数理解析研究所 院試過去問解答 (専門科目)

nabla *

目 次

*Twitter:@nabla_delta Github: https://github.com/nabla-delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．

平成 25 年度 (2012 年 8 月実施)

問 6

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ を満たす測度空間とする．$u : X \to \mathbb{R}$ を有界な非負可測関数で $\|u\|_\infty > 0$ を満たすものとする．ただし，

$$\|u\|_\infty = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |u(x)| < \lambda \,(\mu\text{-a.e.}\, x \in X)\}$$

と定義する．正整数 n に対して，

$$I_n = \int_X u(x)^n d\mu(x)$$

とおくとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) すべての正整数 n に対して，$I_n^{1/n} \leq I_{n+1}^{1/(n+1)}$ が成立する．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \|u\|_\infty$.

解答． (i) Hölder の不等式と $\mu(X) = 1$ より

$$I_n \leq \left(\int_X (u(x)^n)^{\frac{n+1}{n}} d\mu(x)\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_X 1^{n+1} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{n+1}} = I_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}.$$

この両辺を $1/n$ 乗すれば示すべき不等式が得られる．

(ii) (i) より

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_n^{\frac{n+1}{n}}}{I_n} = I_n^{1/n}.$$

これと

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{1}{I_n} \int_X \|u\|_\infty u(x)^n d\mu(x) = \|u\|_\infty$$

より

$$I_n^{1/n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|u\|_\infty.$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n^{1/n} = \|u\|_\infty$ を示せば良い．

$$I_n^{1/n} \leq \left(\int_X \|u\|_\infty^n d\mu(x)\right)^{1/n} = \|u\|_\infty$$

より $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} I_n^{1/n} \leq \|u\|_\infty$. また，任意の $r \in [0, \|u\|_\infty)$ に対し $X(r) = \{x \in X \,;\, u(x) > r\}$ とおくと，

$$I_n^{1/n} \geq \left(\int_{X(r)} u(x)^n d\mu(x)\right)^{1/n} > \left(\int_{X(r)} r^n d\mu(x)\right)^{1/n} = r\mu(X(r))^{1/n}$$

より $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} I_n^{1/n} \geq r$. $r \in [0, \|u\|_\infty)$ は任意だから $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} I_n^{1/n} \geq \|u\|_\infty$. 以上から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n^{1/n} = \|u\|_\infty$. □

問 7

次の (i), (ii), (iii) に解答せよ．

(i)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

とおく．コーシーの積分公式を用いて次を証明せよ．

$\theta > 0$ を十分小さく取れば，任意の非負整数 n と任意の $t > 0$ に対して，

$$|f^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)}$$

が成り立つ．ただし，$f^{(n)}(t) = \dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}(t)\ (n \geq 1)$, $f^{(0)}(t) = f(t)$ とする．

(ii) (i) の $f(t)$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

は，$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq t < +\infty, -\infty < x < +\infty\}$ において広義一様収束することを証明せよ．

(iii) 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \dfrac{\partial}{\partial x^2} u(t,x) \qquad (t > 0, x \in \mathbb{R}) \\ u(0,x) &= 0 \qquad\qquad\qquad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

は，恒等的にゼロでない解を持つことを証明せよ．

解答． (i) $\mathbb{C}^\times$ 上の正則関数 $g(z)$ を $g(z) = e^{-1/z^2}$ とおく．$\theta \in (0,1)$ を取る．この時任意の $t > 0$ に対し $\{w\,;\,|w-t| = \theta t\} \subset \mathbb{C}^\times$ であるから，Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(t)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-t|=\theta t} \frac{g(w)}{(w-t)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} \max_{|w-t|=\theta t} |g(w)| \\ &= \frac{n!}{(\theta t)^n} \max_{|w-t|=\theta t} \exp\left(\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{w^2}\right)\right) = \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\min_{|w-t|=\theta t} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{w^2}\right)\right) \\ &= \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{t^2} \min_{\varphi \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(1+\theta e^{i\varphi})^2}\right)\right). \end{aligned}$$

ここで $1 - 2\theta - \theta^2 > 0$ となるように $\theta > 0$ を十分小さく取ると

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(1+\theta e^{i\varphi})^2}\right) &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1+\theta e^{-i\varphi}}{1+2\theta\cos\varphi+\theta^2}\right)^2\right) = \frac{(1+\theta\cos\varphi)^2 - (\theta\sin\varphi)^2}{(1+2\theta\cos\varphi+\theta^2)^2} \\ &= \frac{1+2\theta\cos\varphi+\theta^2\cos 2\varphi}{(1+2\theta\cos\varphi+\theta^2)^2} \geq \frac{1-2\theta-\theta^2}{(1+2\theta\cos\varphi+\theta^2)^2} \geq \frac{1-2\theta-\theta^2}{(1+2\theta+\theta^2)^2}. \end{aligned}$$

$\theta \searrow 0$ の時 (右辺) $\to 1$ だから，十分小さい $\theta > 0$ に対し

$$\min_{\varphi \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(1+\theta e^{i\varphi})^2}\right) \geq \frac{1}{2}. \qquad \therefore |g^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right)$$

$\mathbb{R}_{>0}$ 上では $f = g$ だから，f に対してもこれと同じ評価が成り立つ．

(ii) 問題の級数を $u(t,x)$ とおく．任意の $T, R > 0$ に対し $u(t,x)$ が $[0,T] \times [-R,R]$ 上一様収束することを示せば良い．$t > 0$ の時 (i) より

$$\left| \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \frac{1}{(2n)!} \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)} x^{2n} \leq \frac{1}{n!} e^{-1/(2t^2)} \left(\frac{R^2}{\theta t}\right)^n.$$

