



جامعة تونس المنار  
Université de Tunis El Manar



Département Génie Industriel

## Stage Ingénieur

**Etude de la coalescence de deux gouttes en présence d'un  
Surfactant**

**Réalisé par :** Nabil ACHOUR

**Encadrés par :** Dr. Sami ABID

**Réalisé à :**

**I2E-EPPM GROUP**



**Année universitaire 2016/2017**

# Remerciements

J'adresse mes remerciements à mon encadreur de ce stage ingénieur, Dr. Sami ABID. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses précieux conseils. La qualité de son encadrement, sa lucidité scientifiques, et son esprit de rigueur ont été primordiaux tout au long ce projet.

# Table des matières

Liste des figures .....	3
Liste des tableaux .....	4
Nomenclature .....	5
Introduction générale.....	6
Chapitre 1 : Présentation de l'entreprise .....	7
1.1. Introduction .....	7
1.2. Emplacement géographique .....	7
1.3. Historique .....	8
1.4. Secteur d'activités .....	9
1.5. Organigramme .....	10
Chapitre 2 : Etude bibliographique .....	11
2.1. Introduction .....	11
2.2. La collision.....	11
2.3. Le temps de collision.....	13
2.4. Le drainage.....	13
2.5. La rupture .....	19
2.6. Le tensio-actif (Surfactant).....	20
Chapitre 3 : Formulation mathématique du problème de coalescence.....	23
3.1. Introduction .....	23
3.2. Modélisation mathématique du drainage pour un liquide pur.....	23
3.3. Modélisation mathématique du drainage pour un liquide en présence d'un Surfactant .....	29
Chapitre 4 : Résolution numérique de la phase drainage .....	33
4.1. Introduction .....	33
4.2. Algorithme de résolution .....	33
4.3. Discrétisation des équations .....	34
4.4. Résultats de la simulation.....	36
Conclusion.....	37
Références bibliographiques .....	38

# Liste des figures

Figure 1. 1: Les bureaux d'I2E. [8] .....	7
Figure 1. 2: Emplacement géographique d'I2E. [8] .....	7
Figure 1. 3: L'organigramme d'I2E. [8] .....	10
Figure 2. 1: Les trois phases de la coalescence. [4] .....	11
Figure 2.4.1 : Drainage en fonction de temps. [4].....	13
Figure 2.4.2 : Les types de drainage. [4] .....	14
Figure 2.4.3 : Formation d'un film entre une goutte et une surface déformable. [2].....	15
Figure 2.4.4 : Comparaison de l'allure de $h'(r',t')$ pour un petit temps et un grand temps de drainage [5] .....	16
Figure 2.4.5 : Variation de l'épaisseur $h$ en fonction $t$ . [2] .....	18
Figure 2.6.1: Influence du Surfactant sur le drainage du film. [4] .....	21
Figure 2.6.2 : Variation de concentration de surfactant en fonction de la tension de surface. [4] .....	22
Figure 3.1.1 : Cas d'un liquide pur.....	23
Figure 3.1.2 : Cas d'un liquide avec surfactant.....	23
Figure 3.2.1 : Détermination de l'épaisseur initiale géométriquement [2] .....	28
Figure 3.3.1 : l'effet Marangoni.[7] .....	30
Figure 4.2 : Algorithme de résolution. ....	34
Figure 4.4.1 : Résultat de la simulation : $h^*$ en fonction de $r^*$ et $t^*$ .....	36
Figure 4.4.2 : Résultat de simulation réalisé par Dr. Sami. [6] .....	36

# Liste des tableaux

Tableau 2.4.1 Variables adimensionnées interfaces déformable immobile. ....	15
Tableau 2.4.2 Variables adimensionnées interfaces déformable partiellement mobile. ....	17
Tableau 3.2.1 : Variables adimensionnées pour l'équation de continuité.....	24
Tableau 3.2 Variables adimensionnées du système final .....	29

# Nomenclature

$\rho$	La densité volumique	$[kg.m^{-3}]$
$g$	L'accélération de pesanteur	$[m^2.s^{-1}]$
$t$	Le temps	$[s]$
$p$	La pression dans le film	$[Pa]$
$P_d$	La pression dans les gouttes	$[Pa]$
$u$	La vitesse dans le film	$[m.s^{-1}]$
$v$	La vitesse dans les gouttes	$[m.s^{-1}]$
$h$	L'épaisseur du film	$[m]$
$T$	La température caractéristique dans les fluides	$[K, ^\circ C]$
$\mu$	La viscosité dynamique : $\mu = \rho \nu$	$[Pa.s^{-1}]$
$R_i$	Le rayon de la goutte i	$[m]$
$\varepsilon$	Le rapport de l'épaisseur du film sur sa dimension latérale : $\varepsilon = h/R \ll 1$	$[-]$
$r$	La position radiale dans les coordonnées cylindrique	$[m]$
$z$	La position axiale dans les coordonnées cylindrique	$[m]$
$\tau$	Le taux de cisaillement	$[Pa]$
$\Gamma$	La concentration de surfactant	$[mole.m^{-2}]$
$A$	La constante Hamker	$[-]$
$Ca$	Le nombre capillaire : $Ca = \frac{\mu V}{\sigma}$	$[-]$
$Bo$	Le nombre de bond : $Bo = \frac{\Delta \rho g R^2}{\sigma}$	$[-]$

## Indices

ini	initiale
d	phase dispersé
eq	équivalent
u	uniforme

## Exposant

*,'	indiquant les caractères adimensionnels
-----	---

# Introduction générale

En ingénierie on utilise de plus en plus les simulations numériques au détriment des simulations expérimentales qui sont très coûteuses que ce soit en temps ou en argent. C'est pourquoi on a souvent recours à des approches de modélisations numériques en utilisant les méthodes numériques comme les différences finies (FDM), les éléments finis (FEM), les volumes finis (FVM), les méthodes spectrales...

En tant qu'élèves ingénieurs de la filière Modélisation pour l'Industrie et les Services (MIndS) spécialité modélisation et simulation numérique, nous avons acquis dans notre cursus les connaissances nécessaires pour la modélisation et la simulation des problèmes très rencontrés en ingénierie, en transfert thermique, en mécanique et mécanique des fluides...

La coalescence de gouttes liquides dispersées dans un autre liquide immiscible est une problématique d'une grande importance aussi bien scientifique qu'industrielle. En effet, une grande partie des écoulements de fluides sont des écoulements complexes et multiphasiques et la modélisation de ce type d'écoulements est un sujet de recherche fondamental.

En effet, plusieurs applications intéressantes sont directement liées à l'étude de ces écoulements diphasiques et des phénomènes de coalescence s'y passant, nous parlons ainsi de l'étude de tout processus impliquant l'extraction liquide-liquide, l'émulsification ou les transports multiphasiques. Citons par exemple le transport pneumatique des poudres ou les transports des produits pétroliers comme exemple d'écoulement diphasique.

Dans ce cadre de stage ingénieur nous allons faire la modélisation mathématique et la simulation numérique du problème de coalescence de deux gouttes en présence d'un surfactant.

# Chapitre 1 : Présentation de l'entreprise

## 1.1. Introduction

I2E est un bureau d'étude spécialisé dans l'Ingénierie dans les domaines de l'énergie et de l'environnement, disposant d'une large expérience.

Fondée en 1993, I2E (ex DHV Tunisie) se positionne comme un leader dans le domaine de l'environnement en Tunisie ayant pour mission d'intervenir dans le domaine environnemental en Afrique du nord et au moyen orient.

Grâce à son équipe de spécialistes ayant chacun un ou plusieurs domaines de compétence et l'approche novatrice avec laquelle chaque projet est abordé, I2E se distingue de ses concurrents.

Riche du savoir-faire de ses experts dans le domaine du management environnemental, de la gestion des risques, de la sécurité, du traitement des eaux domestiques et industriels, et de la réglementation environnementale, I2E met à la disposition de ses Clients :

- Une équipe pluridisciplinaire pour assister maîtres d'ouvrages privés et publics à planifier, et à réaliser leurs projets d'aménagement et de gestion industrielle et urbaine dans le respect de l'environnement.
- Une approche globale de la gestion des milieux pour une prise en compte de l'environnement dans toutes ses composantes.

Elle reste au croisement des compétences généralistes et du savoir-faire technique pour répondre au mieux au besoin de sa clientèle.

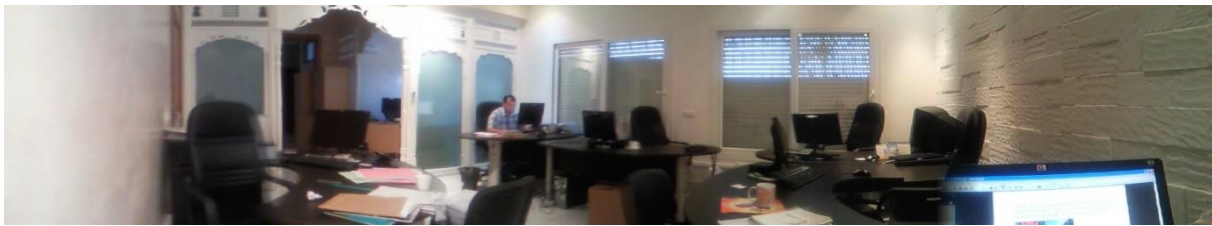


Figure 1.1: Les bureaux d'I2E. [8]

## 1.2. Emplacement géographique

Le bureau d'études I2E se trouve l'Immeuble Fatma - les jardins du Lac 2 – 1053 Tunis- Tunisie.



Figure 1.2 : Emplacement géographique d'I2E. [8]



### 1.3. Historique

Créée en 1993 par un leader mondial dans le secteur de l'eau, DHV Group (Pays Bas), I2E ex DHV Tunisie avait pour mission d'intervenir dans le domaine environnemental en Afrique du nord pour le compte de la compagnie mère.

En 2000, DHV Group s'est rapprochée d'EPPM pour devenir partenaires à parts égales dans DHV Tunisie.

