Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

Антон Назаров
Кандидатская диссертация
научный руководитель В. Д. Ляховский

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
физического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
198904, Санкт-Петерубрг, Россия
e-mail: anton.nazarov@hep.phys.spbu.ru

26 июня 2012

Структура диссертации

1. Конформная теория поля и аффинные алгебры Ли:
   - конформная теория поля в двух измерениях
   - WZNW и coset-модели
   - аффинные алгебры Ли
   - конформная теория поля на области с границей
2. Разложение сингулярных элементов и рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления
3. Коэффициенты ветвления и обобщенная резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
4. Сплинты корневых систем и функции ветвления
5. Приложения
   - Coset-модели и критическое поведение в решеточных моделях (Эволюция Шрамма-Левнера и coset-модели)
   - Компьютерная программа

Действие WZNW-моделей

Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена можно строить начиная со следующего действия:

$$S = S_0 + k\Gamma, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

S_0 — действие нелинейной σ-модели:

$$S_0 = -\frac{k}{8\pi}\int_{S^2} d^2x \; Tr(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g), \quad g(x) : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \sim S^2 \to G \tag{2}$$

Топологический член Весса-Зумино:

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi}\int_B \epsilon_{ijk} Tr\left(\tilde{g}^{-1}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k}\right) d^3y \tag{3}$$

Γ определен на трехмерном многообразии B, ограниченном S^2. $\tilde{g}$ – продолжение g на B.
$\pi_3(G) = \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z},\ e^{-S[g]}$ определен однозначно.

Аффинная алгебра

- Токи $J(z) = -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1}\partial_{\bar{z}} g$
- Калибровочная инвариантность $g(z,\bar{z}) \to \Omega(z) g(z,\bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$, где $\Omega,\ \bar{\Omega} \in G$
- Тождества Уорда $\Omega = 1 + \omega$:

$$\delta_{\omega,\bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle$$

- $J(z) = \sum_a J^a(z) t^a = \sum_a \sum_n J^a_n t^a z^{n-1} \Rightarrow$ соотношения аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\left[J^a_n, J^b_m \right] = \sum_c i f^{abc} J^c_{n+m} + k n \delta^{ab} \delta_{n+m,0}$$

- Конструкция Сугавары $L_n = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_a \sum_m : J^a_m J^a_{n-m} : \Leftrightarrow Vir \subset U(\hat{\mathfrak{g}})$.

Примарные поля

- Полная киральная алгебра $\hat{\mathfrak{g}} \ltimes Vir$:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J^a_m] &= -mJ^a_{n+m} \end{aligned} \tag{4}$$

- Примарные поля определяются операторным разложением $J^a_{\mathfrak{g}}(z)\phi_i(w) \sim \frac{-t^a_i\phi_i(w)}{z-w}$.
- Примарные поля ϕ_λ соответствуют старшим весам представлений:

$$J^a_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = -t^a_\lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle \quad J^a_n \left|\phi_\lambda\right\rangle = 0 \quad \text{при } n > 0$$

$$L_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a J^a_0 J^a_0 \left|\phi_\lambda\right\rangle = \frac{(\lambda, \lambda+2\rho)}{2(k+h^v)} \left|\phi_\lambda\right\rangle = h_\lambda \left|\phi_\lambda\right\rangle$$

- Сингулярные векторы

$$\begin{aligned} &J^a_n \left|v\right\rangle = 0 \quad \text{при } n > 0 \\ &J^+_0 \left|v\right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Coset-модели и калибровочная WZNW-модель

Добавим в действие калибровочные поля $A, \bar{A}$ со значениями в подалгебре $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$:

$$S(g, A) = S_{WZNW}(g) + \frac{k}{4\pi} \int d^2 z \left(Tr(Ag^{-1}\bar{\partial} g) - Tr(\bar{A}(\partial g)g^{-1}) + Tr(Ag^{-1}\bar{A}g) - Tr(A\bar{A}) \right)$$

Теперь токи

$$J_{(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} = -k\partial g g^{-1} - kgAg^{-1}$$

Из тождеств Уорда получаем

$$\left\langle A^b(z)\phi_1 \dots \phi_N \right\rangle = \frac{2}{k + 2h^v_{\mathfrak{a}}} \sum_k \frac{\tilde{t}^b_k}{z - z_k} \left\langle \phi_1 \dots \phi_N \right\rangle$$

Алгебраическая структура связана с $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Генераторы алгебры Вирасоро – разности выражений Сугавары:

$$L_n = L^{\mathfrak{g}}_n - L^{\mathfrak{a}}_n$$

Примарные поля и сингулярные элементы

Для генераторов подалгебры $\hat{\mathfrak{a}}$:

$$\left[L_n, \tilde{J}^b_m\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{J}^b_m \left|v\right\rangle = 0 \Rightarrow \tilde{J}^b_m L_n \left|v\right\rangle = 0$$

Сингулярные векторы по отношению к $\hat{\mathfrak{a}}$ образуют модули алгебры Вирасоро в coset-моделях. Функции ветвления $b^{\mu}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\hat{\mathfrak{a}})\nu}(q)$ являются характерами модулей алгебры Вирасоро.

