathbb{H}} = 0, \quad (5.19)$$

где

$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_i \left( \frac{(n-1)h_{\lambda_i}}{(w_i - z)^n} - \frac{1}{(w_i - z)^{n-1}} \partial_{w_i} \right); \quad \mathcal{J}_{-n}^a = - \sum_i \frac{t_i^a}{(w_i - z)^n}$$

Мы снова перепишем уравнение в виде алгебраического соотношения на поле, соответствующее оператору смены граничного условия. Теперь

$$|\psi\rangle = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \sum_a J_{-1}^a J_{-1}^a \right) |\phi_{\Lambda}\rangle \quad (5.20)$$

является нулевым состоянием уровня два и если на него подействовать повышающими операторами, мы должны получить ноль.

$$J_1^a |\psi\rangle = 0 \quad (5.21)$$

$$J_2^a |\psi\rangle = 0 \quad (5.22)$$

$$L_2 |\psi\rangle = 0 \quad (5.23)$$

$$L_1 |\psi\rangle = 0 \quad (5.24)$$

Эти уравнения можно переписать как алгебраические соотношения, связывающие параметры случайного блуждания  $\kappa, \tau$  с уровнем  $k$  представления аффинной алгебры Ли, если воспользоваться коммутационными соотношениями (5.16). Строгий анализ полученных алгебраических соотношений проведен в работе [96].

### 5.1.5. Coset-модели и эволюция Шрамма-Левнера

Теперь мы обобщим анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей [30]. Такие модели задаются алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$  и ее подалгеброй  $\mathfrak{a}$ . Обозначим через  $J_n^a$  генераторы аффинной алгебры Ли  $\hat{\mathfrak{g}}$ , а через  $\tilde{J}_n^b$  – генераторы  $\hat{\mathfrak{a}}$ , так что  $\tilde{J}_n^b = \sum_a m_a^b J_n^a$ . Генераторы алгебры Вирасоро в coset-моделях даются разностями выражений Сугавары для ВЗНВ-моделей, соответствующих алгебрам  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$ :

$$L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{a}}$$

Коммутационные соотношения между генераторам алгебры Вирасоро и генераторами подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$  тривиальны

$$[L_n, \tilde{J}_m^b] = 0 \quad (5.25)$$

Coset-модели можно реализовать, как калибровочные модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена, если добавить дополнительные калибровочные полями  $A, \bar{A}$ , принимающие значения в алгебре Ли  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ , в действие [31]. Теперь поля нумеруются парами весов  $(\mu, \nu)$ , где  $\mu$  – вес  $\hat{\mathfrak{g}}$ , а  $\nu$  – вес  $\hat{\mathfrak{a}}$ , соответственно. Но появляются правила отбора, так как функции ветвления для некоторых пар весов  $(\mu, \nu)$  исчезают. Кроме того, имеется избыточность, так как функции ветвления для различных пар  $(\mu, \nu)$  могут совпадать [33, 34].

Итак, примарные поля нумеруются парами весов  $(\mu, \nu) \in \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}} \oplus \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$  алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$  и подалгебры  $\hat{\mathfrak{a}}$ , такими, что соответствующие функции ветвления  $b_\nu^\mu(q) \neq 0$ . Некоторые пары эквивалентны. Эта эквивалентность дается действием так называемых “простых токов”  $(J, \tilde{J})$ , которые являются элементами группы внешних автоморфизмов  $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{a}}) \approx B(G) \times B(A)$  алгебры  $\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{a}}$ , где  $B(G)$  – это центр группы Ли  $G$ . Мы можем думать о простых токах как о примарных полях, тогда их действие на поля теории дается слиянием [24]. Таким образом,



примарные поля coset-моделей нумеруются классами эквивалентности пар весов  $(\mu, \nu) \sim (J * \mu, \tilde{J} * \nu)$ , где  $(J, \tilde{J})$  такие, что конформные веса компонент равны:  $h_J - h_{\tilde{J}} = 0$ .

Конформный вес примарного поля в coset-модели равен

$$L_0 |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle = \left( \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_a J_0^a J_0^a - \frac{1}{2(k + h_{\mathfrak{a}}^\vee)} \sum_b \tilde{J}_0^b \tilde{J}_0^b \right) |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle = \left( \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} - \frac{(\nu, \nu + 2\rho_{\mathfrak{a}})}{2(k + h_{\mathfrak{a}}^\vee)} \right) |\phi_{(\mu, \nu)}\rangle \quad (5.26)$$

Можно получить аналог уравнений Книжника-Замолотчикова для coset-моделей [35]:

$$\left\{ \frac{1}{2} \partial_i + \sum_{i \neq j}^N \left( \frac{t_i^a t_j^a}{k + h^\vee} - \frac{\tilde{t}_i^b \tilde{t}_j^b}{k + h_{\mathfrak{a}}^\vee} \right) \frac{1}{z_i - z_j} \right\} \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0 \quad (5.27)$$

Теперь введем эволюцию Шрамма-Левнера, соответствующую coset-моделям. Суть конструкции состоит в ограничении дополнительного броуновского движения на групповом многообразии на фактор-пространство  $G/A$ .

Чтобы ограничить броуновское движение на фактор-пространство  $G/A$  выберем базис в  $\mathfrak{g}$  специальным образом. Потребуем, чтобы генераторы  $\{J^a; a = 1 \dots \dim \mathfrak{g}\}$  были выбраны так, что  $\mathcal{K}(J^a, J^b) = h^\vee \delta_{ab}$ , а  $\{J^a; a = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a} \dots \dim \mathfrak{g}\}$  – генераторы подалгебры  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Теперь мы можем ввести  $(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a})$ -мерное Броуновское движение с генераторами  $d\theta^a$ , такими, что  $\mathbb{E}(d\theta^a d\theta^b) = \delta_{ab}; a, b = 1, \dots, \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$ .

Тогда для генераторов преобразования полей можно написать

$$\mathcal{G}_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \left( \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}} (d\theta^a t_i^a) \right) \quad (5.28)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.7) мы получаем условие мартингала

$$\left( -2\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{2} \kappa \mathcal{L}_{-1}^2 + \frac{\tau}{2} \left( \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}} \mathcal{J}_{-1}^a \mathcal{J}_{-1}^a \right) \right) \mathcal{F}_{\mathbb{H}} = 0, \quad (5.29)$$

которое можно переписать как требование, чтобы поле

$$\psi = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left( \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}} J_{-1}^a J_{-1}^a \right) \right) \phi_{(\mu, \nu)} \quad (5.30)$$

было нулевым полем уровня два.

Рассмотрим простой пример. Пусть  $G = SU(2)$  и  $A = U(1)$ , соответствующая алгебра Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  имеет генераторы  $J^1, J^2, J^3$ , а  $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}(1)$  – генератор  $J^3$ ,  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Заметим, что  $\mathcal{K}(J^a, J^b) = 2\delta^{ab}$ .

Уравнение (5.30) теперь имеет вид

$$\psi = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau (J_{-1}^1 J_{-1}^1 + J_{-1}^2 J_{-1}^2) \right) \phi_{(\mu, \nu)} \quad (5.31)$$

Если перейти к базису  $J^+ = \frac{J^1 + iJ^2}{\sqrt{2}}$ ,  $J^- = \frac{J^1 - iJ^2}{\sqrt{2}}$ , это уравнение будет переписано в виде

$$\psi = \left( -2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}L_{-1}^2 + \frac{\tau}{2} [J_{-1}^+ J_{-1}^- + J_{-1}^- J_{-1}^+] \right) \phi_{(\mu, \nu)}, \quad (5.32)$$

аналогичном уравнениям для парафермионных полей, выведенным в статье [100].