En 2007, le groupe DHV a cédé ses parts à EPPM, dès lors la société a pris le nom d'I2E.

Après plusieurs années d'expériences de succès, I2E a continué de développer son savoir-faire et son dévouement à la performance et la fiabilité.

C'est par son professionnalisme, des partenariats à long terme avec des groupes internationaux spécialisés et le soutien de la compagnie mère « EPPM », qu'I2E a gagné la confiance de l'administration publique et les chefs de projets mis en place.

Grâce à l'amélioration et la modernisation de ses structures, I2E a pu devenir, à bien des égards, une société phare et leader en Afrique du nord dans les études de traitement des eaux et des études environnementales.

- 1993 : DHV Tunisie a été créée par DHV Group.
- 1994 : Première étude d'impact sur l'environnement.
- 1994 : Première étude de modélisation atmosphérique.
- 1995 : Réalisation de l'étude de la qualité de l'air et de la pollution atmosphérique en Tunisie, pour le compte du Ministère de l'Environnement et de l'Aménagement du Territoire MEAT
- 1996 : Première étude de la dérive d'un déversement de pétrole en mer.
- 1997 : Etude de Mise en place de six réseaux de suivi de l'état de l'environnement en Tunisie-ANPE.
- 1998 : Première étude de protection contre les inondations - DHU.
- 2000 : DHV Group s'est rapprochée d'EPPM pour devenir partenaires à parts égales dans DHV Tunisie.
- 2001 : Première étude d'exécution d'une station de pompage eau de mer et d'une ferme aquacole.
- 2001 : Première étude de la station de dessalement eau de mer.
- 2002 : Première étude d'un émissaire en mer.
- 2003 : Etude pour la mise en place d'un système d'information nationale des ressources en eau, SINEAU - DGRE.
- 2003 : Premier projet en INDE
- 2003 : Etude de la dépollution industrielle du littoral tunisien – DGEQV

- 2004 : Première étude de préféabilité du projet d'exécution d'une station de traitement des eaux huileuses.
- 2006 : Première étude de station d'épuration en Algérie.
- 2007 : le groupe DHV a cédé ses parts à EPPM, dès lors la société a pris le nom d'I2E
- 2008 : Réalisation d'un inventaire spatialisé des émissions de polluants atmosphérique en Tunisie – ANPE.
- 2008 : Elaboration d'un manuel de procédures du plan national d'intervention d'urgence pour lutter contre les phénomènes de la pollution marine – ANPE –Tunisie

## **1.4. Secteur d'activités**

Les domaines d'activités d'I2E se focalisent sur les secteurs suivants :

- **Eaux potables**
  - Dessalement
  - Traitement et distribution des eaux potables
- **Eaux usées**
  - Déshuilage
  - Assainissement et traitement des eaux usées urbaines
  - Eaux usées industriels
- **Qualité de l'air**
  - Inventaire et caractérisation de la pollution atmosphérique
  - Modélisation
  - Plan d'action
- **Milieu marin**
  - Ferme aquacole
  - Emissaire en mer
  - Ouvrages maritimes
  - Caractérisation des environnements marins
- **Ressources en eaux**
  - Systèmes d'Information National sur l'eau (SINEAU)
  - Gestion intégrée et la conservation des ressources en eaux(PISEAU)
- **Environnement**
  - Etablissement des indicateurs de l'environnement (OTED)
  - Etude d'impact sur l'environnement (ETE)

- Etude de dépollution
- **Sécurités et dangers**
  - Etudes de danger
  - Plans HSE
  - Plan d'opération interne (POI)

## 1.5. Organigramme

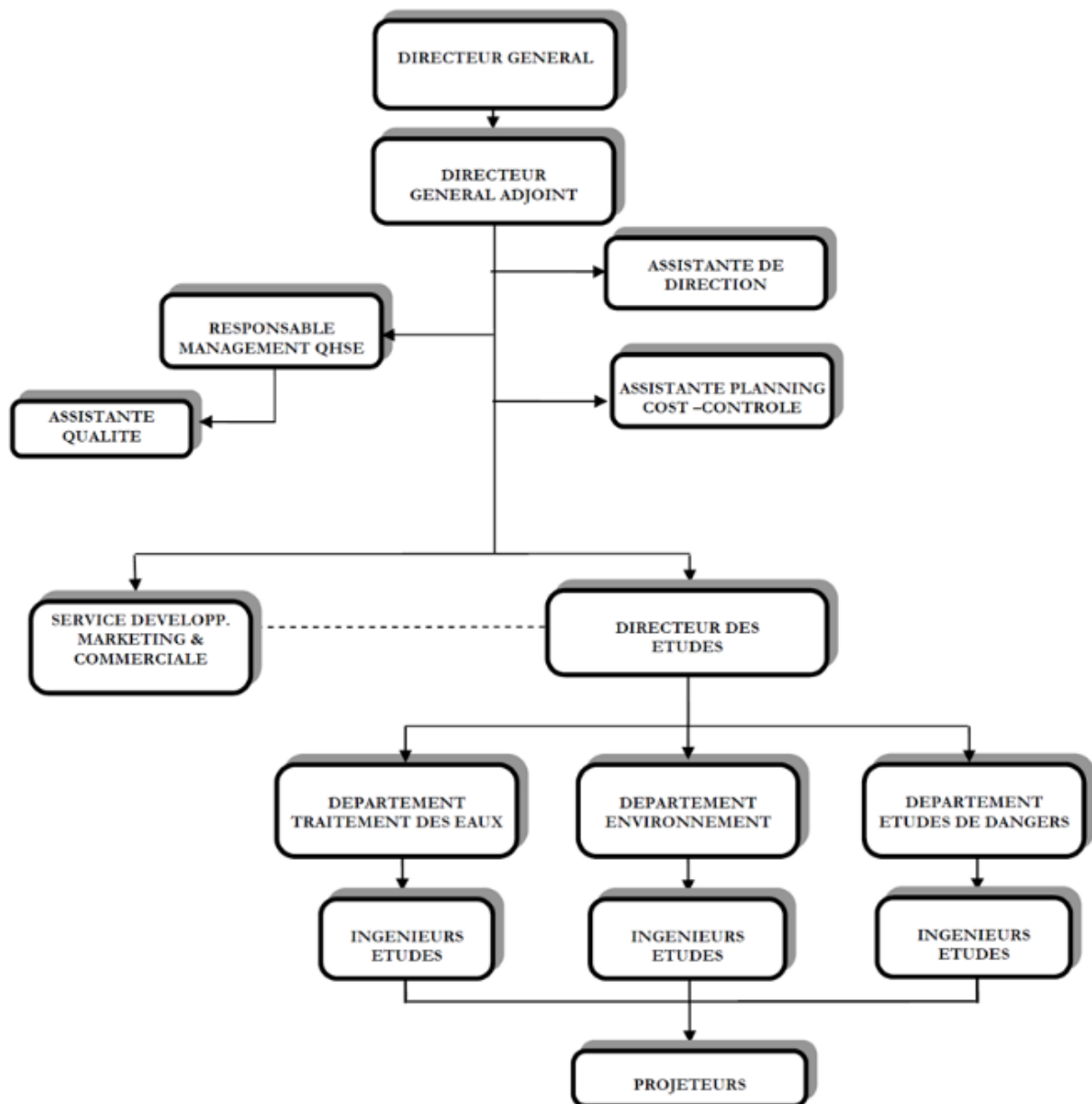


Figure 1.5: L'organigramme d'I2E. [8]

# Chapitre 2 : Etude bibliographique

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons une étude bibliographique du phénomène de la coalescence. C'est un chapitre dédié à une présentation d'une revue des différents travaux effectués sur ce phénomène, ce qui va nous servir à mieux comprendre ce phénomène et bien choisir le modèle pour effectuer notre propre étude sur ce phénomène.

Dans le cas le plus général, soient deux gouttes d'un fluide 1 (phase dispersée) de viscosité dynamique  $\mu_d$ , situés à une distance assez grande devant leurs rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  et baignant dans un fluide 2 de viscosité dynamique  $\mu$  très faible devant celle du fluide 1. Les deux gouttes s'approchent l'une vers l'autre suivant le gradient de vitesse de l'écoulement externe. Généralement le phénomène de la coalescence se divise en trois étapes :

- La collision
- Le drainage
- La rupture

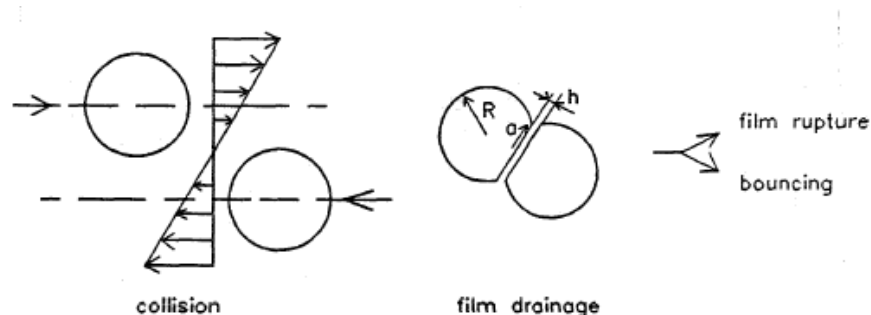


Figure 2.1: Les trois phases de la coalescence. [4]

## 2.2. La collision

Dans le cas d'un écoulement dispersé, l'influence des écoulements externes est prise en compte. En effet, lorsque deux gouttes sont mises en contact sous l'effet de ces enroulements externes, ce contact est la cause principale de la coalescence. Le mouvement et la déformation des gouttes sont contrôlés par le cisaillement et l'élongation des gouttes dans le cas où l'écoulement externe est visqueux, et par les forces de turbulence dans le cas des collisions sous l'effet de l'inertie.

### 1) La Fréquence des collisions

Pour des particules identiques ayant une forme sphérique, l'expression de la fréquence des collisions  $C$  par unité de temps et de volume est donnée par la relation suivante : [2]

$$C = kvd^2n^2$$

Où  $v$  est une vitesse caractéristique entre deux points distants de  $d$  dans l'écoulement,  $n$  est le nombre de particules et  $k$  est une constante relative à la nature de l'écoulement et la vitesse relative  $v$ .

