

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи



Назаров Антон Андреевич

**Правила ветвления аффинных алгебр Ли и
приложения в моделях конформной теории
поля**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
профессор,
Ляховский Владимир Дмитриевич*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,
профессор,
Кулиш Петр Петрович
кандидат физико-математических наук,
ученое звание,
Мудров Андрей Игоревич*

Ведущая организация: *Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «_____» _____ 2012 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.24 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете, расположенном по адресу: Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 305

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» _____ 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

ученая степень, ученое звание

Подпись

фамилия и. о.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Последние тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает большое внимание исследователей [1]. Эта теория используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически. Помимо математической красоты теория обладает огромной практической ценностью – с ее использованием было получено большое количество результатов и численных предсказаний в изучении критического поведения в двумерных системах [2, 3]. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо [4, 5] и дробного квантового эффекта Холла [6].

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля [7] в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [8–10].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли является важным инструментом изучения моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой обязательно в двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [11, 12]. Первоначально интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей [13, 14]. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена [15], а затем и coset-модели [16], в

которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль.

Моделям Весса-Зумино-Новикова-Виттена, coset-моделям и теории представлений аффинных алгебр Ли посвящены тысячи работ. Однако многие проблемы по-прежнему не имеют простых решений. Например, задача вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для различных физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. При этом, в отличие от проблемы вычисления кратностей весов, для вычисления коэффициентов ветвления не существовало особенно эффективных алгоритмов.

Научная новизна и практическая значимость

В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули не максимальных подалгебр. Алгоритм вычисления коэффициентов ветвления реализован в пакете **Affine.m** для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica*.
- Установлена прямая связь инъективного сплинта и ветвлений. Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля инъективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.
- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Показано, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную

резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность.

- Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Отметим, что пакет **Affine.m** может быть использован для решения задач теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли, возникающих в различных областях физики, начиная от изучения атомных и молекулярных спектров и заканчивая конформной теорией поля и интегрируемыми системами.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр, с использованием разложения сингулярных элементов
- Установлено, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность
- Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля инъективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления

приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.

- Показано, что условие для мартингала, определяющее классификацию операторов изменения граничных условий в наблюдаемых стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, задает ограничения на структуру сингулярных элементов представлений аффинной алгебры Ли, порожденных граничными состояниями. Изучение структуры сингулярных элементов существенно упрощает поиск операторов смены граничных условий. Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля и показано, что такое обобщение совместно с coset-реализацией минимальных моделей.
- Разработан пакет программ **Affine.m**, реализующий различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на международном семинаре молодых ученых “Workshop on Advanced Computer Simulation Methods” 27 - 29 апреля 2009 (Санкт-Петербург), на международных конференциях: “Модели квантовой теории поля (MQFT-2010)” 18-22 октября 2010 (Санкт-Петербург), “Supersymmetries and Quantum Symmetries - 2011”, 18-23 июля 2011 (Дубна), “Quantum Theory and Symmetries (QTS-7)”, 7-13 августа 2011 (Прага).

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], 5 статей в сборниках тезисов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 160 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 носит обзорный характер. В ней мы даем аксиоматическую формулировку конформной теории поля, описываем модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели. Затем мы демонстрируем роль аффинных алгебр в описании этих моделей и приводим основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Мы указываем на то, что основные свойства интегрируемых модулей старшего веса определяются структурой сингулярного элемента, что выражается в формуле Вейля-Каца для формальных характеров. Кроме того, мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

В главе 2 мы выводим основное рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления. Пользуясь тем, что структура сингулярного элемента определяет свойства модуля алгебры Ли, мы формулируем и доказываем лемму о разложении сингулярного элемента. Такое разложение определяет правила ветвления и позволяет сформулировать рекуррентную процедуру

редукции. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

Формула Вейля-Каца для формальных характеров интегрируемых модулей старшего веса конечномерных и аффинных алгебр Ли имеет вид

$$\mathrm{ch} V^{(\mu)} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}, \quad (1)$$

где $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент модуля, а $R = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ – знаменатель Вейля. Сингулярный элемент определяется набором сингулярных весов модуля и имеет разный вид для разных типов модулей старшего веса. Например, $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}$ для неприводимых модулей. Про этом знаменатель Вейля является универсальным объектом, характеризующим корневую систему алгебры Ли, а свойства модуля определяются сингулярным элементом.