ただし $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq 1$ を用いた．よって

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left|\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n}\right| &\leq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}e^{-1/(2t^2)}\left(\frac{R^2}{\theta t}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{R^2}{\theta t}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{R^2}{\theta}\right)^2+\frac{R^4}{2\theta^2}\right) \leq \exp\left(\frac{R^4}{2\theta^2}\right).\end{aligned}$$

次に $f^{(n)}(0)=0$ を帰納法で示す．$n=0$ の時は自明．ある n で正しい時，

$$\lim_{t\nearrow 0}\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t} = \lim_{t\nearrow 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

$t>0$ の時

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t}\right| &\leq \frac{n!}{\theta^n t^{n+1}}\exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right) \leq \frac{n!}{\theta^n t^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2t^2}\right)^{n+1}\right)^{-1}\\ &= \frac{2^{n+1}n!(n+1)!}{\theta^n}t^{n+1} \to 0 \quad (t\searrow 0)\end{aligned}$$

だから $n+1$ でも正しい．これで示せた．よって

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n}\right| \leq \begin{cases}0 & (t=0)\\ \exp\left(\frac{R^4}{2\theta^2}\right) & (t>0)\end{cases}$$

だから Weierstrass の優級数定理より $u(t,x)$ は $[0,T]\times[-R,R]$ 上一様収束する．

(iii) (ii) の級数を $u(t,x)$ とおく．(ii) で示したことより $u(0,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=0.$ また広義一様収束より

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n\geq 0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n+1)}(t)}{(2n)!}x^{2n},\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{n\geq 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n\geq 1}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-1)!}x^{2n-1}.\end{aligned}$$

(ii) と同様に $\frac{\partial u}{\partial x}$ も広義一様収束するから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-2)!}x^{2n-2} = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n+1)}(t)}{(2n)!}x^{2n}.$$

よって $u(t,x)$ は微分方程式の初期値問題の非自明解である． □

問 8

1 次元熱伝導問題を考える．空間 x 方向の熱伝導に支配される温度分布 $T(x,t)$ （ただし，$t \geq 0$ は時間を表す）は，定数 $\kappa > 0$ を熱伝導率をするとき，次の方程式に従う．

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

(i) 区間 $0 \leq x \leq 1$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$, $T(1,t) = 0$, 初期条件 $T(x,0) = (x-1)^2$ を与える．

(i-1) $T(x,t) = 1 - x + \Theta(x,t)$ とおき，$\Theta(x,t)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(i-2) $\Theta(x,t)$ を

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin n\pi x$$

と展開することにより，微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

(ii) 区間 $0 \leq x < \infty$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$, $T(\infty,t) = 0$, 初期条件 $T(x,0) = 0$ を与える．

(ii-1) 温度分布が $\xi = x/(2\sqrt{\kappa t})$ のみを用いて $T(x,t) = F(\xi)$ と表されると仮定するとき，$F(\xi)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(ii-2) (ii-1) で求めた微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

解答． (i) (i-1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} \Theta(0,t) = \Theta(1,t) = 0 \\ \Theta(x,0) = x^2 - x \end{cases}$$

(i-2) $\Theta(x,t)$ の展開を微分方程式に代入して

$$\sum_{n\geq 1} a_n'(t) \sin n\pi x = \kappa \sum_{n \geq 1} a_n(t)(-(n\pi)^2) \sin n\pi x.$$

$\sin n\pi x$ の係数を比較して $a_n'(t) = -\kappa(n\pi)^2 a_n(t)$. よって $a_n(t) = c_n \exp(-\kappa(n\pi)^2 t)$ だから

$$\Theta(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n \exp(-\kappa(n\pi)^2 t) \sin n\pi x.$$

これは (i-1) の境界条件 $\Theta(0,t) = \Theta(1,t) = 0$ を満たす．残りの境界条件から

$$x^2 - x = \sum_{n\geq 1} c_n \sin n\pi x.$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}c_n &= \int_0^1 \sum_{m\geq 1} c_m \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \int_0^1 (x^2 - x)\sin n\pi x dx \\
&= (x^2 - x)\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \int_0^1 (2x-1)\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left((2x-1)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x dx\right) \\
&= \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} 0 & (n：偶数) \\ \dfrac{-8}{(n\pi)^3} & (n：奇数) \end{cases}$$

$$\therefore \Theta(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{-8}{(2n-1)^3\pi^3} \exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\sin(2n-1)\pi x$$

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{-8}{(2n-1)^3\pi^3} \exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\sin(2n-1)\pi x\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} < \infty$$

だから $\Theta(x,t)$ は $[0,1]\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上広義絶対一様収束する．よって

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa\left(-1+\sum_{n\geq 1}\frac{-8}{(2n-1)^2\pi^2}\exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\cos(2n-1)\pi x\right) \to \kappa \quad (t\to\infty).$$

(ii) (ii-1)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{d}{d\xi} = -\frac{x}{4\sqrt{\kappa t^3}}\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\frac{d}{d\xi}$$

より F が従う微分方程式は

$$-\frac{x}{4\sqrt{\kappa t^3}}F' = \kappa\left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\right)^2 F'' \quad \therefore -2\xi F' = F''$$

$T(0,t)=F(0), T(\infty,t)=F(\infty), T(x,0)=F(\infty)$ だから境界条件は

$$F(0)=1, \quad F(\infty)=0.$$

(ii-2) $(e^{\xi^2}F')' = e^{\xi^2}(F''+2\xi F') = 0$ だから $F'(\xi) = ce^{-\xi^2}$. よって境界条件から

$$F(\xi) = 1 + c\int_0^\xi e^{-s^2}ds.$$

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ とおくと

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2_{\geq 0}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\left.\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right|_0^\infty = \frac{\pi}{4} \quad \therefore I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

