

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи



Назаров Антон Андреевич

**Правила ветвления аффинных алгебр Ли  
и приложения в моделях конформной теории  
поля**

01.04.02 – Теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,  
профессор,*

*Ляховский Владимир Дмитриевич*

Официальные оппоненты:

*Кулиш Петр Петрович*

*доктор физико-математических наук,  
профессор,*

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, главный научный сотрудник, заведующий лаборатории математических проблем физики;*

*Мудров Андрей Игоревич*

*кандидат физико-математических наук, Университет Лестера (Великобритания), преподаватель*

Ведущая организация:

*Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199004, Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 304

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2012 г.

ченный

сек-

ре-

тарь

[U+FFFD] [U+FFFD]

диссертационного



*Аксенова Е.В.*

со-

ве-

та,

# Общая характеристика работы

## Актуальность работы

Последние тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает большое внимание исследователей. Конформная теория поля используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах и обладает большой практической ценностью – с ее использованием было получено значительное количество результатов и численных предсказаний. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо и дробного квантового эффекта Холла. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически.

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [1].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли является важным инструментом изучения моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой обязательно в двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [2, 3]. Первоначально интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена, а затем и coset-модели, в которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль.

Моделям Весса-Зумино-Новикова-Виттена, coset-моделям и теории представлений аффинных алгебр Ли посвящены тысячи работ. Однако многие

проблемы по-прежнему не имеют простых решений. Например, задача вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для различных физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. При этом, в отличие от проблемы вычисления кратностей весов, для вычисления коэффициентов ветвления не существовало особенно эффективных алгоритмов.

**Научная новизна и практическая значимость.** В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули не максимальных подалгебр. Алгоритм вычисления коэффициентов ветвления реализован в пакете **Affine.m** для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica*.
- Установлена прямая связь инъективного сплинта и ветвлений. Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля инъективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.
- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Показано, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность.
- Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёв-

нера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Отметим, что пакет **Affine.m** может быть использован для решения задач теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли, возникающих в различных областях физики, начиная от изучения атомных и молекулярных спектров и заканчивая конформной теорией поля и интегрируемыми системами.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- Получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр, с использованием разложения сингулярных элементов
- Установлено, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность
- Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля инъективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.
- Показано, что условие для мартингала, определяющее классификацию операторов изменения граничных условий в наблюдаемых стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, задает ограничения на структуру син-

гулярных элементов представлений аффинной алгебры Ли, порожденных граничными состояниями. Изучение структуры сингулярных элементов существенно упрощает поиск операторов смены граничных условий. Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля и показано, что такое обобщение совместно с coset-реализацией минимальных моделей.

- Разработан пакет программ **Affine.m**, реализующий различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

### **Апробация работы**

Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых “Workshop on Advanced Computer Simulation Methods” 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: “Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)” 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), “Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011”, 18-23 июля 2011 (Дубна), “Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)”, 7-13 августа 2011 (Прага).

### **Публикации.**

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], 5 статей в сборниках тезисов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10].

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 160 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**Глава 1** носит обзорный характер. В ней мы даем аксиоматическую формулировку конформной теории поля, описываем модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели. Затем мы демонстрируем роль аффинных алгебр в описании этих моделей и приводим основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Мы указываем на то, что основные свойства интегрируемых модулей старшего веса определяются структурой сингулярного элемента, что выражается в формуле Вейля-Каца для формальных характеров. Мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

**В главе 2** мы выводим основное рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления. Сначала мы доказываем лемму о разложении сингулярного элемента. Структура сингулярного элемента определяет свойства модуля алгебры Ли, поэтому разложение определяет правила ветвления и позволяет сформулировать рекуррентную процедуру редукции. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

Формула Вейля-Каца для формальных характеров интегрируемых модулей старшего веса конечномерных и аффинных алгебр Ли имеет вид  $\text{ch} V^{(\mu)} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}$ , где  $\Psi^{(\mu)}$  – сингулярный элемент модуля, а  $R = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult}(\alpha)}$  – знаменатель Вейля. Сингулярный элемент определяется набором сингулярных весов модуля и имеет разный вид для разных типов модулей старшего веса. Например,  $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}$  для неприводимых модулей.



Знаменатель Вейля  $R$  является универсальным объектом, характеризующим корневую систему алгебры Ли, а свойства модуля определяются сингулярным элементом.

Процедура редукции состоит в разложении модуля алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в сумму модулей некоторой подалгебры  $\mathfrak{a}$ :  $L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^\mu = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu$ .