Процедура редукции состоит в разложении модуля алгебры Ли \mathfrak{g} в сумму модулей некоторой подалгебры \mathfrak{a}

$$L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^{\mu} = \bigoplus_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}. \quad (2)$$

Используя оператор проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$), перепишем это разложение для формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}} \circ \mathrm{ch} (L^{\mu}) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} \mathrm{ch} (L_{\mathfrak{a}}^{\nu}). \quad (3)$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления $b_{\nu}^{(\mu)}$.

Для любой алгебры \mathfrak{g} и подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ можно построить подалгебру \mathfrak{a}_{\perp} такую, что $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0\}$.

Обозначим через $W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ подгруппу группы Вейля W , порожденную отражениями w_{β} , соответствующими корням $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+$. Подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ определяет подалгебру \mathfrak{a}_{\perp} с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Пусть $\mathfrak{h}_{\perp}^* := \{\eta \in \mathfrak{h}_{\perp}^* | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\perp}}; \eta(h) = 0\}$, тогда имеет место разложение подалгебры Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$.

Для подалгебр из ортогональной пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$ рассмотрим соответствующие векторы Вейля $\rho_{\mathfrak{a}}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_\perp}$, и образуем так называемые ”дефекты” вложения $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} := \rho_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho$.

Рассмотрим сингулярные веса $\{(w(\mu + \rho) - \rho) \mid w \in W\}$ модуля старшего веса $L_{\mathfrak{g}}^\mu$ и их проекции на $h_{\mathfrak{a}_\perp}^*$ (дополнительно сдвинутые на дефект $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$):

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}} \circ [w(\mu + \rho) - \rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(w) \mid w \in W\}$ выберем находящиеся в главной камере Вейля $\overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}$. Множество $U := \{u \in W \mid \mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\}$ состоит из элементов группы Вейля, переводящих старший вес в главную камеру Вейля подалгебры $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}$ (с учетом сдвига на ρ и на дефект). Элементы U являются представителями классов смежности $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$. Каждому элементу U поставим в соответствие вес $\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}} \circ [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$. Аналогичным образом определим $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}} [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ и $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp} [u(\mu + \rho) - \rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$.

Мы доказываем следующую лемму о разложении сингулярного элемента:

Лемма 1. Пусть $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)$ – ортогональная пара редуктивных подалгебр \mathfrak{g} и $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$,

L^μ – модуль старшего веса с сингулярным элементом $\Psi^{(\mu)}$,

$R_{\mathfrak{a}_\perp}$ – знаменатель Вейля для подалгебры \mathfrak{a}_\perp .

Тогда элемент $\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^\mu}{R_{\mathfrak{a}_\perp}} \right)$ можно разложить в сумму по $u \in U$ сингулярных весов $e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u) \dim \left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)} \right)$:

$$\Psi_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\perp)}^{(\mu)} = \pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi^\mu}{R_{\mathfrak{a}_\perp}} \right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}(u)} \right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}. \quad (4)$$

Теперь мы можем ввести “веер вложения”, который необходим для формулировки рекуррентных соотношений:

Определение 1. Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}}\alpha})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}\alpha)} = - \sum_{\gamma \in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma) e^{-\gamma} \quad (5)$$

и носитель $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} \subset P_{\mathfrak{a}}$ функции $s(\gamma) = \det(\gamma)$:

$$\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}} = \{\gamma \in P_{\mathfrak{a}} | s(\gamma) \neq 0\} \quad (6)$$

Упорядочение корней в $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathfrak{a}}$ индуцирует естественное упорядочение весов в $P_{\mathfrak{a}}$.

Обозначим через γ_0 наименьший вектор $\Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$. Множество

$$\Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \Phi_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}\} \setminus \{0\} \quad (7)$$

называется *веером вложения*.

Веер вложения универсален и зависит только от вложения $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ и не зависит от модуля $L^{(\mu)}$.