## 2) Force et durée de collision

Selon le nombre de Reynolds<sup>1</sup>, soit plus petit que l'unité ou plus grand, la force qui gouverne la collision est classée comme une force visqueuse ou inertielle. Dans les écoulements laminaires par exemple, qui sont caractérisés par un faible nombre de Reynolds, les collisions sont généralement de type visqueux. Par contre, dans les écoulements turbulents, les régimes visqueux et inertiels correspondent respectivement à des particules plus petites et plus grandes que l'échelle de longueur du plus petit tourbillon de Kolmogorov. [2]

### • Les collisions visqueuses :

La collision d'une particule solide dans un écoulement visqueux à simple cisaillement a été analysée par plusieurs auteurs pour le cas des particules égales et pour plusieurs ratios de rayon des particules. Les analyses ont abouti à une expression typique de la force exercée par l'écoulement externe à une particule en collision avec une autre. Cette expression qui est donnée par la loi de Stokes est illustrée par la relation suivante [2] :

$$F \sim R_{eq} 6\pi(\dot{\gamma} R_{eq})$$

Où  $\dot{\gamma}$  est la vitesse de déformation de la goutte et  $R$  est le rayon d'une goutte, et le temps d'interaction, qui est le temps écoulé par les particules pour qu'ils soient assez proche, est donné par [2] :

$$t_i = (\dot{\gamma})^{-1}$$

Ces deux équations indiquent que, si les particules sont assez proches, la force  $F$  ne dépend que par l'inclinaison de leurs axes et elle ne dépend pas par leur séparation. Le temps d'interaction  $t_i$  dépend de l'incidence des particules.

### • Les collisions inertielles :

Durant le régime visqueux, la collision des particules se fait par l'intermédiaire de l'écoulement externe. Ces particules tournent l'une autour de l'autre, et elles se séparent de nouveau si la coalescence n'aura pas lieu. Nous essayons d'étendre cette image dans le cas des collisions inertielles, en utilisant une vitesse caractéristique à la variation dans l'écoulement de base pour obtenir une expression de la force  $F$ . Comme, dans ce cas, les nombre de Reynolds sont largement plus grand que l'unité, l'écoulement est considéré turbulent. La vitesse de la variation caractéristique dans l'écoulement de base  $v$  est donnée comme suit :

$$v = (\epsilon d)^{1/3}$$

Et la force typique exercée par l'écoulement externe sur la particule est donnée par l'expression suivante :

---

<sup>1</sup>  $Re_d = \frac{\rho d v}{\mu}$ , où  $\rho$  est la densité,  $v$  la vitesse de rapprochement relative,  $d$  diamètre de la goutte et  $\mu$  est la viscosité de la phase dispersée.

$$F_{ext} \sim \rho v^2 d^2 \sim \rho d^2 (\varepsilon d)^{2/3}$$

Et le temps typique nécessaire pour qu'une particule passe une autre est donnée par :

$$t_{ext} \sim \frac{d}{v} \sim \left(\frac{d^2}{\varepsilon}\right)^{1/3}$$

## 1.6. Le temps de coalescence

Le temps de coalescence se définit comme le temps mis par une goutte se trouvant au voisinage immédiat d'une interface ou d'autre goutte pour coalescer. Le temps de coalescence  $t_{coal}$  est donc le temps écoulé entre les instants  $t_0$  et  $t_c$ , correspondant relativement à l'arrêt brusque de la goutte et à la rupture du film. La relation suivante illustre ce temps de coalescence.

$$t_{coal} = t_c - t_0$$

L'estimation de  $t_0$  n'est pas parfaitement précise, puisqu'elle est associée à un phénomène qualitatif, mais généralement, l'arrêt de la goutte est suffisamment satisfait pour que l'erreur commise sur cette estimation soit négligeable.

## 2.4. Le drainage

La deuxième phase de modélisation de la coalescence est le drainage du film entre les deux gouttes. La Fig 2.4.1 montre comment se fait le drainage du film après collision.

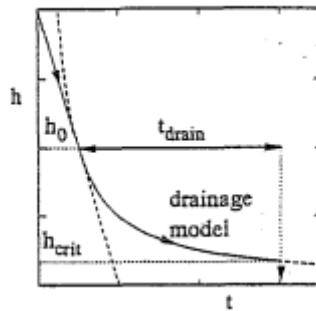


Figure 2.4.1 : Drainage en fonction de temps. [4]

Le type de drainage de film dépend de la mobilité de l'interface qui est fortement dépendant de ratio de viscosité  $\mu_d/\mu$  entre la phase dispersée et la phase continue.

Lorsque la viscosité de la goutte est faible par rapport à la viscosité de la phase continue, le drainage est totalement mobile (fully-mobile), voir Fig 2.4.2. Dans l'autre cas c'est-à-dire la viscosité de la phase continue est faible par rapport à la viscosité de la goutte ce qui correspond au cas de présence d'un surfactant, on a un drainage de type immobile. [4]

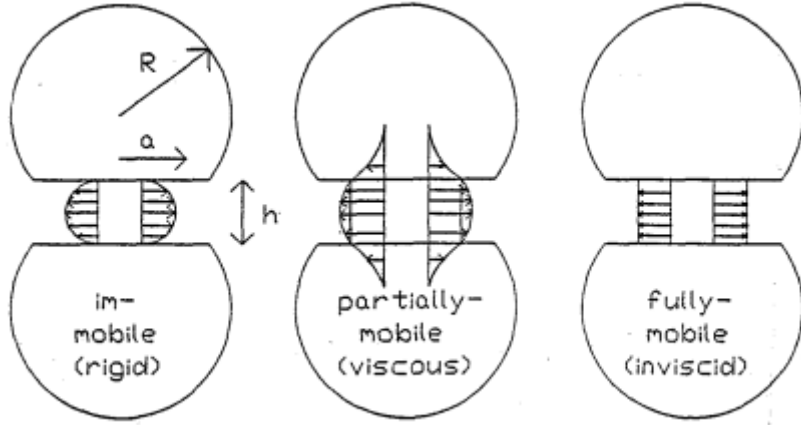


Figure 2.4.2 : Les types de drainage. [4]

### 2.4.1. Modèle d'interfaces immobiles

#### 1) Interfaces immobiles sous l'hypothèse d'écoulement parallèle dans le film

A la suite d'une collision, un aplatissement des gouttes est observé avant la fin de la phase du drainage. Ce modèle est utilisé si la phase dispersée est suffisamment visqueuse ou bien quand les surfaces des gouttes sont immobilisées par des tensio-actifs comme nous avons dit tout à l'heure.

La vitesse d'amincissement du film est donnée comme suit : [2]

$$V = \frac{8\pi\sigma^2 h^3}{3F\mu R_{eq}^2}$$

Où  $\sigma$  est la tension interfaciale,  $\mu$  la viscosité de la phase continue et  $F$  la force exercée par la goutte sur le film donnée par :

$$F = \frac{2\sigma}{R_{eq}} \pi a^2$$

Où  $a$  est la partie déformée du film.

L'épaisseur du film dans ce modèle est donnée par l'approximation suivante :

$$h \sim \sqrt{\frac{3F\mu R_{eq}^2}{16\pi\sigma^2}} t^{-1/2}$$

Ce modèle approxime le début de l'aplatissement des interfaces lorsque l'épaisseur du film atteint  $h_{apl}$  qui est approximée par :

$$h_{apl} \sim \frac{F}{2\pi\sigma}$$

On retiendra essentiellement de ce modèle que l'épaisseur du film varie comme  $t^{-\frac{1}{2}}$  et qu'elle est aussi proportionnelle à la racine carrée de la force appliquée.

## 2) Interfaces déformables immobiles

La Fig : 2.4.3 est une illustration de ce modèle.

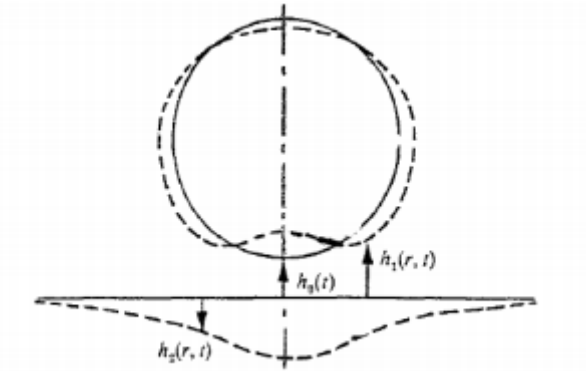


Figure 2.4.3 : Formation d'un film entre une goutte et une surface déformable. [2]

Les équations qui modélisent le drainage pour des interfaces immobiles en fonction des variables adimensionnelles suivante :

$h'$	$r'$	$t'$	$p'$	$u'$
$\frac{h}{h_0}$	$\frac{r}{\sqrt{h_0} R_{eq}}$	$\frac{t \Delta \rho g R_{eq}^2}{\mu}$	$\frac{p h_0}{\Delta \rho g R_{eq}^2}$	$\frac{u \mu}{\Delta \rho g R_{eq} h_0}$

Tableau 2.4.1 Variables adimensionnées interfaces déformable immobile.

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{1}{12 r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{r' h'^3 \partial p'}{\partial r'} \right)$$

$$-2 \delta p' = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{r' \partial h'}{\partial r'} \right) - 2$$

$$\int_0^\infty r' p' dr' = \frac{2}{3}$$

Avec  $u'=0$  aux interfaces  $z = \pm \frac{h}{2}$  et  $\delta = \frac{Bo R}{h_0}$  et  $Bo = \frac{\Delta \rho g R^2}{\sigma}$  est le nombre de Bond.

