Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Назаров Антон Андреевич

Правила ветвления аффинных алгебр Ли и приложения в моделях конформной теории поля

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2012

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, профессор,* *Ляховский Владимир Дмитриевич*
Официальные оппоненты:	*Кулиш Петр Петрович* *доктор физико-математических наук, профессор,* *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, главный научный сотрудник, заведующий лаборатории математических проблем физики*; *Мудров Андрей Игоревич* *кандидат физико-математических наук, Университет Лестера (Великобритания), преподаватель*
Ведущая организация:	*Объединенный институт ядерных исследований*

Защита состоится «____» ____________ 2012 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 212.232.24* при *Санкт-Петербургском государственном университете* по адресу: *199004, Санкт-Петербург, Средний пр. В.О., д. 41/43, ауд. 304*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Санкт-Петербургского государственного университета.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета, *Аксенова Е.В.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Последние тридцать лет конформная теория поля в двух измерениях привлекает большое внимание исследователей. Конформная теория поля используется для описания критического поведения в двумерных статистических системах и обладает большой практической ценностью – с ее использованием было получено значительное количество результатов и численных предсказаний. Методы двумерной конформной теории поля с успехом применяются также при изучении эффекта Кондо и дробного квантового эффекта Холла. Благодаря наличию бесконечномерной алгебры симметрии двумерная конформная теория поля может быть сформулирована аксиоматически.

Поиски строгого математического доказательства для предсказаний двумерной конформной теории поля в последние годы привели к большому количеству новых идей и результатов в дискретном комплексном анализе [1].

Теория представлений бесконечномерных алгебр Ли является важным инструментом изучения моделей конформной теории поля. Помимо алгебры Вирасоро, наличие которой обязательно в двумерной конформной теории поля, большую роль играют аффинные алгебры Ли. Изучение аффинных алгебр Ли было начато Виктором Кацем и Робертом Муди в 1960-х годах с попытки обобщения классификации простых конечномерных алгебр Ли на бесконечномерный случай [2, 3]. Интерес к этим алгебрам был связан с модулярными свойствами характеров их модулей. После возникновения двумерной конформной теории поля были предложены модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена (ВЗНВ), а затем и coset-модели, в которых теория представлений аффинных алгебр Ли играет определяющую роль.

ВЗНВ-моделям, coset-моделям и теории представлений аффинных алгебр Ли посвящены тысячи работ. Однако многие проблемы по-прежнему не имеют простых решений. Так, задача вычисления коэффициентов ветвления для представлений алгебр Ли стоит уже многие десятилетия. Она актуальна для физических приложений в coset-моделях конформной теории поля. Для вычисления коэффициентов ветвления, в отличие от проблемы нахождения кратностей весов, не существовало особенно эффективных алгоритмов.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертации впервые решены следующие задачи:

- Получено эффективное рекуррентное соотношение для коэффициентов ветвления модулей аффинных и конечномерных алгебр Ли на модули не максимальных подалгебр. Алгоритм вычисления коэффициентов ветвления реализован в пакете **Affine.m** для популярной системы компьютерной алгебры *Mathematica*.
- Установлена прямая связь инъективного сплинта и ветвлений. Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля иньективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.
- Исследована связь процедуры редукции с обобщенной резольвентой Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда (БГГ). Показано, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность.
- Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля.

Отметим, что пакет **Affine.m** может быть использован для решения задач теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли, возникающих в различных областях физики, начиная от изучения атомных и молекулярных спектров и заканчивая конформной теорией поля и интегрируемыми системами.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

- Получены новые рекуррентные соотношения на коэффициенты ветвления представлений аффинных алгебр Ли на представления произвольных редуктивных подалгебр, с использованием разложения сингулярных элементов
- Установлено, что разложение сингулярного элемента определяет как коэффициенты ветвления, так и обобщенную БГГ-резольвенту, так как действие веера вложения на компоненты разложения порождает обобщенные модули Верма, которые образуют точную последовательность
- Доказано, что при определенных условиях кратности весов вспомогательного модуля иньективного сплинта совпадают с коэффициентами ветвления в редукции на вложенную подалгебру. Наличие расщепления приводит к существенному упрощению при вычислении коэффициентов ветвления.
- Показано, что условие для мартингала, определяющее классификацию операторов изменения граничных условий в наблюдаемых стохастического процесса Шрамма-Лёвнера, задает ограничения на структуру сингулярных элементов представлений аффинной алгебры Ли, порожденных граничными состояниями. Изучение структуры сингулярных элементов существенно упрощает поиск операторов смены граничных условий. Построена модель обобщенного стохастического процесса Шрамма-Лёвнера для систем с калибровочной инвариантностью, соответствующих coset-моделям конформной теории поля и показано, что такое обобщение совместно с coset-реализацией минимальных моделей.

