Что такое конформная теория поля?

Антон Назаров
antonnaz@gmail.com

13 сентября 2012 г.

Здравствуйте!

Мой доклад называется “Что такое конформная теория поля?” и я сразу отвечу на этот вопрос. Конформная теория поля – это квантовая теория поля, обладающая конформной инвариантностью. Я объясню, что значат эти слова, но сперва мотивация.

Рассмотрим нашу любимую модель Изинга. Это простая модель магнетика. У нас есть квадратная решетка, в вершинах которой находятся спины σ, принимающие значения ± 1. Энергия конфигурации дается суммой произведений ближайших соседей $E[\sigma] = \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$, а вероятность конфигурации равна экспоненте от минус бета на энергию $P[\sigma] = \frac{1}{Z} e^{-\beta E[\sigma]}$. Нас интересуют локальные наблюдаемые – средние значения функций от спинов в заданных узлах $f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{[\sigma]} f(\sigma(z_1), \ldots, \sigma(z_n)) P[\sigma]$.

Так как в настоящем магнетике очень много узлов, а расстояние между ними очень маленькое, возникает естественное желание перейти к непрерывному описанию. Мы можем переписать энергию через разностные производные $E[\sigma] = \sum_x \sum_y \left(\frac{(\sigma(x,y) - \sigma(x+\Delta x, y))^2}{\Delta x^2} + \frac{(\sigma(x,y) - \sigma(x, y+\Delta y))^2}{\Delta y^2} \right) + \mathrm{const}$ и перейти к пределу $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогда для энергии получится выражение типа $E[\varphi] = \int dx dy \left((\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2 \right)$

У нас получилась теория поля. Нам надо еще накладывать дополнительные условия на поля, которые были бы аналогом того, что спины $\sigma = \pm 1$. Наши наблюдаемые – это корреляционные функции. Они должны быть средними значениями по всем конфигурациям поля, поэтому теория поля должна быть квантовой.

Мы знаем, что в критической точке корреляционные функции обладают определенными свойствами по отношению к конформным преобразованиям.

Что же такое теория поля?

Напомню про классическую механику. Она появилась из наблюдений за планетами, поэтому в ней есть точечные объекты с координатами p_i, q_i в n-мерном пространстве. Координаты удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\dot{p}_i = -\partial_{q_i} H(p,q,t)$, $\dot{q}_i = \partial_{p_i} H(p,q,t)$,

Решения ищутся в классе каких-то хороших функций, например, гладких.

Теория поля – это естественное обобщение классической механики, когда речь идет не об отдельных точечных объектах, а о среде. Физики смотрели на то, как железные опилки выстраиваются вокруг магнита и видели картинки силовых линий, поэтому предположили, что существует некоторое поле, которое их выстраивает.

Само поле должно удовлетворять каким-то уравнениям, например, $\vec{E} = -\nabla \varphi$, $\Delta \varphi = 4\pi\rho$. Так как мы хотим, чтобы у нас могли быть точечные заряды $\rho = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$, то мы не можем обойтись функциями, приходится переходить к распределениям. Пространство тест-функций Шварца мы будем обозначать через $S(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\}$, распределения – это непрерывные функционалы $T : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ на пространстве тест-функций. Понятно, что для каждой измеримой функции g есть распределение $T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx$. Распределения можно дифференцировать $(\partial^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha f)$. Кроме того, любое интересующее нас распределение можно представить в виде $T = \sum_{0 \le |\alpha| \le n} \partial^\alpha T_{g_a}$.

Таким образом, классическая теория поля – это наука о распределениях, удовлетворяющих некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных.

Теперь слово “квантовая”. В начале XX века обнаружилось, что у микроскопических частиц не удается одновременно точно измерить координату и импульс. Была предложена следующая конструкция – состояние системы описывается некоторым вектором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а измерению координаты или импульса соответствует действие операторами $\hat{q}_i, \hat{p}_i$. Эти операторы не коммутируют $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, поэтому собственное состояние оператора координаты не может быть собственным состоянием оператора импульса.