Примарные поля нумеруются парами весов $(\mu,\nu) \in \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{g}}} \oplus \mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{a}}}$, такими, что $b^{\mu}_{\nu}(q) \neq 0$. Некоторые пары эквивалентны. Эквивалентность дается действием т.н. "простых токов" $(J, \tilde{J})$, таких, что $h_J - h_{\tilde{J}} = 0$.

Конформный вес примарного поля

$$L_0 \left|\phi_{(\mu,\nu)}\right\rangle = \left(\frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a J^a_0 J^a_0 - \frac{1}{2(k+h^v_{\mathfrak{a}})} \sum_b \tilde{J}^b_0 \tilde{J}^b_0 \right) \left|\phi_\lambda\right\rangle =$$
$$\left(\frac{(\mu,\mu+2\rho)}{2(k+h^v)} - \frac{(\nu,\nu+2\rho_{\mathfrak{a}})}{2(k+h^v)}\right) \left|\phi_{(\mu,\nu)}\right\rangle \quad (5)$$

Формула Вейля-Каца для характеров и сингулярные элементы

Модуль Верма

$$M^{\mu} = U(\mathfrak{g}) \bigotimes_{U(\mathfrak{b}_+)} D^{\mu}(\mathfrak{b}_+) \quad \text{где} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-, \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$$

$D^{\mu}(\mathfrak{b}_+) : D(E^{\alpha}) = 0,\ D(H) = \mu(H) \quad \forall \alpha > 0.$

$$\mathrm{ch} M^{\mu} = \frac{e^{\mu}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} \left(1 - e^{-\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)}} = \frac{e^{\mu}}{\sum_{w\in W} \epsilon(w) e^{w\rho-\rho}}, \quad \epsilon\left(w\right) := \det\left(w\right)$$

У M^{μ} есть единственный максимальный подмодуль и нетривиальный фактормодуль L^{μ} – *неприводимый модуль старшего веса*.

$$\mathrm{ch} L^{\mu} = \frac{\sum_{w\in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\sum_{w\in W} \epsilon(w) e^{w\rho-\rho}} = \sum_{w\in W} \epsilon(w)\, \mathrm{ch} M^{w(\mu+\rho)-\rho} (\text{БГГ})$$

Разложение сингулярного элемента

Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ – конечномерные или аффинные. Можно разложить $L^{\mu}_{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{a}$:

$$L^{\mu}_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\nu} b^{\mu}_{\nu} L^{\nu}_{\mathfrak{a}}$$

В терминах характеров

$$\pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{\omega(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^{+}} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}} \right) = \sum_{\nu \in P^{+}_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} \frac{\sum_{\omega \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(\omega) e^{\omega(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta^{+}_{\mathfrak{a}}} (1-e^{-\beta})^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}.$$

Хотим домножить на знаменатель и переписать как рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления.

Рассмотрим корни, ортогональные к $\Delta_{\mathfrak{a}}$.

Пусть $\Delta^{+}_{\mathfrak{b}} = \left\{ \alpha \in \Delta^{+}_{\mathfrak{g}} : \forall \beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}; \alpha \perp \beta \right\}$ – подмножество положительных корней $\mathfrak{g}$, ортогональных корневой системе $\mathfrak{a}$.

Обозначим $W_{\mathfrak{b}}$ подгруппу группы Вейля W, порожденную отражениями ω_{β}, соотв. корням $\beta \in \Delta^{+}_{\mathfrak{b}}$.

