POLLEN
pollen-multimedia
http://www.pollen-multimedia.com

CEMOSIS
Centre de Modélisation
et de Simulation de Strasbourg
http://www.cemosis.fr

Mini Projet LNCMI

Etude du problème d'élasticité aux valeurs propres.

Alexandre CORIZZI
Nabil BELAHRACH

1 Introduction

2 Elasticité

2.1 Modèle de l'élasticité

Dans notre modèle l'inconnue est donnée par les couples (u, λ_u)
u représente le déplacement observé lors de la déformation. λ_u : la valeur propre associée au vecteur propre u. Les paramètres λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé. Ils ont pour unité le $Pa(N/m^2)$. Ils sont définis comme suit :

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+2v)(1+v)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)} \tag{1}$$

.

Où E est le module de Young, il relie contrainte et traction. En effet il représente la rigidité du materiau. Et v est le coefficient de Poisson. Il détermine l'incompressibilité du materiau (un materiau de coefficient égal à 0.5 est parfaitement incompressible).

Pour une légère déformation, le tenseur ε est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad , \quad 1 \leq i,j \leq 3 \tag{2}$$

Et le tenseur des contraintes σ est :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} div(u) + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq 3 \tag{3}$$

Comme,

$$div(u) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

On a :

$$div(u) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} = Tr(\varepsilon)$$

En posant $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, on a, à l'équilibre des forces :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \lambda_u u_i \quad , \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{4}$$

Avec les conditions aux bords suivantes :

$$u_i = u_{0i} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$
$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\nu_j = g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_2.$$

3 Formulation variationelle

La formulation variationnelle de (P) est obtenue par intégration par parties. Elle s'écrit

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_i = \lambda_u \int_\Omega u_i v_i, \;\; pour : 1 \leq i \leq 3$$

l'utilisation de la formule de Green nous montre que :

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j v_i = \lambda_u \int_\Omega u_i v_i, \text{pour :} \quad 1 \leq i \leq 3$$

alors, conformément à la condition limite sur Γ_2

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\Gamma_2} g_j v_i = \lambda_u \int_\Omega u_i v_i, \quad pour : 1 \leq i \leq 3$$

En plus de détails :

$$\int_\Omega \left[\lambda \text{div} u + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right] \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_1 v_1 = \lambda_u \int_\Omega u_1 \ v_1,$$
$$\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \left[\lambda \text{div} u + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_2 v_2 = \lambda_u \int_\Omega u_2 \ v_2,$$
$$\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \left[\lambda \text{div} u + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \int_{\Gamma_2} g_3 v_3 = \lambda_u \int_\Omega u_3 \ v_3.$$

Maintenant, on procède à un changement de variables pour passer aux coordonnées cylindriques :

$$g(x_1, x_2, x_3) = g(x_1(r,\phi), x_2(r,\phi), x_3(z))$$

$$x_1(r,\phi) = r\cos\phi, \quad x_2(r,\phi) = r\sin\phi, \quad x_3(z) = z$$

De la même façon : $u_1 = u_r \cos\phi \quad u_2 = u_r \sin\phi \quad u_3 = u_z$.
on calcul les dérivées :

- de u_1 :

$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \phi}\sin\phi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \phi}\cos\phi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial z}.$

- de u_2 :

$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\sin^2\phi + \frac{1}{r}u_r\cos^2\phi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_r}{\partial z}\sin\phi.$

- de u_3 :

$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\phi; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_z}{\partial r}\sin\phi; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$

On transforme également div$u$ en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\text{div} u &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\phi + \frac{1}{r}u_r\sin^2\phi + \frac{\partial u_r}{\partial r}\sin^2\phi + \frac{1}{r}u_r\cos^2\phi + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

formulation axisymétrique :
Notre domaine Ω est de révolution (il s'agit d'un cylindre), on réécrit les intégrales précédents en coordonnées cylindriques.