Ces équations ont été résolues numériquement par Yantsios et Davis [5] pour  $\delta = 0.025$ . La figure suivante donne l'évolution de  $h'$  en fonction de  $r'$  et  $t'$  :



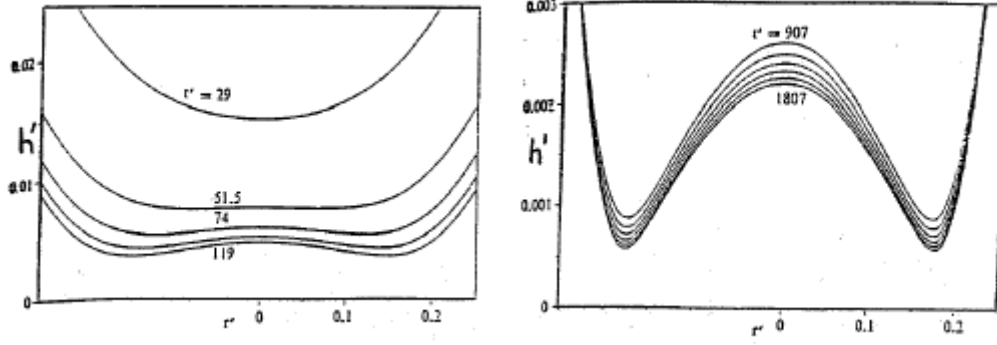


Figure 2.4.4 : Comparaison de l'allure de  $h'(r', t')$  pour un petit temps et un grand temps de drainage [5]

## 2.4.2. Modèle d'interfaces partiellement mobiles

### 1) Interfaces partiellement mobiles sous l'hypothèse d'écoulement parallèle dans le film

Dans le cas où les interfaces sont partiellement mobiles, les propriétés du fluide de la goutte ont une influence majeure sur le processus de drainage du film.

Pour calculer la valeur de l'épaisseur du film et la vitesse d'amincissement des interfaces, et vue l'influence de l'écoulement rampant dans la phase dispersée sur le drainage dans le film, il est nécessaire d'introduire le temps caractéristique d'amincissement du film  $t_f$ , et un temps de caractéristique de la croissance de la couche limite dans la goutte  $t_l$ .

$$t_f \sim \frac{h}{V}$$

$$t_l \sim \frac{\delta^2}{v_d}$$

Où  $\delta$  est l'épaisseur critique du film,  $v_d$  est la viscosité cinématique de la goutte et la force  $F$  est donné par le modèle du film plan parallèle :

Si  $t_l \ll t_f$ ,  $\delta$  le taux d'amincissement et l'épaisseur du film sont données comme suit :

$$F = \int_0^a 2\pi r p dr = \frac{2\sigma}{R_{eq}} \pi a^2$$

Où  $a$  est le rayon de la partie déformée du film où la pression y nulle.

Si  $t_l \ll t_f$ ,  $\delta$  le taux d'amincissement et l'épaisseur du film sont données comme suit :

$$V \sim 2 \left( \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right)^2 \frac{\pi h^2}{\mu_d F} a$$

$$h \sim \pi \mu_d \left( \frac{\sqrt{F}}{2 \left( \frac{2\sigma\pi}{R_{eq}} \right)^{3/2}} \right) t^{-1}$$

Si  $t_f \ll t_l$ ,  $\delta$  le taux d'amincissement et l'épaisseur du film sont données comme suit :

$$V = 1.58 \left( \frac{4\pi\sigma^2}{F R_{eq}^2 \sqrt{\rho_d \mu_d}} \right)^{2/3} h^{5/3}$$

$$h \sim 3.3^{-3/2} \left( \frac{F R_{eq}^2 (\rho_d \mu_d)^{3/2}}{4\pi\sigma^2} \right) t^{-3/2}$$

## 2) Interfaces déformables partiellement mobiles

Le système d'équations qui modélisent le drainage d'un film partiellement mobile entre deux gouttes en collision avec une vitesse de rapprochement constante [5]. Une étude plus détaillé est présenté dans les chapitres suivants. En utilisant les variables adimensionnelles suivant :

$h^*$	$r^*$	$t^*$	$p^*$	$u^*$	$\tau^*$	$v^*$
$\frac{h}{R_{eq} Ca^{2/3}}$	$\frac{r}{R_{eq} Ca^{1/3}}$	$\frac{tV}{R_{eq} Ca^{2/3}}$	$\frac{pCa R_{eq}}{\mu_d V}$	$\frac{uCa^{1/3}}{V}$	$\frac{\tau R_{eq} Ca^{2/3}}{\mu_d V}$	$\frac{vCa^{1/3}}{V}$

Tableau 2.4.2 Variables adimensionnées interfaces déformable partiellement mobile.

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* h^* u^*)}{\partial r^*}$$

$$\tau^* = -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}$$

$$\text{div}(\vec{v}^*) = 0$$

$$-\frac{1}{\rho_d} \vec{\nabla}^* p_d + v \Delta^* \vec{v}^* = 0$$

$$u^* = v^*$$

$$\tau^* + \tau_d^* = 0$$

$$p^* = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right]$$

$$h^* = h_0^* + r^{*2} \quad \text{à} \quad t^* = 0$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} = -1, \quad p' = 0 \quad \text{en} \quad r^* \rightarrow +\infty$$

La Fig 2.4.5. montre les résultats de résolution numérique du système d'équation.

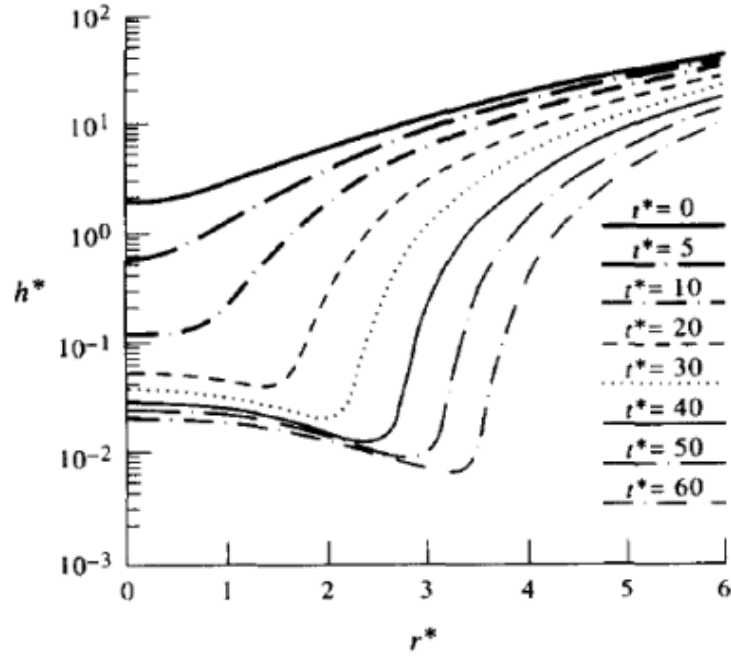


Figure 2.4.5 : Variation de l'épaisseur  $h$  en fonction  $t$ . [2]

### 2.4.3. Modèle d'interfaces totalement mobile

Quand la viscosité de la phase dispersive est petite devant celle de la phase continue, le drainage est contrôlé par la résistance du film à la déformation et à l'accélération. Dans ce modèle, nous distinguons deux cas de drainage, le premier cas où le drainage a un caractère très visqueux et le deuxième, où le drainage est maîtrisé par les forces d'inertie.

Dans le premier cas, le taux d'amincissement du film est indépendant du rayon du film  $a$  est donc la force  $F$ , et il s'écrit comme suit :

$$V = -\frac{2\sigma h}{3\mu R_{eq}}$$

Et l'épaisseur du film est donné par l'équation suivante :

$$h = h_0 \exp\left(-\frac{t}{t_{ch}}\right)$$

Où  $t_{ch}$  est un temps caractéristique donné par :

$$t_{ch} = 3\mu \frac{R_{eq}}{2\sigma}$$

Dans le deuxième cas où les forces d'inertie maîtrisent le drainage, et en supposant un vitesse d'amincissement constante, l'épaisseur du film est donnée par l'équation suivante :

$$h = h_0 \exp\left(-\frac{t}{t_{ch}}\right)$$

Où  $t_{ch}$  est un temps caractéristique donné par :

$$t_{ch} = \frac{\rho V R_{eq}^2}{8\sigma}$$

Des résultats numériques du couplage déformation-écoulement du film sous l'hypothèses de vitesse constante, ont été obtenus pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds, qui détermine si le régime est contrôlé par les forces visqueuses ou inertielles, et du nombre de Weber qui représente un ratio entre les forces inertielles et capillaires. Dans le cas d'écoulement non visqueux, un système d'équations universel est obtenu grâce aux changements de variables adéquats : [5]

$$h^* = \frac{h}{R We}$$

$$r^* = \frac{r}{RWe^{\frac{1}{2}}}$$

$$t^* = \frac{tV}{RWe}$$

Si on retient maintenant les termes visqueux, le nombre de Reynolds sera un paramètre supplémentaire dans la suite. L'équation décrivant le drainage inertiel et visqueux, basé sur le modèle de film plan parallèle est la suivante :

$$h^* = h_0^* \exp(-t^*) \quad \text{avec} \quad Re = 1$$

## 2.5. La rupture

Pour les films épais (d'une épaisseur  $h > 103 \text{ \AA}$ ), l'effet des forces intermoléculaires peut être bien représenté par la tension interfaciale. Lorsque l'épaisseur du film de drainage est suffisamment petite ( $h < 102 \text{ \AA}$ ), les attractions de van der Waals vont apporter leur contribution, tout comme le phénomène de double couches électriques ainsi que les réarrangements de la structure liquide. Cependant, certains de ces effets ne sont pas faciles à représenter sous une forme analytique et même l'ordre de grandeur de plusieurs paramètres physiques qui sont en jeu est inconnu.