Введем сингулярные коэффициенты ветвления следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{\xi}^{(\mu)} &= b_{\xi}^{(\mu)} \quad \text{если} \quad \xi \in \bar{C}_{\mathfrak{a}} \\ k_{\xi}^{(\mu)} &= \epsilon(w) b_{w(\xi + \rho_{\mathfrak{a}f}) - \rho_{\mathfrak{a}}}^{(\mu)} \quad \text{где } w \in W_{\mathfrak{a}} : w(\xi + \rho_{\mathfrak{a}}) - \rho_{\mathfrak{a}} \in \bar{C}_{\mathfrak{a}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему, которая позволит нам рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

Теорема 1. *Для сингулярных коэффициентов ветвления $k_{\nu}^{(\mu)}$ выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} k_{\xi}^{(\mu)} &= -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left(\sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim \left(L_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)} \right) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu + \rho) - \rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее мы анализируем пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ для простых алгебр Ли. Оказывается, что для “ортогональной пары” $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$, вообще говоря, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\perp} \not\subset \mathfrak{g}$. В частности, для серии простых конечномерных алгебр B_n существуют “ортогональные пары” подалгебр (B_k, B_{n-k}) .

На основании рекуррентного соотношения (9) сформулирован алгоритм вычисления коэффициентов ветвления. Остальные разделы главы 2 содержат примеры вычислений с использованием предложенного алгоритма, а также

описание роли функций ветвления в формулировке конформной теории поля на торе и в coset-моделях конформной теории поля.

В главе 3 мы используем разложение сингулярного элемента, чтобы показать связь ветвления с (обобщенной) резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Результаты третьей главы опубликованы в работах [A2, A7].

Оказывается, что для полупростой конечномерной алгебры \mathfrak{g} и полупростой конечномерной подалгебры \mathfrak{a} алгебра \mathfrak{a}_\perp , определенная в формуле (3), является регулярной. Отношение знаменателей Вейля порождает параболические модули Верма. Сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \quad (10)$$

Мы доказываем следующее утверждение, демонстрирующее, что разложение сингулярного элемента связано с разложением характера неприводимого модуля в комбинацию характеров обобщенных модулей Верма

Утверждение 1. *Для ортогональной подалгебры \mathfrak{a}_\perp в \mathfrak{g} (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$) характер интегрируемого модуля старшего веса L^μ может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)$:*

$$\text{ch}(L^\mu) = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \text{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \quad (11)$$

где $U := \{u \in W \mid \mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\}$ и I – такое подмножество в S , что Δ_I^+ эквивалентно $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$.

Связь редукции и (обобщенной) резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда дается следующим утверждением:

Утверждение 2. Пусть L^μ – \mathfrak{g} -модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, и пусть регулярная подалгебра $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ является ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (10) определяет как обобщенную резольвенту L^μ по отношению к \mathfrak{a}_\perp , так и правила ветвления L^μ по отношению к \mathfrak{a}_\perp , так и правила ветвления L^μ по отношению к \mathfrak{a} .

Глава 4 посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то спллит приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, спллит корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [A3, A10].

Определение 2. Пусть Δ_0 и Δ – корневые системы с соответствующими весовыми решетками P_0 и P . Рассмотрим отображение

$$\phi : \begin{cases} \Delta_0 \hookrightarrow \Delta, \\ P_0 \hookrightarrow P. \end{cases} \quad (12)$$

Оно называется “вложением”, если

- (а) оно вкладывает Δ_0 в Δ , и
- (б) ϕ действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в P_0 и P :

$$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

для любой тройки $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$, такой, что $\gamma = \alpha + \beta$.

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для образа $\mathcal{E}_i = \text{Im}_\phi(\mathcal{E}_0)$ можно рассмотреть обратное отображение $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Заметим, что нужно различать два класса вложений: когда скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве P_0 инвариантно по отношению к ϕ и когда оно не ϕ -инвариантно. Вложения первого класса называются “метрическими”, второго – “неметрическими”.

Определение 3. Корневая система Δ “расщепляется” на (Δ_1, Δ_2) , если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (а) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2 , и (б) ни ранг Δ_1 , ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ .

Эквивалентно, можно сказать, что (Δ_1, Δ_2) – “сплинт” (расщепление) Δ и мы можем обозначить его через $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$. Каждая из компонент Δ_1 и Δ_2 называется “стеблем” сплинта (Δ_1, Δ_2) .

Чтобы показать связь веера вложения со сплинтом рассмотрим случай, когда один из стеблей $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$ является подсистемой корневой системы.