В данном примере центральный заряд равен

$$c = \frac{2(k-1)}{k+2} \quad (5.33)$$

Найдем решения уравнения (5.31). Подействуем на  $\psi$  оператором  $L_2$ :

$$L_2 \psi = (-8L_0 + c + 3\kappa L_0 + \tau k) \phi_{(\mu, \nu)} = 0, \quad (5.34)$$

и получим

$$(3\kappa - 8)h_{(\mu, \nu)} + c + \tau k = 0 \quad (5.35)$$

Другое уравнение можно получить действием  $L_1^2$

$$L_1^2 \psi = (12L_0 + \kappa(4L_0^2 + 2L_0) + \tau(J_0^1 J_0^1 + J_0^2 J_0^2)) \phi_{(\mu, \nu)} = 0 \quad (5.36)$$

Так как  $J_0^1 J_0^1 + J_0^2 J_0^2 = J_0^1 J_0^1 + J_0^2 J_0^2 + J_0^3 J_0^3 - J_0^3 J_0^3$ , мы получаем

$$12h_{(\mu,\nu)} + 2\kappa h_{(\mu,\nu)}(2h_{(\mu,\nu)} + 1) + \tau(C_\mu - \tilde{C}_\nu) = 0, \quad (5.37)$$

где  $C_\mu = (\mu, \mu + 2\rho)$  – собственное значение квадратичного оператора Казимира  $\sum_a t^a t^a$ . Для  $u(1)$  это просто  $\nu^2$ . Нам необходимо еще одно уравнение, так как у нас три неизвестных  $\kappa, \tau, h_{(\mu,\nu)}$ . Чтобы его получить, мы пользуемся тем, что  $\psi$  – сингулярный вектор, так что  $L_1 \psi = 0$  и следовательно  $J_1^3 L_1 \psi = 0$ , что дает уравнение

$$(-6 + \kappa + \tau + 2\kappa h_{(\mu,\nu)}) J_0^3 \phi_{(\mu,\nu)} = 0 \quad (5.38)$$

Рассмотрим случай  $k = 2$ ,  $c = 1/2$ , который соответствует модели Изинга на квадратной решетке. У нас есть три неэквивалентных поля, нумерующихся парами весов  $su(2)$  и  $u(1)$ :  $\phi_{(0,0)}$ ,  $h_{(0,0)} = 0$ ;  $\phi_{(0,2)}$ ,  $h_{(0,2)} = 1/2$ ;  $\phi_{(1,1)}$ ,  $h_{(1,1)} = 1/16$ . Уравнение (5.38) тривиально для  $\phi_{(0,0)}$  и  $\phi_{(0,2)}$ , так что уравнения (5.37), (5.35) непротиворечивы, однако мы не знаем, как интерпретировать параметр  $\tau$  в контексте модели Изинга. Для поля  $\phi_{(1,1)}$  не существует решений уравнений на  $\kappa, \tau$ , так что не каждое примарное поле соответствует оператору смены граничного условия.

Теперь обобщим анализ на произвольную coset-модель. Работать с генераторами, ортогональными по отношению к форме Киллинга  $\mathcal{K}$ , не всегда удобно. Иногда предпочтительно использовать базис Шевалле или Картана-Вейля. Так что мы изменим условие нормировке дополнительного  $\dim \mathfrak{g}$ -мерного Броуновского движения (5.28) на  $\mathbb{E} [d\theta^a d\theta^b] = \mathcal{K}(t^a, t^b) dt$ , и генератор преобразования поля (5.5) примет вид

$$\mathcal{G}_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \left( \sum_{a: \mathcal{K}(t^a, \tilde{t}^b)=0} (d\theta^a t_i^a) \right).$$

Условие мартингала (5.7) запишется в виде

$$\left( -2\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{2}\kappa\mathcal{L}_{-1}^2 + \frac{\tau}{2} \left( \sum_a \mathcal{J}_{-1}^a \mathcal{J}_{-1}^a - \sum_b \tilde{\mathcal{J}}_{-1}^b \tilde{\mathcal{J}}_{-1}^b \right) \right) \mathcal{F}_{\mathbb{H}} = 0.$$

Это уравнение снова может быть переписано, как требование чтобы поле

$$\psi = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left( \sum_{a=1}^{\dim g} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim a} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b \right) \right) \phi_{(\mu, \nu)} \quad (5.39)$$

было нулевым полем уровня два.

Действуя на уравнение (5.39) операторами  $L_2$  и  $L_1^2$  мы можем получить уравнения (5.35) и (5.37). Чтобы получить дополнительные уравнения мы можем подействовать генераторами  $\tilde{J}_1^b$  алгебры  $\hat{\mathbf{a}}$  и оператором  $L_1$ , аналогично том, как мы делали с оператором  $J_1^3$  при выводе уравнения (5.38).

Чтобы упростить соотношения можно использовать обобщение уравнений Книжника-Замолодчикова (5.27), как было сделано для ВЗНВ-моделей в статье [96].

#### 5.1.6. О связи мартингалов coset-моделей с классификацией операторов смены граничного условия

Мы предложили способ обобщения эволюции Шрамма-Левнера для получения таких наблюдаемых, которые могут исследоваться методами конформной теории поля. Описание полей в coset-моделях нетривиально ввиду идентификации полей [34] и необходимости в разрешении фиксированных точек [33, 108], которое не обсуждалась в данной главе. Эти тонкости могут усложнить решение уравнений (5.35), (5.37) и аналогов уравнения (5.38). С другой стороны, использование уравнений Книжника-Замолодчикова [35] для корреляционных функций в духе работы [96] приводит к матричным алгебраическим соотношениям, которые напоминают NIM-представления для граничных состояний [109]. Дальнейшее изучение этого предмета может вы-

явить глубокую алгебраическую связь условия мартингала с классификацией граничных состояний.

Физическая интерпретация решений условий мартингала не вполне ясна, но пока не найдена и решеточная интерпретация эволюции Шрамма-Левнера с дополнительным Броуновским движением на групповом многообразии [94] и решеточная реализация ВЗНВ-моделей. Кажется, что эти вопросы тесно связаны.

## 5.2. Вычислительные методы для теории представлений аффинных алгебр Ли

В данном разделе мы описываем вычислительный пакет **Affine.m**, разработанный нами на основе идей и методов, изложенных в главах 2, 3. Этот пакет для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica* может использоваться для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли. Реализованные в пакете алгоритмы основываются на свойствах весов и симметрии Вейля. Основные проблемы, которые может решать данный пакет – это вычисление кратностей весов в неприводимых модулях и модулях Верма, построение правил ветвления и функций ветвления, а также разложение тензорных произведений. Такие задачи важны с точки зрения физических приложений (см. главы 1,5.1) и в данной главе мы приводим дополнительные примеры.

Вычислительные методы в теории представлений имеют долгую историю [110], существует большое количество программ и пакетов для вычислений, связанных с алгебрами Ли [111], [112], [113, 114], [115], [108].

Большинство популярных программ [111], [112], [115], [114] создано для изучения теории представлений простых конечномерных алгебр Ли. Здесь основные вычислительные задачи это:

1. Построение корневой системы, определяющей свойства алгебры Ли, в том числе коммутационные соотношения.
2. Перечисление элементов группы Вейля, необходимое ввиду симметрии корневой системы и характеров представлений относительно группы Вейля.
3. Вычисление кратностей весов, коэффициентов ветвления и слияния

Существуют различные алгоритмы для решения этих задач [116], [117], [110], [118]. Третья задача наиболее сложна с точки зрения вычислений. Существует два рекуррентных алгоритма, основывающихся на формуле Вейля для характеров и формуле Фрейденталя для кратностей. В данном разделе мы их опишем.

Бесконечномерные алгебры Ли гораздо сложнее исследовать и число имеющихся программ гораздо меньше. Однако структура аффинных алгебр Ли позволяет адаптировать к ним вычислительные алгоритмы, предложенные для конечномерных алгебр Ли [108], [119], [53]. В книге [53], изданной в 1990 году, приведены таблицы кратностей весов неприводимых представлений и другие вычисленные характеристики аффинных алгебр и их модулей. Однако нам на данный момент не известны пакеты для популярных систем компьютерной алгебры, которые можно было бы использовать для воспроизведения и расширения этих результатов.

Необходимые сведения из теории представлений приведены в главе 2. Здесь мы начинаем с описания структур данных пакета **Affine.m**, использующихся для описания различных объектов теории представлений (раздел 5.2.1), обсуждаем алгоритмы (раздел 5.2.2) и приводим примеры (раздел 5.3).

### 5.2.1. Структуры данных

Хотя *Mathematica* – нетипизированный язык программирования, в нем можно создавать структурированные объекты и проверять их типы используя сопоставление с шаблоном (pattern matching) [120], [121].

#### Веса

Веса представляются двумя структурами данных: `finiteWeight` для конечномерных алгебр Ли и `affineWeight` для аффинных алгебр Ли.

Внутренняя структура веса конечномерной алгебры Ли представляет собой `List` с заголовком `finiteWeight`, его компоненты – это координаты веса в ортогональном базисе выбранном согласно Бурбаки [55]. Аффинный вес представляет собой расширение конечномерного веса с добавлением уровня и грейда.