Подсистема $\Delta_{\mathfrak{b}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\perp} \subset \mathfrak{g}$.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – "ортогональная пара" подалгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ регулярная.
Подалгебра Картана раскладывается $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{h}_{\perp} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$.
Введем

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho.$$
$$\mathcal{D}_{\mathfrak{b}} := \rho_{\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{b}}\rho.$$

Лемма

Пусть $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$,
L^{μ} *– модуль старшего веса с сингулярным элементом* $\Psi^{(\mu)}$,
$R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ *– знаменатель Вейля для подалгебры* $\mathfrak{a}_{\perp}$. $U \sim W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$.
Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}_{\mathfrak{g}}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right)$ *можно разложить в сумму по* $u \in U$*:*

$$\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}.$$

Рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)}\left(\sum_{u\in W/W_{\mathfrak{b}}}\epsilon(u)\dim\left(L_{\mathfrak{b}}^{\pi_{(\mathfrak{b})}[u(\mu+\rho)-\rho]-\mathcal{D}_{\mathfrak{b}}}\right)\right.$$

$$\left.\delta_{\xi-\gamma_0,\pi_{(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{h}_{\perp})}[u(\mu+\rho)-\rho]+\mathcal{D}_{\mathfrak{b}}}+\sum_{\gamma\in\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}}}s(\gamma+\gamma_0)\,k_{\xi+\gamma}^{(\mu)}\right).$$

Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}}$ весов $\{\xi\}$, появляющихся в разложении

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_{\mathfrak{b}}^+}\left(1-e^{-\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)-\mathrm{mult}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\pi_{\hat{\mathfrak{a}}}\alpha)} = -\sum_{\gamma\in P_{\hat{\mathfrak{a}}}}s(\gamma)e^{-\gamma}$$

Веса надо сдвинуть на γ_0 – минимальный вес в $\{\xi\}$ – и исключить нулевой элемент:

$$\Gamma_{\hat{\mathfrak{a}}\subset\hat{\mathfrak{g}}} = \{\xi-\gamma_0\}\setminus\{0\}.$$

Простой пример: $A_1 \subset B_2$

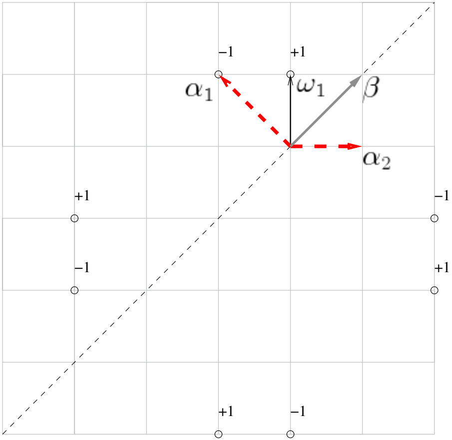


Рис.: Корни алгебр B_2, A_1 и Ψ^{ω_1}

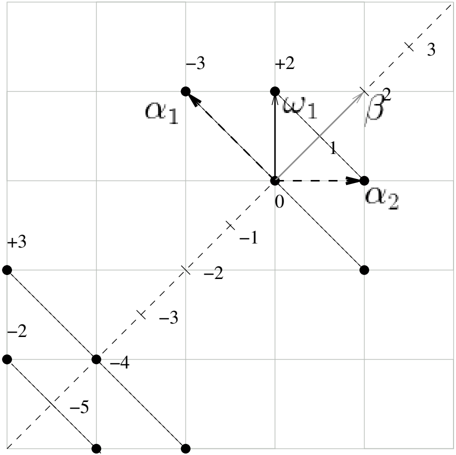


Рис.: Ортогональная подалгебра $\mathfrak{b}$ и размерности $\mathfrak{b}$-модулей

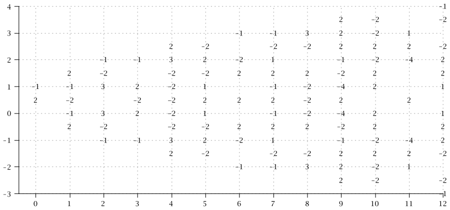


Рис.: $\Gamma_{\hat{A}_1\subset\hat{B}_2}$

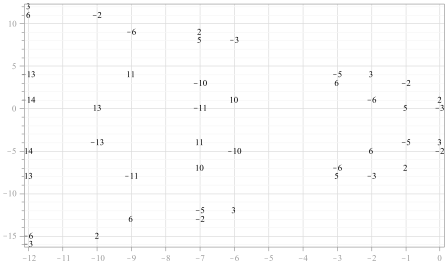
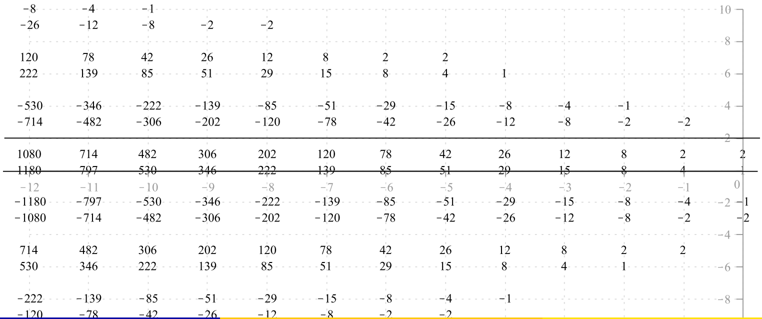