Сплинт $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$ называется “инъективным”, если $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$, – подсистема корневой системы Δ , соответствующая регулярной редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

В случае инъективного сплинта второй стебель $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ может быть переписан как произведение (аналогично формуле (5)) и определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{s}0}$ кообраз второго вложения $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \rightarrow \Delta_{\mathfrak{g}}$. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3. Каждый инъективный сплинт $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$ определяет веер вложения с носителем $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}}$, задающимся произведением

$$\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta}) = - \sum_{\gamma \in P} s(\gamma) e^{-\gamma} \quad (13)$$

В случае инъективного сплинта мы можем сказать, что подалгебра $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ расщепляется Δ (и назовем \mathfrak{a} “расщепляющей подалгеброй” алгебры \mathfrak{g}). Сплинты были классифицированы в работе [17] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплинтов в этой классификации инъективны.

Если выполнено техническое требование на структуру сингулярного элемента, то верно следующее свойство:

Свойство 1.

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} (1 - e^{-\beta})} (\Psi^{\tilde{\mu} + \rho_{\mathfrak{s}}}) = \sum_{\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}} M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} e^{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))} = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^{++}} b_{\nu}^{(\mu)} e^{\nu}. \quad (14)$$

Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства, равен одному из старших весов в разложении. Кратность $M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}$ веса $\tilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}}$ определяет коэффициент ветвления $b_{\nu}^{(\mu)}$ для старшего веса $\nu = (\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))$:

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}.$$

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации.

В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы нами в работах [A4, A6].

Стохастический процесс, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t}, \quad (15)$$

называется *эволюцией Шрамма-Левнера* на верхней полуплоскости \mathbb{H} . Здесь ξ_t – Броуновское движение. Динамика конца z_t критической кривой γ_t (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением $z_t = g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$.

Нам удобнее использовать отображение $w_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t$.

Мы обобщаем анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей [16]. Такие модели задаются алгеброй Ли \mathfrak{g} и ее подалгеброй \mathfrak{a} . G/A -coset модель конформной теории поля может быть реализована как ВЗНВ-модель (с калибровочной группой G), взаимодействующая с чисто калибровочными полями, с калибровочной группой $A \subset G$ [18, 19]. Действие записывается через поля $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow G$ и $\alpha, \bar{\alpha} : \mathbb{C} \rightarrow A$:

$$\begin{aligned}
S_{G/A}(\gamma, \alpha) = & -\frac{k}{8\pi} \int_{S^2} d^2x \mathcal{K}(\gamma^{-1} \partial^\mu \gamma, \gamma^{-1} \partial_\mu \gamma) - \frac{k}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} \mathcal{K} \left(\tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^i}, \left[\tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^j} \tilde{\gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial y^k} \right] \right) d^3y + \\
& + \frac{k}{4\pi} \int_{S^2} d^2z \left(\mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1} \bar{\partial} \gamma) - \mathcal{K}(\bar{\alpha}, (\partial \gamma) \gamma^{-1}) + \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1} \bar{\alpha} \gamma) - \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}) \right). \quad (16)
\end{aligned}$$

Здесь через \mathcal{K} обозначена форма Киллинга в алгебре Ли \mathfrak{g} , соответствующей группе Ли G .

Если мы фиксируем A -калибровку, у нас останется G/A калибровочная инвариантность. Значит мы должны добавить случайные калибровочные преобразования к эволюции Шрамма-Левнера, аналогично случаю ВЗНВ-моделей (См. [20]). Обозначим через t_i^a (\tilde{t}_i^b) генераторы представления алгебры \mathfrak{g} (соответственно, представления \mathfrak{a}), соответствующего примарному полю φ_i .

Теперь рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой \mathcal{O} на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера γ_t вплоть до некоторого времени t , умноженных на вероятность этой траектории:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}] = \sum_{\gamma_t} P[C_{\gamma_t}] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

Решеточная наблюдаемая $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t , следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$

– мартингал. Это должно выполняться и для ее непрерывного предела, дающегося комбинацией корреляционных функций в конформной теории поля [21]:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \rightarrow \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\langle \mathcal{O}(\{z_i\}) \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}}{\langle \phi(z_t) \phi^\dagger(\infty) \rangle_{\mathbb{H}_t}} \quad (17)$$

Мы рассматриваем теорию с границей, так что мы должны использовать модели граничной конформной теории поля и накладывать соответствующие граничные условия. В случае верхней полуплоскости корреляционные функции в граничной конформной теории поля могут быть переписаны как корреляционные функции для теории на всей плоскости, но с удвоенным числом полей.

