

# Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

Антон Назаров  
Кандидатская диссертация  
научный руководитель В. Д. Ляховский

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц  
физического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета  
198904, Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: anton.nazarov@hep.phys.spbu.ru

6 декабря 2012

# Актуальность темы

- Конформная теория поля
  - описывает критическое поведение в двух измерениях
  - важна в теории струн
  - точно решаемая квантовая теория поля
  - допускает аксиоматическую формулировку
  - 30 лет, тысячи работ
- Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели
  - реализуют рациональные модели конформной теории поля
  - калибровочно-инвариантны
- Аффинные алгебры Ли
  - важный класс бесконечномерных алгебр Ли
  - теория представлений – инструмент исследования моделей конформной теории поля
  - специальные функции и модулярная инвариантность
- Задача редукции представлений нетривиальна и полезна для конформной теории поля

# Научная новизна и практическая значимость

В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления.
- Создан пакет **Affine.m** для *Mathematica* вычисляющий коэффициенты ветвления и кратности весов
- Установлена прямая связь расщепления корневой системы и ветвлений – кратности весов вспомогательного модуля совпадают с коэффициентами ветвления.
- Разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту.
- Построен обобщенный стохастический процесс Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

**Affine.m** подходит для задач теории представлений в различных областях физики, от изучения атомных и молекулярных спектров, и до конформной теории поля и интегрируемых систем.

# Структура диссертации

- ❶ Конформная теория поля и аффинные алгебры Ли
- ❷ Разложение сингулярных элементов и рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления
  - Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления
  - Примеры вычисления коэффициентов ветвления и преимущества рекуррентного алгоритма
  - Приложения в конформной теории поля
- ❸ Коэффициенты ветвления и обобщенная резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
  - Ортогональная подалгебра и сингулярные элементы
  - БГГ резольвента и ветвление
- ❹ Сплиты корневых систем и функции ветвления
  - Вложения и сплиты
  - Как стебли определяют функции кратности
  - Сплиты и соотношения для аффинных алгебр Ли
- ❺ Практические приложения
  - Эволюция Шрамма-Левнера и coset-модели
  - Компьютерная программа **Affine.m**

# Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и аффинные алгебры Ли

Действие: нелинейная  $\sigma$ -модель + топологический член

$$S = \boxed{\begin{array}{c} S_0 \\ \text{нелинейная } \sigma\text{-модель} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} k\Gamma \\ \text{топологический член} \end{array}} =$$

$$-\frac{k}{8\pi} \int_{S^2} d^2x \operatorname{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) - \frac{ik}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} \operatorname{Tr} \left( \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3y$$

$$g(x): \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim S^2 \rightarrow D(G), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$\tilde{g}$  – продолжение  $g$  на трехмерное многообразие  $B$ , ограниченное  $S^2$ .

- Токи  $J(z) = -k \partial_z g g^{-1} \sum_a J^a(z) t^a = \sum_a \sum_n J_n^a t^a z^{n-1}$   
+ тождества Уорда  $\implies$  соотношения аффинной алгебры  $\hat{\mathfrak{g}}$ :

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c if^{abc} J_{n+m}^c + kn \delta^{ab} \delta_{n+m,0}$$

- Конструкция Сугавары  $L_n = \frac{1}{2(k+h\nu)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \Leftrightarrow \operatorname{Vir} \subset U(\hat{\mathfrak{g}})$ .

# Coset-модели и правила ветвления представлений аффинных алгебр Ли

$$S(g, A) = S(g) + \boxed{\text{взаимодействие с чистой калибровкой}} =$$

$$A, \bar{A}: S^2 \rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$$

$$S(g) + \frac{k}{4\pi} \int d^2z \left( \text{Tr}(Ag^{-1}\bar{\partial}g) - \text{Tr}(\bar{A}(\partial g)g^{-1}) + \text{Tr}(Ag^{-1}\bar{A}g) - \text{Tr}(A\bar{A}) \right)$$

Алгебраическая структура связана с  $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ .

$$L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : - \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_b \sum_m : \tilde{J}_m^b \tilde{J}_{n-m}^b :$$

$$[L_n, \tilde{J}_m^b] = 0 \iff \tilde{J}_m^b |v\rangle = 0 \Rightarrow \tilde{J}_m^b L_n |v\rangle = 0$$

Сингулярные векторы  $\hat{\mathfrak{a}}$  образуют модули алгебры Вирасоро. Функции ветвления  $b_{(\hat{\mathfrak{g}} \downarrow \hat{\mathfrak{a}})\nu}^\mu(q)$  – характеры модулей алгебры Вирасоро.

