Записки с семинара “Конформная теория поля”

Антон Назаров

21 марта 2011 г.

Содержание

1 14 марта 2011

1.1 Классическая теория поля

Напоминание про теорию поля.

Лагранжева формулировка классической теории поля.

Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \tag{1}$$

зависит от полей φ и констант связи $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Например:

$$S[\varphi] = \int d^d x \left(-\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{\mu\varphi^2}{2} - \frac{u\varphi^4}{24} + h\varphi \right), \tag{2}$$

1.2 Симметрии и генераторы

При преобразованиях координат

$$x \to x' \tag{3}$$

поля тоже преобразуются, то есть у них не только меняется аргумент, но и само поле. Тип поля (скалярное, векторное, спинорное) – это вид такого преобразования.

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = F(\varphi(x)) \tag{4}$$

При этом действие тоже преобразуется:

$$S' = \int d^d x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial_\mu \varphi'(x')) = \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(F(\varphi(x)), \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu F(\varphi(x))) \tag{5}$$

Примеры.

Трансляции:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad \varphi'(x+a) = \varphi(x), \quad S' = S \tag{6}$$

Поворот (преобразования Лоренца):

$$x'^\mu = m^\mu_\nu x^\nu, \quad \varphi'(mx) = \Lambda\varphi(x), \quad \Lambda\text{–представление группы} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим инфинитезимальные преобразования. Если действие инвариантно относительно каких-либо преобразований, то говорят, что в теории есть симметрия. В этом случае действие должно быть стационарно по отношению к инфинитезимальным преобразованиям. Мы будем считать, что инфинитезимальные параметры преобразований зависят от координат, то есть рассматривать не только глобальные, но и локальные преобразования.

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \tag{8}$$

(ω_a – бесконечно малые параметры).

Наше поле преобразуется так:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \tag{9}$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) \equiv -i\omega_a G_a \varphi(x) \tag{10}$$

(здесь нет суммирования по a). Действие генератора на поле:

$$iG_a\varphi = \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\partial_\mu\varphi - \frac{\delta F}{\delta\omega_a} \tag{11}$$

Примеры генераторов: Если мы предположим, что поле φ – такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\varphi) = \varphi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu \qquad P_\mu = -i\partial_\mu \tag{12}$$

$$\text{поворот} \quad x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \qquad L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial\mu) \tag{13}$$

Если же при поворотах поле преобразуется $\varphi'(x') = \Lambda\varphi(x)$, то при инфинитезимальных преобразованиях $\varphi'(x') = \varphi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ и генератор принимает вид

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial\mu) + S_{\mu\nu} \tag{14}$$

1.3 Теорема Нётер

Теперь рассмотрим произвольные инфинитезимальные преобразования, при которых действие не меняется. Инфинитезимальные параметры зависят от точки в пространстве, то есть мы рассматриваем локальные преобразования. Преобразования, для которых такой зависимости нет, называются глобальными. Якобиан такого преобразования

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a}\right) \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right| = 1 + \partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\right) \tag{17}$$

Вариация действия

$$\begin{gathered} 0 = \delta_\omega S = \int \mathcal{L}(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu)dx' - \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x)dx = \\ \int d^dx\left[\left(1 + \partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\right)\right)\mathcal{L}\left(\varphi + \delta_\omega\varphi, \partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta_\omega\varphi\right)\right] - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \end{gathered} \tag{18}$$

$$\int d^dx\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta_\omega\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta_\omega\partial_\mu\varphi + \partial_\mu\left(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}\right)\mathcal{L}\right) \tag{19}$$

Члены, не содержащие производных от ω_a зануляются в случае наличия глобальной симметрии.

Первые два члена переписываются с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа и интегрирования по частям:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta_\omega \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \varphi \right) \tag{20}$$

В итоге имеем:

$$0 = \int d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\omega \varphi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right) \tag{21}$$

Если подставить явный вид вариации поля и ввести обозначение

$$j^\mu_a = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta F}{\delta w_a}, \tag{22}$$

то для вариации действия выходит:

$$\delta_\omega S = -\int d^d x j^\mu_a \partial_\mu \omega_a \tag{23}$$

j^μ_a называется Нётеровским током, соответствующим данной симметрии. Проинтегрируем по частям и получим:

$$\delta_\omega S = \int d^d x (\partial_\mu j^\mu_a) \omega_a \tag{24}$$

Если поля удовлетворяют уравнениям движения, то действие инвариантно относительно любой вариации полей, то есть вариация действия должна зануляться для любого $\omega(x)$. Тогда