Les doubles couches sont souvent négligées sous prétexte qu'il n'y a pas d'électrolytes dans le système ou alors que la concentration des électrolytes est suffisamment grande pour venir à bout de cette force stabilisante. L'effet des forces de van der Waals peut être représenté par une force radiale par unité de volume. Pour un film suffisamment fin et pour une petite pente du film, il s'en suit : [4]

$$F_w = \frac{A}{2\pi h^4} \frac{\partial h}{\partial r}$$

Où A correspond à la constante de Hamaker ( $A \sim 10\text{-}20 \text{ J}$ ). L'équation précédente peut être dérivée du concept de la pression de disjonction  $\Pi$  (la force par unité de l'aire du film requise pour compenser l'attraction de van der Waals) : [4]

$$\Pi = -\frac{A}{6\pi h^3}$$

Cette pression devient de plus en plus importante à mesure que h augmente. L'expression de  $\Pi$  est déduite de la dépendance en l'épaisseur h de la densité surfacique d'énergie.

$$f = 2\sigma - \frac{A}{12\pi h^2}$$

Dans le cas des films partiellement mobiles et d'une vitesse d'approche constante, il a été prouvé que l'amincissement en présence des forces de van der Waals est localement accéléré et que la rupture ne tarde pas à suivre. Cet effet de déstabilisation devient de plus en plus important à mesure que la quantité sans dimension augmente : [2]

$$A^* = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{\sigma R_{eq}^2 C a^2}$$

## 2.6. Le tensio-actif (Surfactant)

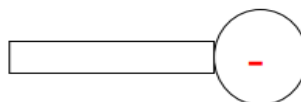
Un **tensio-actif** ou **agent de surface** (**surfactant** en anglais) est un composé qui modifie la tension superficielle entre deux surfaces.

Les composés tensioactifs sont des molécules amphiphiles, c'est-à-dire qu'elles présentent deux parties de polarité différente, l'une lipophile (qui retient les matières grasses) et apolaire, l'autre hydrophile (miscible dans l'eau) et polaire.

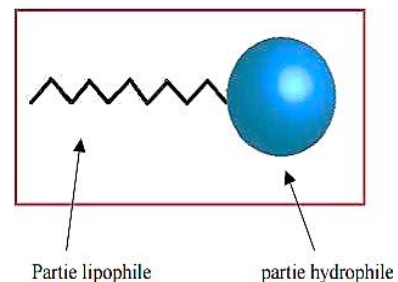
Ils permettent ainsi de solubiliser deux phases non miscibles, en interagissant avec l'une apolaire (c'est-à-dire lipophile donc hydrophobe), par sa partie hydrophobe ; tandis qu'avec l'autre phase qui est polaire, il interagira par sa partie hydrophile.

On peut distinguer quatre types des Surfactants :

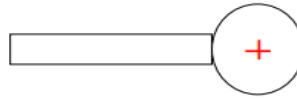
- **Les tensioactifs anioniques**



Anionique : tête hydrophile chargée négativement.

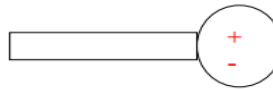


## ▪ Les tensioactifs cationiques



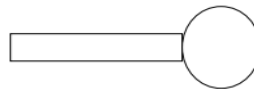
Cationique : tête hydrophile chargée positivement.

## ▪ Les tensioactifs amphotères



Amphotère : tête hydrophile chargée à la fois positivement et négativement.

## ▪ Les tensioactifs non ioniques



Non-ionique : pas de charge.

Ici, seul le cas le plus simple d'agents tensio-actifs non ioniques est envisagée.

## Influence des agents tensio-actifs

La présence d'agents tensio-actifs dans la phase continue est une variable importante dans le processus de la coalescence, pour la détermination du comportement de l'épaisseur du film. Généralement, les agents tensio-actifs (en fonction de la concentration et le type), tout en résidant sur l'interface, causent l'immobilité de l'interface et donnent un aplatissement de la goutte. De plus, la probabilité de rupture du film diminue par des changements dans la tension interfaciale. L'immobilité est due au drainage qui balaye les agents tensio-actifs hors du film, comme illustré sur la Fig 2.6.1. Étant donné que la tension interfaciale diminue à mesure que la concentration augmente (voir Fig 2.6.2) et ce gradient interfaciale oppose le drainage, le film est stabilisé de sorte que le taux de coalescence se ralentie. Ceci explique pourquoi des dispersions contenant des tensioactifs sont généralement longue durée.

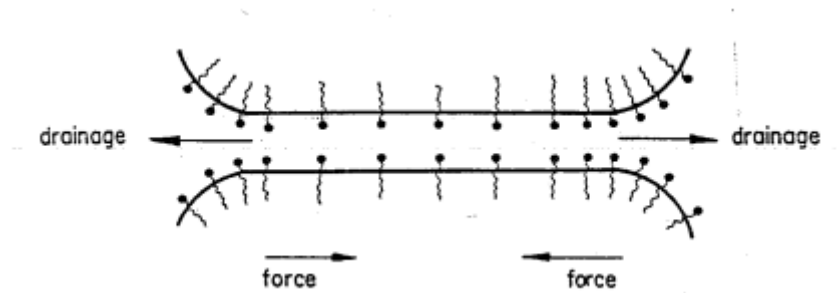


Figure 2.6.1: Influence du Surfactant sur le drainage du film. [4]

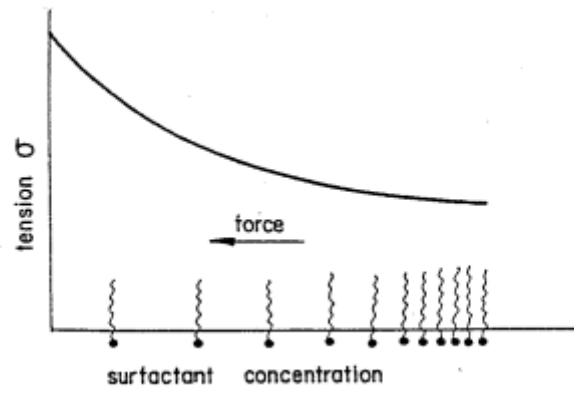


Figure 2.6.2 : Variation de concentration de surfactant en fonction de la tension de surface. [4]

# Chapitre 3 : Formulation mathématique du problème de coalescence

## 3.1. Introduction

Lorsque les deux gouttes s'approchent suffisamment, le fluide piégé entre elles est évacué à cause de l'augmentation de pression au centre du film. Nous pouvons ainsi étudier le comportement post-collision à travers l'étude de l'épaisseur du film qui dépend du temps et de l'espace. Nous pouvons ainsi prédire s'il y'aura coalescence ou répulsion des deux gouttes. En effet, si la rupture du film a lieu, les deux gouttes coalescent. Dans le cas contraire, l'épaisseur du film diminue jusqu'à atteindre une épaisseur critique et elles se repoussent ensuite (les résultantes des forces répulsives l'emportent sur les forces attractives).

On se propose d'étudier le drainage du film de fluide entre les deux interfaces des gouttes dans le cas d'un liquide pur et le cas lorsque le surfactant se présente. Donc dans ce chapitre nous allons déterminer les modèles mathématiques dans le film (équation de continuité et le taux de cisaillement), dans les interfaces et dans les deux gouttes dans les deux cas.

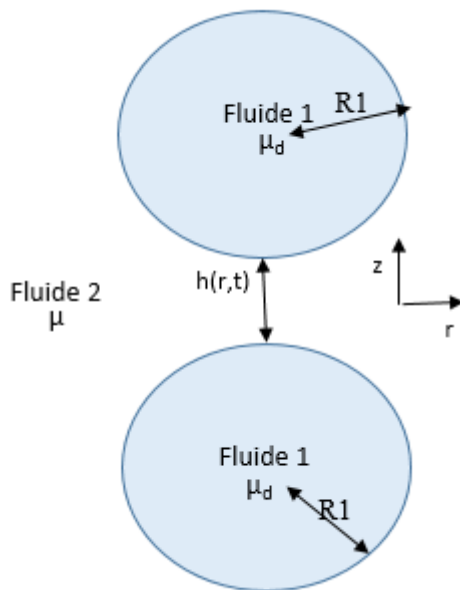


Figure 3.1.1 : Cas d'un liquide pur.

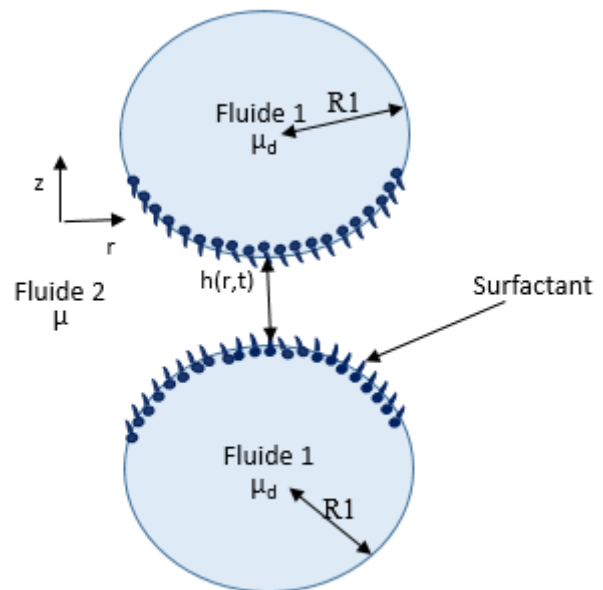


Figure 3.1.2 : Cas d'un liquide avec surfactant.

## 3.2. Modélisation mathématique du drainage pour un liquide pur

### 3.2.1. L'équation de continuité de l'épaisseur h

On part des équations de Navier-Stokes et de l'équation de conservation de masse pour faire la démonstration des équations aux dérivées partielles régissant l'évolution de l'épaisseur  $h$  du film ainsi que les simplifications dues aux hypothèses qu'on va leur imposer.



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (C.M)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g} \quad (N.S)$$

On suppose que :

- Les forces d'inerties sont négligeables → On peut éliminer le terme  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}$
- Les forces de volume sont négligeables → On peut s'affranchir de  $\rho \vec{g}$
- Le fluide est incompressible →  $\rho = \text{cte}$
- Le régime est pseudo-stationnarité →  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \sim 0$

Ce qui nous donne :

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} = 0$$

Développons ces équations en coordonnées cylindriques, en tenant compte de la symétrie de révolution et  $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] = 0$$

On pose :

$r'$	$z'$	$t'$	$u'_r$	$u'_z$	$p'$
$\frac{r}{R_{eq}}$	$\frac{z}{\epsilon R_{eq}}$	$\frac{tV}{R_{eq}}$	$\frac{T}{R_{eq}} u_r$	$\frac{T}{\epsilon R_{eq}} u_z$	$\frac{T \epsilon^2}{\rho \nu} p$ $= \alpha p$

Tableau 3.2.1 : Variables adimensionnées pour l'équation de continuité.

