Записки с семинара “Конформная теория поля”

Антон Назаров

10 апреля 2011 г.

Содержание

1 14 марта 2011

1.1 Классическая теория поля

Напоминание про теорию поля.

Лагранжева формулировка классической теории поля.

Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \tag{1}$$

зависит от полей φ и констант связи $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Например:

$$S[\varphi] = \int d^d x \left(-\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{\mu\varphi^2}{2} - \frac{u\varphi^4}{24} + h\varphi \right), \tag{2}$$

1.2 Симметрии и генераторы

При преобразованиях координат

$$x \to x' \tag{3}$$

поля тоже преобразуются, то есть у них не только меняется аргумент, но и само поле. Тип поля (скалярное, векторное, спинорное) – это вид такого преобразования.

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = F(\varphi(x)) \tag{4}$$

При этом действие тоже преобразуется:

$$S' = \int d^d x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial_\mu \varphi'(x')) = \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(F(\varphi(x)), \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu F(\varphi(x))) \tag{5}$$

Пример 1. Трансляции:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad \varphi'(x+a) = \varphi(x), \quad S' = S \tag{6}$$

Пример 2. Поворот (преобразования Лоренца):

$$x'^\mu = m^\mu_\nu x^\nu, \quad \varphi'(mx) = \Lambda\varphi(x), \quad \Lambda\text{–представление группы} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим инфинитезимальные преобразования. Если действие инвариантно относительно каких-либо преобразований, то говорят, что в теории есть симметрия. В этом случае действие должно быть стационарно по отношению к инфинитезимальным преобразованиям. Мы будем считать, что инфинитезимальные параметры преобразований зависят от координат, то есть рассматривать не только глобальные, но и локальные преобразования.

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \tag{8}$$

(ω_a – бесконечно малые параметры).

Наше поле преобразуется так:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \tag{9}$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) \equiv -i\omega_a G_a \varphi(x) \tag{10}$$

(здесь нет суммирования по a). Действие генератора на поле:

$$iG_a\varphi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}\partial_\mu \varphi - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \tag{11}$$

Пример 3. Если мы предположим, что поле φ – такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\varphi) = \varphi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu \qquad P_\mu = -i\partial_\mu \tag{12}$$

$$\text{поворот} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \qquad L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial \mu) \tag{13}$$

Если же при поворотах поле преобразуется $\varphi'(x') = \Lambda\varphi(x)$, то при инфинитезимальных преобразованиях $\varphi'(x') = \varphi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ и генератор принимает вид

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial \mu) + S_{\mu\nu} \tag{14}$$

1.3 Теорема Нётер

Теперь рассмотрим произвольные инфинитезимальные преобразования, при которых действие не меняется. Инфинитезимальные параметры зависят от точки в пространстве, то есть мы рассматриваем локальные преобразования. Преобразования, для которых такой зависимости нет, называются глобальными. Якобиан такого преобразования

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}\right) \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right| = 1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}\right) \tag{17}$$

Вариация действия

$$0=\delta_\omega S=\int \mathcal{L}(\varphi',\partial_\mu\varphi',x'^\mu)dx'-\int \mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi,x)dx=$$
$$\int d^dx\left[\left(1+\partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\right)\right)\mathcal{L}\left(\varphi+\delta_\omega\varphi,\partial_\mu\varphi+\partial_\mu\delta_\omega\varphi\right)\right]-\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)= \tag{18}$$

$$\int d^dx\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta_\omega\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_\omega\partial_\mu\varphi+\partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\right)\mathcal{L}\right) \tag{19}$$

Члены, не содержащие производных от ω_a зануляются в случае наличия глобальной симметрии.

Первые два члена переписываются с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа и интегрирования по частям:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta_\omega\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_\omega\partial_\mu\varphi=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_\omega\varphi\right) \tag{20}$$

В итоге имеем:

$$0=\int d^dx\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_\omega\varphi+\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a}\right) \tag{21}$$

Если подставить явный вид вариации поля и ввести обозначение

$$j^\mu_a=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi-\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right)\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\frac{\delta F}{\delta w_a}, \tag{22}$$

то для вариации действия выходит:

$$\delta_\omega S=-\int d^dx j^\mu_a\partial_\mu\omega_a \tag{23}$$

j^μ_a называется Нётеровским током, соответствующим данной симметрии. Проинтегрируем по частям и получим:

$$\delta_\omega S=\int d^dx(\partial_\mu j^\mu_a)\omega_a \tag{24}$$

Если поля удовлетворяют уравнениям движения, то действие инвариантно относительно любой вариации полей, то есть вариация действия должна зануляться для любого $\omega(x)$. Тогда

$$\partial_\mu j^\mu_a=0 \tag{25}$$

Таким образом каждой симметрии соответствует ток j^a_μ и сохраняющийся заряд:

$$Q_a = \int d^{d-1}x\, j^0_a \tag{26}$$

Пример 4. Рассмотрим инфинитезимальное масштабное преобразование $\lambda = 1+\omega$. При этом вариация x_ν будет $\delta_\omega x_\nu = \omega x_\nu$. При инфинитезимальных преобразованиях $x \to x+dlx$ вариация плотности лагранжиана дается Нётеровским током:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu dl \tag{27}$$

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \tag{28}$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса. Через Θ мы обозначим след тензора энергии-импульса $\Theta = \partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu$. Он задает вариацию действия

$$\delta S = dl \int d^d x \Theta(x) \tag{29}$$

Если теория масштабно-инвариантна, то $\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = \Theta = 0$. В масштабно-инвариантной теории тензор энергии-импульса бесследовый.