Рис.: $\pi_{\hat{A}_1}\left(\Psi^{\omega_1}_{\hat{B}_2}\right)$



Выводы к главе 2

- Коэффициенты ветвления нужны для вычисления спектра возбуждений в WZNW-модели на торе
- Фунцкии ветвления дают статсумму coset-моделей
- Получена новая рекуррентная формула для коэффициентов ветвления, не требующая лишних вычислений
- Продемонстрирована эффективность алгоритма

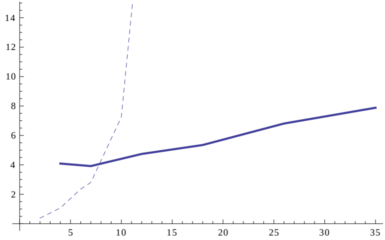


Рис.: Зависимость времени вычисления коэффициентов ветвления для вложения $B_3 \to B_4$ от числа весов в $\bar{C}$. Пунктир – традиционный алгоритм, сплошная линия – наш алгоритм

Связь с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда

Рассмотрим ситуацию без проекции $(\mathrm{rank}\,\mathfrak{a} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g})$.

$$M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \quad \Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp} \sim \Delta^+_I, \text{ где } I \subset S$$

Введем $R_I := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_{\mathfrak{p}_I}} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$. Тогда $\mathrm{ch} M_I^{\mu} = \frac{1}{R_I} \mathrm{ch} L^{\mu}_{\mathfrak{p}_I}$

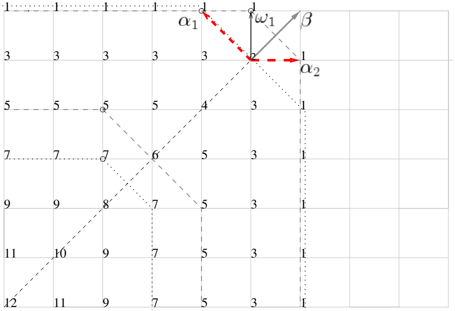


Рис.: Вложение $A_1 \oplus u(1) \subset B_2$ и обобщенные модули Верма. Пунктир – с положительным знаком $\epsilon(u)$, точки – с отрицательным.

Точная последовательность

$$0 \to M^I_r \xrightarrow{\delta_r} M^I_{r-1} \xrightarrow{\delta_{r-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} M^I_0 \xrightarrow{\varepsilon} L^{\mu} \to 0,$$

$$M^I_k = \bigoplus_{u\in U,\ \mathrm{length}(u)=k} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M^I_0 = M^{\mu}_I$$

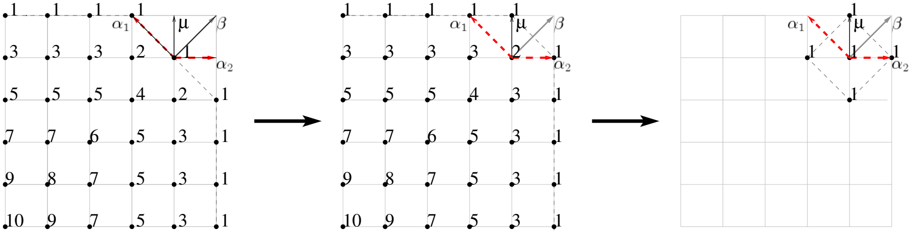


Рис.: Резольвента модуля L^{ω_1}. Центральная часть точной последовательности

$0 \to Im(\delta_2) \to \left(e^{\pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[\mu]+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \mathrm{ch} M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\omega_1]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} = M_I^{\omega_1}\right) \to L^{\omega_1} \to 0.$

Выводы к главе 3

- Показано, что использование веера вложения приводит к построению параболических модулей Верма
- Эти модули входят в точную последовательность обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- То есть установлена связь ветвления с обобщенной БГГ-резольвентой

Сплинты

Определение

ϕ – "вложение" $\Delta_0 \hookrightarrow \Delta$:
$\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in P_0 : \gamma = \alpha + \beta$.

ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для $\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}_\phi\left(\mathcal{E}_0\right)$ есть $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$.

Определение

Корневая система Δ "расщепляется" на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ.

Пусть $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$. $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$ определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a}\hookrightarrow\mathfrak{g}}$.
$\prod_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{s}}^+}\left(1-e^{-\beta}\right) = -\sum_{\gamma\in P} s(\gamma)e^{-\gamma}$
$\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} = e^{-\rho}\sum_{w\in W_{\mathfrak{a}}} w\circ\left(e^{\rho_{\mathfrak{a}}}\phi_2\left(\Psi^{\widetilde{\mu}+\rho_{\mathfrak{s}}}\right)\right) \qquad \mu = \sum m_k\omega^k,\ \widetilde{\mu} = \sum m_k\omega_{\mathfrak{s}}^k$

Пример

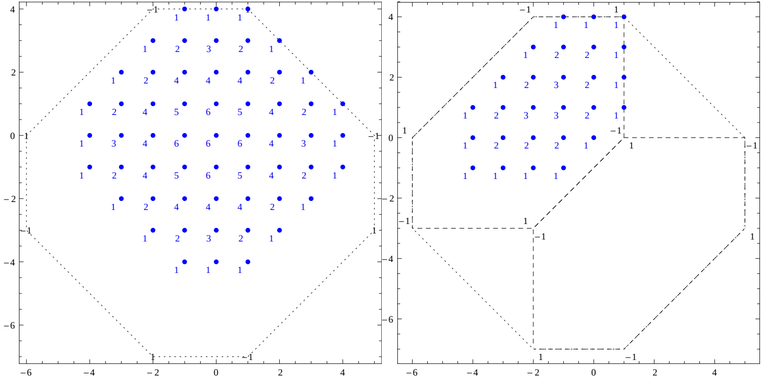


Рис.: Веса $L^{[3,2]}_{B_2}$ с кратностями показаны слева. Короткий пунктир – контур сингулярного элемента. Справа – разложение сингулярного элемента $\Psi_{B_2}(L^{[3,2]}_{B_2})$ в сумму образов сингулярных элементов $\Psi_{A_2}(L^{[3,2]})$ (длинный пунктир). Кратности $L^{[3,2]}_{A_2}$ = коэффициентам ветвления $L^{[3,2]}_{B_2\downarrow A_1\oplus u(1)}$.

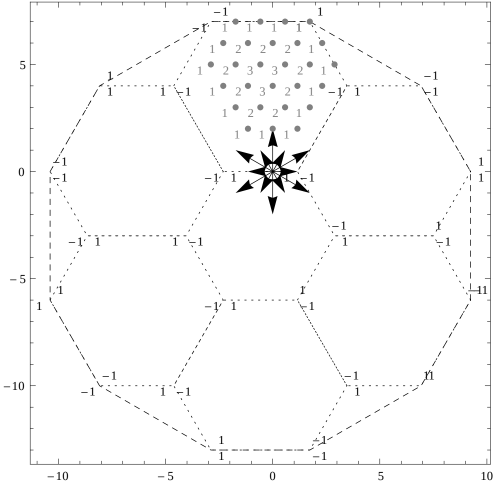


Рис.: Орбита группы Вейля (длинный пунктир) для $\Psi_{G_2}(L^{[3,2]})$ и его разложение в сумму образов сингулярных элементов модулей A_2 (короткий). Кратности весов $L^{[3,2]}_{A_2}$ совпадают с коэффициентами ветвления $L^{[3,2]}_{G_2\downarrow A_2}$.

Аффинное расширение $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$. Так как $\mathrm{rank}\mathfrak{g} \leq \mathrm{rank}\mathfrak{a} + \mathrm{rank}\mathfrak{s}$, для знаменателей Вейля

$$\prod_{\alpha\in\hat{\Delta}_1^+} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)} \prod_{\beta\in\hat{\Delta}_2^+} (1-e^{\phi\circ\beta})^{\mathrm{mult}(\beta)} = \prod_{\gamma\in\hat{\Delta}^+} (1-e^{-\gamma})^{\mathrm{mult}(\gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1-e^{-n\delta})^{\mathrm{rank}\mathfrak{a}+\mathrm{rank}\mathfrak{s}-\mathrm{rank}\mathfrak{g}}$$

$$\Theta^{(\hat{\mathfrak{g}})}_{\widehat{\lambda}=(\lambda,k,0)}(\tau,z) = \sum_{\xi\in Q_{\mathfrak{g}}+\frac{\lambda}{k}} e^{2\pi i k\left(\frac{1}{2}(\xi,\xi)\tau+(\xi,z)\right)}$$