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0 \tag{25}$$

Таким образом каждой симметрии соответствует ток j^a_μ и сохраняющийся заряд:

$$Q_a = \int d^{d-1} x \; j^0_a \tag{26}$$

Пример

Рассмотрим инфинитезимальное масштабное преобразование $\lambda = 1 + \omega$. При этом вариация x_ν будет $\delta_\omega x_\nu = \omega x_\nu$. При инфинитезимальных преобразованиях $x \to x + dlx$ вариация плотности лагранжиана дается Нётеровским током:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu dl \tag{27}$$

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \tag{28}$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса. Через Θ мы обозначим след тензора энергии-импульса $\Theta = \partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu$. Он задает вариацию действия

$$\delta S = dl \int d^d x \Theta(x) \tag{29}$$

Если теория масштабно-инвариантна, то $\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = \Theta = 0$. В масштабно-инвариантной теории тензор энергии-импульса бесследовый.

2 21 марта 2011

2.1 Конформная алгебра в $d \geq 3$

Сейчас мы обсудим, какие ограничения накладывает на теорию конформная инвариантность, а затем покажем, что в двух измерениях она следует из масштабной, трансляционной и вращательной инвариантностей.

Сперва рассмотрим конформную группу в произвольном числе измерений d. Метрический тензор обозначим через $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, d$. Конформными называются преобразования $x \to x'$, сохраняющие метрический тензор с точностью до масштаба:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \tag{30}$$

Заметим, что группа Пуанкаре является подгруппой конформной группы с $\Lambda(x) = 1$, а также что конформные преобразования сохраняют углы.

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu. \tag{31}$$

Метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \tag{32}$$

Перепишем условие (30)в таком виде:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - f(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{33}$$

Отсюда вытекает условие на вид преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}(x). \tag{34}$$

Для простоты рассмотрим преобразования, действующие на плоскую метрику $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, кроме того, с учетом приложений к статистической физике, будем работать в евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Так что $\eta = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1), \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. В этом случае условие (34) перепишется в простом виде

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho. \tag{35}$$

Теперь подставим $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ в уравнение (34) и продиффернцируем:

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \tag{36}$$

Переставим два раза значки и скомбинируем три уравнения в одно:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f \tag{37}$$

Свернем это уравнение с $\eta^{\mu\nu}$ и получим

$$2\partial^2 \epsilon_\rho = (2 - d)\partial_\rho f \tag{38}$$

Теперь продифференцируем его по x^ν и поменяем значок ρ на μ:

$$2\partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = (2 - d)\partial_\mu \partial_\nu f \tag{39}$$

Сравним полученное равенство с результатом применения оператора ∂^2 к уравнению (36):

$$\partial^2 \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial^2 \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \tag{40}$$

Из равенств (39), (40) следует, что

$$(2 - d)\partial_\mu \partial_\nu f = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f. \tag{41}$$

Свернув с $\eta^{\mu\nu}$ получим

$$(d - 1)\partial^2 f = 0. \tag{42}$$

Сразу можно отметить, что при $d = 1$ любое гладкое преобразование будет конформным. Рассмотрим случай $d \geq 3$. Функция $f(x)$ должна иметь вид

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu. \tag{43}$$

Тогда из (35) получаем для ϵ

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \tag{44}$$

Так как равенства (34), (35), (37) должны выполняться для любых x^μ, то мономы в ϵ можно рассматривать независимо. На a_μ не возникает никаких ограничений. Этот член соответствует трансляциям. Теперь подставляем линейный член в (34), (35) и получаем условие

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b^\lambda_\lambda \eta_{\mu\nu} \tag{45}$$

То есть $b_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \tag{46}$$

Первый член соответствует масштабному преобразованию, а второй - повороту. В результате подстановки квадратичного члена ϵ в (35), (37) получаем следующее условие на $c_{\mu\nu\rho}$:

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}h_\nu + \eta_{\mu\nu}h_\rho - \eta_{\nu\rho}h_\mu, \quad h_\mu = \frac{1}{d} c^\alpha_{\alpha\mu} \tag{47}$$

Ему соответствует преобразование

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x^\nu h_\nu)x^\mu - h^\mu x^\nu x_\nu \tag{48}$$

Такое преобразование называется специальным конформным преобразованием. Это преобразование можно естественно интерпретировать, если переписать в виде

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - h^\mu. \tag{49}$$

Видно, что специальное конформное преобразование — это инверсия, трансляция и обратная инверсия.