2 21 марта 2011

2.1 Конформная алгебра в $d \geq 3$

Сейчас мы обсудим, какие ограничения накладывает на теорию конформная инвариантность, а затем покажем, что в двух измерениях она следует из масштабной, трансляционной и вращательной инвариантностей.

Сперва рассмотрим конформную группу в произвольном числе измерений d. Метрический тензор обозначим через $g_{\mu\nu},\ \ \mu,\nu = 1,\ldots,d$. Конформными называются преобразования $x \to x'$, сохраняющие метрический тензор с точностью до масштаба:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \tag{30}$$

Заметим, что группа Пуанкаре является подгруппой конформной группы с $\Lambda(x) = 1$, а также что конформные преобразования сохраняют углы.

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu. \tag{31}$$

Метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad (32)$$

Перепишем условие (30)в таком виде:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - f(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (33)$$

Отсюда вытекает условие на вид преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (34)$$

Для простоты рассмотрим преобразования, действующие на плоскую метрику $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, кроме того, с учетом приложений к статистической физике, будем работать в евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Так что $\eta = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1), \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. В этом случае условие (34) перепишется в простом виде

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (35)$$

Теперь подставим $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ в уравнение (34) и продиффернцируем:

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \quad (36)$$

Переставим два раза значки и скомбинируем три уравнения в одно:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f \quad (37)$$

Свернем это уравнение с $\eta^{\mu\nu}$ и получим

$$2\partial^2 \epsilon_\rho = (2 - d) \partial_\rho f \quad (38)$$

Теперь продифференцируем его по x^ν и поменяем значок ρ на μ:

$$2\partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = (2 - d) \partial_\mu \partial_\nu f \quad (39)$$

Сравним полученное равенство с результатом применения оператора ∂^2 к уравнению (36):

$$\partial^2 \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \quad (40)$$

Из равенств (39), (40) следует, что

$$(2 - d) \partial_\mu \partial_\nu f = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f. \quad (41)$$

Свернув с $\eta^{\mu\nu}$ получим

$$(d-1)\partial^2 f = 0. \tag{42}$$

Сразу можно отметить, что при $d = 1$ любое гладкое преобразование будет конформным. Рассмотрим случай $d \geq 3$. Функция $f(x)$ должна иметь вид

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu. \tag{43}$$

Тогда из (35) получаем для ϵ

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho, \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \tag{44}$$

Так как равенства (34), (35), (37) должны выполняться для любых x^μ, то мономы в ϵ можно рассматривать независимо. На a_μ не возникает никаких ограничений. Этот член соответствует трансляциям. Теперь подставляем линейный член в (34), (35) и получаем условие

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b^\lambda_\lambda \eta_{\mu\nu} \tag{45}$$

То есть $b_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \tag{46}$$

Первый член соответствует масштабному преобразованию, а второй - повороту. В результате подстановки квадратичного члена ϵ в (35), (37) получаем следующее условие на $c_{\mu\nu\rho}$:

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}h_\nu + \eta_{\mu\nu}h_\rho - \eta_{\nu\rho}h_\mu, \quad h_\mu = \frac{1}{d}c^\alpha_{\alpha\mu} \tag{47}$$

Ему соответствует преобразование

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x^\nu h_\nu)x^\mu - h^\mu x^\nu x_\nu \tag{48}$$

Такое преобразование называется специальным конформным преобразованием. Это преобразование можно естественно интерпретировать, если переписать в виде

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - h^\mu. \tag{49}$$

Видно, что специальное конформное преобразование — это инверсия, трансляция и обратная инверсия.

Соответствующие конченые конформные преобразования имеют вид

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \qquad \text{— трансляция} \tag{50}$$

$$x'\mu = \alpha x^{\mu} \qquad \text{— растяжение} \tag{51}$$

$$x'^{\mu} = m^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \qquad \text{— поворот} \tag{52}$$

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - h^{\mu} x^2}{1 - 2h_{\mu} x^{\mu} + h^2 x^2} \qquad \text{— специальное конформное преобразование} \tag{53}$$

Теперь выпишем вид генераторов конформных преобразований для скалярного поля. Напомним, что при произвольном конечном преобразовании скалярное поле преобразуется как

$$\Phi'(x') = F(\Phi(x)). \tag{54}$$

При соответствующем инфинитезимальном преобразовании

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega_a \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \omega_a} \tag{55}$$

скалярное поле преобразуется так:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \tag{56}$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_{\omega} \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \Phi(x) \tag{57}$$