Используя оператор проекции  $\pi_{\mathfrak{a}}$  (на весовое пространство  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ ), перепишем это разложение для формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}} \circ ch(L^\mu) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} ch(L_{\mathfrak{a}}^\nu). \quad (1)$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления  $b_\nu^{(\mu)}$ .

Для любой алгебры  $\mathfrak{g}$  и подалгебры  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  можно построить подалгебру  $\mathfrak{a}_\perp$  такую, что  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp} = \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0\}$ .

Обозначим через  $W_{\mathfrak{a}_\perp}$  подгруппу группы Вейля  $W$ , порожденную отражениями  $w_\beta$ , соответствующими корням  $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ . Подсистема  $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}$  определяет подалгебру  $\mathfrak{a}_\perp$  с подалгеброй Картана  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Пусть  $\mathfrak{h}_\perp^* := \{\eta \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}^* | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp}; \eta(h) = 0\}$ , тогда имеет место разложение подалгебры Картана  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$ .

Для подалгебр из ортогональной пары  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$  рассмотрим соответствующие векторы Вейля  $\rho_{\mathfrak{a}}$  и  $\rho_{\mathfrak{a}_\perp}$ , и образуем так называемые “дефекты” вложения  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho$ ,  $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} := \rho_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho$ .

Рассмотрим сингулярные веса  $\{(w(\mu + \rho) - \rho) | w \in W\}$  модуля старшего веса  $L_{\mathfrak{g}}^\mu$  и их проекции на  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}^*$  (дополнительно сдвинутые на дефект  $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ ):

$$\mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(w) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim \circ [w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad w \in W.$$

Среди весов  $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(w) | w \in W\}$  выберем находящиеся в главной камере Вейля  $\overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim}$ . Множество  $U := \{u \in W | \mu_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}^\sim}\}$  состоит из элементов группы Вейля, переводящих старший вес в главную камеру Вейля подалгебры  $\tilde{\mathfrak{a}}_\perp$  (с учетом сдвига на  $\rho$  и на дефект). Элементы  $U$  являются представителя-

ми классов смежности  $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Каждому элементу  $U$  поставим в соответствие вес  $\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}} \circ [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Аналогичным образом определим  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}} [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$  и  $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp} [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ . Мы доказываем следующую лемму о разложении сингулярного элемента:

**Лемма 1.** Пусть  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$  – ортогональная пара редуктивных подалгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$ ,  $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$ ,

$L^\mu$  – модуль старшего веса с сингулярным элементом  $\Psi^{(\mu)}$ ,

$R_{\mathfrak{a}_\perp}$  – знаменатель Вейля для подалгебры  $\mathfrak{a}_\perp$ .

Тогда элемент  $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^\mu}{R_{\mathfrak{a}_\perp}} \right)$  можно разложить в сумму по  $u \in U$  сингулярных весов  $e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}$  с коэффициентами  $\epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp}(u)} \right)$ :

$$\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left( \frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^\mu}{R_{\mathfrak{a}_\perp}} \right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp}(u)} \right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}. \quad (2)$$

Введем “веер вложения”, который необходим для формулировки рекуррентных соотношений:

**Определение 1.** Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}} \alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} \alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \quad (3)$$

и носитель  $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} \subset P_{\mathfrak{a}}$  функции  $s(\gamma) = \det(\gamma) : \Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} = \{\gamma \in P_{\mathfrak{a}} | s(\gamma) \neq 0\}$

Упорядочение корней в  $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathfrak{a}}$  индуцирует естественное упорядочение весов в  $P_{\mathfrak{a}}$ .

Обозначим через  $\gamma_0$  наименьший вектор  $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$ . Множество

$$\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}\} \setminus \{0\} \quad (4)$$

называется *веером вложения*.

Веер вложения универсален и зависит только от вложения  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$  и не зависит от модуля  $L^{(\mu)}$ .