В пакете **Affine.m** содержится набор функций для работы с весами конечномерных и аффинных алгебр Ли. Полный список доступен во встроенной справке пакета. Важнейшие из них – это определение операций сложения, умножения на число и скалярного произведения (билинейной формы) для весов. В результате можно использовать традиционные обозначения при работе с **Affine.m**:

```
w=makeFiniteWeight[{1,0,3}];  
v=makeFiniteWeight[{3,2,1}];  
2*w+v==makeFiniteWeight[{5,2,7}]  
w.v==6
```

Использование ортогонального базиса во внутренней структуре весов позволяет нам работать с весами без полного задания корневой системы. Это полезно при изучении редукции на подалгебры, так как корни подалгебры можно задать вручную, путем указания их координат в ортогональном базисе.

## Корневые системы

Чтобы задать конечномерную или аффинную алгебру достаточно определить ее корневую систему. Корневые системы представляются двумя структурами данных `finiteRootSystem` и `affineRootSystem`. Вторая структура является расширением первой. Мы предлагаем несколько конструкторов для этих структур данных. Во-первых, можно определить простое корни явно, например, при изучении вложения  $B_2 \subset B_4$  можно использовать определение

```
b2b4=makeFiniteRootSystem[ { {1,-1,0,0}, {0,1,0,0} } ]
```

Для корневых систем простых конечномерных алгебр Ли есть специальные конструкторы:

```
b2=makeSimpleRootSystem[B,2]
```

В графическом интерфейсе *Mathematica* можно использовать традиционные математические обозначения для простых алгебр Ли:

```
B2 == makeFiniteRootSystem[ { {1, -1}, {0, 1} } ]
```

Нескрученные аффинные корневые системы могут быть созданы как аффинные расширения корневых систем конечномерных алгебр Ли, например:

```
b2affine = makeAffineExtension[b2]
```

В графическом интерфейсе это же определение можно ввести просто как  $\hat{B}_2$ .

Полупростые алгебры Ли представляют собой прямые суммы простых:

```
A1 ⊕ A1 == finiteRootSystem[2, 2, {finiteWeight[2, {1, 0}], finiteWeight[2, {0, 1}]]
```

Предикат `rootSystemQ` проверяет, является ли объект корневой системой конечномерной или аффинной алгебры Ли.

Список простых корней – это определяющее свойство корневой системы, поэтому он доступен как `rs[simpleRoots]`.

В пакете реализовано несколько функций для основных характеристик корневой системы. Вектор Вейля дается функцией `rho[rs_?rootSystemQ]`:

```
In[1] = rho[b2]
Out[1] = finiteWeight[2, {3/2, 1/2}]
```



Положительные корни строятся функцией `positiveRoots[rs_?rootSystemQ]`. Для аффинной алгебры Ли эта и аналогичные функции возвращают список до некоторого фиксированного грейда. Это максимальное значение грейда задается как свойство `rs[gradeLimit]` и по умолчанию равняется 10. Список корней (вплоть до грейда `gradeLimit`) строится функцией `roots[rs]`. Матрица Картана и фундаментальные веса вычисляются функциями `cartanMatrix` и `fundamentalWeights` соответственно.

Вес алгебры Ли можно задать его индексами Дынкина

```
weight[b2][1,2] == makeFiniteWeight[{2, 1}]
```

Функция `dynkinLabels[rs_?rootSystemQ][wg_?weightQ]` возвращает индексы Дынкина веса `wg` по отношению к корневой системе `rs`.

Элементы группы Вейля задаются номерами элементарных отражений, так что элемент  $w = s_1 s_2 s_1$  группы Вейля алгебры Ли  $B_2$  строится вызовом функции `weylGroupElement[b2][1,2,1]`. После этого его можно применить к весам:

```
w = weylGroupElement[b2][1,2,1];
w @ makeFiniteWeight[{1,0}] == makeFiniteWeight[{-1,0}]
```

Вычисление лексикографически минимальной формы [118, 122] для элементов группы Вейля можно реализовать при помощи шаблонов в *Mathematica*. В работе [123] представлены правила подстановки на языке *Mathematica* для такого вычисления в случае простых конечномерных и аффинных алгебр Ли. Наше представление для элементов группы Вейля совместимо с кодом [123]:

```
In [1] = <<A3reduce;
        reduce[s[1,2,1,2,1,3,2,1,1]]
Out [1] = s[2, 3, 2]

In [2] = (weylGroupElement[A3] @@ reduce[s[1,2,1,2,1,3,2,1,1]]) @ weight[A3][{-1,-2,-1}]
Out [2] = finiteWeight[4, {-2, 2, 1, -1}]

In [3] = dynkinLabels[A3][Out[2]]
Out [3] = {-4, 1, 2}
```

## Формальные элементы

Формальные элементы представляются специальной структурой данных `formalElement`. Эта структура данных представляет собой хэш-таблицу, реализованную через механизм `DownValues`. Ключами в таблице выступают веса, стоящие в экспонентах формального элемента, а значениями – соответствующие кратности. Вызов `makeFormalElement[{ $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ }, { $m_1, \dots, m_n$ }]` создает структуру данных, представляющую элемент  $\sum_{i=1}^n m_i e^{\gamma_i}$  формальной алгебры  $\mathcal{E}$ . Операции в алгебре  $\mathcal{E}$  реализованы для структуры `formalElement`: формальные элементы можно складывать, умножать на число или экспоненту веса. Кроме того, есть умножение формальных элементов, но нет операции деления.

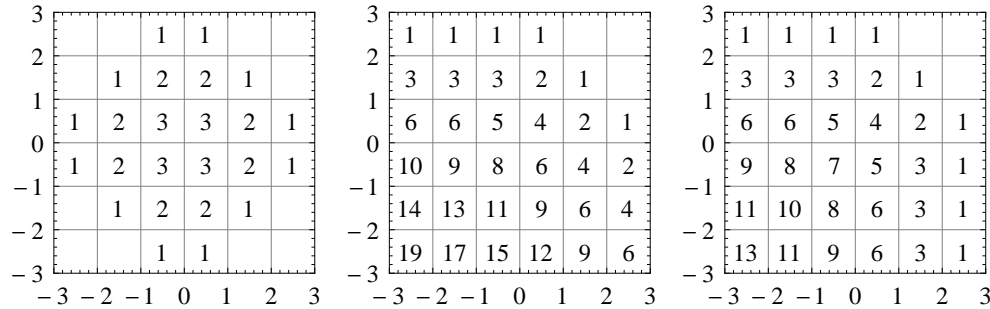
```
In [1] = makeFormalElement[{makeFiniteWeight[{1, 1}], makeFiniteWeight[{0, 0}]], {1, 2}] *  
      (2 * Exp[makeFiniteWeight[{1, 0}]] *  
      makeFormalElement[{makeFiniteWeight[{1, 1}], makeFiniteWeight[{0, 0}]], {1, 2}]);  
In [2] = In [1][weights]  
Out [2] = {finiteWeight[2, {1, 0}], finiteWeight[2, {2, 1}], finiteWeight[2, {3, 2}]}  
  
In [3] = In [1][multiplicities]  
Out [3] = {8, 8, 2}
```

## Модули

**Affine.m** можно использовать для изучения различных видов модулей, например, модулей Верма, неприводимых модулей и параболических модулей Верма. Для представления произвольного модуля используется структура данных `module`. Свойства модуля можно вывести из набора его сингулярных весов используя формулы Вейля для характеров (1.33), (1.42), (2.27), (2.26). Множество сингулярных весов может обладать вейлевой симметрией. Это может быть симметрия по отношению к действию группы Вейля алгебры  $W_{\mathfrak{g}}$  или по отношению к действию группы Вейля некоторой подалгебры  $W_{\mathfrak{a}}$ , как в случае параболических модулей Верма. В этом случае можно ограничиться изучением главной камеры Вейля  $C_{\mathfrak{a}}$ . Чтобы воспользоваться такой симметрией об-