(здесь нет суммирования по a). Из (9) получаем действие генератора на скалярное поле:

$$iG_a \Phi = \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \omega_a} \partial_{\mu} \Phi - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \tag{58}$$

Если мы предположим, что поле Φ такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\Phi) = \Phi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \qquad P_{\mu} = -i\partial_{\mu} \tag{59}$$

$$\text{поворот} \qquad L_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial\mu) \tag{60}$$

$$\text{растяжение} \qquad D = -ix^{\mu}\partial_{\mu} \tag{61}$$

$$\text{специальное конформное преобразование} \qquad K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu}) \tag{62}$$

Отсюда легко найти коммутационные соотношения алгебры конформных преобразований в случае $d \geq 3$:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \tag{63}$$
$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \tag{64}$$
$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \tag{65}$$
$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \tag{66}$$
$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \tag{67}$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Чтобы понять, о какой алгебре идет речь, переопределим генераторы следующим образом. Введем генераторы $J_{ab},\ a, b = -1, 0, \ldots, d, J_{ab} = -J_{ba}$:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \tag{68}$$
$$J_{-1,0} = D \tag{69}$$
$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \tag{70}$$
$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \tag{71}$$

Коммутационные соотношения для таких генераторов запишутся в виде

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}), \tag{72}$$

где $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Видно, что мы получили алгебру $so(d+1, 1)$. В случае пространства Минковского была бы $so(d, 2)$.

2.2 Локальные конформные преобразования в двумерной теории

Мы получили общее условие на вид инфинитезимальных конформных преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu}. \tag{73}$$

Теперь у нас $d = 2$, $\mu, \nu = 0, 1$ и $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, так как мы работаем в евклидовой теории. Расписывая компоненты уравнения (73), получаем

$$\partial_0\epsilon_1 + \partial_1\epsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \qquad \partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0 \tag{74}$$
$$2\partial_0\epsilon_0 = \partial_0\epsilon_0 + \partial_1\epsilon_1 \quad \Rightarrow \qquad \partial_0\epsilon_0 = \partial_1\epsilon_1 \tag{75}$$

То есть мы получили уравнения Коши-Римана. Введем комплексные координаты

$$z = x_0 + ix_1 \tag{76}$$

$$\bar{z} = x_0 - ix_1 \tag{77}$$

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) \tag{78}$$

$$\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \tag{79}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1 \tag{80}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - i\epsilon_1, \tag{81}$$

тогда уравнения (74) можно переписать в виде

$$\bar{\partial}\epsilon = 0 \tag{82}$$

$$\partial\bar{\epsilon} = 0. \tag{83}$$

Решениями будут любые голоморфные и антиголоморфные функции: $\epsilon = \epsilon(z)$ – голоморфная функция и $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ – антиголоморфная. Таким образом мы видим, что алгебра локальных конформных преобразований в двумерном случае оказывается бесконечномерной алгеброй преобразований

$$z \to f(z) \tag{84}$$

$$\bar{z} \to \bar{f}(\bar{z}) \tag{85}$$

Введем в алгебре конформых преобразований следующий базис:

$$z' = z + \epsilon_n(z) \tag{86}$$

$$\bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) \tag{87}$$

$$\epsilon_n(z) = -z^{n+1} \tag{88}$$

$$\bar{\epsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{z}^{n+1} \tag{89}$$

Тогда соответствующие генераторы будут равны

$$l_n = -z^{n+1}\partial \tag{90}$$

$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial} \tag{91}$$

Легко видеть, что коммутационные соотношения имеют вид

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n} \tag{92}$$

$$\left[\bar{l}_m, \bar{l}_n\right] = (m-n)\bar{l}_{m+n} \tag{93}$$

$$\left[l_n, \bar{l}_m\right] = 0 \tag{94}$$

Мы видим, что алгебра распадается в прямую сумму $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$, каждая компонента — это алгебра Витта (Witt algebra). Оказывается удобно продолжить теорию на случай независимых $z, \bar{z}$. Тогда теория распадется на два независимых сектора. Условие же $z^* = \bar{z}$ можно наложить в самом конце. Такая процедура соответствует комплексному продолжению всех функций от x_0, x_1 на $x_0, x_1 \in \mathbb{C}^2$. Заметим, что вещественная плоскость сохраняется подалгеброй, натянутой на генераторы $l_n + \bar{l}_n$ и $i(l_n - \bar{l}_n)$.