- Разработан пакет программ **Affine.m**, реализующий различные алгоритмы для вычислений в теории представлений конечномерных и аффинных алгебр Ли

Апробация работы Материалы диссертации докладывались на трех международных конференциях, а также на семинарах кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, на семинарах в лаборатории имени П.Л. Чебышева математико-механического факультета СПбГУ, на семинаре лаборатории теоретической физики ОИЯИ (Дубна).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], 5 статей в сборниках тезисов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10].

Личный вклад автора. Все основные результаты и выносимые на защиту положения получены автором самостоятельно. Личный вклад автора в работы с соавтором составляет 50 процетнов, в работы без соавторов – 100 процентов.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения и шести глав, содержит 160 страниц и 30 рисунков. Список литературы включает 151 наименование.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 носит обзорный характер. В ней приводится аксиоматическая формулировка конформной теории поля, описываются ВЗНВ-модели и coset-модели. Затем демонстрируется роль аффинных алгебр в описании этих моделей и вводятся основные понятия теории представлений, использующиеся в диссертации. Мы указываем на то, что основные свойства интегрируемых модулей старшего веса определяются структурой сингулярного элемента, что выражается в формуле Вейля-Каца для формальных характеров. Мы обсуждаем конформную теорию поля на области с границей, так как она оказывается связана со стохастическим описанием решеточных моделей.

В главе 2 выводится основное рекуррентное соотношение на коэффициенты ветвления. Сначала доказывается лемма о разложении сингулярного элемента. Структура сингулярного элемента определяет свойства модуля алгебры Ли, поэтому разложение определяет правила ветвления и позволяет сформулировать рекуррентную процедуру редукции. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [A1].

Формула Вейля-Каца для формальных характеров интегрируемых модулей старшего веса конечномерных и аффинных алгебр Ли имеет вид $\mathrm{ch} V^{(\mu)} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}$, где $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент модуля, а $R = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ – знаменатель Вейля. Здесь Δ^+ – множество положительных корней алгебры, а ρ – вектор Вейля. Сингулярный элемент определяется набором сингулярных весов модуля и имеет разный вид для разных типов модулей старшего веса. Например, $\Psi^{(\mu)} = \sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\mu+\rho)-\rho}$ для неприводимых модулей (W – группа Вейля). Знаменатель Вейля R является универсальным объектом, характеризующим корневую систему алгебры Ли, а свойства модуля определяются сингулярным элементом.

Процедура редукции состоит в разложении модуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в сумму модулей некоторой подалгебры $\mathfrak{a}$: $L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a}} = \bigoplus\limits_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} L^{\nu}_{\mathfrak{a}}$.

Используя оператор проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{a}}$), перепишем это разложение для формальных характеров:

$$\pi_{\mathfrak{a}} \circ ch\left(L^{\mu}\right) = \sum_{\nu\in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_{\nu} ch\left(L^{\nu}_{\mathfrak{a}}\right). \tag{1}$$

Нас интересуют коэффициенты ветвления $b^{(\mu)}_{\nu}$.

Для любой алгебры $\mathfrak{g}$ и подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ можно построить подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ такую, что $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}} = \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \beta(h) = 0\}$.

Обозначим через $W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ подгруппу группы Вейля W, порожденную отражениями w_{β}, соответствующими корням $\beta \in \Delta^{+}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ определяет подалгебру $\mathfrak{a}_{\perp}$ с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$.

Пусть $\mathfrak{h}^{*}_{\perp} := \{\eta \in \mathfrak{h}^{*}_{\perp\mathfrak{a}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_{\perp}}; \eta(h) = 0\}$, тогда имеет место разложение подалгебры Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_{\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$. Для подалгебр из ортогональной пары $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ рассмотрим соответствующие векторы Вейля $\rho_{\mathfrak{a}}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}$, и образуем так называемые "дефекты" вложения $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}} := \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}} - \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}\rho$.