Примарные поля нумеруются парами весов  $(\mu, \nu) \in \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}} \oplus \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$ , такими, что  $b_\nu^\mu(q) \neq 0$ .

# Модули, характеры и сингулярные элементы

## Модуль Верма

$$M^\mu = \{J_{-n_1}^{a_1} \dots J_{-n_k}^{a_k} |\mu\rangle, \quad n_i \geq 0\} = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b}_+)}{\otimes} D^\mu(\mathfrak{b}_+)$$

где  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ ,  $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$   $D^\mu(\mathfrak{b}_+) : D(J_{n>0}^a) = 0$ ,  $D(J_0^H) = \mu(H)$ .

У  $M^\mu$  есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль  $L^\mu$  – неприводимый модуль старшего веса.

Структура модуля задается формальным характером

$$\text{ch} L^\mu = \frac{\Psi^\mu}{R} = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho-\rho}} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{ch} M^{w(\mu+\rho)-\rho} (\text{БГГ})$$

Сингулярный элемент  $\Psi^\mu$  определяет основные свойства модуля.

## Задача редукции

Алгебры  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  – конечномерные или аффинные. Хотим разложить  $L_\mathfrak{g}^\mu$  на модули  $\mathfrak{a}$  и вычислить коэффициенты  $b_\nu^\mu$ :  $L_\mathfrak{g}^\mu = \bigoplus_\nu b_\nu^\mu L_\mathfrak{a}^\nu$

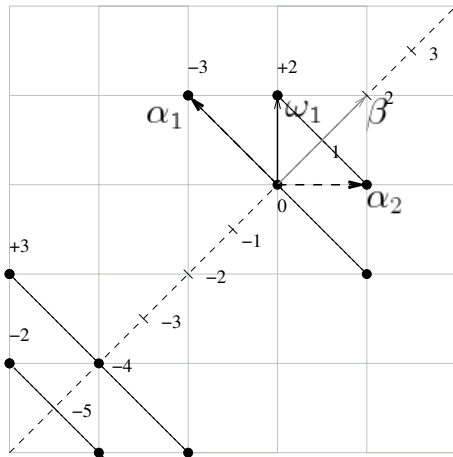
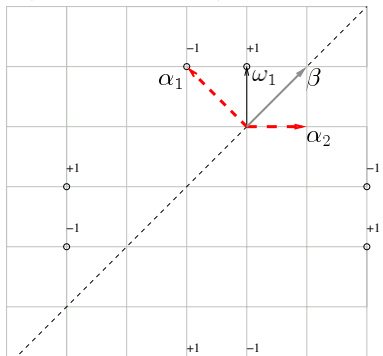
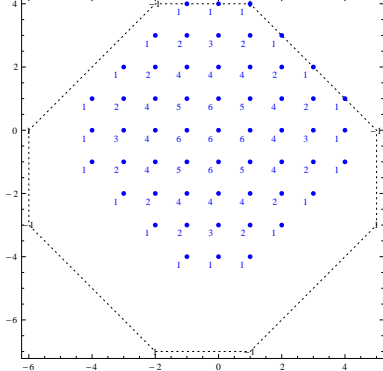


Рис.: Начальные данные  
рекуррентного вычисления –  
размерности модулей  
вспомогательной подалгебры



## Рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления

$$b_{\xi}^{\mu} = \sum_{\nu \in \Psi_{+}^{\mu}} \epsilon(\nu) (\dim L_{\mathfrak{b}}^{\pi_{\mathfrak{b}} \nu}) \delta_{\xi, \pi_{\mathfrak{a}} \nu} + \sum_{\gamma \in \Gamma} s(\gamma) b_{\xi + \gamma}^{\mu}$$