2.3 Глобальные конформные преобразования

Глобальными называются те преобразования, которые определены на всей сфере Римана $S^2 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$. Понятно, что это может быть только при $n \geq -1$. Кроме того, чтобы рассмотреть окрестность точки $z = \infty$ можно сделать преобразование координат $z = -\frac{1}{w}$. Тогда

$$l_n = -z^{n+1}\partial = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n+1}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial_w = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n-1}\partial_w. \tag{95}$$

Это выражение должно быть хорошо определено при $w \to 0$, то есть $n \leq 1$. Значит глобальные конформные преобразования генерируются $l_{\pm 1}, l_0, \bar{l}_{\pm 1}, \bar{l}_0$. Заметим, что генераторы $l_{-1}, \bar{l}_{-1}$ порождают трансляции, $i(l_0 - \bar{l}_0)$ – вращения, $l_0 + \bar{l}_0$ – масштабные преобразования. Конечные глобальные преобразования имеют вид

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{96}$$

(И аналогично для $\bar{z}$). Если собрать коэффициенты a, b, c, d в матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то ясно, что мы имеем дело с группой $SL_2(\mathbb{C})/Z_2 \approx SO(3,1)$. Факторизация по Z_2 соответствует тому, что изменение знака у a, b, c, d разом не меняет преобразования. Эта группа называется также группой проективных конформных преобразований.

Трансляции, дилатации и вращения в матричном виде записываются следующим образом:

трансляции	$x \to x + a, B = a^0 + ia^1,$	$\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(97)
вращения		$\begin{pmatrix} e^{i\Theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Theta/2} \end{pmatrix}$	(98)
дилатации		$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$	(99)
специальные конформные преобразования	$C = h_0 - ih_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$	(100)

Глобальные конформные преобразования образуют группу, локальные же преобразования не обратимы, поэтому по отношению к ним говорят только об алгебре.

Глобальные преобразования полезны для описания физических состояний. Допустим, мы работаем в базисе собственных состояний операторов $l_0, \bar{l}_0$, соответствующие собственные значения $h, \bar{h}$ – независимые, вещественные, называются конформными весами или голоморфной и антиголоморфной размерностями. Так как $l_0 + \bar{l}_0$ – генератор дилатации, то скейлинговая размерность $\Delta = h + \bar{h}$, а поскольку $i(l_0 - \bar{l}_0)$ порождает вращения, то спин $s = h - \bar{h}$.

2.4 Центральное расширение алгебры Витта

Напомним несколько определений (см [1],[2], [3]).

Определение 1. Будем рассматривать алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над полем $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Векторное пространство A над полем k называется *модулем над* $\mathfrak{g}$ или $\mathfrak{g}$-*модулем*, если задано билинейное отображение $\mu : \mathfrak{g} \times A \to A$, такое что $\mu([X,Y],a) = \mu(X, \mu(Y,a)) - \mu(Y, \mu(X,a))$ для $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in A$. Далее мы будем опускать символ μ и писать $Xa = \mu(X,a)$.

Определение 2. *n-мерная коцепь с коэффициентами в A* – это кососимметричный n-линейный функционал на $\mathfrak{g}$ со значениями в A. Пространство n-коцепей $C^n(\mathfrak{g}; A) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}; A)$.

Заметим, что элементы $\mathfrak{g}$ действуют на $C^n(\mathfrak{g}; A)$.

Определение 3. Внешний дифференциал $d = d_n : C^n(\mathfrak{g}; A) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}; A)$ определяется формулой

$$(dc)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{1 \le s < t \le n+1} (-1)^{s+t-1} c([X_s, X_t], X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, \hat{X}_t, \ldots X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \le s \le n+1} (-1)^s X_s c(X_1, \ldots \hat{X}_s, \ldots X_{n+1}) \quad (101)$$

Оставляем в качестве упражнения проверку того факта, что последовательность

$$\cdots \xleftarrow{d_n} C^n(g; A) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(\mathfrak{g}; A) \leftarrow \cdots \leftarrow C^1(\mathfrak{g}; A) \xleftarrow{d_0} C^0(\mathfrak{g}; A) \leftarrow 0 \quad (102)$$

точна.Тогда $\{C^n(\mathfrak{g}; A), d_n\} = C^*(\mathfrak{g}; A)$ есть комплекс.

Определение 4. Соответствующие когомологии называются *когомологиями алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в A* и обозначаются через $H^n(\mathfrak{g};A) = \mathrm{Ker}\ d_n/\mathrm{Im}\ d_{n-1}$.

Заметим, что поле k может рассматриваться как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль. В этом случае второй член в формуле (101) исчезает и используют сокращенные обозначения $C^n(\mathfrak{g}), H^n(\mathfrak{g})$.

Определение 5. Определим, заодно, и гомологии. Пространство n-мерных цепей $C_n(\mathfrak{g};A) = A \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$, дифференциал $\partial = \partial_n : C_n(\mathfrak{g};A) \to C_{n-1}(\mathfrak{g};A)$ определяется формулой

$$\partial(a \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)) = \\ \sum_{1 \le s < t \le n+1} (-1)^{s+t-1} a \otimes ([X_s, X_t] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge \hat{X}_t \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \\ + \sum_{1 \le s \le n+1} (-1)^s (X_s a) \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \quad (103)$$

Аналогично определяется точная последовательность, комплекс и группа гомологий $H_n(\mathfrak{g};A)$.