Рассмотрим сингулярные веса $\{(w(\mu+\rho)-\rho) | w \in W\}$ модуля старшего веса $L^{\mu}_{\mathfrak{g}}$ и их проекции на $h^{*}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}$ (дополнительно сдвинутые на дефект $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$):

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(w) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}} \circ [w(\mu+\rho)-\rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\left\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(w) | w \in W\right\}$ выберем находящиеся в главной камере Вейля $\overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}}$. Множество $U := \left\{u \in W | \quad \mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u) \in \overline{C_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}}\right\}$ состоит из элементов группы Вейля, переводящих старший вес в главную камеру Вейля подалгебры $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}$ (с учетом сдвига на ρ и на дефект). Элементы U являются представителями классов смежности $W/W_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Каждому элементу U поставим в соответствие вес $\mu_{\mathfrak{a}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}} \circ [u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Аналогичным образом определим $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u) := \pi_{\tilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ и $\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u) := \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}$. Мы доказываем следующую лемму о разложении сингулярного элемента:

Лемма 1. *Пусть $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\perp})$ – ортогональная пара редуктивных подалгебр $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}} = \mathfrak{a}_{\perp} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\perp}$, L^{μ} – модуль старшего веса с сингулярным элементом $\Psi^{(\mu)}$, $R_{\mathfrak{a}_{\perp}}$ – знаменатель Вейля для подалгебры $\mathfrak{a}_{\perp}$. Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}_{\mathfrak{g}}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right)$ можно разложить в сумму по $u \in U$ сингулярных весов $e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)\dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right)$:*

$$\Psi^{(\mu)}_{(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})} = \quad \pi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Psi^{\mu}}{R_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) = \sum_{u\in U} \epsilon(u)\dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) e^{\mu_{\mathfrak{a}}(u)}. \tag{2}$$

Введем “веер вложения”, который необходим для формулировки рекуррентных соотношений:

Определение 1. Рассмотрим произведение

$$\prod_{\alpha\in\Delta^{+}\setminus\Delta^{+}_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \left(1-e^{-\pi_{\mathfrak{a}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)-\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}\alpha)} = -\sum_{\gamma\in P_{\mathfrak{a}}} s(\gamma)e^{-\gamma} \qquad (3)$$

и носитель $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}} \subset P_{\mathfrak{a}}$ функции $s(\gamma) = \det(\gamma)$: $\quad \Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}} = \{\gamma\in P_{\mathfrak{a}} | s(\gamma)\neq 0\}$ Упорядочение корней в $\Delta_{\mathfrak{a}}$ индуцирует естественное упорядочение весов в $P_{\mathfrak{a}}$. Обозначим через γ_0 наименьший вектор $\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}$.

Множество $\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}} = \{\xi-\gamma_0|\xi\in\Phi_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}}\}\setminus\{0\}$ называется *веером вложения.*

Веер вложения универсален и зависит только от вложения $\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}$ и не зависит от модуля $L^{(\mu)}$.

Введем сингулярные коэффициенты ветвления следующим образом:

$$\begin{aligned}
&k^{(\mu)}_{\xi} = b^{(\mu)}_{\xi} \quad \text{если} \quad \xi\in\bar{C}_{\mathfrak{a}}\\
&k^{(\mu)}_{\xi} = \epsilon(w) b^{(\mu)}_{w(\xi+\rho_{af})-\rho_{\mathfrak{a}}} \quad \text{где } w\in W_{\mathfrak{a}} : w(\xi+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}\in\bar{C}_{\mathfrak{a}}.
\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать основную теорему, которая позволяет рекуррентно вычислять коэффициенты ветвления.