Соотношение, связывающее тета-функции алгебр $\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{a}}$:

$$\left(\sum_{v\in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(v)\Theta^{(\hat{\mathfrak{a}})}_{v\rho_{\mathfrak{a}}}(\tau,z)\right)\cdot\left(\sum_{u\in W_{\mathfrak{s}}} \epsilon(u)\Theta^{(\hat{\mathfrak{s}})}_{\phi\circ(u\rho_{\mathfrak{s}})}(\tau,z)\right) = \left(\sum_{w\in W} \epsilon(w)\Theta^{(\hat{\mathfrak{g}})}_{w\rho_{\mathfrak{g}}}(\tau,z)\right)$$

Ветвление на конечномерные подалгебры

Рассмотрим ветвление модуля $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{ch}L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \mathrm{ch}L_{\mathfrak{g}}^{\nu} \quad m_{\hat{\nu}=(\nu,k,n)}^{(\hat{\mu})} = \sum_{\xi \in P} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(n) m_{\nu}^{(\xi)}$$

Введем $b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) q^n$, они связаны с q-размерностью $\dim_q L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(n) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu} = \sum_{\nu \in P} b_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) \dim L_{\mathfrak{g}}^{\nu}$.
$\sigma_{\nu}^{(\hat{\mu})}(q) = \sum_{\xi \in P} m_{\nu}^{(\xi)} b_{\xi}^{(\hat{\mu})}(q)$.
Введем порядок на множестве весов ξ следующим образом: припишем весу ξ значение (ρ, ξ) и упорядочим веса по этим значениям. Тогда

$$\sigma(q) = M b(q) \quad b(q) = M^{-1} \sigma(q)$$

$\sigma(q)$ и $b(q)$ – бесконечные векторы струнных функций и функций ветвления. Матрица M содержит кратности весов в $\mathfrak{g}$-модулях. Обратная матрица M^{-1} содержит рекуррентные соотношения на кратности весов.

Матричные соотношения для сплинтов

Рассмотрим ветвление модулей $\hat{\mathfrak{g}}$ на модули $\mathfrak{a}$ в предположении существовании сплинта $\Delta^+_{\mathfrak{g}} = \Delta^+_{\mathfrak{a}} \cup \phi(\Delta^+_{\mathfrak{s}})$. Разложим $\mathfrak{g}$-модули на $\mathfrak{a}$-модули используя свойство сплинта:

$$\mathrm{ch} L^{\hat{\mu}}_{\hat{\mathfrak{g}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})\nu}(n) \mathrm{ch} L^{\nu}_{\mathfrak{a}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})\nu}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} b^{(\nu)}_{(\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a})\xi} \mathrm{ch} L^{\xi}_{\mathfrak{a}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sum_{\nu \in P} b^{(\hat{\mu})}_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})\nu}(n) \sum_{\xi \in P_{\mathfrak{a}}} M^{\widetilde{\nu}}_{\widetilde{\nu}-\phi^{-1}(\nu-\xi)} \mathrm{ch} L^{\xi}_{\mathfrak{a}} \quad (6)$$

Матричное соотношение выполняется для функций ветвления $b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})}(q) = M_{\mathfrak{s}}\ b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{g})}(q)$ и мы можем написать $\sigma(q) = M_{\mathfrak{a}}\ b_{(\hat{\mathfrak{g}}\downarrow\mathfrak{a})}(q)$. Зная коэффициенты ветвления для вложения $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ сразу получаем (градуированные) функции ветвления для вложения $\mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Выводы к главе 4

- Проанализирована связь расщепления с веером вложения
- Доказано, что расщепление корневой системы приводит к совпадению коэффициентов ветвления с кратностями весов
- Для аффинных алгебр получены новые соотношения на тета-функции
- Показано, что существование сплинта ведет к матричным соотношениям между функциями ветвления

Эволюция Шрамма-Лёвнера

Определение

Эволюция Шрамма-Лёвнера на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ – это стохастический процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t} \quad \text{or} \quad dw_t = \frac{2dt}{w_t} - \sqrt{\kappa}\xi_t$$

Конформно-инвариантная мера на траекториях γ_t in $\mathbb{H}$.

