Projet collaboratif : Pollen

Partie Élasticité linéaire dans un domaine axisymétrique

Nabil Belahrach & Alexandre Corizzi

Université de Strasbourg – U.F.R. de Mathèmatiques et d'Informatique

Novembre 2015

Plan

1. Présentation du problème
2. Formulation des équations
   - Principaux acteurs
   - Problème aux Valeurs Propres
   - Formulation faible
   - Changement de variables
3. Éxpérimentation

Présentation du problème

Schéma de la buse

FIGURE : Buse reliée à la vis d'extrusion

Schéma de la buse

Propriétés élastiques :

- Matériau homogéne isotrope

Schéma de la buse

Propriétés élastiques :

- Matériau homogéne isotrope
- Loi de Hooke en 3D

Schéma de la buse

Propriétés géométriques :

- Axisymétrique

Schéma de la buse

Propriétés géométriques :

- Axisymétrique
- Utilisation de Coordonnées cylindriques

Schéma de la buse

Propriétés géométriques :

- Axisymétrique
- Utilisation de Coordonnées cylindriques
- Passage à un Problème 2D

Formulation des équations

Déplacement et déformation

- Vecteur de déplacement : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

Déplacement et déformation

- Vecteur de déplacement : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Déplacement et déformation

- Vecteur de déplacement : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

- On définit le *tenseur des déformations* symétrique :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u +^t \nabla u\right)} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \tag{2}$$

Loi de Hooke

Relation linéaire entre une force et une déformation.

Loi de Hooke

Relation linéaire entre une force et une déformation.

$$\sigma\left(\vec{u}\right) = \left(\lambda\,\mathbf{div}\,\vec{u}\cdot\mathbf{I}\right) + 2\mu\cdot\varepsilon \tag{3}$$

Loi de Hooke

Relation linéaire entre une force et une déformation.

$$\sigma\left(\vec{u}\right) = \left(\lambda\,\mathbf{div}\,\vec{u}\cdot\mathbf{I}\right) + 2\mu\cdot\varepsilon \tag{3}$$

- λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

Loi de Hooke

Relation linéaire entre une force et une déformation.

$$\sigma\left(\vec{u}\right) = \left(\lambda \,\mathbf{div}\, \vec{u} \cdot \mathbf{I}\right) + 2\mu \cdot \varepsilon \tag{3}$$

- λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.
  μ est la résistance au cisaillement

Loi de Hooke

Relation linéaire entre une force et une déformation.

$$\sigma\left(\vec{u}\right) = \left(\lambda\,\mathbf{div}\,\vec{u}\cdot\mathbf{I}\right) + 2\mu\cdot\varepsilon \tag{3}$$

- λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.
  μ est la résistance au cisaillement
- $\sigma \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$: tenseur des contraintes (efforts intérieurs)

Problème aux Valeurs Propres

- Élasticité aux valeurs propres :

$$-\mathbf{div}\left(\sigma\left(\vec{u}\right)\right) = \lambda_u \cdot \vec{u} \tag{4}$$

- Avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} u_i = u_{0i} \quad &\text{sur} \quad \Gamma_1, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i \quad &\text{sur} \quad \Gamma_2. \end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}\left(\sigma\left(u\right)\right) v \quad \mathrm{d}\,\Omega = \lambda_u \int_{\Omega} uv \quad \mathrm{d}\,\Omega \tag{5}$$

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}\left(\sigma\left(u\right)\right) v \ \ \mathrm{d}\,\Omega = \lambda_u \int_{\Omega} uv \ \ \mathrm{d}\,\Omega \tag{5}$$

On a d'abord :

$$\left[\mathbf{div}\left(\sigma\left(\vec{u}\right)\right)\right]_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}, \qquad \boxed{1 \leq i \leq 3}$$

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}\left(\sigma\left(u\right)\right) v \;\; \mathrm{d}\,\Omega = \lambda_u \int_{\Omega} uv \;\; \mathrm{d}\,\Omega \qquad (5)$$

On a d'abord :

$$\left[\mathbf{div}\left(\sigma\left(\vec{u}\right)\right)\right]_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}, \qquad \boxed{1 \leq i \leq 3}$$

Et donc :

$$\overset{\mathrm{GREEN}}{\Leftrightarrow} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathrm{d}\,\Omega \underbrace{- \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^{3} \left(\sigma_{i,j}, \vec{\mathbf{n}}\right) v_i \;\; \mathrm{d}\,\Gamma_2}_{\mathrm{BC}} = \lambda_u \int_{\Omega} u_i v_i \;\; \mathrm{d}\,\Omega \qquad (6)$$

- conformément à La condition limite sur Γ_2

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\Gamma_2} g_j v_i = \lambda_u \int_\Omega u_i v_i, \;\; pour : 1 \leq i \leq 3$$

- En détails :

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\lambda \mathrm{div} u + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right] \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_1 v_1 = \lambda_u \int_\Omega u_1 \; v_1, \\
&\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \left[\lambda \mathrm{div} u + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_2 v_2 = \lambda_u \int_\Omega u_2 \; v_2, \\
&\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \left[\lambda \mathrm{div} u + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_3 v_3 = \lambda_u \int_\Omega u_3 \; v_3.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Coordonnées cylindriques