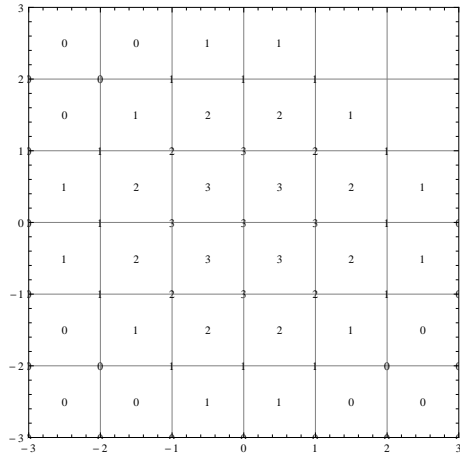
щий конструктор для структуры данных `module` принимает несколько параметров `makeModule[rs_?rootSystemQ][singWeights_formalElement,subs_?rootSystemQ|emptyRootSystem[],limit:10]`. Здесь `rs` – корневая система алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , `singWeights` – набор сингулярных весов, `subs` – корневая система, соответствующая группе Вейля  $W_{\mathfrak{a}}$ , являющейся группой (анти-)симметрии множества сингулярных весов. Параметр `limit` ограничивает вычисления в случае бесконечномерных модулей, таких, как модули Верма и параболические модули Верма. Существует несколько специализированных конструкторов для различных типов модулей старшего веса:

```
vm=makeVermaModule[B2][{2,1}];
pm=makeParabolicVermaModule[B2][weight[B2][2,1],{1}];
im=makeIrreducibleModule[B2][2,1];
GraphicsRow[textPlot/@{im,vm,pm}]
```

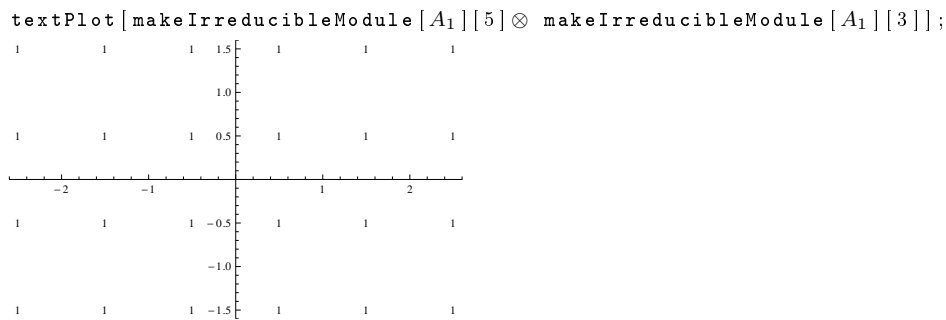


Как мы уже отмечали, свойства модулей определяются его сингулярным элементом. Функция `singularElement[m_module]` возвращает сингулярный элемент модуля в виде структуры данных `formalElement`. Характер (вплоть до предела `limit` для (параболических) модулей Верма) вычисляется функцией `character[m_module]`. Прямая сумма модулей является модулем и мы используем естественные обозначения

```
im1=makeIrreducibleModule[B2][weight[B2][2,1]];
im2=makeIrreducibleModule[B2][weight[B2][1,2]];
textPlot[im1⊕ im2]
```



Тензорное произведение модулей тоже реализовано, но только для модулей конечномерных алгебр Ли. Это связано с тем, что тензорные произведения модулей аффинных алгебр Ли приводят к возникновению различных дополнительных структур [124–126], изучение которых пока лежит за пределами наших интересов.



### 5.2.2. Основные алгоритмы

Существует два рекуррентных соотношения (2.29), (2.28), которые можно использовать для вычисления кратностей весов в неприводимых модулях. Оба алгоритма состоят из следующих шагов:

1. Построение списка весов в главной камере Вейля путем вычитания всех возможных комбинаций простых корней их старшего веса (например, для конечномерной алгебры вычитаем корень  $\alpha_1$  из старшего веса  $\mu$  до тех пор, пока остаемся внутри  $\bar{C}$ , затем вычитаем корень  $\alpha_2$  из всех весов полученных на перво шаге и так далее).

2. Сортировка списка весов по значению их скалярного произведения с вектором Вейля.
3. Рекуррентное вычисление кратностей по формуле. Если вес, необходимый для вычислений оказывается вне главной камеры Вейля, то используется симметрия относительно группы Вейля.

Различие в производительности алгоритмов происходит от количества предыдущих значений, требующихся для вычисления кратности веса. В случае рекуррентного соотношения, основанного на формуле Вейля (2.28) это количество постоянно и равно числу элементов в группе Вейля (если мы находимся далеко от внешнего контура диаграммы представления). При использовании формулы Фрейдентала (2.29) требуемое число предыдущих значений растет с расстоянием от внешнего контура диаграммы представления. Поэтому формула Фрейдентала работает быстрее, если вес близок к границе или ранг алгебры и размер группы Вейля велик [116]. Заметим, что формула Фрейдентала работает только для неприводимых модулей и не подходит для изучения (обобщенных) модулей Верма.

Мы осуществили тестирование производительности наших реализаций алгоритмов, основанных на формуле Фрейдентала и формуле (2.29) и получили результаты, представленные на Рисунке 5.3. Там показана зависимость времени вычислений от числа весов в модуле.

При вычислении коэффициентов ветвления использование формулы Фрейдентала требует полного построения формальных характеров представления алгебры и всех представлений подалгебры, входящих в его разложение. Такой подход становится непрактичным для большого ранга алгебры и подалгебры, например, при максимальных вложениях.

Альтернативный алгоритм описан в разделе 2.2. Рассмотренный там же пример регулярного вложения 2.3.1  $B_2 \subset B_4$  позволяет сделать следующее

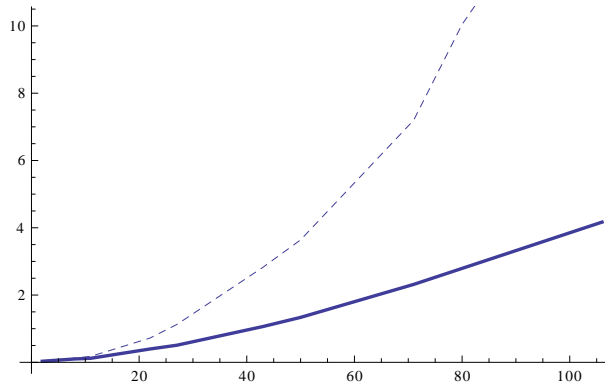


Рис. 5.3. Время работы алгоритмов, основанных на формуле Фрейденталя (2.29) (пунктир) и рекуррентном соотношении (2.28) (сплошная линия) в зависимости от количества весов в  $\bar{C}$  для вычисления кратностей в представлениях алгебры  $B_2$ .

сравнение числа требующихся операций. В данном примере веер вложения состоит из 24 элементов. Для разложения модуля алгебры  $B_4$  необходимо построить подмножество сингулярных весов модуля, проектирующихся в главную камеру Вейля подалгебры  $B_2$ . Полное множество сингулярных весов состоит из 384 элементов, в главную камеру Вейля проектируется не более 48, так что время на построение этого множества пренебрежимо мало, если число коэффициентов ветвления более 48. Мы можем оценить сверху общее число операций для вычисления коэффициентов ветвления произведением числа весов в главной камере Вейля подалгебры с ненулевыми коэффициентами ветвления на число элементов веера вложения. С другой стороны, при использовании алгоритма, основанного на построении всех характеров при помощи формулы Фрейденталя мы должны вычислить кратности для каждого модуля в разложении, так что общее количество операций растет с ростом числа весов в представлении быстрее, чем квадрат числа весов в главной камере Вейля подалгебры с ненулевыми коэффициентами ветвления.

Чтобы проиллюстрировать эту разницу в производительности алгоритмов, мы приводим Рисунок 5.4, на котором показано время, необходимое для вычисления коэффициентов ветвления для вложения  $B_3 \subset B_4$ .

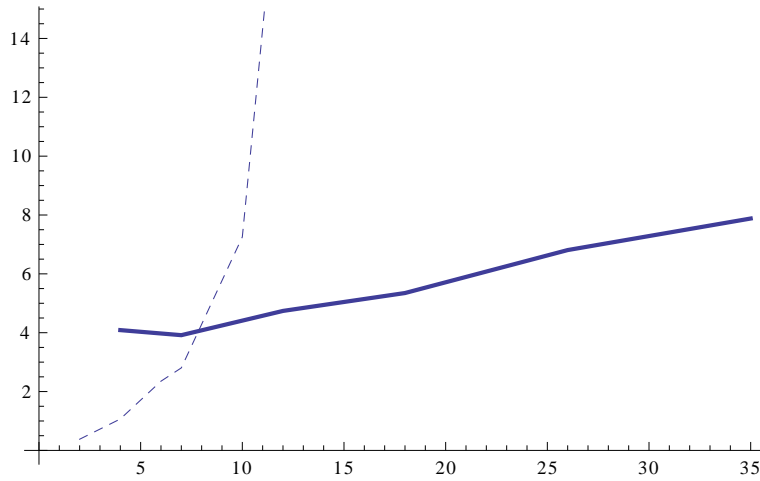


Рис. 5.4. Время работы алгоритмов, основанных на применении формулы Фрейденшталя (2.29) (пунктиром) и рекуррентного соотношения (2.44) (сплошная линия) с ростом числа весов в  $\bar{C}$  при вычислении коэффициентов ветвления для вложения  $B_3 \subset B_4$ .