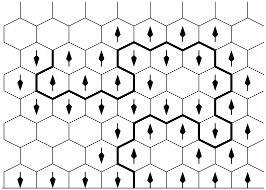


Рис.: Эволюция Шрамма-Лёвнера – непрерывный предел интерфейсов

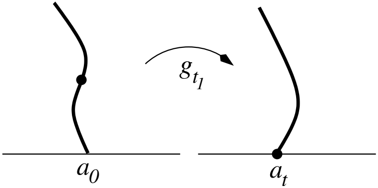


Рис.: Конформное отображение

Стохастические наблюдаемыми и корреляторы в CFT

Рассмотрим решеточную наблюдаемую $\mathcal{O}$, тогда

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}\right] = \sum_{\gamma_t} P\left[C_{\gamma_t}\right] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t, следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$ – мартингал. Непрерывный предел в критической точке дается корреляционной функцией в конформной теории поля

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \to \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\left\langle \mathcal{O}(\{z_i\})\phi(z_t)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}_t}}{\left\langle \phi(z_t)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}_t}} = \frac{\left\langle {}^{g_t}\mathcal{O}\phi(\xi_t)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}}}{\left\langle \phi(z_t)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}}}$$

Здесь ϕ – оператор изменения граничных условий.
После конформного отображения $w(z) : \mathbb{H} \setminus \gamma_t \to \mathbb{H}$

$$\mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \prod \left(\frac{\partial w(z_i)}{\partial z_i}\right)^{h_{\lambda_i}} \prod \left(\frac{\partial \bar{w}(\bar{z}_i)}{\partial \bar{z}_i}\right)^{h_{\lambda_i^*}} \mathcal{F}(\{w_i, \bar{w}_i\})_{\mathbb{H}}$$

При переходе от t к $t + dt$ первый сомножитель дает $-\frac{2h_{\lambda_i}}{w_i^2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right)^{h_{\lambda_i}}$.

Мартингалы стохастического процесса

Поля преобразуются так:

- Минимальные модели – только конформные преобразования $d\phi_{\lambda_i}(w_i) = \mathcal{G}_i\phi_{\lambda_i}(w_i) = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i}\phi_{\lambda_i}(w_i)$
- WZNW-модели – калибровочные преобразования

$$\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}(d\theta^a t_i^a) + \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\left(d\tilde{\theta}^b\tilde{t}_i^b\right)\right)$$

- coset-модели $\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a:\mathcal{K}(t^a,\tilde{t}^b)=0}(d\theta^a t_i^a)\right)$.
  Разрешили случайные блуждания в направлении $\perp\mathfrak{a}$.

Верно равенство $\mathbb{E}\left[\prec\mathcal{O}\succ_{\gamma_t}\right] = \mathbb{E}\left[\prec\mathcal{O}\succ_{\gamma_{t+dt}}\right], \quad \mathbb{E}\left[d\prec\mathcal{O}\succ_{\gamma_t}\right] = 0$

Используя формулу Ито, получаем $0 =$

$$\left(\prod_{i=1}^{2N}\left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i}\right)^{-h_i}\right)\mathbb{E}\left[d\mathcal{F}_{\mathbb{H}_t}\right] = \left(-\sum_{i=1}^{2N}\frac{2h_i dt}{w_i^2} + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{2N}\mathcal{G}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathcal{G}_i\mathcal{G}_j\right]\right)\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$$

Парафермионы и минимальные модели в coset-конструкции

$$|\psi >= \left(-2L_{-2}+\tfrac{1}{2}\kappa L_{-1}^2+\tfrac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a-\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}}\tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right)\varphi(0)|0>$$

$\mathbb{Z}(N)$-парафермионы эквивалентны $SU(2)_N/U(1)$ coset-теории.
Парафермионное поле раскладывается в произведение

$$\Phi^j=\phi_j(z)\exp\left(-i\frac{j}{\sqrt{N}}\phi(z)\right)$$

где $\phi_j(z)$ – поле $SU(2)$-WZNW модели со спином j, $\phi(z)$ – $U(1)$ бозонное поле.
Парафермионный ток $\Psi^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{N}}J^{\pm}\exp\left(\mp i\frac{1}{\sqrt{N}}\phi(z)\right)$
Условие на мартингалы принимает вид

$$\left(-2L_{-2}+\frac{\kappa}{2}L_{-1}^2+\frac{\tau}{2}\left[\Psi_{-1}^{+}\Psi_{-1}^{-}+\Psi_{-1}^{-}\Psi_{-1}^{+}\right]\right)|\Phi\rangle=0$$

что совпадает с результатом Santachiara [arXiv:0705.2749].