Определение 6. *Одномерным центральным расширением алгебры $\mathfrak{g}$* называется точная последовательность

$$0 \to k \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0, \quad (104)$$

такая что образ $k \to \tilde{\mathfrak{g}}$ содержится в центре $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Заметим, что всякий 2-коцикл $c \in C^2(\mathfrak{g};A)$ определяет центральное расширение $\mathfrak{g}$:

$$0 \to k \stackrel{\lambda \to (0,\lambda)}{\longrightarrow} \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus k \stackrel{(X,\lambda)\to X}{\longrightarrow} \mathfrak{g} \to 0 \quad (105)$$

Скобка Ли в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, которая равна $\mathfrak{g} \oplus k$ как векторное пространство, определяется равенством

$$[(X,\lambda),(Y,\mu)] = ([X,Y], c(X,Y)) \quad (106)$$

Тождество Якоби для такой скобки равносильно тому, что c– 2-коцикл. Когомологичным коциклам отвечают эквивалентные расширения.

Два расширения $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $I : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ такой, что диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[d, "I"'] & k \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}} \arrow[r] & k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad (107)$$

Упражнение 1. Построить изоморфизм I.

Таким образом пространство $H^2(\mathfrak{g})$ – это множество классов 1-мерных центральных расширений $\mathfrak{g}$. Нуль в $H^2(\mathfrak{g})$ соответствует тривиальному расширению.

Вернемся к алгебре Витта (92). Существует коцикл

$$c(l_n, l_m) = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \tag{108}$$

Упражнение 2. Проверить, что c – коцикл алгебры Витта.

Соответствующее центральное расширение алгебры Витта называется алгеброй Вирасоро. Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид

$$[L_n, c] = 0 \tag{109}$$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \tag{110}$$

Можно показать, что $H^2(Witt) \cong \mathbb{C}$ и все нетривиальные коциклы пропорциональны c. (Доказательство есть в [1], [4]).

Список литературы

[1] D. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras.* Consultants bureau, 1986.

[2] Д. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* Наука, Грав. ред. физико-математической лит-ры, Москва, 1984.

[3] Б. Фейгин and Д. Фукс, "Когомологии групп и алгебр Ли," *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»* **21** (1988) no. 0, 121–209.

[4] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory.* Springer Verlag, 2008.

3 28 марта 2011

- Броуновское движение
- Интеграл по путям

- Квантовая механика
- Статистическая физика
- Функциональный интеграл в квантовой теории поля
- Тождества Уорда
- Конформная аномалия.

4 11 апреля 2011

4.1 Тождества Уорда

Напомним, о чем идет речь. В произвольной теории поля с полями $\Phi(x)$ инфинитезимальное преобразование может быть записано при помощи генераторов

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - i\omega_a G_a \Phi(x) \tag{111}$$

Вариация действия вычисляется через ток, соответствующий данному преобразовании:

$$j_a^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \tag{112}$$

$$\delta S = \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a \tag{113}$$

Обозначим через X произведение локальных полей, входящих в коррелятор

$$X = \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n). \tag{114}$$

Коррелятор дается функциональным интегралом

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi X e^{-S[\Phi]} \tag{115}$$

Сделаем замену переменных $\Phi \to \Phi'$ в функциональном интеграле. При этом можно предполагать, что “мера интегрирования” не меняется $\mathcal{D}\Phi' = \mathcal{D}\Phi$ [?]:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi' (X + \delta X) e^{-S[\Phi] - \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a(x)} \tag{116}$$

Раскладываем выражение в ряд до первого порядка по $\omega_a(x)$:

$$\langle X\rangle = \frac{1}{Z}\left(\int \mathcal{D}\Phi X e^{-S[\Phi]} + \int \mathcal{D}\Phi \delta X e^{-S[\Phi]} - \int \mathcal{D}\Phi \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a(x) X e^{-S[\Phi]}\right) \tag{117}$$

В результате имеем

$$\langle \delta X\rangle = \int d^d x \partial_\mu \langle j_a^\mu(x) X\rangle \omega_a(x) \tag{118}$$

С другой стороны, мы можем вычислить $\langle \delta X\rangle$ используя (111):

$$\langle \delta X\rangle = -i\sum_{i=1}^{n} \langle \Phi(x_1)\ldots G_a\Phi(x_i)\ldots\Phi(x_n)\rangle \omega_a(x_i) = \\ -i\int d^d x \omega_a(x)\sum_{i=1}^{n}\langle \Phi(x_1)\ldots G_a\Phi(x_i)\ldots\Phi(x_n)\rangle \delta(x-x_i) \tag{119}$$

Окончательно общий вид тождеств Уорда выглядит следующим образом:

$$\partial_\mu \langle j_a^\mu \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\rangle = -i\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\langle \Phi(x_1)\ldots G_a\Phi(x_i)\ldots\Phi(x_n)\rangle \tag{120}$$

Рассмотрим некоторые примеры, которые понадобятся нам для конформной теории. Мы используем полученный нами явный вид генераторов (12).