Мы предполагаем, что \mathcal{F} содержит некоторый набор примарных полей φ_i с конформными весами h_i . Так как мы рассматриваем граничную конформную теорию поля, мы должны добавить объемные поля в сопряженных точках \bar{z}_i . Кроме того, у нас есть операторы смены граничного условия ϕ на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности.

Рассмотрим, что происходит с наблюдаемыми при эволюции следа SLE γ_t с момента t до $t + dt$.

Через \mathcal{G}_i мы обозначили генераторы инфинитезимальных преобразований примарных $\varphi_i: d\varphi_i(w_i) = \mathcal{G}_i \varphi_i(w_i)$. Нормируем дополнительное $(\dim \mathfrak{g})$ -мерное Броуновское движение следующим образом: $\mathbb{E} [d\theta^a d\theta^b] = \mathcal{K}(t^a, t^b) dt$. Тогда генератор преобразования поля равен

$$\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa} d\xi_t \right) \partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i} \left(\sum_{a: \mathcal{K}(t^a, \tilde{t}^b)=0} (d\theta^a t_i^a) \right). \quad (18)$$

То есть мы фиксировали A -калибровку, разрешив случайное блуждание только в направлении, ортогональном подалгебре \mathfrak{a} .

Формула Ито, дает выражение для дифференциала \mathcal{F} , который равняется нулю в силу условия мартингала. Это равенство можно переписать в виде

следующего алгебраического условия на граничное состояние $\phi(0)|0\rangle$:

$$\begin{aligned} &\langle 0|\phi(\infty)\varphi_1(w_1)\dots\varphi_{2N}(w_{2N}) \\ &\quad \left(-2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left(\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b\right)\right) \\ &\quad \phi(0)|0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как набор $\{\phi_i\}$ состоит из произвольных примарных полей, мы заключаем, что

$$|\psi\rangle = \left(-2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau \left(\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b\right)\right) \cdot \phi(0)|0\rangle \quad (20)$$

является нулевым состоянием, то есть соответствуют сингулярному весу в представлении алгебры Вирасоро. Действуя повышающими операторами мы получаем соотношения, связывающие параметры стохастического процесса и coset-модели конформной теории поля:

$$(3\kappa - 8)h_{(\mu,\nu)} - c + \tau(k \dim \mathfrak{g} - x_e k \dim \mathfrak{a}) = 0. \quad (21)$$

$$-12h_{(\mu,\nu)} + 2\kappa h_{(\mu,\nu)}(2h_{(\mu,\nu)} + 1) + \tau(C_\mu - \tilde{C}_\nu) = 0, \quad (22)$$

здесь $C_\mu = (\mu, \mu + 2\rho)$ и $\tilde{C}_\nu = (\nu, \nu + 2\rho_{\mathfrak{a}})$ – это собственные значения квадратичных операторов Казимира $\sum_a t^a t^a$ и $\sum_b \tilde{t}^b \tilde{t}^b$ алгебр Ли \mathfrak{g} и \mathfrak{a} . Из уравнения (21),(22) мы сразу получаем значения κ, τ для каждой пары весов (μ, ν) алгебр \mathfrak{g} и \mathfrak{a} . Для coset-реализаций минимальных и парафермионных моделей эти результаты совпадают с тем, что было ранее получено путем введения стохастического процесса с дополнительным дискретным случайным блужданием [22].

Остальная часть главы представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализованного с использованием методов диссертации. Вычислительным методам посвящены наши работы [A5, A9, A8].