$\Psi_{+}^{\mu}$  – подмножество весов сингулярного элемента в главной камере Вейля подалгебры  $\mathfrak{a}$ ,  $\epsilon(\nu)$  – знаки отражений группы Вейля,  $\mathfrak{b}$  – вспомогательная подалгебра с корнями, ортогональными корням  $\mathfrak{a}$ . Рекурсия задается множеством  $\Gamma_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$ :

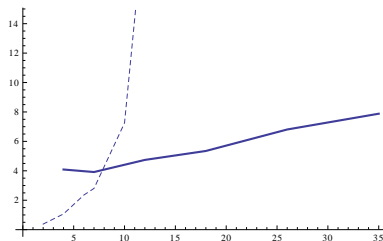
$$\prod_{\alpha \in \Delta^{+} \setminus \Delta_{\mathfrak{b}}^{+}} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}} \alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} \alpha)} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} s(\gamma) e^{-\gamma}$$

Определяется по корневым системам  $\Delta_{\mathfrak{g}}$ ,  $\Delta_{\mathfrak{a}}$  и не зависит от модуля.



## Выводы к главе 2

- Коэффициенты ветвления нужны для вычисления спектра возбуждений в WZNW-модели
- Функции ветвления дают статсумму coset-моделей
- Получена новая рекуррентная формула для коэффициентов ветвления, не требующая лишних вычислений
- Продемонстрирована эффективность алгоритма



**Рис.:** Зависимость времени вычисления коэффициентов ветвления для вложения  $B_3 \rightarrow B_4$  от числа весов в  $\bar{C}$ . Пунктир — традиционный алгоритм, сплошная линия — наш алгоритм

## Резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда

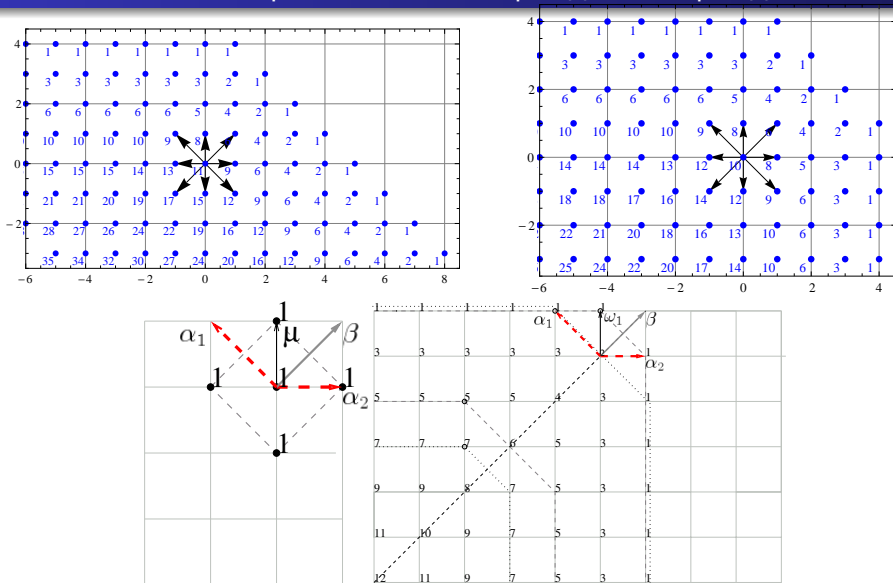


Рис.:  $A_1 \oplus u(1) \subset B_2$ , обобщенные модули Верма. Пунктир – “+”, точки – “-”.