Тождество Уорда для трансляций:

$$\partial_\mu \langle T^\mu_\nu X\rangle = -i\sum_i \delta(x-x_i)\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle X\rangle \tag{121}$$

Теперь рассмотрим вращения. Если тензор энергии-импульса симметризован (это можно сделать в большинстве случаев), то отвечающий вращениям ток дается выражением

$$j^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu. \tag{122}$$

Тогда тождество Уорда может быть записано в виде

$$\partial_\mu \langle (T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu) X\rangle = \sum_i \delta(x-x_i)\left((x_i^\nu \partial_i^\rho - x_i^\rho \partial_i^\nu)\langle X\rangle - iS_i^{\nu\rho}\langle X\rangle\right). \tag{123}$$

Его можно упростить с использованием тождества для трансляций (121):

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho})X\rangle = -i\sum_i \delta(x-x_i)S_i^{\nu\rho}\langle X\rangle. \tag{124}$$

Тензор энергии-импульса в квантовой теории симметричен в корреляционных функциях, если его положение не совпадает с положениями других полей в корреляторе.

Наконец, для масштабных преобразований ток имеет вид $T^\mu_\nu x^\nu$, действие генератора дается выражением (**??**) и тождества Уорда выглядят так:

$$\partial_\mu\langle T^\mu_\nu x^\nu X\rangle = -\sum_i \delta(x-x_i)\left(x_i^\nu \frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle X\rangle + \Delta_i\langle X\rangle\right) \tag{125}$$

Его тоже можно упростить:

$$\langle T^\mu_\mu X\rangle = -i\sum_i \delta(x-x_i)\Delta_i\langle X\rangle \tag{126}$$

4.2 Тождества Уорда в двумерной конформной теории

В прошлой лекции мы получили общий вид тождеств Уорда для трансляций, поворотов и масштабных преобразований. Выпишем их здесь.

$$\partial_\mu\langle T^\mu_\nu X\rangle = -\sum_i \delta(x-x_i)\partial_\nu^{(i)}\langle X\rangle \tag{127}$$

$$\langle (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})X\rangle = i\sum_i \delta(x-x_i)S_{(i)}^{\mu\nu}\langle X\rangle \tag{128}$$

$$\langle T^\mu_\mu X\rangle = -\sum_i \delta(x-x_i)\Delta_{(i)}\langle X\rangle \tag{129}$$

Прежде чем мы начнем переписывать тождества в комплексных координатах обсудим следующий вспомогательный математический факт: для голоморфных (антиголоморфных) функций можно использовать следующее представление для δ-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\bar\partial\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}\partial\frac{1}{\bar z} \tag{130}$$

Заметим, что

$$\int_M d^2x\partial_\mu F^\mu = \int_{\partial M} d\xi_\mu F^\mu = \frac{1}{2i}\oint_{\partial M}(-dzF^{\bar z} + d\bar z F^z) \tag{131}$$

Для голоморфной функции

$$\frac{1}{\pi}\int_M d^2x\bar{\partial}\left(\frac{f(z)}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}dz\frac{f(z)}{z}=f(0)=\int_M d^2x\delta(x)f(z) \tag{132}$$

Теперь перепишем тождества Уорда (127) в комплексных координатах:

$$2\pi\partial\langle T_{\bar{z}z}X\rangle+2\pi\bar{\partial}\langle T_{zz}X\rangle=-\sum_i\bar{\partial}\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle X\rangle \tag{133}$$

$$2\pi\partial\langle T_{\bar{z}\bar{z}}X\rangle+2\pi\bar{\partial}\langle T_{z\bar{z}}X\rangle=-\sum_i\bar{\partial}\frac{1}{\bar{z}-w_i}\partial_{\bar{w}_i}\langle X\rangle \tag{134}$$

$$2\langle T_{z\bar{z}}X1\rangle+2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle=-\sum_i\delta(x-x_i)\Delta_i\langle X\rangle \tag{135}$$

$$-2\langle T_{z\bar{z}}X1\rangle+2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle=-\sum_i\delta(x-x_i)s_i\langle X\rangle \tag{136}$$

$$\tag{137}$$

Если сложить и вычесть два последних равенства и вспомнить определение $h,\bar{h}$, то получим

$$2\pi\langle T_{\bar{z}z}X\rangle=-\sum_i\bar{\partial}\frac{1}{z-w_i}h_i\langle X\rangle \tag{138}$$

$$2\pi\langle T_{z\bar{z}}X\rangle=-\sum_i\partial\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\bar{h}_i\langle X\rangle \tag{139}$$

Введем обозачения

$$T=-2\pi T_{zz} \tag{140}$$

$$\bar{T}=-2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}, \tag{141}$$

и подставим уравнения (138) в первые два уравнения (133):

$$\bar{\partial}\left(\langle TX\rangle-\sum_i\left(\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle X\rangle+\frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle X\rangle\right)\right)=0 \tag{142}$$

$$\partial\left(\langle\bar{T}X\rangle-\sum_i\left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\partial_{\bar{w}_i}\langle X\rangle+\frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{w}_i)^2}\langle X\rangle\right)\right)=0 \tag{143}$$

То есть выражения в скобках (анти)голоморфны. Следовательно

$$\langle TX\rangle=\sum_i\left(\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle X\rangle+\frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle X\rangle\right)+\text{регулярные члены} \tag{144}$$

Это пример операторного разложения, которое мы будем обсуждать далее.

