Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

Антон Назаров
Кандидатская диссертация
научный руководитель В. Д. Ляховский

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
физического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
198904, Санкт-Петерубрг, Россия
e-mail: anton.nazarov@hep.phys.spbu.ru

6 декабря 2012

Актуальность темы

- Конформная теория поля
  - описывает критическое поведение в двух измерениях
  - важна в теории струн
  - точно решаемая квантовая теория поля
  - допускает аксиоматическую формулировку
  - 30 лет, тысячи работ
- Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и coset-модели
  - реализуют рациональные модели конформной теории поля
  - калибровочно-инвариантны
- Аффинные алгебры Ли
  - важный класс бесконечномерных алгебр Ли
  - теория представлений – инструмент исследования моделей конформной теории поля
  - специальные функции и модулярная инвариантность
- Задача редукции представлений нетривиальна и полезна для конформной теории поля

Научная новизна и практическая значимость

В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления.
- Создан пакет **Affine.m** для *Mathematica* вычисляющий коэффициенты ветвления и кратности весов
- Установлена прямая связь расщепления корневой системы и ветвлений – кратности весов вспомогательного модуля совпадают с коэффициентами ветвления.
- Разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту.
- Построен обобщенный стохастический процесс Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Affine.m подходит для задач теории представлений в различных областях физики, от изучения атомных и молекулярных спектров, и до конформной теории поля и интегрируемых систем.

Структура диссертации

1. Конформная теория поля и аффинные алгебры Ли
2. Разложение сингулярных элементов и рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления
    - Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления
    - Примеры вычисления коэффициентов ветвления и преимущества рекуррентного алгоритма
    - Приложения в конформной теории поля
3. Коэффициенты ветвления и обобщенная резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
    - Ортогональная подалгебра и сингулярные элементы
    - БГГ резольвента и ветвление
4. Сплинты корневых систем и функции ветвления
    - Вложения и сплинты
    - Как стебли определяют функции кратности
    - Сплинты и соотношения для аффинных алгебр Ли
5. Практические приложения
    - Эволюция Шрамма-Левнера и coset-модели
    - Компьютерная программа **Affine.m**

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и аффинные алгебры Ли

Действие: нелинейная σ-модель + топологический член

$$S = \boxed{\begin{matrix} S_0 \\ \text{нелинейная } \sigma\text{-модель} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} k\Gamma \\ \text{топологический член} \end{matrix}} =$$

$$-\frac{k}{8\pi}\int_{S^2} d^2x\ Tr(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) - \frac{ik}{24\pi}\int_B \epsilon_{ijk}\, Tr\left(\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^i}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^j}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^k}\right)d^3y$$

$$g(x):\mathbb{C}\cup\{\infty\}\sim S^2\to D(G),\ k\in\mathbb{Z},$$

$\tilde{g}$ – продолжение g на трехмерное многообразие B, ограниченное S^2.

- Токи $J(z) = -k\partial_z g g^{-1}\sum_a J^a(z)t^a = \sum_a\sum_n J^a_n t^a z^{n-1}$ + тождества Уорда $\Longrightarrow$ соотношения аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\left[J^a_n, J^b_m\right] = \sum_c i f^{abc} J^c_{n+m} + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0}$$

- Конструкция Сугавары $L_n = \frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_a\sum_m : J^a_m J^a_{n-m} :\Leftrightarrow Vir\subset U(\hat{\mathfrak{g}})$.

Coset-модели и правила ветвления представлений аффинных алгебр Ли

$$S(g,A) = S(g) + \boxed{\underset{A,\bar{A}:S^2\to\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}{\text{взаимодействие с чистой калибровкой}}} =$$

$$S(g)+\frac{k}{4\pi}\int d^2z\left(Tr(Ag^{-1}\bar{\partial}g) - Tr(\bar{A}(\partial g)g^{-1}) + Tr(Ag^{-1}\bar{A}g) - Tr(A\bar{A})\right)$$

Алгебраическая структура связана с $\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}$.

$$L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_a\sum_m : J^a_m J^a_{n-m} : - \frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_b\sum_m : \tilde{J}^b_m \tilde{J}^b_{n-m} :$$

$$\left[L_n, \tilde{J}^b_m\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{J}^b_m\left|v\right\rangle = 0 \Rightarrow \tilde{J}^b_m L_n\left|v\right\rangle = 0$$

Сингулярные векторы $\hat{\mathfrak{a}}$ образуют модули алгебры Вирасоро. Функции ветвления $b^{\mu}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\hat{\mathfrak{a}})\nu}(q)$ – характеры модулей алгебры Вирасоро.