- Coordonnées cylindriques :

$$g(x_1, x_2, x_3) = g(x_1(r,\phi), x_2(r,\phi), x_3(z))$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(r,\phi) & = & r\cos\phi \\ x_2(r,\phi) & = & r\cos\phi \\ x_3(z) & = & z \end{array} \right. \quad (8)$$

Coordonnées cylindriques

- Coordonnées cylindriques :

$$g(x_1, x_2, x_3) = g(x_1(r, \phi), x_2(r, \phi), x_3(z))$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1(r,\phi) & = & r\cos\phi \\ x_2(r,\phi) & = & r\cos\phi \\ x_3(z) & = & z \end{array} \right. \quad (8)$$

- Les dérivées :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial g}{\partial r} & = & \frac{\partial g}{\partial x_1}\cos\phi + \frac{\partial g}{\partial x_2}\sin\phi \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} & = & \frac{\partial g}{\partial x_1}(-r\sin\phi) + \frac{\partial g}{\partial x_2} r\cos\phi \\ \frac{\partial g}{\partial z} & = & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{array} \right. \tag{9}$$

- Les dérivées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial r} & = & \frac{\partial g}{\partial x_1}\cos\phi + \frac{\partial g}{\partial x_2}\sin\phi \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} & = & \frac{\partial g}{\partial x_1}(-r\sin\phi) + \frac{\partial g}{\partial x_2} r\cos\phi \\ \frac{\partial g}{\partial z} & = & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{array}\right. \tag{9}$$

- De là, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial x_1} & = & \frac{\partial g}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \phi}\sin\phi, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & = & \frac{\partial g}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \phi}\cos\phi, \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & = & \frac{\partial g}{\partial z}. \end{array}\right.$$

- De manière analogue :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos^2 \phi + \frac{1}{r} u_r \sin^2 \phi, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \phi \sin \phi - \frac{1}{r} u_r \cos \phi \sin \phi, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & = & \frac{\partial u_r}{\partial z} \cos \phi. \end{array} \right.$$

- De manière analogue :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\phi + \frac{1}{r}u_r\sin^2\phi, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & = & \frac{\partial u_r}{\partial z}\cos\phi. \end{cases}$$

- De même pour u_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & = & \frac{\partial u_r}{\partial r}\sin^2\phi + \frac{1}{r}u_r\cos^2\phi \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & = & \frac{\partial u_r}{\partial z}\sin\phi \end{cases}$$

- Et finalement u_3

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & = & \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\phi, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & = & \frac{\partial u_z}{\partial r}\sin\phi, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & = & \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{array}\right.$$

- Nous pouvons commencer à transformer les intégrales :

$$\int_\Omega r\left[\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})+2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\phi+\frac{1}{r}u_r\sin^2\phi)\right](\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos^2\phi+\frac{1}{r}v_r\sin^2\phi)+$$

$$r2\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi-\frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi-\frac{1}{r}v_r\cos\phi\sin\phi\right)+$$

$$r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\cos\phi+\frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\phi\right)\frac{\partial v_r}{\partial z}\cos\phi-\int_{\Gamma_2} rg_r v_r\cos^2\phi=\lambda_u\int_\Omega ru_r\ v_r\cos^2\phi,$$

- La deuxième :

$$\int_\Omega r2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \cos\phi \sin\phi - \frac{1}{r} u_r \cos\phi \sin\phi \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \cos\phi \sin\phi - \frac{1}{r} v_r \cos\phi \sin\phi \right) +$$

$$r \left[\lambda (\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}) + 2\mu (\frac{\partial u_r}{\partial r} \sin^2\phi + \frac{1}{r} u_r \cos^2\phi) \right] (\frac{\partial v_r}{\partial r} \sin^2\phi + \frac{1}{r} v_r \cos^2\phi) +$$

$$r\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \sin\phi + \frac{\partial u_z}{\partial r} \sin\phi \right) (\frac{\partial v_r}{\partial z} \sin\phi) - \int_{\Gamma_2} r g_r v_r \sin^2\phi = \lambda_u \int_\Omega r u_r \; v_r \sin^2\phi,$$

- On additionnes les deux formulations faibles.
- Et pour simplifier $\phi = 0$.
- $\Omega_0 = \Omega \cap \{$ le demi plan $x_1{}^+ x_3 \}$

- On additionnes les deux formulations faibles.
- Et pour simplifier $\phi = 0$.
- $\Omega_0 = \Omega \cap$ { le demi plan $x_1{}^+ x_3$}

$$\int_{\Omega_0} r\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z})(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r) + \int_{\Omega_0} r\mu \left[2\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}u_r v_r\right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right]$$

$$-\int_{\Gamma_2} g_r v_r r = \lambda_u \int_{\Omega_0} u_r\ v_r r$$

- Et enfin la formulation faible suivant $\vec{oz}$:

$$\int_{\Omega_0} r\mu(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + 2\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}) + r\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z})\frac{\partial v_z}{\partial z} - \int_{\Gamma_2} g_z v_z r = \lambda_u \int_{\Omega_0} u_z v_z r$$

Éxpérimentation

Code FreeFem++