Подробнее мы обсуждали квантовую механику на учебном семинаре в прошлом году, сейчас нам важно, что у нас появилось гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}$ и пространство операторов на нем $\mathcal{O}(\mathcal{H})$.

Как совместить эту картину с теорией поля?

Естественно, заменить поля на операторнозначные распределения $\varphi : S(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$. При этом нам нужно потребовать выполнения следующих условий. В гильбертовом пространстве состояний $\mathcal{H}$ должно быть плотное множество $D \subset \mathcal{H}$, такое что

- $\forall f \in S(\mathbb{C}^n), D \subset D_{\varphi(f)}$, где $D_{\varphi(f)}$ – область определения $\varphi(f)$.
- $f \to \varphi(f)|_D$ – линейное отображение из $S(\mathbb{C}^n)$ в $\mathrm{End}(D)$
- $\forall \nu \in D, \omega \in \mathcal{H}$ отображение $f \to \langle \omega, \varphi(f)(\nu) \rangle$ – непрерывное распределение

Кроме того, мы потребуем в $\mathcal{H}$ наличия выделенного состояния $\Omega \in \mathcal{H}$ – вакуума.

Путь B_0 – счетное множество индексов, которые будут нумеровать поля в теории. Мы будем пользоваться мультииндексами $i = (i_1, \dots, i_n) \in B_0^n$, и множество мультииндексов обозначим через $\{i\} = B$.

Мы хотим определить наблюдаемые – корреляционные функции $G_{i_1,\dots,i_n}(z_1, \dots, z_n)$, так что

$$G_{i_1,\dots,i_n}(z_1, \dots, z_n) = \langle \Omega, \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n)\Omega \rangle .$$

Они будут жить на $M_n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \neq z_j\}$, еще мы будем использовать $M_n^+ : \mathrm{Re} z_i > 0$. Введем последовательность пространств тест-функций с ограниченным носителем $\{S_n^+ : S_0^+ = \mathbb{C}, S_n^+ = \{f \in S(\mathbb{C}^n : \mathrm{supp}(f) \subset M_n^+\}$.

Теперь мы можем сформулировать нашу теорию в виде системы аксиом на непрерывные полиномиально ограниченные функции $G_{i_1,\dots,i_n} : M_n \to \mathbb{C}$, $G_\emptyset = 1$.

Аксиома 1. Локальность: для всех $(i_1, \dots, i_n) \in B_0^n$, $(z_1, \dots, z_n) \in M_n$ и $\pi \in S_n$ — перестановок множества из n элементов верно равенство $G_{i_1,\dots,i_n}(z_1, \dots, z_n) = G_{i_{\pi(1)},\dots i_{\pi(n)}}(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)})$

Аксиома 2. Преобразования при движениях комплексной плоскости: рассмотрим группу движений двумерного пространства E_2, генераторами которой являются повороты $r_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to e^{i\alpha} z,\ \alpha \in \mathbb{R}$ и трансляции $t_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to z+a,\ a \in \mathbb{C}$, Тогда для любого индекса $i \in B_0$ существуют независимые конформные веса $h_i, \bar{h}_i \in \mathbb{R}$, такие, что для всех преобразований $w \in E_2$ $G_{i_1,\dots,i_n}(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{dw(z_j)}{dz}\right)^{h_{i_j}} \left(\overline{\frac{dw(z_j)}{dz}}\right)^{\bar{h}_{i_j}} G_{i_1,\dots i_n}(w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$, где $w_i = w(z_i)$, а $s_i = h_i - \bar{h}_i, d_i = h_i + \bar{h}_i$ – конформный спин и скейлинговая размерность.