Avec :

$R_{eq}^{-1} = \frac{1}{2} (R_1^{-1} + R_2^{-1})$  : Avec  $R_1$  et  $R_2$  sont respectivement le rayon de la goutte 1 et la goutte 2.

$h$  : épaisseur du film.

$\varepsilon=h/R$  : rapport de l'épaisseur du film sur sa dimension latérale.  $\varepsilon \ll 1$

$T$  : est un temps caractéristique de l'écoulement.

Réécrivons notre système d'équations avec les nouvelles variables adimensionnées :

L'équation de (C.M) nous donne :  $\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0$

La première équation de (N.S) :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right] = 0 \\ & -\frac{1}{\alpha \rho R_{eq}} \frac{\partial p'}{\partial r'} + \nu \left[ \frac{1}{R_{eq} r'} \frac{1}{R_{eq}} \frac{\partial}{\partial r'} \left( R_{eq} r' \frac{R_{eq}}{R_{eq} T} \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) + \frac{R_{eq}}{T \varepsilon^2 R_{eq}^2} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} - \frac{R_{eq}}{T R_{eq}^2} \frac{u'_r}{r'^2} \right] = 0 \\ & -\frac{1}{\alpha \rho R_{eq}} \frac{\partial p'}{\partial r'} + \nu \left[ \frac{1}{R_{eq} r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{1}{T} \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) + \frac{1}{T \varepsilon^2 R_{eq}} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} - \frac{1}{T R_{eq}} \frac{u'_r}{r'^2} \right] = 0 \\ & -\frac{T}{\alpha \rho \nu} \frac{\partial p'}{\partial r'} + \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} - \frac{u'_r}{r'^2} \right] = 0 \\ & -\frac{T \varepsilon^2}{\alpha \rho \nu} \frac{\partial p'}{\partial r'} + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) - \frac{u'_r}{r'^2} \right] + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} = 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$-\frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) - \frac{u'_r}{r'^2} \right] = 0$$

De même pour la deuxième équation de (N.S), nous allons appliquer la même procédure avec les mêmes variables adimensionnées :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] = 0 \\ & -\frac{1}{\rho \alpha \varepsilon R_{eq}} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \nu \left[ \frac{1}{R_{eq} r'} \frac{1}{R_{eq}} \frac{\partial}{\partial r'} \left( R_{eq} r' \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} T} \frac{\partial u'_z}{\partial r'} \right) + \frac{\varepsilon R_{eq}}{T \varepsilon^2 R_{eq}^2} \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right] = 0 \\ & -\frac{T}{\rho \alpha \nu \varepsilon} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \varepsilon \frac{\partial u'_z}{\partial r'} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right] = 0 \\ & -\frac{1}{\varepsilon^3} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \varepsilon \frac{\partial u'_z}{\partial r'} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

On aura donc :

$$-\frac{\partial p'}{\partial z'} + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_z}{\partial r'} \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} = 0$$

Ainsi nous arrivons aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} &= 0 \\ -\frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} + \epsilon^2 \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) - \frac{u'_r}{r'^2} \right] &= 0 \\ -\frac{\partial p'}{\partial z'} + \epsilon^4 \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_z}{\partial r'} \right) \right] + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} &= 0 \end{aligned}$$

Or  $\epsilon = \frac{h}{R} \ll 1$ , alors nous pouvons donc simplifier le système d'équations précédent pour aboutir au système suivant :

$$\frac{\partial p'}{\partial r'} = \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0 \quad (3)$$

D'après l'équation (2) on montre que la pression ne dépend pas de la variable  $z$ .

Intégrons l'équation (1) par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial p'}{\partial r'} z' = \frac{\partial u'_r}{\partial z'} + C_1$$

Or la vitesse radiale  $u_r$  est maximale en  $z=0$  ce qui donne  $\frac{\partial u'_r}{\partial z'} = 0$  en  $z'=0$  donc  $C_1=0$ .

On intègre encore une fois l'équation obtenue :

$$\frac{\partial p'}{\partial r'} \frac{z'^2}{2} = u'_r + C_2$$

La continuité de la vitesse sur l'interface donne  $u'_r = 0$  en  $z' = \pm \frac{h'}{2}$  et donc :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\partial p'}{\partial r'} \frac{\left(\frac{h'}{2}\right)^2}{2} \\ u'_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ z'^2 - \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

Nous utiliserons cette expression pour déduire la valeur de  $u'_z$  en utilisant l'équation de conservation (3) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{2} r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ z'^2 - \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right] \right) + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} &= 0 \end{aligned}$$

Intégrons cette équation par rapport à  $z'$  :

$$\frac{1}{2r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ \left( \frac{h'}{2} \right)^2 z' - \frac{z'^3}{3} \right] \right) = u'_z + C_3$$

Finalement, en utilisant la continuité de la composant  $u'_z$  à l'interface on obtient :

$$\frac{1}{2r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ \left( \frac{h'}{2} \right)^2 \frac{h'}{2} - \frac{h'^3}{24} \right] \right) = \frac{\partial \left( \frac{h'}{2} \right)}{\partial t'}$$

Donc l'équation qui modélise la variation de l'épaisseur du film  $h$  est :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ \frac{h'^3}{12} \right] \right)$$

Et le taux de cisaillement est donné par : [2]

$$\tau' = -\frac{h'}{2} \frac{\partial p'}{\partial r'}$$

### 3.2.2. Les conditions aux limites et aux interfaces

Lorsque les gouttes s'approchent, les interfaces se déforment sous l'effet de la pression qui est maximale au centre. Nous pouvons considérer que la zone extérieure est non déformée et que la pression  $y$  est nulle :

$$p = 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -V \text{ pour } r \rightarrow \infty$$

Où  $V$  est la vitesse de rapprochement des gouttes.

En ce qui concerne l'expression de la pression aux interfaces  $z = \pm \frac{h}{2}$  : [2]

$$p_d - p = \sigma \left[ \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right]$$

Où  $R_a$  et  $R_b$  sont les rayons de courbures.

Les rayons de courbures peuvent se ramener à des expressions plus simples données par : [4]

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{2r} \frac{\partial h}{\partial r}$$

On obtient donc :

$$p_d - p = \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right]$$

Or à l'extérieur de la partie déformée du film, la pression est considérée nulle. Cette partie étant non déformée nous pouvons également écrire que  $R_a = R_b = R$ . Ce qui nous laisse déduire la valeur de  $p_d = \frac{2\sigma}{R}$ .

On aura finalement :

$$p = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right]$$

On utilise l'adimensionnement du tableau 3.2.1 :

$$\frac{Ca}{\epsilon^2} p' = 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial h'}{\partial r'} \right]$$

Où  $Ca = \frac{\mu V}{\sigma}$  est le nombre capillaire.

### 3.2.3. Les conditions initiales

A  $t=0$ , nous pouvons considérer la figure suivante : [2]

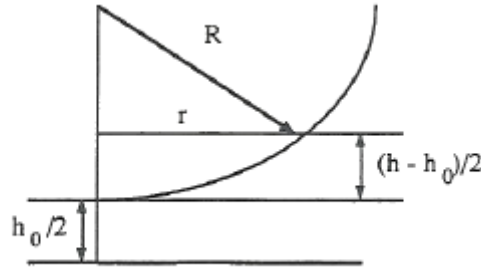


Figure 3.2.1 : Détermination de l'épaisseur initiale géométriquement [2]

Comme l'épaisseur initiale est relativement grande nous pouvons écrire : [2]

$$R^2 = \left( R - \frac{h-h_0}{2} \right)^2 + r^2$$

Compte tenu de l'hypothèse  $\frac{\partial h}{\partial r} \ll 1$  cette expression se simplifie en :

$$h = h_0 + \frac{r^2}{R} \quad \text{à} \quad t = 0$$

Après adimensionnement :

$$h' = h'_0 + r'^2 \quad \text{à} \quad t' = 0$$

### 3.2.4. Système d'équations final

Le système d'équations gouvernant le problème de coalescence sous les variables adimensionnées posées précédemment :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial p'}{\partial r'} \left[ \frac{h'^3}{12} \right] \right)$$

$$\tau' = -\frac{h'}{2} \frac{\partial p'}{\partial r'}$$

$$\frac{Ca}{\epsilon^2} p' = 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial h'}{\partial r'} \right]$$

$$h' = h'_0 + r'^2 \quad \text{à} \quad t' = 0$$

$$p' = 0 \quad \text{pour} \quad r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = -V \quad \text{pour} \quad r \rightarrow \infty$$

On applique l'adimensionnement suivant en posant  $\beta = \frac{ca}{\epsilon^2}$  :

$r^*$	$h^*$	$t^*$	$p^*$	$u^*$	$\tau^*$
$\frac{r'}{\sqrt{\beta}}$	$\frac{h'}{\beta}$	$t'$	$\beta p'$	$\frac{u'}{\beta}$	$\sqrt{\beta} \tau'$

Tableau 3.2 Variables adimensionnées du système final

Le système final adimensionné et universel est le suivant :

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* h^* u^*) = 0$$

$$\tau^* = -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}$$

$$p^* = 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right]$$

$$h^*(r^*, t^* = 0) = h_{ini}^* + r^{*2}$$

$$p^*(r^* \rightarrow \infty) = 0$$

$$-\left( \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right)_{r^* \rightarrow \infty} = V$$

Avec  $u^*$  la vitesse de drainage :

$$u^* = -\frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = u_u^*$$

Qu'on le détermine par la méthode des équations intégrales de surface : [2]

$$u_u^*(r^*) = \int_0^{r_{limite}^*} \phi(r^*, r^+) \tau_{gou}^*(r^+) dr^+$$

Avec  $\phi(r^*, r^+)$  le noyau de Green donné par :

$$\phi(r^*, r^+) = \frac{r^+}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta) d\theta}{(r^{*2} + r^{+2} - 2r^+ r^* \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}$$

### 3.3. Modélisation mathématique du drainage pour un liquide en présence d'un Surfactant

On peut distinguer trois effets des tensio-actifs : l'effet Marangoni, l'effet de double couche électrique et l'effet de répulsion stérique. Dans ce projet on va s'intéresser à l'effet Marangoni. En effet la pression en milieu augmente et repousse les surfactants vers les

extrémités mais la force Marangoni consiste à les repousser pour bien répartir les surfactants Fig 3.3.1.