Соответствующие конченые конформные преобразования имеют вид

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \qquad \text{— трансляция} \tag{50}$$

$$x'\mu = \alpha x^\mu \qquad \text{— растяжение} \tag{51}$$

$$x'^\mu = m^\mu_\nu x^\nu \qquad \text{— поворот} \tag{52}$$

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - h^\mu x^2}{1 - 2h_\mu x^\mu + h^2 x^2} \qquad \text{— специальное конформное преобразование} \tag{53}$$

Теперь выпишем вид генераторов конформных преобразований для скалярного поля. Напомним, что при произвольном конечном преобразовании скалярное поле преобразуется как

$$\Phi'(x') = F(\Phi(x)). \tag{54}$$

При соответствующем инфинитезимальном преобразовании

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega_a \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \omega_a} \tag{55}$$

скалярное поле преобразуется так:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \tag{56}$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \Phi(x) \tag{57}$$

(здесь нет суммирования по a). Из (56) получаем действие генератора на скалярное поле:

$$iG_a\Phi = \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \omega_a}\partial_\mu \Phi - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \tag{58}$$

Если мы предположим, что поле Φ такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть $F(\Phi) = \Phi$, то мы получим следующий вид для генераторов:

трансляция
$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{59}$$

поворот
$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial \mu) \tag{60}$$

растяжение
$$D = -ix^{\mu}\partial_\mu \tag{61}$$

специальное конформное преобразование
$$K_\mu = -i(2x_\mu x^{\nu}\partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \tag{62}$$

Отсюда легко найти коммутационные соотношения алгебры конформных преобразований в случае $d \geq 3$:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \tag{63}$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \tag{64}$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \tag{65}$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \tag{66}$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \tag{67}$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Чтобы понять, о какой алгебре идет речь, переопределим генераторы следующим образом. Введем генераторы J_{ab}, $a, b = -1, 0, \ldots, d$, $J_{ab} = -J_{ba}$:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \tag{68}$$

$$J_{-1,0} = D \tag{69}$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \tag{70}$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \tag{71}$$

Коммутационные соотношения для таких генераторов запишутся в виде

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}), \tag{72}$$

где $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Видно, что мы получили алгебру $so(d+1, 1)$. В случае пространства Минковского была бы $so(d, 2)$.

2.2 Локальные конформные преобразования в двумерной теории

Мы получили общее условие на вид инфинитезимальных конформных преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu}. \tag{73}$$

Теперь у нас $d = 2$, $\mu, \nu = 0, 1$ и $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, так как мы работаем в евклидовой теории. Расписывая компоненты уравнения (73), получаем

$$\partial_0\epsilon_1 + \partial_1\epsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \qquad \partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0 \tag{74}$$

$$2\partial_0\epsilon_0 = \partial_0\epsilon_0 + \partial_1\epsilon_1 \quad \Rightarrow \qquad \partial_0\epsilon_0 = \partial_1\epsilon_1 \tag{75}$$

То есть мы получили уравнения Коши-Римана. Введем комплексные координаты

$$z = x_0 + ix_1 \tag{76}$$

$$\bar{z} = x_0 - ix_1 \tag{77}$$

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) \tag{78}$$

$$\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \tag{79}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1 \tag{80}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - i\epsilon_1, \tag{81}$$

тогда уравнения (74) можно переписать в виде

$$\partial\epsilon = 0 \tag{82}$$

$$\bar{\partial}\bar{\epsilon} = 0. \tag{83}$$

Решениями будут любые голоморфные и антиголоморфные функции: $\epsilon = \epsilon(z)$ – голоморфная функция и $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ – антиголоморфная. Таким образом мы видим, что алгебра локальных конформных преобразований в двумерном случае оказывается бесконечномерной алгеброй преобразований

$$z \to f(z) \tag{84}$$
$$\bar{z} \to \bar{f}(\bar{z}) \tag{85}$$

Введем в алгебре конформых преобразований следующий базис:

$$z' = z + \epsilon_n(z) \tag{86}$$
$$\bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) \tag{87}$$
$$\epsilon_n(z) = -z^{n+1} \tag{88}$$
$$\bar{\epsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{z}^{n+1} \tag{89}$$

Тогда соответствующие генераторы будут равны

$$l_n = -z^{n+1}\partial \tag{90}$$
$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial} \tag{91}$$