### 5.3. Примеры вычислений

В этом разделе мы приводим примеры вычислений, проведенных с использованием **Affine.m** и код, который для этого потребовался.

#### 5.3.1. Разложение тензорных произведений модулей конечномерных алгебр Ли на неприводимые

Вычисление коэффициентов слияния для разложения тензорного произведения модулей старшего веса в прямую сумму неприводимых модулей важно для различных приложений в физике. Например, мы можем рассматривать спин составной системы, такой как атом. Другой интересный пример – это интегрируемые спиновые цепочки, состоящие из  $N$  частиц со спинами, живущими в некотором представлении  $L$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , с  $\mathfrak{g}$ -инвариантным гамильтонианом  $H$ , описывающим спин-спиновое взаимодействие ближайших соседей. Чтобы решить такую систему, то есть найти собственные состояния гамильтониана, мы должны разложить  $L^{\otimes N}$  в прямую сумму неприводимых  $\mathfrak{g}$ -модулей меньшей размерности и диагонализировать гамильтониан на этих

модулях.

Для фундаментальных представлений простых алгебр Ли иногда можно написать аналитический ответ, описывающий зависимость коэффициентов разложения от  $N$  (См. работу [127]). Наш код позволяет получать численные ответы, которые можно использовать для проверки этих аналитических результатов.

Рассмотрим тензорную степень  $(L^{[1,0]})^{\otimes 4}$  первого фундаментального представления алгебры  $B_2$ . Коэффициенты разложения тензорной степени на неприводимые модули – это коэффициенты ветвления модуля алгебры  $B_2 \oplus B_2 \oplus B_2 \oplus B_2$  на диагональную подалгебру  $B_2 \subset B_2 \oplus B_2 \oplus B_2 \oplus B_2$ . Следующий код осуществляет необходимые вычисления:

```
fm = makeIrreducibleModule[B2][1, 0];
tp = ((fm⊗ fm)⊗ fm)⊗ fm;
subs = makeFiniteRootSystem[
  {1/4*{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1},
   1/4*{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1}}];
bc = branching[tp, subs];
{bc[#], dynkinLabels[subs][#]} & /@ bc[weights]
```

Он выдает в результате следующий набор старших весов и коэффициентов разложения:

```
{{1, {4, 0}}, {3, {2, 2}}, {0, {3, 0}},
 {2, {0, 4}}, {3, {1, 2}}, {6, {2, 0}},
 {6, {0, 2}}, {1, {1, 0}}, {3, {0, 0}}}
```

Возвращаясь к проблеме диагонализации гамильтониана спиновой цепочки, мы можем заметить, что вместо диагонализации оператора в пространстве размерности 625 мы можем диагонализировать операторы в пространствах размерностей 55, 81, 30, 35, 35, 14, 10, 5, 1.

### 5.3.2. Ветвления и параболические модули Верма

Мы иллюстрируем обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда (см. главу 3) диаграммами параболических модулей Верма алгебры



$G_2$ , возникающих в разложении неприводимого модуля  $L_{G_2}^{[1,1]}$ :

$$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{a}}(u)} \epsilon(u) \text{ch} M_I^{\mu_{a_\perp}(u)}. \quad (5.40)$$

Характер  $L^{[1,1]}$  представлен на Рисунке 5.5, характеры обобщенных модулей Верма в разложении (5.40) показаны на Рисунке 5.6. Характеры в верхнем ряду входят в формулу (5.40) со знаком плюс, в нижнем – со знаком минус.

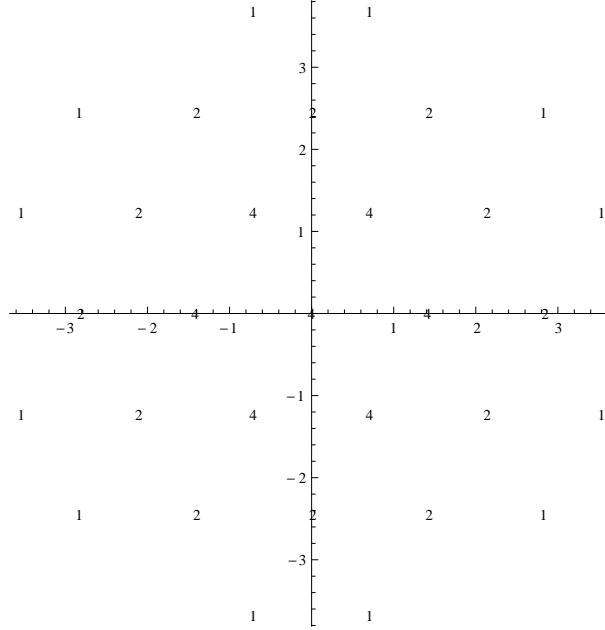


Рис. 5.5. Характер неприводимого модуля  $L^{[1,1]}$  алгебры  $G_2$

### 5.3.3. Струнные функции аффинных алгебр Ли и модели конформной теории поля

Струнные функции можно использовать для описания формальных характеров представлений старшего веса аффинных алгебр Ли. Эти функции обладают интересными аналитическими и модулярными свойствами [26, 40, 82].

**Affine.m** позволяет вычислять степенное разложение для струнных функций. Рассмотрим аффинную алгебру Ли  $sl(\hat{3}) = \hat{A}_2$  и ее модуль старшего веса  $L^{(1,0,0)}$ . Чтобы получить струнные функции используем следующий код:

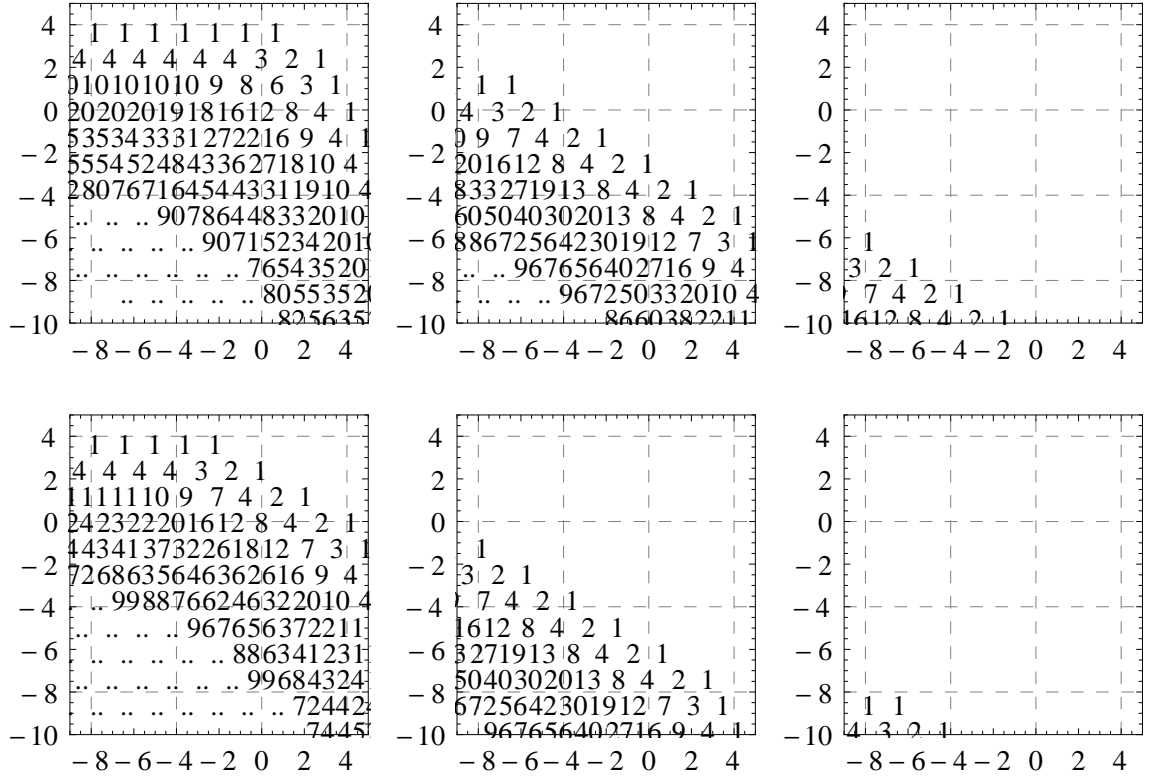


Рис. 5.6. Характеры обобщенных модулей Верма алгебры  $G_2$ , входящие в разложение характера  $L^{[1,1]}$ . Параболические модули Верма в верхнем ряду входят в разложение со знаком плюс, в нижнем – со знаком минус.

```
stringFunctions[ $\hat{A}_2, \{1, 1, 2\}$ ]
{{0, 0, 4},
 2q + 10q2 + 40q3 + 133q4 + 398q5 + 1084q6 + 2760q7 + 6632q8 + 15214q9 + 33508q10},
{{0, 3, 1},
 2q + 12q2 + 49q3 + 166q4 + 494q5 + 1340q6 + 3387q7 + 8086q8 + 18415q9 + 40302q10},
{{1, 1, 2},
 1 + 6q + 27q2 + 96q3 + 298q4 + 836q5 + 2173q6 + 5310q7 + 12341q8 + 27486q9 + 59029q10},
{{2, 2, 0},
 1 + 8q + 35q2 + 124q3 + 379q4 + 1052q5 + 2700q6 + 6536q7 + 15047q8 + 33248q9 + 70877q10},
{{3, 0, 1},
 2 + 12q + 49q2 + 166q3 + 494q4 + 1340q5 + 3387q6 + 8086q7 + 18415q8 + 40302q9 + 85226q10}
```

Аналогично для аффинной алгебры Ли  $\hat{G}_2$  получаем

```
stringFunctions[ $\hat{G}_2, \{1, 1, 0\}$ ]
{{2, 0, 0},
 1 + 8q + 37q2 + 138q3 + 431q4 + 1227q5 + 3208q6 + 7901q7},
{{0, 0, 1},
 3q + 18q2 + 73q3 + 247q4 + 736q5 + 2000q6 + 5070q7},
{{1, 1, 0},
 1 + 7q + 32q2 + 117q3 + 370q4 + 1055q5 + 2780q6 + 6880q7},
```

$$\{\{0, 2, 0\}, \\ 3q + 15q^2 + 63q^3 + 210q^4 + 633q^5 + 1725q^6 + 4407q^7\}$$

#### 5.3.4. Функции ветвления и coset-модели конформной теории поля

Считается, что рациональные модели конформной теории поля могут быть получены как  $G/A$  coset-модели, соответствующие вложениям  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Эти модели можно реализовать как калибровочные теории [32, 43] (см. раздел 1.3).

Функции ветвления для вложения  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  являются статсуммами для моделей конформной теории поля на торе (см. [24]).

В качестве первого примера мы демонстрируем вычисление функций ветвления для вложения  $\hat{A}_1 \rightarrow \hat{B}_2$  до десятого грейда:

```
branchingFunctions[ $\hat{B}_2$ , makeAffineExtension[makeFiniteRootSystem[{{1, 1}}]], {1, 1, 1}]
```

$$\{\{3, 0\}, \\ 2 + 14q + 52q^2 + 154q^3 + 410q^4 + 994q^5 + 2248q^6 + 4832q^7 + 9934q^8 + 19680q^9 + 37802q^{10}\}, \\ \{\{2, 1\}, \\ 4 + 20q + 72q^2 + 220q^3 + 584q^4 + 1424q^5 + 3248q^6 + 7012q^7 + 14488q^8 + 28844q^9 + 55616q^{10}\}, \\ \{\{0, 3\}, \\ 4q + 20q^2 + 68q^3 + 200q^4 + 516q^5 + 1224q^6 + 2736q^7 + 5808q^8 + 11820q^9 + 23236q^{10}\}, \\ \{\{1, 2\}, \\ 2 + 14q + 54q^2 + 168q^3 + 462q^4 + 1148q^5 + 2656q^6 + 5812q^7 + 12130q^8 + 24358q^9 + 47328q^{10}\}$$

Второй пример – это вычисление функций ветвления для регулярного вложения  $\hat{B}_2 \subset \hat{C}_3$ :

```
sub=makeAffineExtension[parabolicSubalgebra[ $C_3$ ][2, 3]];
branchingFunctions[ $\hat{C}_3$ , sub, {2, 0, 0, 0}]
```

$$\{\{0, 1, 0\}, \\ 2q - 20q^3 + 24q^4 + 82q^5 - 320q^6 + 108q^7\}, \\ \{\{1, 0, 0\}, \\ 1 - q - 8q^2 + 19q^3 + 16q^4 - 156q^5 + 205q^6 + 640q^7\}, \\ \{\{0, 0, 1\}, \\ q - 5q^3 + 7q^5\}$$

## 5.4. Заключение

В данной главе мы использовали свойства сингулярных элементов для классификации операторов изменения граничных условий в coset-моделях конформной теории поля, соответствующих стохастическим моделям с эволюцией Шрамма-Левнера с дополнительным блужданием на факторпространстве  $G/A$ .

Кроме того, в этой главе мы представили пакет **Affine.m** для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли. Он может использоваться для изучения групп Вейля, корневых систем, неприводимых модулей, модулей Верма и параболических модулей Верма конечномерных и аффинных алгебр Ли. Кроме того, мы обсудили основные идеи в реализации пакета **Affine.m**.

Мы показали, что рекуррентный подход, основанный на формуле Вейля для характеров полезен не только для вычислений, но и позволяет прояснить связь с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.

Также мы представили примеры вычислений с применением нашего пакета, полезных для различных физических и математических проблем.

# Литература

- [1] V. Kac, “Simple irreducible graded lie algebras of finite growth,” *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **2** (1968) 1271.
- [2] R. Moody, “A new class of lie algebras,” *Journal of algebra* **10** (1968) no. 2, 211–230.
- [3] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics* **241** (1984) 333–380.
- [4] V. Lyakhovsky and A. Nazarov, “Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) no. 7, 075205, [arXiv:1007.0318 \[math.RT\]](#).
- [5] V. Lyakhovsky and A. Nazarov, “Recursive properties of branching and BGG resolution,” *THEORETICAL AND MATHEMATICAL PHYSICS* **169** (NOV, 2011) 1551–1560, [arXiv:1102.1702 \[math.RT\]](#).
- [6] V. Laykhovsky and A. Nazarov, “Fan, splint and branching rules,” *ArXiv e-prints* (2011) , [arXiv:1111.6787 \[math.RT\]](#).
- [7] A. Nazarov, “Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution,” *ArXiv e-prints* (2011) , [arXiv:1112.4354 \[math-ph\]](#).
- [8] V. Lyakhovsky and A. Nazarov, “Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent),” in *Models in Quantum Field Theory*. 2010.  
<http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/>.

- [9] A. Nazarov, “Comparison of algorithms for construction of representations of lie algebras,” in *Physics and Progress*, Physics and Progress, SPbSU. 2008. [http://anton\\_nazarov.fatal.ru/static/articles/2008/physics-and-progress/article.pdf](http://anton_nazarov.fatal.ru/static/articles/2008/physics-and-progress/article.pdf).
- [10] A. Nazarov, “Computational tools for representation theory of affine lie algebras,” in *second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists*, ACSM, EIMI. 2009.
- [11] A. Nazarov, “Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras,” *ArXiv e-prints* (2011) , [arXiv:1107.4681](https://arxiv.org/abs/1107.4681) [math.RT].
- [12] A. M. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *JETP Lett.* **12** (1970) 381–383.
- [13] G. Moore and N. Seiberg, “Taming the conformal zoo,” *Physics Letters B* **220** (1989) no. 3, 422–430.
- [14] M. Bauer and D. Bernard, “Cfts of sles: the radial case,” *Physics Letters B* **583** (2004) no. 3-4, 324–330.
- [15] M. Bauer and D. Bernard, “Sle martingales and the virasoro algebra,” *Physics Letters B* **557** (2003) no. 3-4, 309–316.
- [16] M. Bauer and D. Bernard, “Conformal field theories of stochastic loewner evolutions,” *Communications in mathematical physics* **239** (2003) no. 3, 493–521.
- [17] G. Felder, J. Fröhlich, and G. Keller, “On the structure of unitary conformal field theory. i. existence of conformal blocks,” *Communications in mathematical physics* **124** (1989) no. 3, 417–463.