Аксиома 3. Положительность по отношению к отражениям: Обозначим через $\Theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ отображение $z = t + iy \to \Theta(z) = -t + iy$. Тогда аксиома утверждает, что существует инволюция $\star : B_0 \to B_0$, $\star^2 = \mathrm{id}_{B_0}$, которая продолжается на B $(\star : i \to i^*)$, и выполняются свойства

1. Верно равенство $G_i(z) = G_{i^*}(\Theta(z)) = G_{i^*}(-z^*)$
2. Обозначим через $\underline{S}^+$ пространство последовательностей тест-функций $\underline{f} = (f_i)_{i\in B}, f_i \in S_n^+$. Тогда неравенство

$$\langle \underline{f}, \underline{f} \rangle = \sum_{i,j\in B} \sum_{n,m} \int_{M_{n+m}} G_{i^*j}(\Theta(z_1), \dots, \Theta(z_n), w_1, \dots, w_m) f_i(z)^* f_j(w) d^n z d^m w \geq 0,$$

   верно $\forall \underline{f} \in \underline{S}^+$.

Если эти аксиомы выполнены для системы функций $\{G_i\}$, то мы можем восстановить гильбертово пространство $\mathcal{H}$. У нас есть положительная полуопределенная форма на $\underline{S}^+$, тогда $\mathcal{H}$ – это пополнение $\underline{S}^+$, факторизованное по ядру этой формы.

Можно построить и поля φ_j для всех $j \in B_0$. Для $f \in S^+, \underline{g} \in \underline{S}^+, [\underline{g}] \in \mathcal{H}$ определим $\varphi_j(f)([\underline{g}]) = \left((\underline{g} \times f)_{i_1,\dots,i_{n+1}}\right)_{i\in B}$, где $(\underline{g} \times f)_{i_1,\dots,i_{n+1}}(z_1, \dots, z_{n+1}) = g_{i_1,\dots,i_m}(z_1, \dots, z_n) f(z_{n+1}) \delta_{j,i_{n+1}}$.

Еще у нас есть вакуум $\Omega = [f] : f_\emptyset = 1, f_i = 0\ \forall i \neq \emptyset$. Кроме того, на $\mathcal{H}$ у нас действует унитарное представление E_2, а инвариантное относительно него подпространство D плотно.

Теорема определяет структуру двумерной евклидовой теории поля:

Теорема 1. *1. Для всех $j \in B_0$ отображения $\varphi_j : S^+ \to \mathrm{End}(D)$ линейны, φ_j – полевые операторы, $\varphi_j(D) \subset D, \Omega \in D$ и вакуум Ω инвариантен относительно унитарных представлений U группы E_2.*

2. Поля φ_j преобразуются ковариантно по отношению к представлению U, для $w \in E_2$:

$$U(w)\varphi_j(z)U(w)^* = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{h_j} \varphi_j(w(z))$$

3. Матричные коэффициенты $\langle\Omega|\varphi_{i_1}(z_1)\dots\varphi_{i_n}(z_n)|\Omega\rangle$ представляются аналитическими функциями, которые при $\mathrm{Re} z_n > \dots > \mathrm{Re} z_1 > 0$ совпадают с корреляционными функциями

$$\langle\Omega|\varphi_{i_1}(z_1)\dots\varphi_{i_n}(z_n)|\Omega\rangle = G_{i_1,\dots,i_n}(z_1,\dots,z_n)$$

Кроме того, если рассмотреть корреляционные функции, зависящие от двойного набора переменных $G_{i_1,\dots,i_n}(z_1,\dots,z_n,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n)$, они оказываются голоморфными на $M_n^> \times M_n^>$, где $M_n^> = \{z \in M_n^+ : \mathrm{Re} z_n > \dots > \mathrm{Re} z_1 > 0\}$.

Чтобы получилась конформная теория поля нам осталось добавить требование масштабной инвариантности.