Легко видеть, что коммутационные соотношения имеют вид

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n} \tag{92}$$
$$\left[\bar{l}_m, \bar{l}_n\right] = (m-n)\bar{l}_{m+n} \tag{93}$$
$$\left[l_n, \bar{l}_m\right] = 0 \tag{94}$$

Мы видим, что алгебра распадается в прямую сумму $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$, каждая компонента — это алгебра Витта (Witt algebra). Оказывается удобно продолжить теорию на случай независимых $z, \bar{z}$. Тогда теория распадется на два независимых сектора. Условие же $z^* = \bar{z}$ можно наложить в самом конце. Такая процедура соответствует комплексному продолжению всех функций от x_0, x_1 на $x_0, x_1 \in \mathbb{C}^2$. Заметим, что вещественная плоскость сохраняется подалгеброй, натянутой на генераторы $l_n + \bar{l}_n$ и $i(l_n - \bar{l}_n)$.

2.3 Глобальные конформные преобразования

Глобальными называются те преобразования, которые определены на всей сфере Римана $S^2 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$. Понятно, что это может быть только при $n \geq -1$. Кроме того, чтобы рассмотреть окрестность точки $z = \infty$ можно сделать преобразование координат $z = -\frac{1}{w}$. Тогда

$$l_n = -z^{n+1}\partial = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n+1}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial_w = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n-1}\partial_w. \tag{95}$$

Это выражение должно быть хорошо определено при $w \to 0$, то есть $n \leq 1$. Значит глобальные конформные преобразования генерируются $l_{\pm 1}, l_0, \bar{l}_{\pm 1}, \bar{l}_0$. Заметим, что генераторы $l_{-1}, \bar{l}_{-1}$ порождают трансляции, $i(l_0 - \bar{l}_0)$ – вращения, $l_0 + \bar{l}_0$ – масштабные преобразования. Конечные глобальные преобразования имеют вид

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{96}$$

(И аналогично для $\bar{z}$). Если собрать коэффициенты a, b, c, d в матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то ясно, что мы имеем дело с группой $SL_2(\mathbb{C})/Z_2 \approx SO(3,1)$. Факторизация по Z_2 соответствует тому, что изменение знака у a, b, c, d разом не меняет преобразования. Эта группа называется также группой проективных конформных преобразований.

Трансляции, дилатации и вращения в матричном виде записываются следующим образом:

$$\text{трансляции} \quad x \to x + a, B = a^0 + ia^1, \qquad \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{97}$$

$$\text{вращения} \qquad \begin{pmatrix} e^{i\Theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Theta/2} \end{pmatrix} \tag{98}$$

$$\text{дилатации} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$\text{специальные конформные преобразования} \quad C = h_0 - ih_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

Глобальные конформные преобразования образуют группу, локальные же преобразования не обратимы, поэтому по отношению к ним говорят только об алгебре.

Глобальные преобразования полезны для описания физических состояний. Допустим, мы работаем в базисе собственных состояний операторов $l_0, \bar{l}_0$, соответствующие собственные значения $h, \bar{h}$ – независимые, вещественные, называются конформными весами или голоморфной и антиголоморфной размерностями. Так как $l_0 + \bar{l}_0$ – генератор дилатации, то скейлинговая размерность $\Delta = h + \bar{h}$, а поскольку $i(l_0 - \bar{l}_0)$ порождает вращения, то спин $s = h - \bar{h}$.

2.4 Центральное расширение алгебры Витта

Напомним несколько определений (см [1], [2]).

Определение 1. Будем рассматривать алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над полем $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Векторное пространство A над полем k называется *модулем над* $\mathfrak{g}$ или $\mathfrak{g}$-*модулем*, если задано билинейное отображение $\mu : \mathfrak{g} \times A \to A$, такое что $\mu([X,Y],a) = \mu(X,\mu(Y,a)) - \mu(Y,\mu(X,a))$ для $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in A$. Далее мы будем опускать символ μ и писать $Xa = \mu(X,a)$.

Определение 2. *n-мерная коцепь с коэффициентами в A* – это кососимметричный n-линейный функционал на $\mathfrak{g}$ со значениями в A. Пространство n-коцепей $C^n(\mathfrak{g};A) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}; A)$.

Заметим, что элементы $\mathfrak{g}$ действуют на $C^n(\mathfrak{g};A)$.