## Точная последовательность

$$0 \rightarrow M'_r \xrightarrow{\delta_r} M'_{r-1} \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M'_0 \xrightarrow{\varepsilon} L^\mu \rightarrow 0,$$

$$M'_k = \bigoplus_{u \in U, \text{length}(u)=k} M'_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M'_0 = M'_I^\mu$$

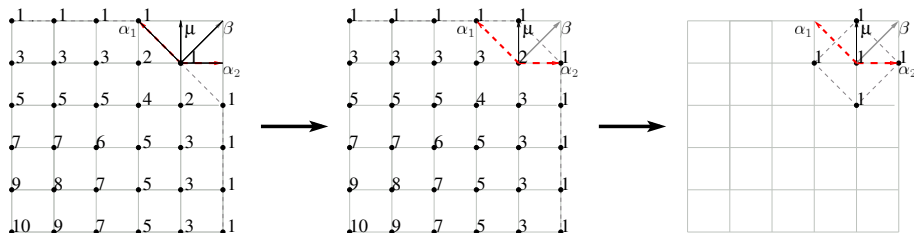


Рис.: Центральная часть точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{Im}(\delta_2) \rightarrow \left( e^{\pi_{\bar{a}}[\mu] + \mathcal{D}_{a \perp}} \text{ch} M_I^{\pi_{a \perp}[\omega_1] - \mathcal{D}_{a \perp}} = M_I^{\omega_1} \right) \rightarrow L^{\omega_1} \rightarrow 0.$$

## Выводы к главе 3

- Показано, что использование веера вложения приводит к построению параболических модулей Верма
- Эти модули образуют точную последовательность обобщенной резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту
- То есть установлена связь ветвления с обобщенной БГГ-резольвентой

## Пример

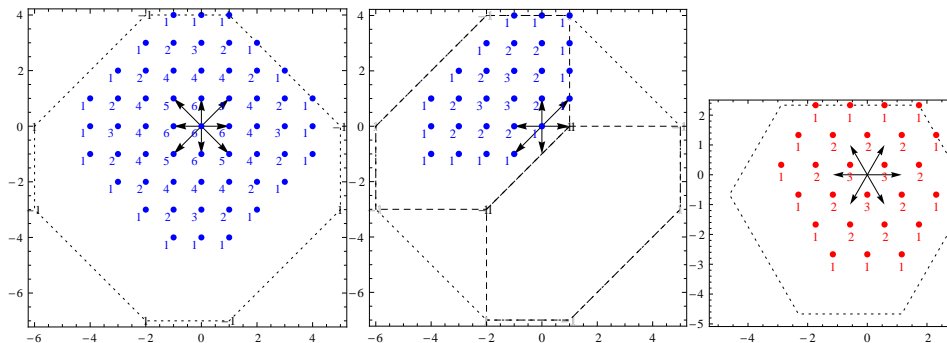


Рис.: Веса  $L_{B_2}^{[3,2]}$  с кратностями показаны слева. Короткий пунктир – контур сингулярного элемента. В центре – разложение сингулярного элемента  $\Psi_{B_2}(L_{B_2}^{[3,2]})$  в сумму образов сингулярных элементов  $\Psi_{A_2}(L_{A_2}^{[3,2]})$  (длинный пунктир) и коэффициенты ветвления. Справа кратности  $L_{A_2}^{[3,2]} =$  коэффициентам ветвления  $L_{B_2 \downarrow A_1 \oplus u(1)}^{[3,2]}$ .

# Сплиты

## Определение

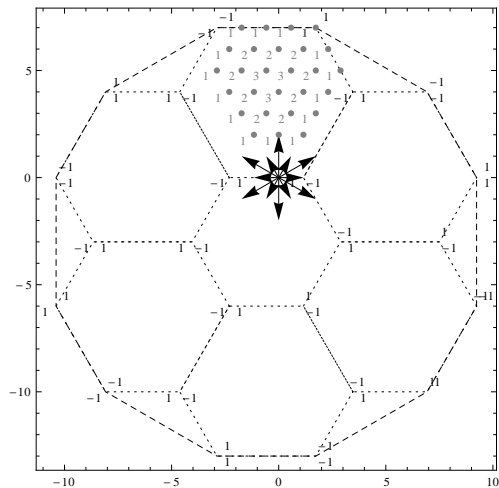
$\phi$  – “вложение”  $\Delta_0 \hookrightarrow \Delta$ :  $\forall \gamma = \alpha + \beta \quad \phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$ .