- [18] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*. Springer Verlag, 2008.
- [19] G. Segal, “The definition of conformal field theory,” *Differential geometrical methods in theoretical physics (Como, 1987)* **250** (1987) 165–171.
- [20] V. Kac, *Vertex algebras for beginners: Victor Kac*, vol. 10. Amer Mathematical Society, 1998.
- [21] G. Moore and N. Seiberg, “Classical and quantum conformal field theory,” *Communications in Mathematical Physics* **123** (1989) no. 2, 177–254.
- [22] A. Zamolodchikov and V. Fateev, “Representations of the algebra of "parafermion currents" of spin  $4/3$  in two-dimensional conformal field theory. minimal models and the tricritical potts  $z=3$  model,” *Theoretical and Mathematical Physics* **71** (1987) no. 2, 451–462.
- [23] A. Zamolodchikov, “Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical ashkin-teller multipoint correlation functions,” *Nuclear Physics B* **285** (1987) 481–503.
- [24] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.
- [25] M. Walton, “Affine Kac-Moody algebras and the Wess-Zumino-Witten model,” (1999) , [arXiv:hep-th/9911187](#).
- [26] V. Kac and M. Wakimoto, “Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras,” *Advances in mathematics (New York, NY. 1965)* **70** (1988) no. 2, 156–236.
- [27] D. Altschuler, M. Bauer, and C. Itzykson, “The branching rules of

- conformal embeddings,” *Communications in Mathematical Physics* **132** (1990) no. 2, 349–364.
- [28] M. Walton, “Conformal branching rules and modular invariants,” *Nuclear Physics B* **322** (1989) 775–790.
- [29] R. Coquereaux and G. Schieber, “From conformal embeddings to quantum symmetries: an exceptional SU (4) example,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 103, p. 012006, Institute of Physics Publishing. 2008. [arXiv:0710.1397](#).
- [30] P. Goddard, A. Kent, and D. Olive, “Virasoro algebras and coset space models,” *Physics Letters B* **152** (1985) no. 1-2, 88 – 92.
- [31] A. Gawdzki *et al.*, “G/h conformal field theory from gauged wzw model,” *Physics Letters B* **215** (1988) no. 1, 119–123.
- [32] S. Hwang and H. Rhedin, “The brst formulation of g/h wznw models,” *Nuclear Physics B* **406** (1993) no. 1-2, 165–184.
- [33] J. Fuchs, B. Schellekens, and C. Schweigert, “The resolution of field identification fixed points in diagonal coset theories,” *Nuclear Physics B* **461** (1996) no. 1-2, 371–404.
- [34] A. Schellekens and S. Yankielowicz, “Field identification fixed points in the coset construction,” *Nuclear Physics B* **334** (1990) no. 1, 67–102.
- [35] I. Kogan, A. Lewis, and O. Soloviev, “Knizhnik-zamolodchikov-type equations for gauged wznw models,” *Arxiv preprint hep-th/9703028* (1997) .
- [36] J. Cardy, “Conformal invariance and surface critical behavior,” *Nuclear Physics B* **240** (1984) no. 4, 514–532.



- [37] J. Cardy, “Boundary conditions, fusion rules and the verlinde formula,” *Nuclear Physics B* **324** (1989) no. 3, 581–596.
- [38] J. Cardy, “Effect of boundary conditions on the operator content of two-dimensional conformally invariant theories,” *Nuclear Physics B* **275** (1986) no. 2, 200–218.
- [39] I. Bernstein, M. Gelfand, and S. Gelfand, “Differential operators on the base affine space and a study of  $\gamma$ -modules, Lie groups and their representations,” in *Summer school of Bolyai Janos Math.Soc.* Halsted Press, NY, 1975.
- [40] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.
- [41] M. Wakimoto, *Infinite-dimensional Lie algebras*. American Mathematical Society, 2001.
- [42] B. Fauser, P. Jarvis, R. King, and B. Wybourne, “New branching rules induced by plethysm,” *J. Phys A: Math. Gen* **39** (2006) 2611–2655, [math-ph/0505037](#).
- [43] S. Hwang and H. Rhedin, “General branching functions of affine Lie algebras,” *Mod. Phys. Lett. A* **10** (1995) 823–830, [arXiv:hep-th/9408087](#).
- [44] T. Quella, “Branching rules of semi-simple Lie algebras using affine extensions,” *Journal of Physics A-Mathematical and General* **35** (2002) no. 16, 3743–3754, [math-ph/0111020](#).
- [45] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, “Principal  $\widehat{\mathfrak{sl}}(3)$  subspaces and quantum Toda Hamiltonian,” [arXiv:0707.1635](#).

- [46] M. Ilyin, P. Kulish, and V. Lyakhovsky, “On a property of branching coefficients for affine Lie algebras,” *Algebra i Analiz* **21** (2009) 2, arXiv:0812.2124 [math.RT].
- [47] J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1997.
- [48] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Univ Pr, 1992.
- [49] D. Fuks, I. Gelfand, and A. Sosinskij, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*. Consultants bureau, 1986.
- [50] Д. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*. Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, Москва, 1984.
- [51] Б. Фейгин and Д. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли,” *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»* **21** (1988) no. 0, 121–209.
- [52] M. Wakimoto, *Lectures on infinite-dimensional Lie algebra*. World scientific, 2001.
- [53] S. Kass, R. Moody, J. Patera, and R. Slansky, *Affine Lie algebras, weight multiplicities, and branching rules*. SI, 1990.
- [54] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course*, vol. 129. Springer Verlag, 1991.
- [55] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras*. Springer Verlag, 2002.
- [56] J. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category  $O$* . Amer Mathematical Society, 2008.

- [57] R. Carter, *Lie algebras of finite and affine type*. Cambridge University Press, 2005.
- [58] J. Bernstein, I. Gel'fand, and S. Gel'fand, "Category of  $\mathfrak{g}$ -modules," *Funktsional'nyi Analiz i ego prilozheniya* **10** (1976) no. 2, 1–8.
- [59] I. Bernstein, I. Gel'fand, and S. Gel'fand, "Structure of representations generated by vectors of highest weight," *Functional Analysis and Its Applications* **5** (1971) no. 1, 1–8.
- [60] M. Il'in, P. Kulish, and V. Lyakhovsky, "Folded fans and string functions," *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **374** (2010) 197–212.
- [61] P. Kulish and V. Lyakhovsky, "String Functions for Affine Lie Algebras Integrable Modules," *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **4**, [arXiv:0812.2381 \[math.RT\]](#).
- [62] A. Felikson, A. Retakh, and P. Tumarkin, "Regular subalgebras of affine kac-moody algebras," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** (2008) no. 36, 365204.
- [63] E. Dynkin, "Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras," *Matematicheskii Sbornik* **72** (1952) no. 2, 349–462.
- [64] A. Schellekens and N. Warner, "Conformal subalgebras of Kac-Moody algebras," *Physical Review D* **34** (1986) no. 10, 3092–3096.
- [65] T. Gannon, "The Classification of  $SU(3)$  Modular Invariants Revisited," [hep-th/9404185](#).
- [66] T. Gannon, "Towards a classification of  $su(2)+\dots+su(2)$  modular invariant partition functions," *Journal of Mathematical Physics* **36** (1995) 675–706, [hep-th/9402074](#).

- [67] J. M. Maldacena and H. Ooguri, “Strings in  $\text{AdS}(3)$  and  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW model. I,” *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929–2960, [arXiv:hep-th/0001053](#).
- [68] J. M. Maldacena, H. Ooguri, and J. Son, “Strings in  $\text{AdS}(3)$  and the  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW model. II: Euclidean black hole,” *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961–2977, [arXiv:hep-th/0005183](#).
- [69] J. M. Maldacena and H. Ooguri, “Strings in  $\text{AdS}(3)$  and the  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW model. III: Correlation functions,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 106006, [arXiv:hep-th/0111180](#).
- [70] J. M. Maldacena, G. W. Moore, and N. Seiberg, “Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models,” *JHEP* **07** (2001) 046, [arXiv:hep-th/0105038](#).
- [71] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large  $N$  field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183–386, [arXiv:hep-th/9905111](#).
- [72] D. C. Dunbar and K. G. Joshi, “Characters for coset conformal field theories,” *Int. J. Mod. Phys.* **A8** (1993) 4103–4122, [arXiv:hep-th/9210122](#).
- [73] S. Lu, “The Branching Rules for Affine Lie Algebras,” *Advances in Mathematics* **105** (1994) no. 1, 42–58.
- [74] J. Lepowsky, “A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution,” *J. Algebra* **49** (1977) no. 2, 496–511.
- [75] S. Derkachov and A. Manashov, “Noncompact  $\text{sl}(N)$  spin chains: Alternating sum representation for finite dimensional transfer matrices,” [arXiv:1008.4734](#).