Теорема 1. *Для сингулярных коэффициентов ветвления $k^{(\mu)}_{\nu}$ выполняется соотношение*

$$\begin{aligned}
k^{(\mu)}_{\xi} = -\tfrac{1}{s(\gamma_0)} \Big(&\textstyle\sum_{u\in U} \epsilon(u)\ \dim\left(L^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}(u)}_{\widetilde{\mathfrak{a}_{\perp}}}\right) \delta_{\xi-\gamma_0,\pi_{\mathfrak{a}}(u(\mu+\rho)-\rho)} + \\
&+ \textstyle\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}} s(\gamma+\gamma_0)\, k^{(\mu)}_{\xi+\gamma}\Big).
\end{aligned} \qquad (4)$$

Далее мы анализируем пары $(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})$ для простых алгебр Ли. Оказывается, что для “ортогональной пары” $(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_{\perp})$, вообще говоря, $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_{\perp}\not\subset\mathfrak{g}$. В частности, для серии простых конечномерных алгебр B_n существуют “ортогональные пары” подалгебр (B_k, B_{n-k}).

На основании рекуррентного соотношения (4) сформулирован алгоритм вычисления коэффициентов ветвления. Остальные разделы главы 2 содержат примеры вычислений с использованием предложенного алгоритма, а также описание роли функций ветвления в формулировке конформной теории поля на торе и в coset-моделях конформной теории поля.

В главе 3 мы используем разложение сингулярного элемента, чтобы показать связь ветвления с (обобщенной) БГГ-резольвентой. Данные результаты опубликованы в работах [A2, A7].

Для полупростой конечномерной алгебры $\mathfrak{g}$ и полупростой конечномерной подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебра $\mathfrak{a}_\perp$ является регулярной. Отношение знаменателей Вейля порождает параболические модули Верма. Сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u)e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \tag{5}$$

Мы доказываем следующее утверждение, демонстрирующее, что разложение сингулярного элемента связано с разложением характера неприводимого модуля в комбинацию характеров обобщенных модулей Верма

Утверждение 1. *Для ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$ в $\mathfrak{g}$ (являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$) характер интегрируемого модуля старшего веса L^μ может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)$:*

$$\mathrm{ch}\left(L^\mu\right) = \sum_{u \in U} \epsilon(u)e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}\mathrm{ch}M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \tag{6}$$

где $U := \left\{u \in W | \quad \mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\right\}$ и I – такое подмножество в S, что Δ_I^+ эквивалентно $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$.

Связь редукции и (обобщенной) резольвенты БГГ дается следующим утверждением:

Утверждение 2. *Пусть L^μ – $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, и пусть регулярная подалгебра $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ является ортогональным партнером редук-*

тивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (5) определяет как обобщенную резольвенту L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}_{\perp}$, так и правила ветвления L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}_{\perp}$, так и правила ветвления L^{μ} по отношению к $\mathfrak{a}$.

Глава 4 посвящена сплинтам – расщеплением корневой системы алгебры Ли в объединение образов корневых систем двух алгебр, не обязательно являющихся подалгебрами данной алгебры. Если одна из алгебр является подалгеброй, то сплинт приводит к резкому упрощению в вычислении коэффициентов ветвления – они совпадают с кратностями весов в модуле другой алгебры. Основная часть главы посвящена доказательству этого факта. Кроме того, сплинт корневой системы простой конечномерной алгебры Ли приводит к возникновению новых соотношений на струнные функции и функции ветвления соответствующего аффинного расширения. Эти соотношения обсуждаются в разделе 4.4. Данные результаты опубликованы в статьях [A3, A10].

Определение 2. Пусть Δ_0 и Δ – корневые системы с соответствующими весовыми решетками P_0 и P. Отображение $\phi : \{\Delta_0 \hookrightarrow \Delta, P_0 \hookrightarrow P\}$ называется "вложением", если ϕ вкладывает Δ_0 в Δ и действует гомоморфно по отношению к группам сложения векторов в P_0 и P: $\phi(\gamma) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$ для любой тройки $\alpha, \beta, \gamma \in P_0$, такой, что $\gamma = \alpha + \beta$.

Вложение ϕ индуцирует вложение формальных алгебр: $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ и для образа $\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}_{\phi}(\mathcal{E}_0)$ можно рассмотреть обратное отображение $\phi^{-1} : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_0$. Нужно различать два класса вложений: "метрические", если скалярное произведение (заданное формой Киллинга) в корневом пространстве P_0 инвариантно по отношению к ϕ и "неметрические", если оно не ϕ-инвариантно.