On sait que la matrice jaconbienne de cette transformation :

$$J(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -rsin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & rcos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le tenseur métrique du système de coordonnées cartésiennes $X = (x_1, x_2, x_3)$ est la matrice identité $\bar{g}_{xyz} = diag(1,1,1)$, donc par transformation nous obtenons le tenseur métrique $g_{r\theta z}$ dans la nouvelle base de coordonnées cylindriques :

$$g_{r\theta z} = J^t \bar{g}_{xyz} J$$

$$g_{r\theta z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$g^{-1}{}_{r\theta z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La première équation devient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega r \left[\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}) + 2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\phi + \frac{1}{r}u_r \sin^2\phi)\right](\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos^2\phi + \frac{1}{r}v_r\sin^2\phi) + \\ 2r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}v_r\cos\phi\sin\phi\right) + \\ r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\cos\phi + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\phi\right)\frac{\partial v_r}{\partial z}\cos\phi - \int_{\Gamma_2} r g_r v_r \cos^2\phi = \lambda_u \int_\Omega r u_r \ v_r \cos^2\phi \end{aligned}$$

La deuxième :

$$\begin{aligned} \int_\Omega r2\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}u_r\cos\phi\sin\phi\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos\phi\sin\phi - \frac{1}{r}v_r\cos\phi\sin\phi\right) + \\ r\left[\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}) + 2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r}\sin^2\phi + \frac{1}{r}u_r\cos^2\phi)\right](\frac{\partial v_r}{\partial r}\sin^2\phi + \frac{1}{r}v_r\cos^2\phi) + \\ r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\sin\phi + \frac{\partial u_z}{\partial r}\sin\phi\right)(\frac{\partial v_r}{\partial z}\sin\phi) - \int_{\Gamma_2} r g_r v_r \sin^2\phi = \lambda_u \int_\Omega r u_r \ v_r \sin^2\phi, \end{aligned}$$

On additionne les deux égalités :

$$\int_\Omega r\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}v_r)+$$

$$\int_\Omega r\mu\left[2\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos^4\phi+\frac{1}{r}u_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\sin^2\phi\cos^2\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}v_r\sin^2\phi\cos^2\phi+\frac{1}{r^2}u_rv_r\sin^4\phi\right)+\right.$$

$$2\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\sin^4\phi+\frac{1}{r}u_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\sin^2\phi\cos^2\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}v_r\sin^2\phi\cos^2\phi+\frac{1}{r^2}u_rv_r\cos^4\phi\right)+$$

$$4\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos^2\phi\sin^2\phi-\frac{1}{r}u_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\cos^2\phi\sin^2\phi-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}v_r\cos^2\phi\sin^2\phi+\frac{1}{r^2}u_rv_r\cos^2\phi\sin^2\phi\right)+$$

$$\left.\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right]-\int_{\Gamma_2}g_rv_rr=\lambda_u\int_\Omega u_r\ v_rr$$

Ceci peut être simplifié à :

$$\int_\Omega r\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}v_r)+\int_\Omega r\mu\left[2\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}u_rv_r\right)+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right]$$

$$-\int_{\Gamma_2}g_rv_rr=\lambda_u\int_\Omega u_r\ v_rr$$

En fin, dans la troisième équation :

$$\int_\Omega r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\cos\phi+\frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\phi\right)\frac{\partial v_z}{\partial r}\cos\phi+r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\sin\phi+\frac{\partial u_z}{\partial r}\sin\phi\right)\frac{\partial v_z}{\partial r}\sin\phi+$$

$$r\left[\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]\frac{\partial v_z}{\partial z}-\int_{\Gamma_2}g_zv_zr=\lambda_u\int_\Omega u_z\ v_zr.$$

Cela nous donne :

$$\int_\Omega r\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+2\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+r\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\frac{\partial v_z}{\partial z}-\int_{\Gamma_2}g_zv_zr=\lambda_u\int_\Omega u_z\ v_zr.$$

Etant donné que les intégrands ne dépendent pas de Φ, on peut simplifier cette intégrale par une restriction sur un sous domaine Ω_0 tel que :
$\Omega_0=\Omega\cap$ { le demi plan ${x_1}^+x_3$}
ce qui se traduit par une divistion par 2π :
Ainsi la formulation variationelle est donnée par les équations suivantes :

$$\int_{\Omega_0} r\lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}v_r)+r\mu\left[2\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}u_rv_r\right)+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right]$$

$$-\int_{\Gamma_2}g_rv_rr=\lambda_u\int_{\Omega_0}u_r\ v_rr$$

$$\int_{\Omega_0} r\mu(\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+2\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z})+r\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z})\frac{\partial v_z}{\partial z}-\int_{\Gamma_2}g_zv_zr=\lambda_u\int_{\Omega_0}u_zv_zr$$

4 Etude de la convergence :