Введем сингулярные коэффициенты ветвления следующим образом:

$$\begin{aligned} k_\xi^{(\mu)} &= b_\xi^{(\mu)} \quad \text{если} \quad \xi \in \bar{C}_a \\ k_\xi^{(\mu)} &= \epsilon(w) b_{w(\xi + \rho_a) - \rho_a}^{(\mu)} \quad \text{где} \quad w \in W_a : w(\xi + \rho_a) - \rho_a \in \bar{C}_a. \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему, которая позволит нам рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

**Теорема 1.** *Для сингулярных коэффициентов ветвления  $k_\nu^{(\mu)}$  выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} k_\xi^{(\mu)} &= -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left( L_{\widetilde{a_\perp}}^{\mu_{a_\perp}}(u) \right) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_a(u(\mu + \rho) - \rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_{a \rightarrow g}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Далее мы анализируем пары  $(a, a_\perp)$  для простых алгебр Ли. Оказывается, что для “ортогональной пары”  $(a, a_\perp)$ , вообще говоря,  $a \oplus a_\perp \not\subset g$ . В частности, для серии простых конечномерных алгебр  $B_n$  существуют “ортогональные пары” подалгебр  $(B_k, B_{n-k})$ .

На основании рекуррентного соотношения (5) сформулирован алгоритм вычисления коэффициентов ветвления. Остальные разделы главы 2 содержат примеры вычислений с использованием предложенного алгоритма, а также описание роли функций ветвления в формулировке конформной теории поля на торе и в coset-моделях конформной теории поля.

**В главе 3** мы используем разложение сингулярного элемента, чтобы показать связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Данные результаты опубликованы в работах [A2, A7].

Для полупростой конечномерной алгебры  $g$  и полупростой конечномерной подалгебры  $a$  алгебра  $a_\perp$  является регулярной. Отношение знаменателей Вейля порождает параболические модули Верма. Сингулярный элемент  $\Psi^{(\mu)}$  может быть разложен в сумму по  $u \in U$  сингулярных элементов  $\Psi_{a_\perp}^{\mu_{a_\perp}}(u)$  с

коэффициентами  $\epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)}$ :

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}. \quad (6)$$

Мы доказываем следующее утверждение, демонстрирующее, что разложение сингулярного элемента связано с разложением характера неприводимого модуля в комбинацию характеров обобщенных модулей Верма

**Утверждение 1.** *Для ортогональной подалгебры  $\mathfrak{a}_{\perp}$  в  $\mathfrak{g}$  (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ ) характер интегрируемого модуля старшего веса  $L^{\mu}$  может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов  $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$ :*

$$\text{ch}(L^{\mu}) = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}, \quad (7)$$

где  $U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\}$  и  $I$  – такое подмножество в  $S$ , что  $\Delta_I^+$  эквивалентно  $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$ .

Связь редукции и (обобщенной) резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда дается следующим утверждением:

**Утверждение 2.** *Пусть  $L^{\mu}$  –  $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом  $\mu \in P^+$ , и пусть регулярная подалгебра  $\mathfrak{a}_{\perp} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  является ортогональным партнером редуктивной подалгебры  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ . Тогда разложение (6) определяет как обобщенную резольвенту  $L^{\mu}$  по отношению к  $\mathfrak{a}_{\perp}$ , так и правила ветвления  $L^{\mu}$  по отношению к  $\mathfrak{a}_{\perp}$ , так и правила ветвления  $L^{\mu}$  по отношению к  $\mathfrak{a}$ .*

**Глава 4** посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплонт приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры.

Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплинт корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [A3, A10].

**Определение 2.** Пусть  $\Delta_0$  и  $\Delta$  – корневые системы с соответствующими весовыми решетками  $P_0$  и  $P$ . Отображение  $\phi : \{\Delta_0 \hookrightarrow \Delta, P_0 \hookrightarrow P\}$  называется “вложением”, если  $\phi$  вкладывает  $\Delta_0$  в  $\Delta$  и действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в  $P_0$  и  $P$ :  $\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$  для любой тройки  $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$ , такой, что  $\gamma = \alpha + \beta$ .

Вложение  $\phi$  индуцирует вложение формальных алгебр:  $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$  и для образа  $\mathcal{E}_i = \text{Im}_\phi(\mathcal{E}_0)$  можно рассмотреть обратное отображение  $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$ . Нужно различать два класса вложений: “метрические”, если скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве  $P_0$  инвариантно по отношению к  $\phi$  и “неметрические”, если оно не  $\phi$ -инвариантно.