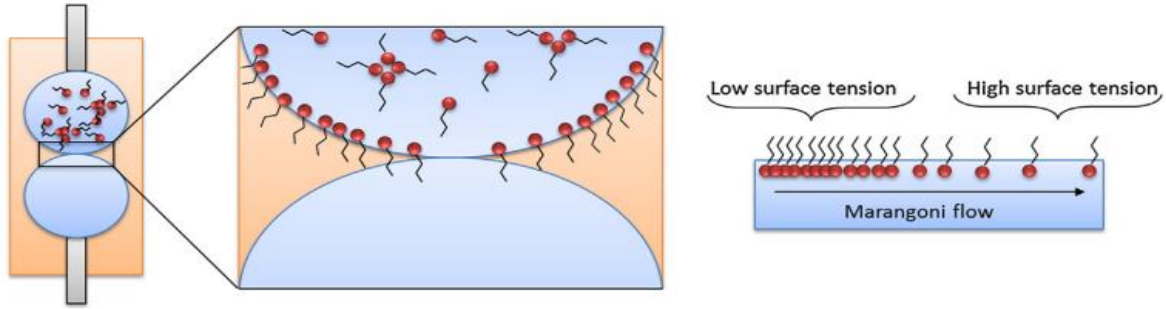


Figure 3.3.1 : L'effet Marangoni. [7]

### 3.3.1. Influence du Surfactant sur l'équation de taux de cisaillement

On suppose que nous avons un surfactant dans les interfaces des deux gouttes, non ionique et avec une faible concentration.

La concentration des surfactants est donnée par :

$$\Gamma = kC \quad (i)$$

La pression de surface  $\Pi$  est donnée par :

$$\Pi = \sigma_{pure} - \sigma = \Gamma R_G T \quad (ii)$$

Avec  $R_G$  la constante de gaz,  $T$  la température absolue et  $\sigma_{pure}$  la tension interfaciale en absence de surfactant.

On suppose que la diffusion radiale est négligeable, donc on a une diffusion latérale.

$$hS = \text{constante}$$

$$ChS + 2\Gamma S = C_0 hS \quad (iii)$$

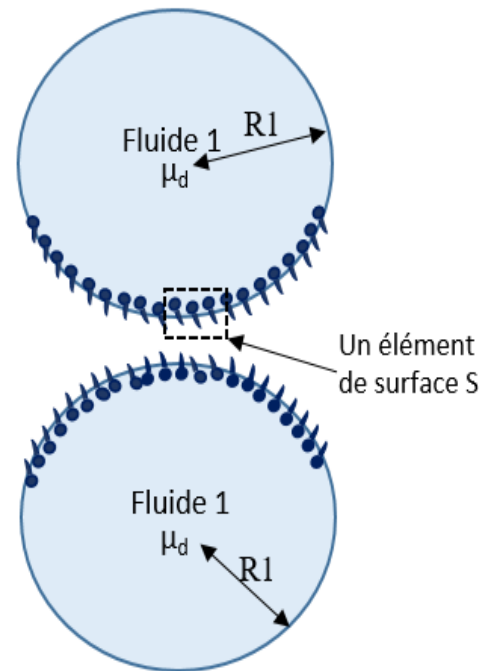
On multiplie (iii) par  $k$ , on obtient :

$$kChS + 2k\Gamma S = kC_0 hS$$

Ce qui nous donne en utilisant (i) :

$$\Gamma = \frac{kC_0 h}{h + 2k}$$

On utilise maintenant (ii) on aura :



$$\sigma = \sigma_{pure} - \frac{kC_0R_GT}{1 + \frac{2k}{h}}$$

Déterminons maintenant l'équation de taux de cisaillement :

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \sigma_{pure} - \frac{kC_0R_GT}{1 + \frac{2k}{h}} \right) \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{kC_0R_GT}{\frac{2k}{h} \left(1 + \frac{h}{2k}\right)} \right) \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} - C_0R_GT \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h}{2 \left(1 + \frac{h}{2k}\right)} \right) \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} - C_0R_GT \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2 \left(1 + \frac{h}{2k}\right) \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{k} \frac{\partial h}{\partial r}}{4 \left(1 + \frac{h}{2k}\right)^2} \right)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\tau = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{C_0R_GT}{2 \left(1 + \frac{h}{2k}\right)^2} \frac{\partial h}{\partial r}$$

Nous utilisons les variables adimensionnées utilisées précédemment, nous obtenons :

$$\tau^* = -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} - \frac{C^*}{2 \left(1 + \frac{h^*}{2k^*}\right)^2} \frac{\partial h^*}{\partial r^*}$$

Avec :

$$C^* = \frac{C_0R_GT}{\frac{\sigma_{pure}}{R_{eq}}}$$

Et

$$k^* = \frac{k}{R_{eq} C_a^{2/3}}$$

### 3.3.1. Système d'équations final



Le système final adimensionné et universel de la coalescence en présence d'un surfactant est le suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* h^* u^*) &= 0 \\
\tau^* &= -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} - \frac{C^*}{2(1 + \frac{h^*}{2k^*})^2} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \\
p^* &= 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right] \\
h^*(r^*, t^* = 0) &= h_{ini}^* + r^{*2} \\
p^*(r^* \rightarrow \infty) &= 0 \\
-\left( \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right)_{r^* \rightarrow \infty} &= V \\
u^* = u_u^*(r^*) &= \int_0^{r_{limite}^*} \phi(r^*, r^+) \tau_{gou}^*(r^+) dr^+
\end{aligned}$$

Avec  $\phi(r^*, r^+)$  le noyau de Green donné par :

$$\phi(r^*, r^+) = \frac{r^+}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta) d\theta}{(r^{*2} + r^{+2} - 2r^+ r^* \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}$$

# Chapitre 4 : Résolution numérique de la phase drainage

## 4.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire l'étude numérique des équations qui modélisent le problème de drainage d'un film liquide entre deux gouttes en présence d'un surfactant, afin de résoudre numériquement les équations de drainage.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* h^* u^*) &= 0 \\ \tau^* &= -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} - \frac{C^*}{2(1 + \frac{h^*}{2k^*})^2} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \\ p^* &= 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right] \\ h^*(r^*, t^* = 0) &= h_{ini}^* + r^{*2} \\ p^*(r^* \rightarrow \infty) &= 0 \\ -\left( \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right)_{r^* \rightarrow \infty} &= V\end{aligned}$$

Ce travail a été fait par notre collègue A. RABHI dans le cadre d'un PFE mais sans intervenir à la notion du surfactant. Donc notre objectif est de partir de démarche qu'il a suivie afin de pouvoir résoudre notre problème tout en satisfaisant nos hypothèses.

## 4.2. Algorithme de résolution

On calcule la valeur de pression à partir de l'équation d'interface ce qui va nous permettre de calculer le taux de cisaillement et par la suite on calcule la vitesse de drainage. Ensuite, on la résolution de l'équation de continuité et de l'équation de convection-diffusion et on incrémente la variable temps.

L'organigramme suivant résume la procédure de résolution :

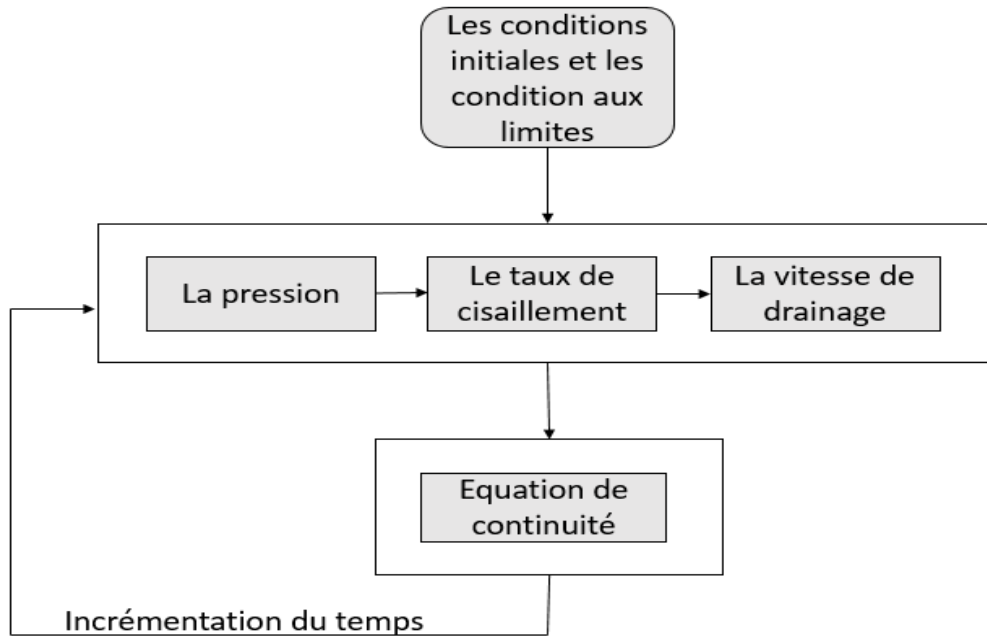


Figure 4.2 : Algorithme de résolution.