Заметим, что вариация коррелятора при конформных преобразованиях дается тензором энергии-импульса:

$$\delta_\epsilon\langle X\rangle = \int_M d^2x\partial_\mu\langle T^{\mu\nu}(x)\epsilon_\nu(x)X\rangle \tag{145}$$

В комплексных координатах она перепишется так:

$$\delta_{\epsilon,\bar\epsilon}\langle X\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\epsilon(z)\langle T(z)X\rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar z\bar\epsilon(\bar z)\langle\bar T(\bar z)X\rangle \tag{146}$$

Здесь интеграл берется по контуру, внутри которого находятся все аргументы X. Вообще говоря, это выражение для вариации верно для коррелятора любых полей, не только примарных.

Применимость тождеств Уорда основывается на регулярности тензора энергии-импульса. Он должен быть везде хорошо определен. В частности, $T(0)$ должен быть конечен. Кроме того, если вычислить вариацию постоянного поля в точке $z=\infty$:

$$\delta_\epsilon\langle 1\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\epsilon(z)\langle T(z)\rangle = 0 \tag{147}$$

где контур обходит точку ∞. Для специальных конформных преобразований $\epsilon(z)\sim z^2$, поэтому $T(z)\sim z^{-4}, \quad z\to\infty$.

4.3 Алгебра локальных полей. Операторное разложение

В набор локальных полей теории входят не только те поля, которые входят в плотность лагранжиана, но и их производные, произведения и так далее. Мы предполагаем, что набор локальных полей A является полным, то есть существует некий базис $\{A_j\}$, по которому можно разложить любое поле. Локальные поля образуют линейное пространство.

Кроме того, мы предполагаем, что имеет место операторное разложение

$$A_i(x)A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x,y)A_k(y), \tag{148}$$

здесь $C_{ij}^k(x,y)$ – функция. Равенство (148) надо понимать в смысле корреляционных функций

$$\langle A_i(x)A_j(y)X\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x,y)\langle A_k(y)X\rangle. \tag{149}$$

Тогда набор локальных полей образует алгебру.

Рассмотрим четырехточечную функцию и воспользуемся операторным разложением (148):

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\rangle = \sum_{k,l} C_{12}^k(x_1-x_2)D_{kl}(x_2-x_4)C_{34}^l(x_3-x_4) \tag{150}$$

Здесь мы воспользовались трансляционной инвариантностью, а также ввели обозначение для пропагатора

$$\langle A_i(x_i)A_j(x_j)\rangle = D_{ij}(x_i-x_j). \tag{151}$$

Однако операторным разложением можно воспользоваться и в другом порядке, тогда для четырехточечной функции получим:

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\rangle = \sum_{k,l} C_{13}^k(x_1-x_3)D_{kl}(x_3-x_4)C_{24}^l(x_2-x_4) \tag{152}$$

Приравняв правые части уравнений (152),(150) можно получить систему уравнений на коэффициенты C_{ij}^k. Если решить эти уравнения, то в принципе можно вычислять любые корреляторы, если известен набор полей и их конформных размерностей. Такой подход называется конформным бутстрапом.

Корреляционные функции имеют особенности при совпадении положений полей. Именно характер этих особенностей важен при описании критического поведения (критические индексы и т.п.). Для произведения T и примарного поля φ с конформными размерностями $h, \bar{h}$ имеет место операторное разложение (144):

$$T(z)\varphi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\varphi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\varphi(w,\bar{w}) \tag{153}$$

$$\bar{T}(\bar{z})\varphi(w,\bar{w}) \sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\varphi(w,\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\varphi(w,\bar{w}) \tag{154}$$

4.4 Свободный бозон

В качестве примера конформной теории рассмотрим свободное бозонное поле φ. Действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2}g\int d^2x\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi, \tag{155}$$

а пропагатор дается равенством

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\ln(x-y)^2 + \mathrm{const} \tag{156}$$

В комплексных координатах пропагатор запишется следующим образом:

$$\langle \varphi(z,\bar{z})\varphi(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\left(\ln(z-w)+\ln(\bar{z}-\bar{w})\right) + \mathrm{const} \tag{157}$$

Дифференцируя получаем

$$\langle \partial_z\varphi(z,\bar{z})\partial_w\varphi(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{158}$$

$$\langle \partial_{\bar{z}}\varphi(z,\bar{z})\partial_{\bar{w}}\varphi(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \tag{159}$$

То есть имеет место операторное разложение полей $\partial\varphi$:

$$\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \sim -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{160}$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = g\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi\right) \tag{161}$$

После квантования получаем для оператора $T(z)$ следующее выражение:

$$T(z) = -2\pi g : \partial\varphi\partial\varphi := -2\pi g \lim_{w\to z}\left(\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) - \langle\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\rangle\right) \tag{162}$$

Теперь мы можем вычислить операторное разложение тензора энергии-импульса и локального поля $\partial\varphi$:

$$T(z)\partial\varphi(w) = -2\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : \partial\varphi(w) \sim -4\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : \partial\varphi(w) \sim \frac{\partial\varphi(z)}{(z-w)^2} \tag{163}$$

Для вычисления мы использовали теорему Вика (см. [?], [?]). Раскладывая в ряд по $(z-w)$ получаем окончательно для сингулярной части операторного разложения

$$T(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w^2\varphi(w)}{z-w} \tag{164}$$

Теперь мы видим, что поле $\partial\varphi$ – примарное, с конформной размерностью $h=1$.