Будем говорить, что корневая система Δ "расщепляется" на (Δ_1, Δ_2), если существует два вложения $\phi_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ и $\phi_2 : \Delta_2 \hookrightarrow \Delta$, где (a) Δ – несвязное объединение образов ϕ_1 и ϕ_2, и (b) ни ранг Δ_1, ни ранг Δ_2 не превосходит ранга Δ. Можно сказать, что (Δ_1, Δ_2) – "сплинт" (расщепление) Δ и мы можем обозначить его через $\Delta \approx (\Delta_1, \Delta_2)$. Каждая из компонент Δ_1

и Δ_2 называется “стеблем” сплинта (Δ_1, Δ_2).

Покажем связь веера вложения и “инъективного” сплинта, когда один из стеблей $\Delta_1 = \Delta_{\mathfrak{a}}$ является подсистемой корневой системы, соответствующей регулярной редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. В этом случае знаменатель Вейля, соотвествующий второму стеблю $\Delta_{\mathfrak{s}} := \Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}$, может быть переписан в виде произведения (аналогично формуле (3)) и определяет веер вложения $\Gamma_{\mathfrak{a}\hookrightarrow\mathfrak{g}}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{s}0}$ кообраз второго вложения $\phi : \Delta_{\mathfrak{s}0} \to \Delta_{\mathfrak{g}}$. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Каждый инъективный сплинт $\Delta \approx (\Delta_{\mathfrak{a}}, \Delta_{\mathfrak{s}})$ определяет веер вложения с носителем $\{\xi\}_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}$, задающимся произведением* $\prod_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{s}}^+}\left(1-e^{-\beta}\right) = -\sum_{\gamma\in P} s(\gamma)e^{-\gamma}$

В случае инъективного сплинта можно сказать, что подалгебра $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ расщепляет Δ. Сплинты были классифицированы в работе [4] (см. Приложение в конце главы) и первые три класса сплинтов в этой классификации инъективны. Если выполнено техническое требование на структуру сингулярного элемента, то верно следующее свойство:

Свойство 1. *Любой вес с ненулевой кратностью, входящий в правую часть равенства:*

$$\frac{e^{\rho_{\mathfrak{g}}}}{\prod_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{s}}^+}(1-e^{-\beta})}\left(\Psi^{\widetilde{\mu}+\rho_{\mathfrak{s}}}\right) = \sum_{\widetilde{\nu}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}} M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}} e^{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))} = \sum_{\nu\in P_{\mathfrak{a}}^{++}} b_{\nu}^{(\mu)} e^{\nu},$$

равен одному из старших весов в разложении. Кратность $M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}$ веса $\widetilde{\nu} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\widetilde{\mu}}$ определяет коэффициент ветвления $b_{\nu}^{(\mu)}$ для старшего веса $\nu = (\mu - \phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))$:

$$b_{(\mu-\phi(\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\widetilde{\nu}}^{\widetilde{\mu}}.$$

Заключительная **глава 5** посвящена практическим приложениям результатов диссертации. В разделе 5.1 мы описываем применение алгебраических методов к проблеме поиска соответствия между квантовополевым и решеточным описанием критического поведения. Эти результаты были опубликованы в работах [A4, A6].

Стохастический процесс, удовлетворяющий уравнению $\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z)-\sqrt{\kappa}\xi_t}$, называется *эволюцией Шрамма-Левнера* (SLE) на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Здесь ξ_t – Броуновское движение, κ – параметр процесса. Динамика конца z_t критической кривой γ_t (конец следа эволюции Шрамма-Левнера) описывается уравнением $z_t = g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}\xi_t)$. Нам удобнее использовать отображение $w_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa}\xi_t$.