Примарные поля нумеруются парами весов $(\mu,\nu)\in\mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}}\oplus\mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$, такими, что $b^{\mu}_{\nu}(q)\neq 0$.

Модули, характеры и сингулярные элементы

Модуль Верма

$$M^{\mu}=\{J^{a_1}_{-n_1}\dots J^{a_k}_{-n_k}\left|\mu\right\rangle, \quad n_i\geq 0\}=U(\mathfrak{g})\bigotimes_{U(\mathfrak{b}_+)}D^{\mu}(\mathfrak{b}_+)$$

где $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-, \mathfrak{b}_+=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}$ $\quad D^{\mu}(\mathfrak{b}_+): D(J^a_{n>0})=0,\ D(J^H_0)=\mu(H).$

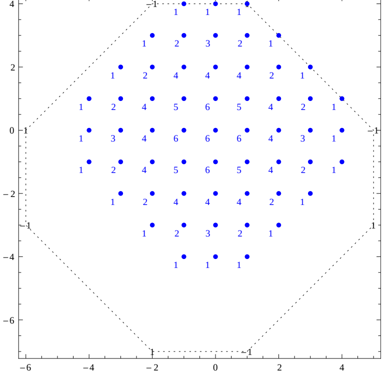
У M^{μ} есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль L^{μ} – *неприводимый модуль старшего веса*.
Структура модуля задается формальным характером

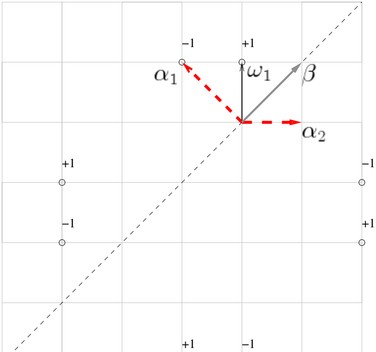
$$\mathrm{ch}L^{\mu}=\frac{\Psi^{\mu}}{R}=\frac{\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w\rho-\rho}}=\sum_{w\in W}\epsilon(w)\,\mathrm{ch}M^{w(\mu+\rho)-\rho}(\text{БГГ})$$

Сингулярный элемент Ψ^{μ} определяет основные свойства модуля.

Задача редукции

Алгебры $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ – конечномерные или аффинные. Хотим разложить $L^{\mu}_{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{a}$ и вычислить коэффициенты b^{μ}_{ν}: $L^{\mu}_{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{\nu}b^{\mu}_{\nu}L^{\nu}_{\mathfrak{a}}$





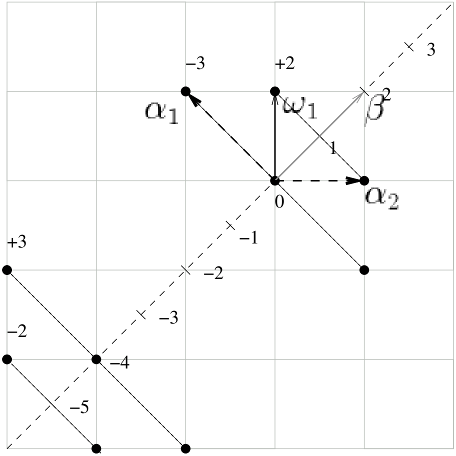


Рис.: Начальные данные рекуррентного вычисления – размерности модулей вспомогательной подалгебры

Рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления

$$b_{\xi}^{\mu} = \sum_{\nu \in \Psi_{+}^{\mu}} \epsilon(\nu) \left(\dim L_{\mathfrak{b}}^{\pi_{\mathfrak{b}}\nu}\right) \delta_{\xi,\pi_{\mathfrak{a}}\nu} + \sum_{\gamma \in \Gamma} s(\gamma) b_{\xi+\gamma}^{\mu}$$

Ψ_{+}^{μ} – подмножество весов сингулярного элемента в главной камере Вейля подалгебры $\mathfrak{a}$, $\epsilon(\nu)$ – знаки отражений группы Вейля, $\mathfrak{b}$ – вспомогательная подалгебра с корнями, ортогональными корням $\mathfrak{a}$. Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$:

$$\prod_{\alpha \in \Delta^{+} \setminus \Delta_{\mathfrak{b}}^{+}} \left(1 - e^{-\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha) - \mathrm{mult}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha)} = -\sum_{\gamma \in \Gamma} s(\gamma) e^{-\gamma}$$

Определяется по корневым системам $\Delta_{\mathfrak{g}}, \Delta_{\mathfrak{a}}$ и не зависит от модуля.