## Определение

Корневая система  $\Delta$  “расщепляется” на  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , если существует два вложения  $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$  и  $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$ , где (а)  $\Delta$  – несвязное объединение образов  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , и (b) ни ранг  $\Delta_1$ , ни ранг  $\Delta_2$  не превосходит ранга  $\Delta$ .

$\Delta$	$\Delta_a$	$\Delta_s$	$\begin{aligned} \mu &= \sum m_k \omega^k \\ \tilde{\mu} &= \sum m_k \omega_s^k \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} b_\nu^\mu &= M_{(s)\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} \\ \mu - \nu &= \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}) \end{aligned}$
$G_2$	$A_2$	$A_2$	
$F_4$	$D_4$	$D_4$	
$B_r(r \geq 2)$	$D_r$	$\oplus^r A_1$	
$A_r(r \geq 2)$	$A_{r-1} \oplus u(1)$	$\oplus^r A_1$	
$B_2$	$A_1 \oplus u(1)$	$A_2$	





**Рис.:** Орбита группы Вейля (длинный пунктир) для  $\Psi_{G_2}(L^{[3,2]})$  и его разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей  $A_2$  (короткий). Кратности весов  $L_{A_2}^{[3,2]}$  совпадают с коэффициентами ветвления  $L_{G_2 \downarrow A_2}^{[3,2]}$ .

# Выводы к главе 4

- Проанализирована связь расщепления с веером вложения
- Доказано, что расщепление корневой системы приводит к совпадению коэффициентов ветвления с кратностями весов
- Для аффинных алгебр получены новые соотношения на тета-функции
- Показано, что существование сплита ведет к матричным соотношениям между функциями ветвления

# Эволюция Шрамма-Лёвнера

## Определение

Эволюция Шрамма-Лёвнера на верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$  – это стохастический процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t} \quad \text{или} \quad dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa}\xi_t$$

Конформно-инвариантная мера на траекториях  $\gamma_t$  в  $\mathbb{H}$ .

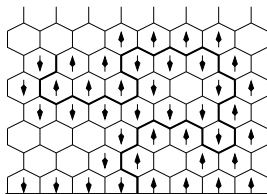


Рис.: Эволюция Шрамма-Лёвнера – непрерывный предел интерфейсов

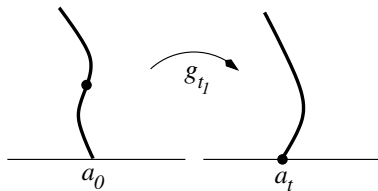


Рис.: Конформное отображение

# Стохастические наблюдаемые и корреляторы в CFT

Рассмотрим решеточную наблюдаемую  $\mathcal{O}$ , тогда

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E} [\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = \sum_{\gamma_t} P[C_{\gamma_t}] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$  не зависит от  $t$ , следовательно  $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$  – мартингал.

Непрерывный предел в критической – корреляционная функция

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t} \rightarrow \left\langle \phi(z_t) \varphi_1(z_1) \dots \varphi_n(z_n) \phi^\dagger(\infty) \right\rangle$$

$\phi$  – оператор изменения граничных условий.

$dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa} \xi_t \Rightarrow d\varphi_i = \mathcal{G}_i \varphi_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} \varphi_i$ . Обобщение на

coset-модели:  $\mathcal{G}_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \left( \sum_{a: \mathcal{K}(t^a, \tilde{t}^b)=0} (d\theta^a t_i^a) \right)$