Мы обобщаем анализ соответствия между эволюцией Шрамма-Левнера и конформной теорией поля на случай coset-моделей. Такие модели задаются алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгеброй $\mathfrak{a}$. G/A-coset модель конформной теории поля может быть реализована как ВЗНВ-модель (с калибровочной группой G), взаимодействующая с чисто калибровочными полями, с калибровочной группой $A \subset G$. Действие записывается через поля $\gamma : \mathbb{C} \to G$ и $\alpha, \bar{\alpha} : \mathbb{C} \to A$:

$$S = -\frac{k}{8\pi}\left[\int\limits_{S^2} d^2x\, \mathcal{K}(\gamma^{-1}\partial^\mu\gamma, \gamma^{-1}\partial_\mu\gamma) - \frac{1}{3}\int\limits_B \epsilon_{ijk}\mathcal{K}\left(\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^i}, \left[\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^j}\tilde{\gamma}^{-1}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial y^k}\right]\right) d^3y \right.$$
$$\left. +2\int\limits_{S^2} d^2z \left(\mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\partial}\gamma) - \mathcal{K}(\bar{\alpha}, (\partial\gamma)\gamma^{-1}) + \mathcal{K}(\alpha, \gamma^{-1}\bar{\alpha}\gamma) - \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha})\right)\right]. \quad (7)$$

Через $\mathcal{K}$ обозначена форма Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе Ли G. После фиксации A-калибровки останется G/A калибровочная инвариантность. Поэтому надо добавить случайные калибровочные преобразования к эволюции Шрамма-Левнера. Обозначим через t_i^a ($\tilde{t}_i^b$) генераторы представления алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно, представления $\mathfrak{a}$), соответствующего примарному полю φ_i.

Рассмотрим наблюдаемые в присутствии следа эволюции Шрамма-Левнера. Математическое ожидание решеточной наблюдаемой $\mathcal{O}$ на верхней полуплоскости можно вычислить как сумму ожиданий этой наблюдаемой в присутствии (конечной части) траектории эволюции Шрамма-Левнера γ_t вплоть до некоторого времени t, умноженных на вероятность этой траектории:

$$\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}\left[\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}\right] = \sum_{\gamma_t} P\left[C_{\gamma_t}\right] \prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$$

Решеточная наблюдаемая $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}}$ не зависит от t, следовательно $\prec \mathcal{O} \succ_{\gamma_t}$ – мартингал. Это должно выполняться и для ее непрерывного предела, дающегося комбинацией корреляционных функций в конформной теории поля: $\prec \mathcal{O} \succ_{\mathbb{H}_t} \to \mathcal{F}(\{z_i\})_{\mathbb{H}_t} = \frac{\left\langle \mathcal{O}(\{z_i\})\phi(z_t)\phi^\dagger(\infty)\right\rangle_{\mathbb{H}_t}}{\langle\phi(z_t)\phi^\dagger(\infty)\rangle_{\mathbb{H}_t}}$. Мы предполагаем, что $\mathcal{F}$ содержит некоторый набор примарных полей φ_i с конформными весами h_i. Так как мы рассматриваем конформную теорию с границей, необходимо добавить объемные поля в сопряженных точках $\bar{z}_i$. Операторы смены граничного условия ϕ находятся на конце следа эволюции Шрамма-Левнера и на бесконечности.

Исследуем, что происходит с наблюдаемыми при эволюции следа SLE γ_t с момента t до $t + dt$. Пусть $\mathcal{G}_i$ – генераторы инфинитезимальных преобразований примарных полей φ_i:$d\varphi_i(w_i) = \mathcal{G}_i\varphi_i(w_i)$. Нормируем дополнительное $(\dim\mathfrak{g})$-мерное Броуновское движение следующим образом: $\mathbb{E}\left[d\theta^a\, d\theta^b\right] = \mathcal{K}(t^a, t^b)dt$. Генератор преобразования поля равен $\mathcal{G}_i = \left(\frac{2dt}{w_i} - \sqrt{\kappa}d\xi_t\right)\partial_{w_i} + \frac{\sqrt{\tau}}{w_i}\left(\sum_{a:\mathcal{K}(t^a,\tilde{t}^b)=0}\left(d\theta^a t_i^a\right)\right)$. Мы фиксировали A-калибровку, разрешив случайное блуждание только в направлении, ортогональном подалгебре $\mathfrak{a}$.