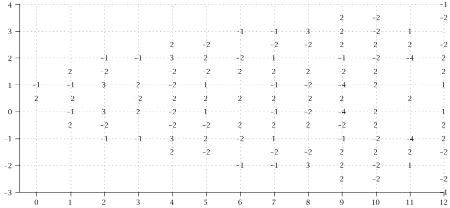


Рис.: $\Gamma_{\hat{A}_1 \subset \hat{B}_2}$

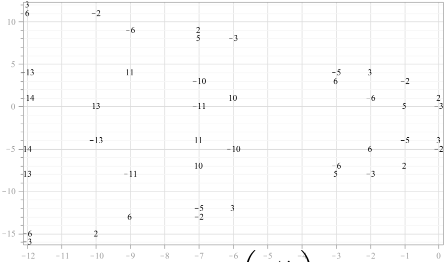


Рис.: $\pi_{\hat{A}_1}\left(\Psi^{\omega_1}_{\hat{B}_2}\right)$

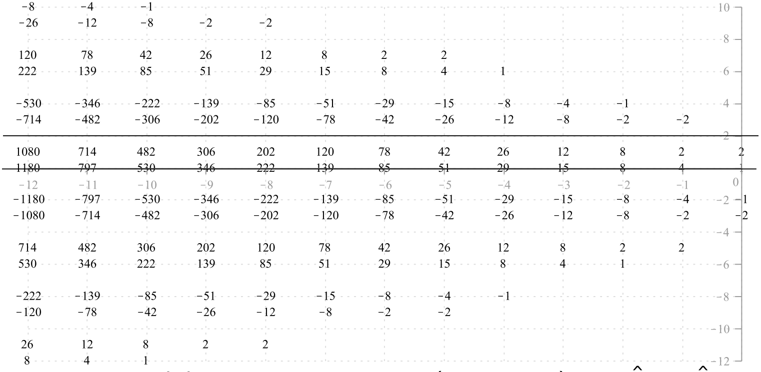


Рис.: Коэффициенты ветвления (со знаком) для $\hat{A}_1 \subset \hat{B}_2$

Выводы к главе 2

- Коэффициенты ветвления нужны для вычисления спектра возбуждений в WZNW-модели
- Фунцкии ветвления дают статсумму coset-моделей
- Получена новая рекуррентная формула для коэффициентов ветвления, не требующая лишних вычислений
- Продемонстрирована эффективность алгоритма

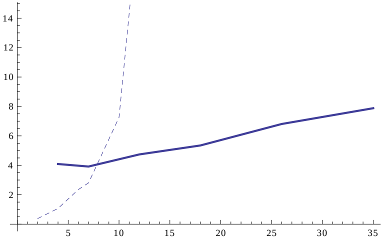


Рис.: Зависимость времени вычисления коэффициентов ветвления для вложения $B_3 \to B_4$ от числа весов в $\bar{C}$. Пунктир – традиционный алгоритм, сплошная линия – наш алгоритм

Резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда

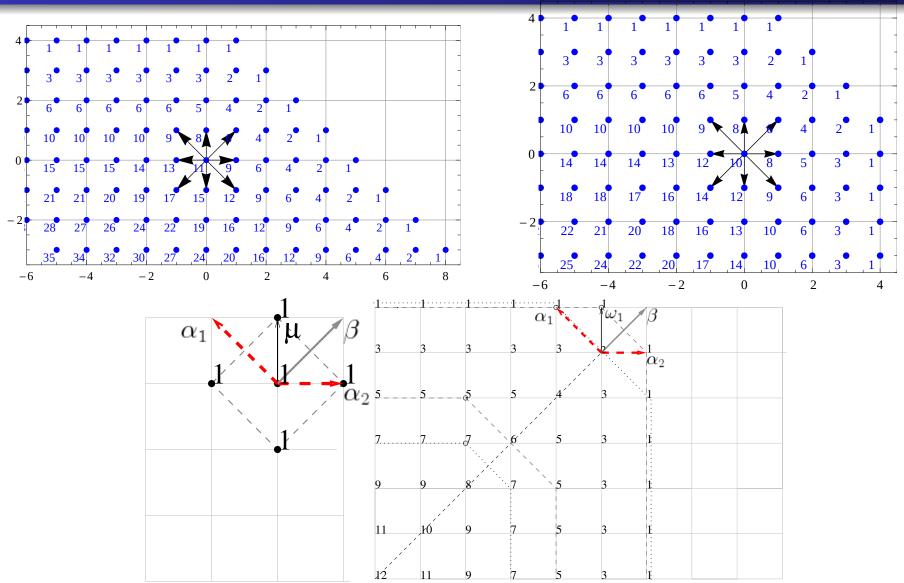


Рис.: $A_1 \oplus u(1) \subset B_2$, обобщенные модули Верма. Пунктир – “$+$”, точки – “$-$”.

Точная последовательность

$$0 \to M_r^I \xrightarrow{\delta_r} M_{r-1}^I \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M_0^I \xrightarrow{\varepsilon} L^\mu \to 0,$$

$$M_k^I = \bigoplus_{u \in U,\ \mathrm{length}(u)=k} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M_0^I = M_I^\mu$$

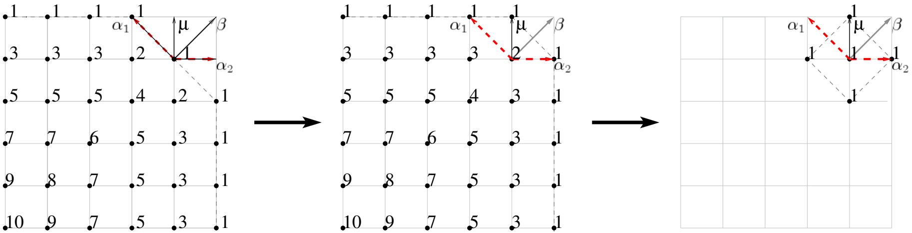


Рис.: Центральная часть точной последовательности
$0 \to Im(\delta_2) \to \left(e^{\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[\mu]+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \mathrm{ch} M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\omega_1]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} = M_I^{\omega_1}\right) \to L^{\omega_1} \to 0.$

Выводы к главе 3

- Показано, что использование веера вложения приводит к построению параболических модулей Верма
- Эти модули образуют точную последовательность обобщенной резольвенты Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту
- То есть установлена связь ветвления с обобщенной БГГ-резольвентой

Пример

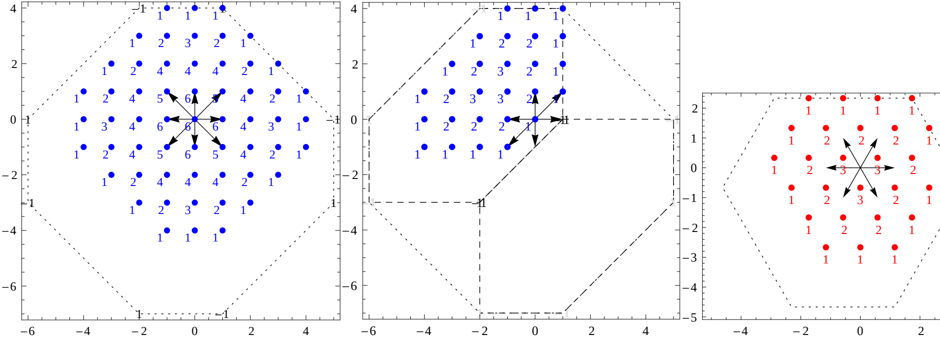


Рис.: Веса $L^{[3,2]}_{B_2}$ с кратностями показаны слева. Короткий пунктир – контур сингулярного элемента. В центре – разложение сингулярного элемента $\Psi_{B_2}(L^{[3,2]}_{B_2})$ в сумму образов сингулярных элементов $\Psi_{A_2}(L^{[3,2]})$ (длинный пунктир) и коэффициенты ветвления. Справа кратности $L^{[3,2]}_{A_2} =$ коэффициентам ветвления $L^{[3,2]}_{B_2\downarrow A_1\oplus u(1)}$.