よって $0 = F(\infty) = 1 + c\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ だから

$$F(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{-s^2}ds.$$

$$\therefore -\kappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}F'(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{t}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-\xi^2} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) \to 0 \quad (t\to\infty)$$

□

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 6

(i) K を $[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数とし，写像

$$f(x)\mapsto g(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

を考える．この写像が $L^2(0,1)$ から $L^2(0,1)$ へのコンパクト写像であることを示せ．

(ii) 1 変数関数 $h(x)=1/(1+x^2)$ の Fourier 変換

$$\hat{h}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}h(x)dx$$

を求めよ．

(iii) $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への写像

$$f(x)\mapsto g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{1+(x-y)^2}dy$$

はコンパクト写像でないことを示せ．

解答． $\|\cdot\|$ を $L^2(0,1)$ ノルムとする．

(i) 問題の写像を $f\mapsto Tf$ とする．明らかに T は線形．仮定から $M_0:=(\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dxdy)^{1/2}<\infty$ である．任意の $f\in L^2(0,1)$ に対し

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2&=\int_0^1\left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right|^2dx\\&\le\int_0^1\left(\int_0^1|K(x,y)|^2dy\right)\left(\int_0^1|f(y)|^2dy\right)dx=\|f\|^2M_0^2<\infty.\end{aligned}$$

よって T は有界線形作用素．任意に $f\in L^2(0,1)$ を取り，f に弱収束する点列 $\{f_n\}\in L^2(0,1)$ を取る．この時 Tf_n が Tf に強収束することを示せば T はコンパクトとなる．f_n-f を改めて f_n とおくことで，0 に弱収束する任意の点列 $\{f_n\}$ に対し Tf_n が 0 に強収束することを示せば良い．f_n の弱収束性から $\{\|f_n\|\}$ は有界．$M_1=\sup_n\|f_n\|<\infty$ とおくと，上の評価と同様に

$$\int_0^1|Tf_n(x)|^2dx=\|Tf_n\|^2\le M_0^2\|f_n\|^2\le M_0^2M_1^2<\infty.$$

$$Tf_n(x)=\int_0^1K(x,y)f_n(y)dy=\left(f_n(\cdot),\overline{K(x,\cdot)}\right)\to\left(0,\overline{K(x,\cdot)}\right)=0\quad(n\to\infty)$$

だから Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_0^1|Tf_n(x)|^2dx=\int_0^1 0^2dx=0.$$

(ii)

$$\hat{h}(-\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}h(x)dx=\int_{\infty}^{-\infty}e^{-ix\xi}h(-x)(-dx)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}h(x)dx=\hat{h}(\xi)$$

だから $\xi\ge 0$ で考えれば良い．$\xi=0$ の時

$$\hat{h}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_{-\infty}^{\infty}=\pi.$$

$\xi>0$ の時，十分大きな $R>0$ を取り，$C_1=[-R,R],C_2=\{Re^{i\theta}\,;\,-\pi\le\theta\le 0\}$ とする．C_1+C_2 上で $e^{-ix\xi}h(x)$ を積分して

$$\int_{C_1+C_2}e^{-ix\xi}h(x)dx=-2\pi i\,\mathrm{Res}(e^{-ix\xi}h(x),x=-i).$$

$R \to \infty$ の時

$$\int_{C_1} e^{-ix\xi} h(x) dx \to \hat{h}(\xi),$$

$$\left| \int_{C_2} e^{-ix\xi} h(x) dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{-i\xi Re^{i\theta}}}{1 + R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{-\pi}^{0} \frac{Re^{\xi R \sin\theta}}{R^2 - 1} d\theta \leq \int_{-\pi}^{0} \frac{R}{R^2 - 1} d\theta \to 0.$$

また，

$$\mathrm{Res}(e^{-ix\xi} h(x), x = -i) = \lim_{x \to -i} \frac{x + i}{x^2 + 1} e^{-ix\xi} = \lim_{x \to -i} \frac{1}{x - i} e^{-ix\xi} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}$$

だから $\hat{h}(\xi) = \pi e^{-\xi}$. $\xi < 0$ の時も考慮すれば $\hat{h}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

(iii) 問題の写像を $f \mapsto Tf$ とする．$Tf = f * h$ がコンパクトであったとする．$L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ は等長だから有界線形作用素である．よって $L^2(\mathbb{R})$ 上の写像の合成

$$\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \mathcal{F}Tf = \mathcal{F}[f * h] = \hat{f}(\xi)\hat{h}(\xi)$$

もコンパクトである．この写像を $f(x) \mapsto Af = f(x)\hat{h}(x)$ とおく．$\lambda \in (0, \pi] = \hat{h}(\mathbb{R})$ を任意に取り，$\omega_n = \hat{h}^{-1}((\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)), s_n = \mu(\omega_n)$ とおく．ただし μ は Lebesgue 測度．この時 $\mu(\omega_n) > 0$ である．$\varphi_n = s_n^{-1/2} \chi_{\omega_n}(x)$ とおくと $\|\varphi_n\| = 1$ で，

$$\|\hat{h}\varphi_n - \lambda\varphi_n\|^2 = \int_{\omega_n} |\hat{h}(x) - \lambda|^2 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq \int_{\omega_n} \frac{1}{n^2} |\varphi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって λ は A の近似固有値だから，A のスペクトル $\sigma(A)$ の元．$\lambda \in (0, \pi]$ は任意だから $(0, \pi] \subset \sigma(A)$. 一方 A はコンパクトだから $\sigma(A)$ は 0 以外の集積点を持たないので矛盾． $\square$

問 7

μ を $\mathbb{R}$ 上のボレル測度で $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ となるものとする．