Формула Ито дает выражение для дифференциала $d\mathcal{F}$, который равняется нулю в силу условия мартингала. Это равенство можно переписать в виде дифференциального уравнения на корреляционные функции, эквивалентное алгебраическому условию на граничное состояние $\phi(0)\left|0\right\rangle$.

$$|\psi >= \left(-2L_{-2} + \frac{1}{2}\kappa L_{-1}^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J_{-1}^a J_{-1}^a - \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{a}} \tilde{J}_{-1}^b\tilde{J}_{-1}^b\right)\right)\cdot\phi(0)|0> \quad (8)$$

является нулевым состоянием, то есть соответствуют сингулярному весу в представлении алгебры Вирасоро. Действуя повышающими операторами мы получаем соотношения, связывающие параметры стохастического процесса и coset-модели конформной теории поля:

$$\begin{aligned}&(3\kappa-8)h_{(\mu,\nu)}-c+\tau(k\dim\mathfrak{g}-x_e k\dim\mathfrak{a})=0\\&-12h_{(\mu,\nu)}+2\kappa h_{(\mu,\nu)}(2h_{(\mu,\nu)}+1)+\tau(C_\mu-\tilde{C}_\nu)=0,\end{aligned}\tag{9}$$

здесь $C_\mu=(\mu,\mu+2\rho)$ и $\tilde{C}_\nu=(\nu,\nu+2\rho_{\mathfrak{a}})$ – собственные значения квадратичных операторов Казимира $\sum_a t^a t^a$ и $\sum_b \tilde{t}^b\tilde{t}^b$ алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Из уравнения (9) мы сразу получаем значения κ,τ для каждой пары весов (μ,ν) алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$. Для coset-реализаций минимальных и парафермионных моделей эти результаты совпадают со значениями, полученными в работе [5] путем введения стохастического процесса с дискретным случайным блужданием.

Остальная часть главы представляет собой описание пакета **Affine.m**, предназначенного для вычислений в теории представлений аффинных и конечномерных алгебр Ли и реализующего предложенные в диссертации методы. Вычислительным методам посвящены работы [A5, A9, A8].

Список публикаций

[A1] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov.* Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — Vol. 44, no. 7. — P. 075205(20).

[A2] *В.Д. Ляховский, А. Назаров.* Рекуррентные свойства ветвления и резольвента Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда // *Теоретическая и математическая физика.* — 2011. — Том 169, вып. 2. — Стр. 218–228.

[A3] *В.Д. Ляховский, А. Назаров.* Fan, splint and branching rules // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2012. — Том 398. — Стр. 162–179.

[A4] *А. Назаров.* SLE martingales in coset conformal field theory // *Письма в ЖЭТФ* — 2012. — Том 96, вып. 2. — Стр. 93–96.

[A5] *A. Nazarov.* Affine.m - Mathematica package for computations in representation theory of finite-dimensional and affine Lie algebras // *Computer Physics Communications.* — 2012. — Vol. 183. — Pp. 2480–2493.

[A6] *A. Nazarov.* Algebraic properties of CFT coset construction and Schramm-Loewner evolution // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2012. — Vol. 343, no. 1. — P. 012085(10).

[A7] *V. Lyakhovsky, A. Nazarov.* Branching functions generated by the injection fan for Lie algebras. (The role of BGG-resolvent) // Models in Quantum Field Theory. — 2010. `http://hep.niif.spbu.ru/conf/mktp2010/`.

[A8] *A. Nazarov.* Comparison of algorithms for construction of representations of Lie algebras // Physics and Progress / SPbSU. — 2008.

[A9] *A. Nazarov.* Computational tools for representation theory of affine Lie algebras // second Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior scientists / EIMI. — ACSM. — 2009.

[A10] *V. Laykhovsky, A. Nazarov.* On affine extension of splint root systems // *Physics of Particles and Nuclei.* — 2012. — Vol. 43, no. 5. — Pp. 676–678.

Цитированная литература

[1] *S. Smirnov.* Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics.* — 2001. — Vol. 333, no. 3. — Pp. 239–244.

[2] *V.G. Kac.* Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth // *Mathematics of the USSR-Izvestiya.* — 1968. — Vol. 2. — P. 1271.

[3] *R.V. Moody.* A new class of Lie algebras // *Journal of algebra.* — 1968. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 211–230.

[4] *David Richter.* Splints of classical root systems // *Journal of Geometry.* — 2012. — Vol. 103. — Pp. 103–117.

[5] *R. Santachiara.* SLE in self-dual critical Z (N) spin systems: CFT predictions // *Nuclear Physics B.* — 2008. — Vol. 793, no. 3. — Pp. 396–424.