Сплинты

Определение

ϕ – “вложение” $\Delta_0 \hookrightarrow \Delta$: $\forall \gamma = \alpha + \beta \quad \phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$.

Определение

Корневая система Δ “расщепляется” на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ.

Δ	$\Delta_{\mathfrak{a}}$	$\Delta_{\mathfrak{s}}$
G_2	A_2	A_2
F_4	D_4	D_4
$B_r (r \geq 2)$	D_r	$\oplus^r A_1$
$A_r (r \geq 2)$	$A_{r-1} \oplus u(1)$	$\oplus^r A_1$
B_2	$A_1 \oplus u(1)$	A_2

$$\begin{array}{l} \mu = \sum m_k \omega^k \\ \widetilde{\mu} = \sum m_k \omega_{\mathfrak{s}}^k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b_\nu^\mu = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} \\ \mu - \nu = \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}) \end{array}$$

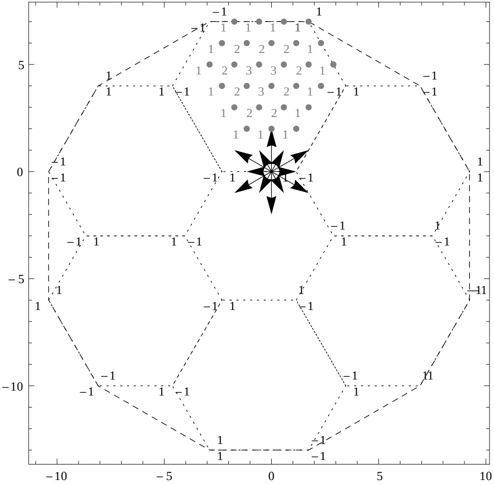


Рис.: Орбита группы Вейля (длинный пунктир) для $\Psi_{G_2}(L^{[3,2]})$ и его разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей A_2 (короткий). Кратности весов $L^{[3,2]}_{A_2}$ совпадают с коэффициентами ветвления $L^{[3,2]}_{G_2\downarrow A_2}$.

Выводы к главе 4

- Проанализирована связь расщепления с веером вложения
- Доказано, что расщепление корневой системы приводит к совпадению коэффициентов ветвления с кратностями весов
- Для аффинных алгебр получены новые соотношения на тета-функции
- Показано, что существование сплинта ведет к матричным соотношениям между функциями ветвления

Эволюция Шрамма-Лёвнера

Определение

Эволюция Шрамма-Лёвнера на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ – это стохастический процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t} \quad \text{или} \quad dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa}\xi_t$$

Конформно-инвариантная мера на траекториях γ_t in $\mathbb{H}$.

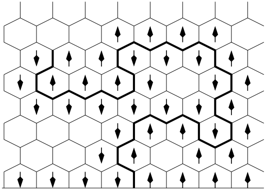


Рис.: Эволюция Шрамма-Лёвнера – непрерывный предел интерфейсов

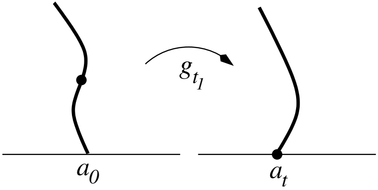


Рис.: Конформное отображение

Стохастические наблюдаемые и корреляторы в CFT

Рассмотрим решеточную наблюдаемую $\mathcal{O}$, тогда

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}\right] = \sum_{\gamma_t} P\left[C_{\gamma_t}\right] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t, следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$ – мартингал.
Непрерывный предел в критической – корреляционная функция

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t} \to \left\langle \phi(z_t)\varphi_1(z_1)\ldots\varphi_n(z_n)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle$$

ϕ – оператор изменения граничных условий.
$dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa}\xi_t \Rightarrow d\varphi_i = \mathcal{G}_i\varphi_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i}\varphi_i$. Обобщение на coset-модели: $\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a:\mathcal{K}(t^a,\tilde{t}^b)=0}\left(d\theta^a t_i^a\right)\right)$
Условие на возможные операторы изменения гран. условий – вектор должен быть сингулярным:

$$|\psi> = \left(-2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b \tilde{J}_{-1}^b\right)\right)\phi(0)|0>$$

```
stringFunctions[Â₂,{1,1,2}]
```