Определение 3. Внешний дифференциал $d = d_n : C^n(\mathfrak{g};A) \to C^{n+1}(\mathfrak{g};A)$ определяется формулой

$$(dc)(X_1,\dots,X_{n+1}) = \sum_{1\le s<t\le n+1} (-1)^{s+t-1} c([X_s,X_t],X_1,\dots,\hat{X}_s,\dots,\hat{X}_t,\dots X_{n+1}) \\ + \sum_{1\le s\le n+1} (-1)^s X_s c(X_1,\dots \hat{X}_s,\dots X_{n+1}) \quad (101)$$

Оставляем в качестве упражнения проверку того факта, что последовательность

$$\cdots \xleftarrow{d_n} C^n(g;A) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(\mathfrak{g};A) \leftarrow \cdots \leftarrow C^1(\mathfrak{g};A) \xleftarrow{d_0} C^0(\mathfrak{g};A) \leftarrow 0 \quad (102)$$

точна.Тогда $\{C^n(\mathfrak{g};A), d_n\} = C^*(\mathfrak{g};A)$ есть комплекс.

Определение 4. Соответствующие когомологии называются *когомологиями алгебры* $\mathfrak{g}$ *с коэффициентами в* A и обозначаются через $H^n(\mathfrak{g};A) = \mathrm{Ker}\ d_n/\mathrm{Im}\ d_{n-1}$.

Заметим, что поле k может рассматриваться как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль. В этом случае второй член в формуле (101) исчезает и используют сокращенные обозначения $C^n(\mathfrak{g}), H^n(\mathfrak{g})$.

Определение 5. Определим, заодно, и гомологии. Пространство n-мерных цепей $C_n(\mathfrak{g};A) = A \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$, дифференциал $\partial = \partial_n : C_n(\mathfrak{g};A) \to C_{n-1}(\mathfrak{g};A)$ определяется формулой

$$\partial(a \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)) = \\ \sum_{1\le s<t\le n+1} (-1)^{s+t-1} a \otimes ([X_s,X_t] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge \hat{X}_t \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \\ + \sum_{1\le s\le n+1} (-1)^s (X_s a) \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge X_{n+1}) \quad (103)$$

Аналогично определяется точная последовательность, комплекс и группа гомологий $H_n(\mathfrak{g}; A)$.

Определение 6. *Одномерным центральным расширением алгебры* $\mathfrak{g}$ называется точная последовательность

$$0 \to k \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0, \tag{104}$$

такая что образ $k \to \tilde{\mathfrak{g}}$ содержится в центре $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Заметим, что всякий 2-коцикл $c \in C^2(\mathfrak{g}; A)$ определяет центральное расширение $\mathfrak{g}$:

$$0 \to k \stackrel{\lambda \to (0,\lambda)}{\longrightarrow} \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus k \stackrel{(X,\lambda)\to X}{\longrightarrow} \mathfrak{g} \to 0 \tag{105}$$

Скобка Ли в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, которая равна $\mathfrak{g} \oplus k$ как векторное пространство, определяется равенством

$$[(X, \lambda), (Y, \mu)] = ([X, Y], c(X, Y)) \tag{106}$$

Тождество Якоби для такой скобки равносильно тому, что c– 2-коцикл. Когомологичным коциклам отвечают эквивалентные расширения.

Два расширения $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $I : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$ такой, что диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[d, "I"'] & k \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \tilde{\tilde{\mathfrak{g}}} \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{107}$$

Упражнение 1. Построить изоморфизм I.

Таким образом пространство $H^2(\mathfrak{g})$ – это множество классов 1-мерных центральных расширений $\mathfrak{g}$. Нуль в $H^2(\mathfrak{g})$ соответствует тривиальному расширению.

Вернемся к алгебре Витта (92). Существует коцикл

$$c(l_n, l_m) = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \tag{108}$$

Упражнение 2. Проверить, что c – коцикл алгебры Витта.

Соответствующее центральное расширение алгебры Витта называется алгеброй Вирасоро. Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид

$$[L_n, c] = 0 \tag{109}$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{-n,m} \tag{110}$$

Можно показать, что $H^2(Witt) \cong \mathbb{C}$ и все нетривиальные коциклы пропорциональны c. (Доказательство есть в [1], [3]).

Список литературы

[1] D. Fuks, I. Gelfand, and A. Sosinskij, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras.* Consultants bureau, 1986.

[2] Б. Фейгин and Д. Фукс, "Когомологии групп и алгебр Ли," *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»* **21** (1988) no. 0, 121–209.

[3] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory.* Springer Verlag, 2008.