Аксиома 4. Корреляционная функция $G_i, i \in B$ преобразуется ковариантно при масштабных преобразованиях $w(z) = e^\tau z$, то есть

$$G_{i_1,\dots,i_n}(z_1,\dots,z_n) = (e^\tau)^{h_1+\dots+h_n+\bar{h}_1+\dots+\bar{h}_n}\, G_{i_1,\dots,i_n}(e^\tau z_1,\dots,e^\tau z_n),$$

где $(z_1,\dots,z_n) \in M_n, \quad h_j = h_{i_j}$

Заметим, что двух- и трех-точечные функции теперь полностью определены: $G_{ij}(z_1,z_2,\bar{z}_1,\bar{z}_2) = C_{ij}(z_1-z_2)^{-(h_i+h_j)}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)}$ и $G_{ijk} = C_{ijk} z_{12}^{-h_1-h_2+h_3} z_{23}^{-h_2-h_3+h_1} z_{13}^{-h_1-h_3+h_2} \bar{z}_{12}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2+\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{-\bar{h}_2-\bar{h}_3+\bar{h}_1} \bar{z}_{13}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_3+\bar{h}_2}$, где $C_{ij}, C_{ijk} \in \mathbb{C}$.

При таких предположениях теория не очень практичная – мы ничего не знаем про структуру гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и поля φ_j. Поэтому из физических предположений мы предполагаем также, что среди полей есть четыре особенных поля – компоненты тензора энергии-импульса.

Аксиома 5. (Существование тензора энергии-импульса) Среди полей $\varphi_i,\ i \in B_0$ есть четыре поля $T_{\mu\nu},\ \mu,\nu = 0,1$, такие, что $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad T^*_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}(\Theta(z)), \quad \partial_0 T_{\mu 0} + \partial_1 T_{\mu 1} = 0$, скейлинговая размерность поля $d(T_{\mu\nu}) = h_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} = 2$, конформный спин $s(T_{00} - T_{11} \pm 2iT_{01}) = \pm 2$.

Можно показать, что $\mathrm{tr} T_{\mu\nu} = 0$ и $T = T_{00} - iT_{01}$ не зависит от $\bar{z}$, то есть $\bar{\partial} T = 0$. Операторы $L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}.$$

Примарными будем называть поля $\varphi_i, i \in B_0$, такие, что $[L_n, \varphi_i(z)] = z^{n+1}\partial\varphi_i(z) + h_i(n+1)z^n\varphi_i(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Для каждого примарного поля φ_i можно определить конформное семейство $[\varphi_i]$, состоящее из вторичных полей $\varphi_i^\alpha(z) = L_{-\alpha_1}(z)\dots L_{-\alpha_n}(z)\varphi_i(z)$, где $L_{-n}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{T(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$. Заметим, что $L_n(0) = L_n$ и корреляционные функции вторичных полей могут быть выражены через корреляционные функции примарных. Последняя аксиома определяет операторное разложение:

Аксиома 6. Корреляционные функции примарных полей при $z_i \to z_j$ удовлетворяют уравнению:

$$\langle\Omega|\varphi_{i_1}(z_1)\dots\varphi_i(z_i)\dots\varphi_j(z_j)\dots\varphi_{i_n}(z_n)|\Omega\rangle =$$

$$\sum_{k\in B_0} C_{ijk}(z_i - z_j)^{h_k - h_i - h_j}\, \langle\Omega|\varphi_{i_1}(z_1)\dots\varphi_k(z_k)\dots\varphi_{i_n}(z_n)|\Omega\rangle$$

+регулярные члены

Если дополнительно предположить, что операторное разложение ассоциативно (так называемый "конформный бутстрап"), то вся теория определяется набором примарных полей $\varphi_j, j \in B_0$, их размерностями и коэффициентами операторного разложения C_{ijk}.

Поля разделились на модули алгебры Вирасоро. Каждому полю φ_i соответствует состояние $\lim_{z\to 0}\varphi_i(z)\Omega$. Можно считать, что гильбертово пространство состояний тоже раскладывается на модули алгебры Вирасоро.

В модуле Верма может оказаться такое состояние $|\omega\rangle$, что $L_n|\omega\rangle = 0, \quad \forall n > 0$. Действие понижающих операторов на такие состояния порождает инвариантное подпространство, то есть модуль Верма оказывается приводимым. Такие состояния обладают нулевой нормой и исключаются. Их иногда называют нулевыми состояниями (null-state). Как искать такие состояния?