{{0, 0, 4},
$2q + 10q^2 + 40q^3 + 133q^4 + 398q^5 + 1084q^6 + 2760q^7 + 6632q^8 + 15214q^9 + 33508q^{10}$},
{{0, 3, 1},
$2q + 12q^2 + 49q^3 + 166q^4 + 494q^5 + 1340q^6 + 3387q^7 + 8086q^8 + 18415q^9 + 40302q^{10}$},
{{1, 1, 2},
$1 + 6q + 27q^2 + 96q^3 + 298q^4 + 836q^5 + 2173q^6 + 5310q^7 + 12341q^8 + 27486q^9 + 59029q^{10}$},
{{2, 2, 0},
$1 + 8q + 35q^2 + 124q^3 + 379q^4 + 1052q^5 + 2700q^6 + 6536q^7 + 15047q^8 + 33248q^9 + 70877q^{10}$},
{{3, 0, 1},
$2 + 12q + 49q^2 + 166q^3 + 494q^4 + 1340q^5 + 3387q^6 + 8086q^7 + 18415q^8 + 40302q^9 + 85226q^{10}$}

```
vm=makeVermaModule[B₂][{2,1}];
pm=makeParabolicVermaModule[B₂][weight[B₂][2,1],{1}];
im=makeIrreducibleModule[B₂][2,1];
GraphicsRow[textPlot/@{im,vm,pm}]
```

		1	1		
	1	2	2	1	
1	2	3	3	2	1
1	2	3	3	2	1
	1	2	2	1	
		1	1		

1	1	1	1		
3	3	3	2	1	
6	6	5	4	2	1
10	9	8	6	4	2
14	13	11	9	6	4
19	17	15	12	9	6

1	1	1	1		
3	3	3	2	1	
6	6	5	4	2	1
9	8	7	5	3	1
11	10	8	6	3	1
13	11	9	6	3	1

Выводы к главе 5

- Предложено обобщение эволюции Шрамма-Лёвнера, которое соответствует coset-моделям конформной теории поля
- Получены алгебраические соотношения на оператор смены граничных условий
- Классификация операторов изменения граничных условий связана со структурой сингулярных элементов
- Реализован пакет **Affine.m** для вычислений в теории представлений в системе *Mathematica*
- Этот пакет использовался для подготовки большинства примеров в данной работе

Основные результаты работы

- Из разложения сингулярных элементов получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Показана связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Выявлена связь расщепления корневой системы алгебры с разложением сингулярных элементов модулей алгебры в комбинацию образов сингулярных элементов модулей вспомогательной алгебры
- Показано, что наличие расщепления существенно упрощает вычисление коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления
- Предложено обобщение стохастического процесса Шрамма-Лёвнера на случай калибровочных теорий, соответствующих coset-моделям
- Реализован пакет **Affine.m** для теории представлений

Публикации в рецензируемых журналах

- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) no. 7, 075205, `arXiv:1007.0318 [math.RT]`.
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Recursive properties of branching and BGG resolution," *Theoretical and Mathematical Physics* **169** (2011) no. 2, 1551–1560, `arXiv:1102.1702 [math.RT]`.
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, "Fan, splint and branching rules," *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **398** (2012) 162–179, `arXiv:1111.6787 [math.RT]`.
- A. Nazarov, "SLE martingales in coset conformal field theory," *JETP Letters* **96**, 1, (2012) 162–179, `arXiv:1205.6104 [math-ph]`.
- A. Nazarov, "Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras," *Computer Physics Communications* **183**, 11, (2012) 2480–2493 , `arXiv:1107.4681 [math.RT]`.

Другие публикации и доклады

- A. Nazarov, "Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras,", Physics and Progress, SPbSU. 2008.
- A. Nazarov, "Computational tools for representation theory of affine lie algebras," in *second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists*, ACSM, EIMI. 2009.
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent)," in *Models in Quantum Field Theory 2010*
- A. Nazarov, "Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution," *Journal of Physics: Conference Series* **343** (2012) no. 1, 012085, `arXiv:1112.4354 [math-ph]`.
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, "On affine extension of splint root systems," *Physics of Particles and Nuclei*, **43**, 5, (2012) 676–678, `arXiv:1204.1855 [math.RT]`.
- A. Nazarov, "On singular elements in conformal field theory," in *Models in Quantum Field Theory 2012*

Спасибо за внимание!