(i) $\mu(\{x\}) > 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ は高々可算個であることを示せ．

(ii) $\varphi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$ とおくとき，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = \sum_{x\in\mathbb{R},\, \mu(\{x\})>0} \mu(\{x\})^2$$

を示せ．

解答． (i)

$$S_n = \left\{ x \in \mathbb{R}\,;\, \mu(\{x\}) > \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} S_n$$

とおく．この時 $\frac{1}{n}\#S_n < \mu(S_n) \leq \mu(S) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$ だから $\#S_n < \infty$. よって $S = \bigcup_{n\geq 1} S_n$ の右辺は高々可算集合だから $\#S$ も高々可算．

(ii)

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)\overline{\varphi(t)} dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x) dt$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} d\mu(x) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{-itx} dt d\mu(x)$$

である．ただし

$$\left| \frac{1}{2T}\varphi(t)e^{-itx} \right| \leq \frac{1}{2T}|\varphi(t)| \leq \frac{1}{2T}\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = \frac{1}{2T}\mu(\mathbb{R}),$$
$$\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2T}\mu(\mathbb{R}) d\mu(x) dt = \mu(\mathbb{R})^2 < \infty$$

より Fubini の定理を用いた．再び Fubini の定理より

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}} e^{ity} d\mu(y) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt d\mu(y).$$

ここで $y \neq x$ の時

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left. \frac{e^{it(y-x)}}{i(y-x)} \right|_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin T(y-x)}{T(y-x)} = 0,$$

$y = x$ の時

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt = 1$$

であり，

$$\left| \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt \right| \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$$

だから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(y-x)} dt d\mu(y) = \mu(\{x\}).$$

これと

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{-itx}dt\right| \le \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|dt \le \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu(\mathbb{R})dt = \mu(\mathbb{R}),$$

$$\int_{\mathbb{R}}\mu(\mathbb{R})d\mu(x) = \mu(\mathbb{R})^2 < \infty$$

より再び Lebesgue の収束定理により

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|^2dt &= \int_{\mathbb{R}}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{-itx}dtd\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\mu(\{x\})d\mu(x) = \sum_{x\in\mathbb{R},\,\mu(\{x\})>0}\mu(\{x\})^2.\end{aligned}$$

□

問 8

粘性流体の定常な遅い流れは次の方程式に従う．

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

ただし，$\boldsymbol{u} = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ は速度，$p(x,y,z)$ は圧力，μ は粘性率（正の定数）である．また $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right), \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(i) 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ は $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$ を満たすことを示せ．

(ii) z 方向に一様な 2 次元流 $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y), 0)$ を考える．このとき流線関数 $\psi(x,y)$ を導入することができて，速度が $u(x,y) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, v(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ と表される．

(ii-1) 流線関数 ψ は $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ を満たすことを示せ．

(ii-2) 角度 $\alpha \, (0 < \alpha < \pi)$ で交わる 2 枚の平面に挟まれたくさび状領域内の粘性流体の定常な遅い流れを考える．2 平面の交線を z 軸にとり，xy 平面の極座標の動径と方位角 (r, θ) を下図のように導入する．2 つの平面 $\theta = \pm\alpha/2$ における境界条件を

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = \mp \Omega r \quad (\theta = \pm\alpha/2, \text{複号同順})$$

と与える（Ω は正定数）．ここで (u_r, u_θ) は速度の (r, θ) 成分であり，流線関数 ψ と $u_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}, u_\theta = \dfrac{\partial \psi}{\partial r}$ の関係にある．このとき，変数分離形 $\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を仮定して流線関数を一つ求めよ．ただし，u_r, u_θ は原点で有界な連続関数であるとする．また，極座標では $\nabla^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} r \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ と表されることを用いてもよい．

解答． $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ などと略記する．

(i) $\boldsymbol{\omega} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)$ である．1 番目の式から $0 = -p_x + \mu \nabla^2 u = -p_y + \mu \nabla^2 v = -p_z + \mu \nabla^2 w$ だから $\nabla^2 (w_y - v_z) = \partial_y \nabla^2 w - \partial_z \nabla^2 v = \partial_y(\mu^{-1} p_z) - \partial_z(\mu^{-1} p_y) = 0.$ 他の成分も同様だから $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0.$

(ii) (ii-1) 流線関数の定義から $\partial_x^2 \psi = v_x, \partial_y^2 \psi = \partial_y(-u) = -u_y.$ よって $\nabla^2 \psi = v_x - u_y$ は $\boldsymbol{\omega}$ の第 3 成分だから，(i) より $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0.$

(ii-2) $u_r = -\frac{1}{r} R\Theta', u_\theta = R'\Theta$ より境界条件は

$$\Theta'(\pm\alpha/2) = 0, \quad R'(r) = cr, \quad \Theta(\pm\alpha/2) = \mp c^{-1}\Omega$$

と書ける．ただし $c \neq 0$ は定数．よって

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}(rR')'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 2c\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'',$$
$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{2c}{r^2}\Theta'' + \frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r^2}R\right)'\right)'\Theta'' + \frac{1}{r^4} R\Theta^{(4)}.$$

ここで

$$\frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r^2}R\right)'\right)' = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}R' - \frac{2}{r^2}R\right)' = \frac{1}{r}\left(c - \frac{2}{r^2}R\right)' = -\frac{2c}{r^2} + \frac{4}{r^4}R$$

だから

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{R}{r^4}(4\Theta'' + \Theta^{(4)}).$$