На уровне один $L_1(L_{-1}|h\rangle) = 0 \Longrightarrow h = 0$, то есть все состояния, полученные из вакуума понижающим оператором являются нефизическими состояниями с нулевой нормой, как и должно быть.

На уровне два будем искать нулевое состояние в виде $|\omega\rangle = (L_{-2} + aL_{-1}^2)|h\rangle$. Из $L_1|\omega\rangle = 0$ получаем

$$0 = ([L_1, L_{-2}] + a[L_1, L_{-1}^2])|h\rangle = (3 + 2a(2h+1))L_{-1}|h\rangle$$

То есть $a = -\frac{3}{2(2h+1)}$ Аналогично, действуя L_2 получаем условие $c = 2h\frac{5-8h}{2h+1}$

Так как состояние $(L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2)|h\rangle$ имеет нулевую норму, для корреляторов получаем

$$\big\langle (L_{-2} + aL_1^2)\phi_1(w_1)\dots\phi_n(w_n)\big\rangle = 0.$$

Из определения L_n можно переписать это условие в виде дифференциального уравнения:

$$\left[a\frac{\partial^2}{\partial w_1^2} + \sum_{j\neq 1}\left(\frac{h_j}{(w_1-w_j)^2} + \frac{1}{w_1-w_j}\frac{\partial}{\partial w_j}\right)\right]\langle\phi_1(w_1)\dots\phi_n(w_n)\rangle = 0$$

То есть мы получили дифференциальные уравнения на корреляционные функции.

Рассмотрим в качестве примера модель Изинга. Ей соответствует конформная теория поля с тремя примарными полями $\varphi_1 : (0,0), \quad \varphi_2 : \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_3 : \left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)$ и центральным зарядом 1/2. Заметим, что для поля спина $\sigma = \varphi_3$ с конформной размерностью $h = 1/16$ выполнено условие $c = 2h\frac{5-8h}{2h+1}$. То есть мы можем записать уравнение для корреляционных функций спинов. Рассмотрим четырехточечную функцию

$$G^{(4)} = \langle\sigma(z_1,\bar z_1)\dots\sigma(z_4,\bar z_4)\rangle$$

Из требования конформной ковариантности для корреляционных функций можно переписать $G^{(4)}$ в виде

$$G^{(4)} = \mathrm{const}\cdot\left(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}}\right)^{\frac{1}{8}}\overline{\left(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}}\right)}^{\frac{1}{8}}F(x,\bar x),$$

где $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$, $z_{ij} = |z_i - z_j|$. Тогда дифференциальное уравнение на F примет вид

$$\left(x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\frac{1}{2} - x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{16}\right)F(x,\bar x) = 0$$

и аналогично для $\bar x$. Решение этого уравнения дается гипергеометрической функцией. В данном случае она упрощается до $f_{1,2}(x) = (1\pm\sqrt{1-x})^{\frac{1}{2}}$. Тогда четырехточечную функцию можно записать в виде комбинации решений

$$G^{(4)} = \left|\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}}\right|^{\frac{1}{4}}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}f_i(x)f_j(\bar x)$$

Возвращаясь к физической системе мы должны положить $\bar x = x^*$, тогда из однозначности четырехточечной функции комбинация может быть только $a(|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)$. Из сравнения с операторным разложением для $\sigma(z)\sigma(w)$ нетрудно получить, что $a = 1/2$.

В итоге для четырехточечной функции получается следующее выражение:

$$G^{(4)} = \langle\sigma(z_1,\bar z_1)\dots\sigma(z_4,\bar z_4)\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}}\right|^{\frac{1}{4}}\left(\left|1+\sqrt{1-x}\right| + \left|1-\sqrt{1-x}\right|\right)$$

Таким образом конформная теория поля позволяет не только находить критические индексы, но и получать явные выражения для корреляционных функций статистических моделей в критической точке.