Будем говорить, что корневая система  $\Delta$  “расщепляется” на  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , если существует два вложения  $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$  и  $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$ , где (а)  $\Delta$  – несвязное объединение образов  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , и (b) ни ранг  $\Delta_1$ , ни ранг  $\Delta_2$  не превосходит ранга  $\Delta$ . Можно сказать, что  $(\Delta_1, \Delta_2)$  – “сплинт” (расщепление)  $\Delta$  и мы можем обозначить его через  $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$ . Каждая из компонент  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  называется “стеблем” сплинта  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Покажем связь веера вложения и “инъективного” сплинта, когда один из стеблей  $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$  является подсистемой корневой системы, соответствующей регулярной редуктивной подалгебре  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ . В этом случае знаменатель Вейля, соответствующий второму стеблю  $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ , может быть переписан в виде произведения (аналогично формуле (3)) и определяет веер вложения  $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$ . Обозначим через  $\Delta_{\mathfrak{s}0}$  кообраз второго вложения  $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \rightarrow \Delta_{\mathfrak{g}}$ .

Верно следующее утверждение.

**Утверждение 3.** *Каждый инъективный сплнт  $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$  определяет веер вложения с носителем  $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}$ , задающимся произведением*

$$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta}) = - \sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma}$$

В случае инъективного сплнта мы можем сказать, что подалгебра  $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  расщепляет  $\Delta$ . Сплнты были классифицированы в работе [4] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплнтов в этой классификации инъективны. Если выполнено техническое требование на структуру сингулярного элемента, то верно следующее свойство:

**Свойство 1.** *Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства:*

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} (\Psi^{\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}}) = \sum_{\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}} M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} e^{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))} = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^{++}} b_{\nu}^{(\mu)} e^{\nu},$$

равен одному из старших весов в разложении. Кратность  $M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}$  веса  $\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}$  определяет коэффициент ветвления  $b_{\nu}^{(\mu)}$  для старшего веса  $\nu = (\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))$ :

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}.$$

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации. В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы нами в работах [A4, A6].

Стохастический процесс, который удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t}$ , называется *эволюцией Шрамма-Левнера* на верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ . Здесь  $\xi_t$  – Броуновское движение. Динамика конца  $z_t$  критической кривой  $\gamma_t$  (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением  $z_t = g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$ . Нам удобнее использовать отображение  $w_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t$ .

Мы обобщаем анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей. Такие модели задаются алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$  и ее подалгеброй  $\mathfrak{a}$ .  $G/A$ -coset модель конформной теории поля может быть реализована как ВЗНВ-модель (с калибровочной группой  $G$ ), взаимодействующая с чисто калибровочными полями, с калибровочной группой  $A \subset G$ . Действие записывается через поля  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow G$  и  $\alpha, \bar{\alpha} : \mathbb{C} \rightarrow A$ :

$$S = -\frac{k}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_{S^2} d^2x \mathcal{K}(\gamma^{-1} \partial^\mu \gamma, \gamma^{-1} \partial_\mu \gamma) - \frac{1}{6} \int_B \epsilon_{ijk} \mathcal{K} \left( \tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^i}, \left[ \tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^j} \tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^k} \right] \right) d^3y + \right. \\ \left. + \int_{S^2} d^2z \left( \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1} \bar{\partial} \gamma) - \mathcal{K}(\bar{\alpha}, (\partial \gamma) \gamma^{-1}) + \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1} \bar{\alpha} \gamma) - \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}) \right) \right]. \quad (8)$$

Через  $\mathcal{K}$  обозначена форма Киллинга в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , соответствующей группе Ли  $G$ . После фиксации  $A$ -калибровки останется  $G/A$  калибровочная инвариантность. Поэтому мы должны добавить случайные калибровочные преобразования к эволюции Шрамма-Левнера. Обозначим через  $t_i^a$  ( $\tilde{t}_i^b$ ) генераторы представления алгебры  $\mathfrak{g}$  (соответственно, представления  $\mathfrak{a}$ ), соответствующего примарному полю  $\varphi_i$ .

Рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой  $\mathcal{O}$  на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера  $\gamma_t$  вплоть до некоторого времени  $t$ , умноженных на вероятность этой траектории:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = \sum_{\gamma_t} P[C_{\gamma_t}] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

Решеточная наблюдаемая  $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$  не зависит от  $t$ , следовательно  $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$  – мартингал. Это должно выполняться и для ее непрерывного предела, дающего комбинацией корреляционных функций в конформной теории поля:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \rightarrow \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\langle \mathcal{O}(\{z_i\}) \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}}{\langle \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}}. \text{ Мы предполагаем, что } \mathcal{F} \text{ содержит}$$

некоторый набор примарных полей  $\varphi_i$  с конформными весами  $h_i$ . Так как мы рассматриваем конформную теорию с границей, необходимо добавить объемные поля в сопряженных точках  $\bar{z}_i$ . Операторы смены граничного условия  $\phi$  находятся на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности.