よって (ii-1) より $\Theta = c_1 + c_2\theta + c_3 e^{2i\theta} + c_4 e^{-2i\theta}$ と書ける．境界条件から

$$\begin{cases} c_1 \pm \dfrac{\alpha}{2} c_2 + c_3 e^{\pm i\alpha} + c_4 e^{\mp i\alpha} = \mp c^{-1}\Omega \\ c_2 + 2i(c_3 e^{\pm i\alpha} - c_4 e^{\mp i\alpha}) = 0 \end{cases}.$$

第 2 式を辺々引いて $2i(c_3+c_4)(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})=0$. $0<\alpha<\pi$ から $e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\neq 0$ だから $c_3+c_4=0$. 第 1 式を辺々足して $2c_1+(c_3+c_4)(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})=0$ だから $c_1=0$. よって c_1, c_4 を消去すると

$$\begin{cases} \pm\dfrac{\alpha}{2}c_2 \pm 2ic_3\sin\alpha = \mp c^{-1}\Omega \\ c_2+4ic_3\cos\alpha = 0 \end{cases}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{c^{-1}\Omega}{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}\begin{pmatrix} -2\cos\alpha \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

（$\alpha\neq\pi/2$ の時 $\alpha\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha(\alpha-\tan\alpha)\neq 0$, $\alpha=\pi/2$ の時 $\alpha\cos\alpha-\sin\alpha=-1$ だから分母は 0 でない.）従って

$$\Theta = c_2\theta+2ic_3\sin 2\theta = c^{-1}\Omega\frac{-2\theta\cos\alpha+\sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

$R=\frac{c}{2}r^2$ とすれば

$$\psi = \frac{\Omega r^2}{2}\frac{-2\theta\cos\alpha+\sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

この時

$$u_r = -\Omega r\frac{-\cos\alpha+\cos 2\theta}{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}, \qquad u_\theta = \Omega r\frac{-2\theta\cos\alpha+\sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}$$

は原点で有界な連続関数であり，$u_r|_{\theta=\pm\alpha/2}=0, u_\theta|_{\theta=\pm\alpha/2}=\mp\Omega r$ となる．よってこれは求める解の一つである． □

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 6

$f(x)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とし，$D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}, D_0 = D \setminus [0,1)$ とおく．$w \in D_0$ に対して，

$$F(w) = \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\text{ただし，積分路は実軸上の区間 } [0,1] \text{ とする})$$

と定義するとき，次の問に答えよ．

(i) $F(w)$ は D_0 上の正則関数を定めることを示せ．

(ii) $F(w)$ は開区間 $(0,1)$ を越えて（$D \setminus \{0\}$ 上の多価解析関数として）解析接続されることを示せ．さらに，$F(w)$ を原点の回りを反時計回りに一回り解析接続して得られる D_0 上の関数を $F_1(w)$ で表すとき，$G(w) = F_1(w) - F(w)$ を求めよ．

(iii) $H(w) = F(w) - \dfrac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-w)G(w)$ は D 全体で正則になることを示し，その $w = 0$ での値 $H(0)$ を $f(z)$ を用いて表せ．ただし，$\mathrm{Log}\, u$ は $\log u$ の主値，すなわち $u > 0$ のとき $\mathrm{Log}\, u \in \mathbb{R}$ となる $\log u$ の分枝を表すものとする．

解答． (i) $w_0 \in D_0$ を任意に取る．$D(w_0; r) := \{|w - w_0| < r\} \subset D_0$ となる $r > 0$ を取る．この時任意の $w \in D(w_0; r) \setminus \{w_0\}, z \in [0,1]$ に対し $|w - w_0| < |z - w_0|$ だから

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-w_0)-(w-w_0)} = \frac{1}{z-w_0}\frac{1}{1-\frac{w-w_0}{z-w_0}} = \frac{1}{z-w_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{w-w_0}{z-w_0}\right)^n.$$

これは $D(w_0; r)$ 上絶対一様収束するから

$$F(w) = \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+1}}dz\right)(w-w_0)^n.$$

$d(w) = \min\limits_{0\leq z\leq 1}|z-w|$ とおくと $|w-w_0| < d(w_0), M := \max\limits_{0\leq z\leq 1}|f(z)| < \infty$ より

$$\sum_{n\geq 0}\left|\int_0^1 \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+1}}dz\right||(w-w_0)^n| \leq \frac{M}{d(w_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{|w-w_0|}{d(w_0)}\right)^n < \infty.$$

よって Weierstrass の優級数定理より $F(w)$ は $D(w_0; r)$ 上絶対一様収束する．$w \in D(w_0; r), w_0 \in D_0$ は任意だから $F(w)$ は D_0 で正則．

(ii) 任意に $r_0 \in (0,1)$ を取り，十分小さい $\varepsilon > 0$ を取る．$w_0 = r_0 - i\varepsilon$ として，$D(w_0; r) \subset D \setminus \{0\}$ かつ $\partial D(w_0; r)$ と $(0,1)$ が 2 点で交わるような $r > 0$ を取る．($\varepsilon < r < \min\{\sqrt{r_0^2+\varepsilon^2}, 1-\sqrt{r_0^2+\varepsilon^2}\}$ となるように取れば良い．）交点を小さい方から A, B とする．上半平面にある弧 AB と線分 AB で囲まれた領域では $\frac{f(z)}{z-w_0}$ は正則だから，線分 $0A$ と弧 AB と線分 $B1$ をあわせた路を $\gamma(A,B)$ とすると，Cauchy の積分定理より

$$F(w) = \int_{\gamma(A,B)} \frac{f(z)}{z-w}dz.$$

z が $\gamma(A,B)$ 上を動く時，w の関数 $\frac{f(z)}{z-w}$ は $D(w_0; r)$ のうち AB を越えた部分でも正則だから，$F(w)$ は AB を越えて解析接続される．$r_0 \in (0,1)$ は任意だったから $F(w)$ は $(0,1)$ を下から越えて $D \setminus \{0\}$ 上の正則関数に解析接続される．同様に $(0,1)$ を上から越えても解析接続される．
w が原点の回りを反時計回りに一周すると，積分路 $[0,1]$ は，原点から w の近くに行き w の回りを時計回りに一周して原点に戻り，そこから 1 に行く路になる．w の回りを一回転しても $F(w)$ の被積分関数の分枝は変わらないから，0 から w までの積分と w から 0 への積分は打ち消し合う．よって元の積分路 $[0,1]$ と w の回りを時計回りに一周する路の和になるから，$\varepsilon > 0$ を十分小さい数として

$$F_1(w) = -\oint_{|z-w|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}dz + \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w}dz = -2\pi i f(w) + F(w).$$

