PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
SEMESTRE 2018-1

Curso: MAT1203 - Algebra Lineal
Profesor: Rodrigo Rubio Varas
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: ifcastaneda@uc.cl

AYUDANTÍA 3

Conjunto solución, independencia lineal y transformaciones lineales

21 de marzo de 2018

1. Sean los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

determinar si $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = R^3$.

Solución:
Para ver si estos tres vectores generan $\mathbb{R}^3$, tiene que pasar que todos sean L.I. entre si. Una forma de ver esto, es formar una matriz con los vectores y ver la cantidad de pivotes que hay, es decir

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene 3 pivotes, quiere decir que hay 3 vectores L.I., es decir, todos son linealmente independientes entre si, formando asi $\mathbb{R}^3$

2. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

a) Determinar el conjunto solución de su sistema homogeneo.

b) Describir todas las soluciones de $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Determinar el conjunto solución de su sistema homogeneo.

El sistema homogeneo corresponde a la ecuación $Ax = \vec{0}$, por lo que nuestra matriz aumentada sería

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \frac{4}{3}x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema homogeneo es

$$S = Gen \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Describir todas las soluciones de $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Para esto, hacemos lo mismo que en la parte a), pero aumentando la matriz por el vector b, es decir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \frac{4}{3}x_3 & = & -1 \\ x_2 & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema $Ax = b$ es

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + Gen \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Finalmente, podriamos amplificar el vector del generado por 3, para que quede más bonito, con lo que

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + Gen \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ y b un vector en R^3. ¿La ecuación $Ax = b$ es consistente para todo b?

Solución:

Diremos que $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Luego, el sistema $Ax = b$ se puede representar como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - \frac{1}{2}b_2 + 4b_3 \end{array}\right]$$

Luego, el sistema será consistente para $b_1 - \dfrac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$. Esto se puede representar como

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & \frac{1}{2}b_2 - b_3 \\ b_2 & = & b_2 \\ b_3 & = & b_3 \end{array} \quad \rightarrow b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_2 - b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$b = Gen\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

4. Describa todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones y comparelas con las de su sistema homogeneo

$$\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-3x_3 &=& 5\\ 2x_1+x_2-3x_3 &=& 13\\ -x_1+x_2 &=& -8 \end{array}$$

Solución:
La matriz aumentada asociada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -3 & 13\\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & -3 & 3 & 3\\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & -3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1-x_3 &=& 7\\ x_2-x_3 &=& -1\\ 0 &=& 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& x_3+7\\ x_2 &=& x_3-1\\ x_3 &=& x_3 \end{array}$$

Luego,

$$x = \begin{pmatrix}x_3+7\\x_3-1\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por último, la solución es

$$S = \begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix} + Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Notemos que la solución del sistema homogeneo será lo mismo pero quitando el vector que no forma parte del generado, es decir

$$S_H = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Sean $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Demuestre que el conjunto $\{u + v, u + 2w, v + 3u + w\}$ es linealmente independiente.

Solución:

$$P.D. \quad \{y, v, w\} \quad L.I. \rightarrow \{u + v, u + 2w, v + 3u + w\} \quad L.I.$$

Para que $\{u + v, u + 2w, v + 3u + w\}$ sea L.I., tiene que cumplirse que el sistema

$$\alpha(u + v) + \beta(u + 2w) + \gamma(v + 3u + w) = 0$$

tenga solucion única $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Trabajemos entonces con el sistema

$$\alpha(u + v) + \beta(u + 2w) + \gamma(v + 3u + w) = 0$$

$$\alpha u + \alpha v + \beta u + 2\beta w + \gamma v + 3\gamma u + \gamma w = 0$$

$$(\alpha + \beta + 3\gamma)u + (\alpha + \gamma)v + (2\beta + \gamma)w = 0$$

Recordemos que u, v, w es L.I, por lo que debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ 2\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema lo podemos expresar de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{F.E.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$q.e.d$$

6. Sea $L : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$L(1+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } L(1+2x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

determine $L(a + bx + cx^2)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución:
Recordemos la siguientes propiedades de las transformaciones lineales

$$L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2), \quad \alpha L(v) = L(\alpha v)$$

Debemos buscar

$$L(1), \quad L(x), \quad L(x^2)$$

Para esto, debemos jugar con la información que nos dan hasta encontrar cada uno de ellos.

$$L(1+x+x^2) - L(1+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$L(1+2x) - L(1+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(1+x) - L(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$L(a + bx + cx^2) = aL(1) + bL(x) + cL(x^2)$$

$$L(a + bx + cx^2) = aL \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$L(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b - 2c \end{pmatrix}$$