Список публикаций

- [A1] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205.
- [A2] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Recursive properties of branching and BGG resolution // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 169, no. 2. — Pp. 1551–1560.
- [A3] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Fan, splint and branching rules // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. — 2012. — Vol. 398. — Pp. 162–179.
- [A4] A. Nazarov. SLE martingales in coset conformal field theory // *JETP lett.* — 2012. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 93–96.
- [A5] A. Nazarov. Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *Computer Physics Communications*. — 2012. — Vol. 183. — Pp. 2480–2493. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.06.014>.
- [A6] A. Nazarov. Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085. <http://stacks.iop.org/1742-6596/343/i=1/a=012085>.
- [A7] V. Lyakhovsky, A. Nazarov. Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // *Models in Quantum Field Theory*. — 2010. <http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/>.
- [A8] A. Nazarov. Comparison of algorithms for construction of representations of

Lie algebras // Physics and Progress / SPbSU. — Physics and Progress. — 2008.

[A9] *A. Nazarov*. Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI. — ACSM. — 2009.

[A10] *V. Laykhovsky, A. Nazarov*. On affine extension of splint root systems // Supersymmetries & Quantum Symmetries / JINR. — SQS'2011. — 2012.

Цитированная литература

[1] *AA Belavin, AM Polyakov, AB Zamolodchikov*. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // *Nuclear Physics*. — 1984. — Vol. 241. — Pp. 333–380.

[2] *P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal*. Conformal field theory. — Springer, 1997.

[3] *M. Henkel*. Conformal invariance and critical phenomena. — Springer Verlag, 1999.

[4] *DL Cox, A. Zawadowski*. Exotic Kondo effects in metals: magnetic ions in a crystalline electric field and tunnelling centres // *Advances in Physics*. — 1998. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 599–942.

[5] *I. Affleck, A.W.W. Ludwig*. Exact conformal-field-theory results on the multichannel kondo effect: Single-fermion green's function, self-energy, and resistivity // *Physical Review B*. — 1993. — Vol. 48, no. 10. — P. 7297.

[6] *G. Moore, N. Read*. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 360, no. 2. — Pp. 362–396.

- [7] *J.L. Cardy*. Critical percolation in finite geometries // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1992. — Vol. 25. — P. L201.
- [8] *S. Smirnov*. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.
- [9] *H. Duminil-Copin, S. Smirnov*. Conformal invariance of lattice models // *Arxiv preprint arXiv:1109.1549*. — 2011.
- [10] *S. Smirnov*. Discrete complex analysis and probability // *Arxiv preprint arXiv:1009.6077*. — 2010.
- [11] *V.G. Kac*. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.
- [12] *R.V. Moody*. A new class of Lie algebras // *Journal of algebra*. — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.
- [13] *V.G. Kac, D.H. Peterson*. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // *Adv. in Math.* — 1984. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 125–264.
- [14] *I.G. Macdonald*. Affine root systems and Dedekind's η -function // *Inventiones Mathematicae*. — 1971. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 91–143.
- [15] *E. Witten*. Non-abelian bosonization in two dimensions // *Communications in Mathematical Physics*. — 1984. — Vol. 92, no. 4. — Pp. 455–472.
- [16] *P. Goddard, A. Kent, D. Olive*. Virasoro algebras and coset space models // *Physics Letters B*. — 1985. — Vol. 152, no. 1-2. — Pp. 88 – 92.
- [17] *David Richter*. Splints of classical root systems // *Journal of Geometry*. — 2012. — Vol. 103. — Pp. 103–117. — 10.1007/s00022-012-0109-3. <http://dx.doi.org/10.1007/s00022-012-0109-3>.

- [18] *A. Gawdzki et al.* G/H conformal field theory from gauged WZW model // *Physics Letters B.* — 1988. — Vol. 215, no. 1. — Pp. 119–123.
- [19] *J.M. Figueroa-O’Farrill.* The equivalence between the gauged WZNW and GKO conformal field theories // *ITP Stony Brook preprint ITP-SB-89-41.* — 1989.
- [20] *E. Bettelheim, IA Gruzberg, AWW Ludwig, P. Wiegmann.* Stochastic Loewner evolution for conformal field theories with Lie group symmetries // *Physical review letters.* — 2005. — Vol. 95, no. 25. — P. 251601.
- [21] *M. Bauer, D. Bernard.* SLE martingales and the Virasoro algebra // *Physics Letters B.* — 2003. — Vol. 557, no. 3-4. — Pp. 309–316.
- [22] *R. Santachiara.* SLE in self-dual critical Z (N) spin systems: CFT predictions // *Nuclear Physics B.* — 2008. — Vol. 793, no. 3. — Pp. 396–424.