よって $G(w) = -2\pi i f(w)$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
H(w) &= F(w) + f(w)\,\mathrm{Log}(-w) \\
&= \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w} dz + f(w) \left(\mathrm{Log}(1-w) - \int_0^1 \frac{dz}{z-w} \right) \\
&= \int_0^1 \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz + f(w)\,\mathrm{Log}(1-w)
\end{aligned}
$$

である．第 1 項の被積分関数は，任意の $w \in D$ に対し z についての D 上正則な関数だから，積分も D 正則．第 2 項も D 上正則だから，$H(w)$ は D 上正則．この時

$$
H(0) = \int_0^1 \frac{f(z)-f(0)}{z} dz.
$$

□

問 7

区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数 $u = u(x)$ で，$u(0) = 0, u(1) = 1$ を満たすもの全体を X と表す．正の実数 α と $u \in X$ に対して，

$$I_\alpha(u) = \int_0^1 x^\alpha \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

と定義する．このとき

$$\inf_{u\in X} I_\alpha(u) = \begin{cases} 1-\alpha & (0<\alpha<1) \\ 0 & (1 \le \alpha < \infty) \end{cases}$$

を証明せよ．

解答. $\alpha \ge 1$ の時，$I_\alpha(u)$ の被積分関数は非負だから $I_\alpha(u) \ge 0$. よって $\inf_{u\in X} I_\alpha(u) \ge 0$. $u_n(x) = x^{1/n} \in X$ とおくと

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) &= \int_0^1 x^\alpha \left(\frac{1}{n}x^{1/n-1}\right)^2 dx = \frac{1}{n^2}\frac{1}{\alpha - 1 + \frac{2}{n}} x^{\alpha-1+2/n}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{1}{\alpha-1+\frac{2}{n}} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから $\inf_{u\in X} I_\alpha(u) = 0$.

$0 < \alpha < 1$ の時，$u_0(x) = x^{1-\alpha} \in X$ とおく．任意の $u \in X$ に対し $v = u - u_0 \in C^1[0,1]$ は $v(0) = v(1) = 0$ を満たすので

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) - I_\alpha(u_0) &= \int_0^1 x^\alpha((u_0' + v')^2 - (u_0')^2)dx = \int_0^1 x^\alpha(2u_0' + v')v'dx \\ &= x^\alpha(2u_0'+v')v\big|_0^1 - \int_0^1 (x^\alpha(2u_0'+v'))'vdx \\ &= -\int_0^1 (x^\alpha(2u_0'+v'))'vdx = -\int_0^1 (2(1-\alpha) + x^\alpha v')'vdx \\ &= -\int_0^1 (x^\alpha v')'vdx = -x^\alpha v'v\big|_0^1 + \int_0^1 x^\alpha (v')^2 dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha (v')^2 dx \ge 0. \end{aligned}$$

ここで

$$I_\alpha(u_0) = \int_0^1 x^\alpha((1-\alpha)x^{-\alpha})^2 dx = (1-\alpha)x^{1-\alpha}\big|_0^1 = 1-\alpha$$

だから $\inf_{u\in X} I_\alpha(u) = I_\alpha(u_0) = 1-\alpha$. □

問 8

z 軸を中心軸として一定角速度で回転している半無限領域 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\le 0\}$ において，x,y 方向に一様に流れる粘性流 $(u(z,t),v(z,t),0)$ を考える．ただし t は時間である．最初静止していた流体が表面 $z=0$ における一定応力で駆動されるとき，複素速度 $w(z,t)=u(z,t)+iv(z,t)$ は次の微分方程式と初期・境界条件に従うことが知られている．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial t}+iw=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\ &w(z,0)=0 \quad (\text{初期条件}),\\ &\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=1,\ w(z,t)\ \text{は}\ z\to-\infty\ \text{で有界} \quad (\text{境界条件}).\end{aligned}$$

ただし $i=\sqrt{-1}$ である．この方程式に従う流体の加速度 $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を以下のように求めよ．

(i) $z=0$ および $z\to-\infty$ における境界条件を満たす定常解 $f(z)$ を求めよ．さらに $w(z,t)=f(z)-g(z,t)$ とおいたときの $g(z,t)$ が満たす方程式と初期条件および境界条件を記せ．

(ii) z に関するフーリエ cosine 変換

$$g(z,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\zeta,t)\cos(\zeta z)d\zeta,\quad G(\zeta,t)=\int_{-\infty}^0 g(z,t)\cos(\zeta z)dz$$

を用いて $G(\zeta,t)$ を求めよ．

(iii) $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を求めよ．

解答． (i) $\lambda^2=i$ となる λ は $\pm e^{\pi i/4}=\pm\frac{1+i}{\sqrt2}$ だから $f(z)=\alpha\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)$. 境界条件から $\frac{1+i}{\sqrt2}(\alpha-\beta)=1$ だから $\alpha-\beta=\frac{1-i}{\sqrt2}$. よって

$$\begin{aligned}f&=\left(\beta+\frac{1-i}{\sqrt2}\right)\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)\\ &=\frac{1-i}{\sqrt2}\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\left(\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)\right).\end{aligned}$$