- [76] S. Derkachov and A. Manashov, “Factorization of-matrix and baxter-operators for generic  $sl(n)$  spin chains,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** (2009) 075204.
- [77] G. Heckman *Invent. Math.* **67** (1982) 333–356.
- [78] H. Doebner and O. Melsheimer, “Graded contractions,” *Nouvo Cimento* **306** (1967) .
- [79] A. Nijenhuis and R. Richardson, “Deformations of algebras,” *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1966) 1–60.
- [80] D. Richter, “Splints of classical root systems,” [arXiv:0807.0640](#).
- [81] V. Lyakhovsky, S. Melnikov, *et al.*, “Recursion relations and branching rules for simple Lie algebras,” *Journal of Physics A-Mathematical and General* **29** (1996) no. 5, 1075–1088, [q-alg/9505006](#).
- [82] V. Kac and D. Peterson, “Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms,” *Adv. in Math* **53** (1984) no. 2, 125–264.
- [83] T. Gannon, *Moonshine beyond the Monster: The bridge connecting algebra, modular forms and physics*. Cambridge Univ Pr, 2006.
- [84] M. Nesterenko, J. Patera, and A. Tereszkiewicz, “Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups,” [arXiv:1001.3683](#).
- [85] H. Duminil-Copin and S. Smirnov, “Conformal invariance of lattice models,” *Arxiv preprint arXiv:1109.1549* (2011) .
- [86] D. Chelkak and S. Smirnov, “Universality in the 2d ising model and conformal invariance of fermionic observables,” *Arxiv preprint arXiv:0910.2045* (2009) .

- [87] S. Smirnov, “Towards conformal invariance of 2d lattice models,” *Arxiv preprint arXiv:0708.0032* (2007) .
- [88] S. Smirnov, “Critical percolation in the plane: Conformal invariance, cardy’s formula, scaling limits,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **333** (2001) no. 3, 239–244.
- [89] J. L. Cardy, “SLE for theoretical physicists,” *Annals Phys.* **318** (2005) 81–118, [arXiv:cond-mat/0503313](#) [cond-mat].
- [90] M. Bauer and D. Bernard, “Conformal transformations and the sle partition function martingale,” in *Annales Henri Poincare*, vol. 5, pp. 289–326, Springer. 2004.
- [91] M. Bauer and D. Bernard, “Sle, cft and zig-zag probabilities,” *Arxiv preprint math-ph/0401019* (2004) .
- [92] R. Friedrich and W. Werner, “Conformal restriction, highest-weight representations and sle,” *Communications in mathematical physics* **243** (2003) no. 1, 105–122.
- [93] M. Bauer and D. Bernard, “Sle  $[\kappa]$  growth processes and conformal field theories,” *Physics Letters B* **543** (2002) no. 1-2, 135–138.
- [94] E. Bettelheim, I. Gruzberg, A. Ludwig, and P. Wiegmann, “Stochastic loewner evolution for conformal field theories with lie group symmetries,” *Physical review letters* **95** (2005) no. 25, 251601.
- [95] J. Rasmussen, “On SU(2) Wess-Zumino-Witten models and stochastic evolutions,” *Afr.J.Math.Phys.* **4** (2007) 1–9, [arXiv:hep-th/0409026](#) [hep-th].

- [96] A. Alekseev, A. Bytsko, and K. Izyurov, “On sle martingales in boundary wzw models,” *Letters in Mathematical Physics* (2010) 1–19.
- [97] O. Schramm, “Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees,” *Israel Journal of Mathematics* **118** (2000) no. 1, 221–288.
- [98] S. Rohde and O. Schramm, “Basic properties of sle,” *Annals of mathematics* (2005) 883–924.
- [99] M. Bauer and D. Bernard, “2d growth processes: Sle and loewner chains,” *Physics reports* **432** (2006) no. 3-4, 115–221.
- [100] R. Santachiara, “Sle in self-dual critical  $z(n)$  spin systems: Cft predictions,” *Nuclear Physics B* **793** (2008) no. 3, 396–424.
- [101] M. Picco and R. Santachiara, “Numerical study on schramm-loewner evolution in nonminimal conformal field theories,” *Physical review letters* **100** (2008) no. 1, 15704.
- [102] J. Fuchs and A. Wurtz, “On the geometry of coset branes,” *Nuclear Physics B* **724** (2005) no. 3, 503–528.
- [103] S. Fredenhagen and V. Schomerus, “D-branes in coset models,” *Journal of High Energy Physics* **2002** (2002) 005.
- [104] S. Elitzur and G. Sarkissian, “D-branes on a gauged wzw model,” *Nuclear Physics B* **625** (2002) no. 1-2, 166–178.
- [105] G. Felder, J. Fröhlich, J. Fuchs, and C. Schweigert, “The geometry of wzw branes,” *Arxiv preprint hep-th/9909030* (1999) .
- [106] A. Alekseev and V. Schomerus, “D-branes in the wzw model,” *Physical Review D* **60** (1999) no. 6, 061901.

- [107] J. Cardy and D. Lewellen, “Bulk and boundary operators in conformal field theory\* 1,” *Physics Letters B* **259** (1991) no. 3, 274–278.
- [108] J. Fuchs, A. N. Schellekens, and C. Schweigert, “A matrix S for all simple current extensions,” *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 323–366,  
arXiv:hep-th/9601078. <http://www.nikhef.nl/~t58/kac.html>.
- [109] H. Ishikawa and T. Tani, “Novel construction of boundary states in coset conformal field theories,” *Nuclear Physics B* **649** (2003) no. 1-2, 205–242.
- [110] J. Belinfante and B. Kolman, *A survey of Lie groups and Lie algebras with applications and computational methods*. Society for Industrial Mathematics, 1989.
- [111] T. Nutma, “Simplie.” <http://code.google.com/p/simplie/>.
- [112] M. Van Leeuwen, “LiE, a software package for Lie group computations,” *Euromath Bull* **1** (1994) no. 2, 83–94.  
<http://www-math.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/>.
- [113] J. Stembridge, “A Maple package for symmetric functions,” *Journal of Symbolic Computation* **20** (1995) no. 5-6, 755–758.
- [114] J. Stembridge, “Coxeter/weyl packages for maple.”  
<http://www.math.lsa.umich.edu/~jrs/maple.html>.
- [115] T. Fischbacher, “Introducing LambdaTensor1. 0-A package for explicit symbolic and numeric Lie algebra and Lie group calculations,”  
hep-th/0208218.
- [116] R. Moody and J. Patera, “Fast recursion formula for weight multiplicities,” *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* **7** (1982) no. 1, .



- [117] J. Stembridge, “Computational aspects of root systems, Coxeter groups, and Weyl characters, Interaction of combinatorics and representation theory, MSJ Mem., vol. 11,” *Math. Soc. Japan, Tokyo* (2001) 1–38.
- [118] W. Casselman, “Machine calculations in Weyl groups,” *Inventiones mathematicae* **116** (1994) no. 1, 95–108.
- [119] T. Gannon, “Algorithms for affine Kac-Moody algebras,” [hep-th/0106123](#).
- [120] L. Shifrin, *Mathematica programming: an advanced introduction*. 2009.  
<http://mathprogramming-intro.org/>.
- [121] R. Maeder, *Computer science with Mathematica*. Cambridge University Press, 2000.
- [122] W. Casselman, “Automata to perform basic calculations in coxeter groups,” in *Representations of groups: Canadian Mathematical Society annual seminar, June 15-24, 1994, Banff, Alberta, Canada*, vol. 16, p. 35, Canadian Mathematical Society. 1995.
- [123] W. van der Kallen, “Computing shortlex rewrite rules with mathematica.”.
- [124] D. Kazhdan and G. Lusztig, “Tensor structures arising from affine lie algebras. iii,” *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* **7** (1994) no. 2, .
- [125] D. Kazhdan and G. Lusztig, “Tensor structures arising from affine lie algebras. i,” *Journal of the American Mathematical Society* **6** (1993) no. 4, 905–947.
- [126] D. Kazhdan and G. Lusztig, “Tensor structures arising from affine lie algebras. ii,” *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* **6** (1993) no. 4, .

- [127] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, and O. P. Postnova, “Tensor powers for non-simply laced Lie Algebras  $B_2$  case,” *ArXiv e-prints* (2011) , arXiv:1106.2002 [math.RT].