Аналогично вычислим операторное разложение T с самим собой.

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= 4\pi^2 g^2 : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} - \frac{4\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) :}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \end{aligned} \tag{165}$$

4.5 Центральный заряд. Алгебра Вирасоро

В силу обсуждения после формулы (147), ренормгруппового анализа **??** и вычисления функции Швингера (**??**) мы имеем следующий общий вид операторного разложения для $T(z)T(w)$:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{166}$$

Здесь c – параметр теории, называемый центральным зарядом. Он зависит от физической природы теории и не определяется из соображений конформной инвариантности. В теории свободного бозона $c = 1$, для фермиона $c = 1/2$. Член $\frac{c/2}{(z-w)^4}$ называется аномальным. Если этого члена нет, то T–квазипримарное поле с $h = 2$.

Сравнивая выражение (166) и (**??**) мы видим, что константа A в функции Швингера

$$A = \frac{c}{4\pi^2} \tag{167}$$

Покажем, как преобразуется тензор энергии-импульса при конформных преобразованиях. Используем формулу (146):

$$\delta_\epsilon T(w) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \epsilon(z)T(z)T(w) = -\frac{1}{12}c\partial_w^3\epsilon(w) - 2T(w)\partial_w\epsilon(w) - \epsilon(w)\partial_w T(w) \tag{168}$$

Соответствующее конечное преобразование $z \to w(z)$ имеет вид

$$T \to T'(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2}\left(T(z) - \frac{c}{12}\{w,z\}\right) \tag{169}$$

$$\{w,z\} = \frac{\left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)}{\frac{dw}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\frac{dw}{dz}}\right)^2 \tag{170}$$

В качестве упражнения предлагаем проверить это выражение обратным переходом к инфинитезимальному преобразованию.

Разложим $T(z)$ в ряд Лорана.

$$T(z) = \sum_{n\in F} z^{-n-2}L_n \tag{171}$$

$$T(z) = \sum_{n\in F} \bar{z}^{-n-2}\bar{L}_n \tag{172}$$

При масштабном преобразовании $z \to z/\lambda$ оператор $T(z) \to \lambda^2 T(z/\lambda)$, соответственно компоненты $L_{-n} \to \lambda^n L_{-n}$.

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \tag{173}$$

Выведем коммутационные соотношения для операторов L_n:

$$[L_n, L_m] = \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{n+1} T(z) w^{m+1} T(w) \tag{174}$$

Используем операторное разложение (166):

$$[L_n, L_m] = \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{рег. члены} \right) =$$
$$\oint \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{c}{12}(n+1)n(n-1) w^{n-2} w^{m+1} + 2(n+1) w^n w^{m+1} T(w) + w^{n+1} w^{m+1} \partial T(w) \right) \tag{175}$$

Интегрируем последний член по частям, внеинтегральный член зануляется, а под интегралом остается $(n-m) w^{n+m+1} T(w)$:

$$[L_n, L_m] = \oint \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{c}{12}(n+1)n(n-1) w^{m+n-1} + (n-m) w^{n+m+1} T(w) \right) \tag{176}$$

Используя определение (173) и вычисляя вычет подинтегрального выражения при $n = -m$, в итоге получаем коммутационное соотношение

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n) \delta_{m+n,0} \tag{177}$$

Это коммутационные соотношения алгебры Вирасоро.

Легко показать, что в результате действия оператора L_{-n} на поле φ с конформной размерностью $(h, \bar{h})$ получается поле с размерностью $(h-n, \bar{h})$. Все поля в теории разбиваются на конформные семейства, соответствующие примарным полям:

$$[\varphi] = \{ L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_N} \bar{L}_{-m_1} \dots \bar{L}_{-m_M} \varphi \} \tag{178}$$

Вычисление корреляторов вторичных полей сводится к корреляторам примарных. Алгебра локальных полей оказывается прямой суммой конформных семейств

$$\mathcal{A} = \bigoplus_\alpha [\varphi_\alpha] \tag{179}$$

Минимальными называются теории с конечным числом примарных полей. Чтобы полностью задать такую теорию нужно определить примарные поля и их конформные размерности.

Список литературы

[1] D. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras.* Consultants bureau, 1986.

[2] Д. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* Наука, Грав. ред. физико-математической лит-ры, Москва, 1984.

[3] Б. Фейгин and Д. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли,” *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»* **21** (1988) no. 0, 121–209.

[4] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory.* Springer Verlag, 2008.