右辺の第 1 項は $z\to-\infty$ で有界．第 2 項のカッコ内は $z\to-\infty$ で $\to\infty$ だから，境界条件より $\beta=0$. 従って

$$f(z)=\frac{1-i}{\sqrt2}\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right).$$

また，g が満たす微分方程式と初期条件・境界条件は

$$\frac{\partial g}{\partial t}+ig=\frac{\partial^2 g}{\partial z^2},\qquad \begin{cases}g(z,0)=f(z)\\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial z}\right|_{z=0}=0\\ z\to-\infty\ \text{で}\ g\ \text{は有界}\end{cases}$$

(ii) g が $z\to-\infty$ で有界で $G(\zeta,t)$ が定義されるから，$g\to0\,(z\to-\infty)$. これと g は z について C^2 であることから $\frac{\partial g}{\partial z}\to0\,(z\to-\infty)$. よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z,t)\cos(\zeta z)dz&=\left.\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\cos(\zeta z)\right|_{-\infty}^0+\int_{-\infty}^0\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\zeta\sin(\zeta z)dz\\ &=g(z,t)\zeta\sin(\zeta z)|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 g(z,t)\zeta^2\cos(\zeta z)dz=-\zeta^2G(\zeta,t)\end{aligned}$$

だから，(i) の g についての方程式を Fourier cosine 変換すると

$$\frac{\partial G}{\partial t}+iG=-\zeta^2G.$$

よって $G=G_0(\zeta)\exp(-(\zeta^2+i)t)$ と書ける．ただし G_0 は ζ のみの関数．ここで

$$
\begin{aligned}
G_0(\zeta)=G(\zeta,0)&=\int_{-\infty}^{0}g(z,0)\cos(\zeta z)dz=\int_{-\infty}^{0}f(z)\cos(\zeta z)dz\\
&=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z\right)\frac{1}{2}(e^{i\zeta z}+e^{-i\zeta z})dz\\
&=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}+i\zeta}+\frac{1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}-i\zeta}\right)=\frac{1}{\zeta^2+i}
\end{aligned}
$$

だから

$$
G(\zeta,t)=\frac{\exp(-(\zeta^2+i)t)}{\zeta^2+i}.
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\partial G}{\partial t}\cos(\zeta z)d\zeta=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-(\zeta^2+i)t)\cos(\zeta z)d\zeta\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-(\zeta^2+i)t)\cos(\zeta z)d\zeta=\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-\zeta^2t)(e^{i\zeta z}+e^{-i\zeta z})d\zeta\\
&=\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-t\left(\zeta-\frac{iz}{2t}\right)^2-\frac{z^2}{4t}\right)+\exp\left(-t\left(\zeta+\frac{iz}{2t}\right)^2-\frac{z^2}{4t}\right)\right]d\zeta\\
&=\frac{e^{-it}}{2\pi}2\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\zeta^2}d\zeta=\frac{e^{-it}}{\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\frac{ds}{\sqrt{t}}\\
&=\frac{e^{-it}}{\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\sqrt{\frac{\pi}{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-it-\frac{z^2}{4t}\right).
\end{aligned}
$$

□

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 6

$\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t\geq 0\}$ 上の関数 $u=u(t,x)$ に対して次の初期値問題を考える．

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ u(0,x)=\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

(i) x に関するフーリエ変換を利用してこの初期値問題 $(*)$ を解け．

(ii) u が

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$$

という展開をもつと仮定する．$(*)$ を用いて $\{u_n(x)\}_{n=0,1,\cdots}$ を求めよ．この展開は収束するか．

(iii) (i) で求めた解と (ii) の展開との関係について論じよ．

解答． (i) Fourier 変換を $\mathcal{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi ix\xi}f(x)dx$ とする．$(*)$ を Fourier 変換して

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}-(-2\pi i\xi)^2\hat{u}=0,\qquad \hat{u}(0,\xi)=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right].$$

よって

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi)&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\exp(-4\pi^2\xi^2t)=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]\\&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}*\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]\right]\end{aligned}$$

だから

$$u(t,x)=\frac{1}{x^2+1}*\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)].$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]&=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi ix\xi}e^{-4\pi^2\xi^2t}d\xi=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-4\pi^2t\left(\xi-\frac{ix}{4\pi t}\right)^2\right)d\xi\\&=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp(-4\pi^2t\xi^2)d\xi=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cdot 2\int_0^{\infty}\exp(-4\pi^2t\xi^2)d\xi\\&=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cdot 2\int_0^{\infty}\exp(-\xi^2)\frac{d\xi}{2\pi\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\end{aligned}$$

だから

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(x-y)^2+1}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy.^{1}$$

(ii) $u(t,x)$ の展開を $(*)$ に代入して

$$\sum_{n\geq 0}u_n''(x)t^n=\sum_{n\geq 1}nu_n(x)t^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}(x)t^n.$$

t^n の係数を比較して $(n+1)u_{n+1}(x)=u_n''(x)$. よって

$$\begin{aligned}u_n(x)&=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}u_0(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)\\&=\frac{1}{n!}\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^{2n}(2n)!}{(x-i)^{2n+1}}-\frac{(-1)^{2n}(2n)!}{(x+i)^{2n+1}}\right)\\&=\frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{(x-i)^{2n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{2n+1}}\right).\end{aligned}$$

[1]閉じた形で書いてないが，この積分が計算出来るかわからなかった．

$x \in \mathbb{R}$ だから，$x+i = re^{i\theta}$ とおくと $r \geq 1$ で $x-i = \overline{x+i} = re^{-i\theta}$. この時

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{r^{2n+1}e^{-i(2n+1)\theta}} - \frac{1}{r^{2n+1}e^{i(2n+1)\theta}}\right)t^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\frac{\sin(2n+1)\theta}{r^{2n+1}}t^n = \mathrm{Im}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}(r^{-1}e^{i\theta})^{2n+1}t^n.
\end{aligned}$$

よって u を t の関数と見た時の収束半径を R とすると

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}|r^{-1}e^{i\theta}|^{2n+3}}{\frac{(2n)!}{n!}|r^{-1}e^{i\theta}|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}2(2n+1)r^{-2} = \infty$$

だから，この展開は $t > 0$ では収束しない.