Условие на возможные операторы изменения гран. условий – вектор должен быть сингулярным:

$$|\psi\rangle = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left( \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b \right) \right) \phi(0)|0\rangle$$

```

stringFunctions[ $\hat{A}_2$ , {1, 1, 2}]
{{0, 0, 4},
2q + 10q2 + 40q3 + 133q4 + 398q5 + 1084q6 + 2760q7 + 6632q8 + 15214q9 + 33508q10},
{{0, 3, 1},
2q + 12q2 + 49q3 + 166q4 + 494q5 + 1340q6 + 3387q7 + 8086q8 + 18415q9 + 40302q10},
{{1, 1, 2},
1 + 6q + 27q2 + 96q3 + 298q4 + 836q5 + 2173q6 + 5310q7 + 12341q8 + 27486q9 + 59029q10},
{{2, 2, 0},
1 + 8q + 35q2 + 124q3 + 379q4 + 1052q5 + 2700q6 + 6536q7 + 15047q8 + 33248q9 + 70877q10},
{{3, 0, 1},
2 + 12q + 49q2 + 166q3 + 494q4 + 1340q5 + 3387q6 + 8086q7 + 18415q8 + 40302q9 + 85226q10}

```

```

vm=makeVermaModule[B2][{2, 1}];
pm=makeParabolicVermaModule[B2][weight[B2][2, 1], {1}];
im=makeIrreducibleModule[B2][2, 1];
GraphicsRow[textPlot/@{im, vm, pm}]

```

3			1	1		
2						
1		1	2	2	1	
0	1	2	3	3	2	1
-1		1	2	3	3	2
-2			1	2	2	1
-3				1	1	

3	1	1	1	1		
2	3	3	3	2	1	
1	6	6	5	4	2	1
0	10	9	8	6	4	2
-1	14	13	11	9	6	4
-2	19	17	15	12	9	6
-3						

3	1	1	1	1		
2	3	3	3	2	1	
1	6	6	5	4	2	1
0	9	8	7	5	3	1
-1	11	10	8	6	3	1
-2	13	11	9	6	3	1
-3						

# Выводы к главе 5

- Предложено обобщение эволюции Шрамма-Лёвнера, которое соответствует coset-моделям конформной теории поля
- Получены алгебраические соотношения на оператор смены граничных условий
- Классификация операторов изменения граничных условий связана со структурой сингулярных элементов
- Реализован пакет **Affine.m** для вычислений в теории представлений в системе *Mathematica*
- Этот пакет использовался для подготовки большинства примеров в данной работе

# Основные результаты работы

- Из разложения сингулярных элементов получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Показана связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Выявлена связь расщепления корневой системы алгебры с разложением сингулярных элементов модулей алгебры в комбинацию образов сингулярных элементов модулей вспомогательной алгебры
- Показано, что наличие расщепления существенно упрощает вычисление коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления
- Предложено обобщение стохастического процесса Шрамма-Лёвнера на случай калибровочных теорий, соответствующих coset-моделям
- Реализован пакет **Affine.m** для теории представлений

# Публикации в рецензируемых журналах

- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, “Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) no. 7, 075205, arXiv:1007.0318 [math.RT].
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, “Recursive properties of branching and BGG resolution,” *Theoretical and Mathematical Physics* **169** (2011) no. 2, 1551–1560, arXiv:1102.1702 [math.RT].
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, “Fan, splint and branching rules,” *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **398** (2012) 162–179, arXiv:1111.6787 [math.RT].
- A. Nazarov, “SLE martingales in coset conformal field theory,” *JETP Letters* **96**, 1, (2012) 162–179, arXiv:1205.6104 [math-ph].
- A. Nazarov, “Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras,” *Computer Physics Communications* **183**, 11, (2012) 2480–2493, arXiv:1107.4681 [math.RT].



## Другие публикации и доклады

- A. Nazarov, "Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras," Physics and Progress, SPbSU. 2008.
- A. Nazarov, "Computational tools for representation theory of affine lie algebras," in *second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists*, ACSM, EIMI. 2009.
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent)," in *Models in Quantum Field Theory 2010*
- A. Nazarov, "Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution," *Journal of Physics: Conference Series* **343** (2012) no. 1, 012085, arXiv:1112.4354 [math-ph].
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, "On affine extension of splint root systems," *Physics of Particles and Nuclei*, **43**, 5, (2012) 676–678, arXiv:1204.1855 [math.RT].
- A. Nazarov, "On singular elements in conformal field theory," in *Models in Quantum Field Theory 2012*

Спасибо за внимание!