### 4.3. Discrétisation des équations

Il existe plusieurs approches et méthodes pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles tel que la méthode des différences-finis, la méthode des éléments-finis, la méthode des volumes-finis... Dans ce travail on va choisir comme méthode la méthode des différences-finis.

#### 4.3.1. Discrétisation de l'équation de pression

L'équation de pression :

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right) - 2 \right]$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} \right]$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 h^*}{\partial r^{*3}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right]$$

L'équation de pression contient des dérivées spatiales de premier et de second ordre. Ces dérivées sont approchées par des schémas centrés d'ordre 4.

$$\left( \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right)_i^n = \frac{h_{i-2}^n - 8h_{i-1}^n + 8h_{i+1}^n - h_{i+2}^n}{12\Delta r^*}$$

$$\left( \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} \right)_i^n = \frac{-h_{i-2}^n + 16h_{i-1}^n - 30h_i^n + 16h_{i+1}^n - h_{i+2}^n}{12\Delta r^{*2}}$$

$$p_i^{*n} = 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{-h_{i-2}^{*n} + 16h_{i-1}^{*n} - 30h_i^{*n} + 16h_{i+1}^{*n} - h_{i+2}^{*n}}{12\Delta r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{h_{i-2}^{*n} - 8h_{i-1}^{*n} + 8h_{i+1}^{*n} - h_{i+2}^{*n}}{12\Delta r^*} \right]$$

$$p_i^{*n} = 2 - \frac{1}{24\Delta r^{*2}} \left[ \left(\frac{1}{i} - 1\right) h_{i-2}^{*n} + \left(16 - \frac{8}{i}\right) h_{i-1}^{*n} - 30h_i^{*n} + \left(16 + \frac{8}{i}\right) h_{i+1}^{*n} - \left(\frac{1}{i} + 1\right) h_{i+2}^{*n} \right]$$

### 4.3.2. Discrétisation de l'équation de taux de cisaillement

Le taux de cisaillement est donné par l'équation suivante :

$$\tau^* = -\frac{h^*}{2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} - \frac{C^*}{2(1 + \frac{h^*}{2k^*})^2} \frac{\partial h^*}{\partial r^*}$$

On remplace  $p^*$  par son expression pour qu'on obtient :

$$\tau^* = \frac{h^*}{4} \left( \frac{\partial^3 h^*}{\partial r^{*3}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right) - \frac{C^*}{2(1 + \frac{h^*}{2k^*})^2} \frac{\partial h^*}{\partial r^*}$$

Nous utilisons la discrétisation précédente et la discrétisation de dérivée spatiale d'ordre 3 :

$$\left( \frac{\partial^3 h^*}{\partial r^{*3}} \right)_i^n = \frac{-h_{i-2}^{*n} + 2h_{i-1}^{*n} - h_{i+1}^{*n} + h_{i+2}^{*n}}{2\Delta r^{*3}}$$

### 4.3.3. Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est équation hyperbolique non linéaire. Nous utilisons la méthode de Lax-Wendroff d'ordre 2 en temps et en espace pour la résoudre.

L'équation de continuité peut s'écrire :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

En effet :

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* h^* u_u^*) = 0$$

Comme  $r^*$  est indépendante de  $t^*$  donc :

$$\frac{\partial (r^* h^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* h^* u_u^*) = 0$$

On pose  $\hat{h}^* = r^* h^*$ . L'équation devient :

$$\frac{\partial \hat{h}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial f(\hat{h}^*)}{\partial r^*} = 0$$

Où,  $f(x(r^*, t^*)) = u_u^*(r^*, t^*) x(r^*, t^*)$ .

Le schéma de Lax-Wendroff s'écrit :

$$\hat{h}_i^{*n+1} = \hat{h}_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{2\Delta r^*} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{\Delta t^{*2}}{2\Delta r^*} (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

Avec  $f_i^n = f(\hat{h}_i^{*n})$ .

Schéma centré de second ordre de précision et stable sous la condition de *CFL*

#### 4.4. Résultats de la simulation

Après la compilation du notre programme on obtient les résultats suivants pour l'épaisseur du film :

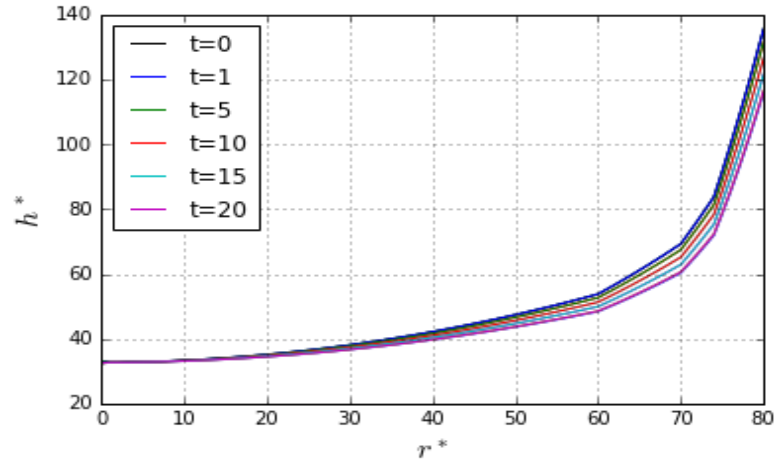


Figure 4.4.1 : Résultat de la simulation :  $h^*$  en fonction de  $r^*$  et  $t^*$ .

**Remarque :** Nous n'avons pas pu terminer la compilation jusqu'à bout alors on s'est arrêté pour  $t=20$  à cause du temps de la compilation qui est très lent.

Donc on va comparer ces résultats avec un travail effectué par Dr. Sami.

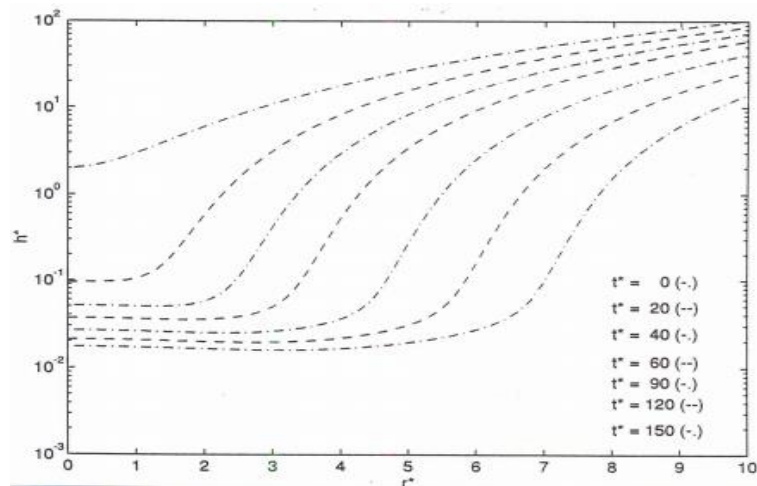


Figure 4.4.2 : Résultat de simulation réalisé par Dr. Sami. [6]

En comparant les deux figures on remarque qu'on doit augmenter le nombre des pas en  $r^*$  pour que la figure soit complète.

# Conclusion

Pendant ce stage ingénieur nous avons travaillé sur un sujet très important lié à la mécanique des fluides qui est la coalescence de deux gouttes en présence d'un surfactant. Nous avons étudié différents travaux effectués sur ce problème pour bien comprendre le phénomène de la coalescence qui se constitue principalement de trois phases, commençant par la phase de collision et, après un temps bien déterminé qu'on appelle Le temps de collision, vient la phase de drainage de film, puis la dernière phase qu'est la rupture, dans laquelle soit nous obtenons une seule goutte (la fusion des deux gouttes), soit une séparation des deux gouttes. Ensuite nous avons modélisé le problème en équations mathématique en se basant sur des hypothèses bien déterminées, telles qu'un Surfactant non-ionique et de faible concentration... afin de simplifier les formulations mathématiques, et finalement nous avons résolu numériquement ces équations à l'aide de la méthode des différences finies et sous Matlab.

Ce travail était vraiment très enrichissant d'un point de vue scientifique, car il nous a permis de bien comprendre la mécanique des fluides, les écoulements diphasiques dispersés, les schémas et les méthodes numériques, outils indispensables pour un ingénieur en modélisation et simulation numérique. Aussi c'est un domaine de recherche très demandé et ce stage a été pour moi une expérience très intéressante et bénéfique pour moi, car j'envisage de continuer dans le domaine de la mécanique des fluides numériques.

# Références bibliographiques

- [1] Allan K. Chesters et Ivan B. Bazhlekoy. Effect of Insoluble Surfactants on Drainage and Rupture of a Film between Drops Interacting under a Constant Force, *Section Materials Technology, Eindhoven University of Technology, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands*. June 23, 1999; accepted July 5, 2000.
- [2] A. Rabhi. *Modélisation des écoulements diphasiques et dispersés - Problème de la coalescence de deux gouttes*. PFE, ENIT-I2E, 2015.
- [3] Pierre Le Perchec. *Familles de tensioactifs (Les molécules de la beauté, de l'hygiène et de la protection)*, CNRS Editions/Nathan.
- [4] J. Cosijnse, *Experimental and numerical research of coalescence of two approaching drops in liquid-liquid dispersions*, Master, University of Eindhoven, 1994.
- [5] S. G. Yiantsios et R. H. Davis, «*On the buoyancy-driven motion of a drop towards a rigid surface or a deformable interface*» *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 217, pp. 547-573, 1990.
- [6] Abid, S., *Expériences physiques et numériques de coalescence entre deux gouttes immergées dans un autre liquide*. Ph.D, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, 1993.
- [7] E. Nowak, Nina M. Kovalchuk, Zhizhao Che et Mark J.H. Simmons, *Effect of surfactant concentration and viscosity of outer phase during the coalescence of a surfactant-laden drop with a surfactant-free drop* School of Chemical Engineering, University of Birmingham, United Kingdom, 2016.
- [8] Site de la Société de l'ingénierie de l'Environnement et de l'Energie - I2E [www.i2e.tn/Français/Acceuil.aspx](http://www.i2e.tn/Français/Acceuil.aspx) (consulté le 4/10/2016)