Исследуем, что происходит с наблюдаемыми при эволюции следа SLE  $\gamma_t$  с момента  $t$  до  $t + dt$ . Через  $\mathcal{G}_i$  мы обозначили генераторы инфинитезимальных преобразований примарных полей  $\varphi_i: d\varphi_i(w_i) = \mathcal{G}_i\varphi_i(w_i)$ . Нормируем дополнительное  $(\dim \mathfrak{g})$ -мерное Броуновское движение следующим образом:  $\mathbb{E} [d\theta^a d\theta^b] = \mathcal{K}(t^a, t^b)dt$ . Генератор преобразования поля равен  $\mathcal{G}_i = \left( \frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \left( \sum_{a: \mathcal{K}(t^a, \tilde{t}^b)=0} (d\theta^a t_i^a) \right)$ . Мы фиксировали  $A$ -калибровку, разрешив случайное блуждание только в направлении, ортогональном подалгебре  $\mathfrak{a}$ .

Формула Ито дает выражение для дифференциала  $d\mathcal{F}$ , который равняется нулю в силу условия мартингала. Это равенство можно переписать в виде дифференциального уравнения на корреляционные функции, эквивалентное алгебраическому условию на граничное состояние  $\phi(0)|0\rangle$ .

$$|\psi\rangle = \left( -2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left( \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b \right) \right) \cdot \phi(0)|0\rangle \quad (9)$$

является нулевым состоянием, то есть соответствуют сингулярному весу в представлении алгебры Вирасоро. Действуя повышающими операторами мы получаем соотношения, связывающие параметры стохастического процесса и coset-модели конформной теории поля:

$$(3\kappa - 8)h_{(\mu, \nu)} - c + \tau(k \dim \mathfrak{g} - x_e k \dim \mathfrak{a}) = 0 \quad (10)$$

$$-12h_{(\mu, \nu)} + 2\kappa h_{(\mu, \nu)}(2h_{(\mu, \nu)} + 1) + \tau(C_\mu - \tilde{C}_\nu) = 0, \quad (11)$$

здесь  $C_\mu = (\mu, \mu + 2\rho)$  и  $\tilde{C}_\nu = (\nu, \nu + 2\rho_{\mathfrak{a}})$  – собственные значения квадратичных операторов Казимира  $\sum_a t^a t^a$  и  $\sum_b \tilde{t}^b \tilde{t}^b$  алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a}$ . Из уравнения (10) мы сразу получаем значения  $\kappa, \tau$  для каждой пары весов  $(\mu, \nu)$  алгебр



**g** и **a**. Для coset-реализаций минимальных и парафермионных моделей эти результаты совпадают со значениями, полученными в работе [5] путем введения стохастического процесса с дополнительным дискретным случайным блужданием.

Остальная часть главы представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализованного с использованием методов диссертации. Вычислительным методам посвящены наши работы [A5, A9, A8].

## Список публикаций

- [A1] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205(20).
- [A2] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive properties of branching and BGG resolution // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 1551–1560.
- [A3] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Fan, splint and branching rules // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. — 2012. — Vol. 398. — Pp. 162–179.
- [A4] A. Nazarov. SLE martingales in coset conformal field theory // *JETP lett*. — 2012. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 93–96.
- [A5] A. Nazarov. Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *Computer Physics Communications*. — 2012. — Vol. 183. — Pp. 2480–2493.
- [A6] A. Nazarov. Algebraic properties of CFT coset construction and Schram-

m-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085(10).

[A7] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov*. Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // *Models in Quantum Field Theory*. — 2010. <http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/>.

[A8] *A. Nazarov*. Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras // *Physics and Progress / SPbSU*. — 2008.

[A9] *A. Nazarov*. Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // *Second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI. — ACSM*. — 2009.

[A10] *V. Laykhovsky, A. Nazarov*. On affine extension of splint root systems // *Supersymmetries & Quantum Symmetries / JINR. — SQS'2011*. — 2012.

## Цитированная литература

[1] *S. Smirnov*. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.

[2] *V.G. Kac*. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.

[3] *R.V. Moody*. A new class of Lie algebras // *Journal of algebra*. — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.

[4] *David Richter*. Splints of classical root systems // *Journal of Geometry*. — 2012. — Vol. 103. — Pp. 103–117.

[5] *R. Santachiara*. SLE in self-dual critical Z (N) spin systems: CFT predictions // *Nuclear Physics B*. — 2008. — Vol. 793, no. 3. — Pp. 396–424.