stringFunctions[$\hat{A}_2$,{1,1,2}]

{{0, 0, 4},
$2q + 10q^2 + 40q^3 + 133q^4 + 398q^5 + 1084q^6 + 2760q^7 + 6632q^8 + 15214q^9 + 33508q^{10}$},
{{0, 3, 1},
$2q + 12q^2 + 49q^3 + 166q^4 + 494q^5 + 1340q^6 + 3387q^7 + 8086q^8 + 18415q^9 + 40302q^{10}$},
{{1, 1, 2},
$1 + 6q + 27q^2 + 96q^3 + 298q^4 + 836q^5 + 2173q^6 + 5310q^7 + 12341q^8 + 27486q^9 + 59029q^{10}$},
{{2, 2, 0},
$1 + 8q + 35q^2 + 124q^3 + 379q^4 + 1052q^5 + 2700q^6 + 6536q^7 + 15047q^8 + 33248q^9 + 70877q^{10}$},
{{3, 0, 1},
$2 + 12q + 49q^2 + 166q^3 + 494q^4 + 1340q^5 + 3387q^6 + 8086q^7 + 18415q^8 + 40302q^9 + 85226q^{10}$}

vm=makeVermaModule[B_2][{2,1}];
pm=makeParabolicVermaModule[B_2][weight[B_2][2,1],{1}];
im=makeIrreducibleModule[B_2][2,1];
GraphicsRow[textPlot/@{im,vm,pm}]

		1	1		
	1	2	2	1	
1	2	3	3	2	1
1	2	3	3	2	1
	1	2	2	1	
		1	1		

1	1	1	1		
3	3	3	2	1	
6	6	5	4	2	1
10	9	8	6	4	2
14	13	11	9	6	4
19	17	15	12	9	6

1	1	1	1		
3	3	3	2	1	
6	6	5	4	2	1
9	8	7	5	3	1
11	10	8	6	3	1
13	11	9	6	3	1

Выводы к главе 5

- Предложено обобщение эволюции Шрамма-Лёвнера, которое соответствует coset-моделям конформной теории поля
- Это обобщение интересно с точки зрения интегрируемых деформаций вне критической точки
- Получены условия на оператор смены граничных условий, которые совпадают с результатами Raul Santachiara
- Классификация операторов изменения граничных условий связана со структурой сингулярных элементов
- Реализован пакет **Affine.m** для вычислений в теории представлений в системе *Mathematica*
- Этот пакет использовался для подготовки большинства примеров в данной работе

Основные результаты работы

- Из разложения сингулярных элементов получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр
- Показана связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда
- Выявлена связь расщепления корневой системы алгебры с разложением сингулярных элементов модулей алгебры в комбинацию сингулярных элементов модулей подалгебр
- Показано, что наличие расщепления существенно упрощает вычисление коэффициентов ветвления и ведет к новым соотношениям на функции ветвления
- Предложено обобщение стохастического процесса Шрамма-Лёвнера на случай калибровочных теорий, соответствующих coset-моделям
- Реализован пакет **Affine.m** для теории представлений

Публикации в журналах

- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) no. 7, 075205, `arXiv:1007.0318 [math.RT]`.
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Recursive properties of branching and BGG resolution," *Theoretical and Mathematical Physics* **169** (2011) no. 2, 1551–1560, `arXiv:1102.1702 [math.RT]`.
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, "Fan, splint and branching rules," *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **398** (2012) 162–179, `arXiv:1111.6787 [math.RT]`.
- A. Nazarov, "Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution," *Journal of Physics: Conference Series* **343** (2012) no. 1, 012085, `arXiv:1112.4354 [math-ph]`.
- A. Nazarov, "SLE martingales in coset conformal field theory," *JETP Letters* **96**, 1, (2012) 162–179, `arXiv:1205.6104 [math-ph]`.

Доклады и препринты

- A. Nazarov, "Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras," in *Physics and Progress*, Physics and Progress, SPbSU. 2008.
- A. Nazarov, "Computational tools for representation theory of affine lie algebras," in *second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists*, ACSM, EIMI. 2009.
- V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent)," in *Models in Quantum Field Theory 2010*
- V. Laykhovsky and A. Nazarov, "On affine extension of splint root systems," *To appear in PEPAN Letters* , `arXiv:1204.1855 [math.RT]`.
- A. Nazarov, "Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras," *To appear in Computer Physics Communications* (2012) , `arXiv:1107.4681 [math.RT]`.

Спасибо за внимание!