(iii) (i) より

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2i}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-y-i}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy - \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-y+i}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy\right).$$

ここで $a \neq 0$ に対し $\frac{1}{a-y}$ を収束円 $|y| < |a|$ の外でも形式的に級数展開すると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{a-y}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{y}{a}\right)^n\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^{n+1}}\int_{\mathbb{R}}y^n\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{2}{a^{2n+1}}\int_0^\infty y^{2n}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy = \sum_{n\geq 0}\frac{2}{a^{2n+1}}\int_0^\infty (4ts)^n e^{-s}\sqrt{\frac{t}{s}}ds \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{(x-i)^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi} - \sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{(x+i)^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{(x-i)^{2n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{2n+1}}\right)t^n = \sum_{n\geq 0}u_n(x)t^n
\end{aligned}$$

となり (ii) の級数解が得られる．しかし (i) の u を収束円板の外でも級数展開したため，(ii) の t についての級数の収束半径は 0 となる． □

問 7

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ であって $f(0)=f(1)=0$ をみたすもの全体を X とし，写像 $\Phi: X \to X$ を，$f \in X$ に対し，

$$(\Phi(f))(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^{2x} f(y)dy & (0 < x \le 1/2) \\ \dfrac{1}{2-2x}\displaystyle\int_{2x-1}^{1} f(y)dy & (1/2 < x < 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$$

で定義する．$f_0 \in X$ を $[0,1]$ で下に凸であると仮定し，関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ で定義するとき，次の問に答えよ．

(i) $f_0(x) \le 0$ かつ $f_0(x) \le f_1(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ に対して成り立つことを示せ．

(ii) $f_n(x) \le 0$ かつ $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ とすべての $n = 0,1,2,\cdots$ に対して成り立つことを示せ．

(iii) f_n は $0 \in X$ に一様収束することを証明せよ．

解答． (i) f_0 は下に凸だから任意の $x \in [0,1]$ に対し

$$f_0(x) = f(x \cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \le x f_0(1) + (1-x) f_0(0) = 0.$$

また，$f_1(0) = (\Phi(f_0))(0) = 0 = f_0(0)$. 同様に $f_1(1) = f_0(1)$. ここで $\lambda, h \ge 0$ が $0 \le \lambda - h \le \lambda + h \le 1$ を満たす時

$$f_0(\lambda) \le \frac{1}{2h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f_0(y)dy$$

である．実際 f_0 が下に凸だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f_0(y)dy &= \frac{1}{2h}\left(\int_{\lambda-h}^{\lambda} f_0(y)dy + \int_{\lambda}^{\lambda+h} f_0(y)dy\right) \\ &= \frac{1}{2h}\left(\int_1^0 f_0(\lambda - th)(-hdt) + \int_0^1 f_0(\lambda + th)hdt\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(f_0(\lambda - th) + f_0(\lambda + th))dt \\ &\ge \int_0^1 f_0(\lambda)dt = f_0(\lambda). \end{aligned}$$

$0 < x \le 1/2$ の時，$\lambda = h = x$ として

$$f_0(x) \le \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_0(y)dy = (\Phi(f_0))(x) = f_1(x).$$

$1/2 < x < 1$ の時，$\lambda = x, h = 1-x$ として同様に $f_0(x) \le f_1(x)$.

(ii) n についての帰納法で示す．$n=0$ の時は (i) で示した．$n-1$ で正しいとする．Φ の定義から $f_n(x) = (\Phi(f_{n-1}))(x) \le 0$. また，$f_{n+1}(0) = (\Phi(f_n))(0) = 0 \ge f_n(0)$. 同様に $f_{n+1}(1) \ge f_n(1)$. $0 < x \le 1/2$ の時

$$f_{n+1}(x) = (\Phi(f_n))(x) = \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_n(y)dy \ge \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_{n-1}(y)dy = (\Phi(f_{n-1}))(x) = f_n(x).$$

$1/2 < x < 1$ の時も同様に $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$. よって n でも正しいので示された．

(iii) (ii) より任意の $x \in [0,1]$ に対し $\{f_n(x)\}_n$ は単調増加で上に有界だから，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する．$f(0) = f(1) = 0, f_0(x) \le f(x) \le 0$ である．$|f_n(x)| \le |f_0(x)| \in L^1[0,1]$ だから Lebesgue の収束定理より

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0, 1) \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^{2x} f(y)dy & (0 < x \le 1/2) \\ \dfrac{1}{2-2x}\displaystyle\int_{2x-1}^{1} f(y)dy & (1/2 < x < 1) \end{cases}.$$

$0 < x < 1/2$ の時，x に収束する任意の点列 $\{x_n\} \in (0, 1/2]$ を取ると $|\chi_{[0,2x_n]}(y)f(y)| \le |f_0(y)| \in L^1[0,1]$ だから Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2x_n}\int_0^{2x_n} f(y)dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2x_n}\int_0^1 \chi_{[0,2x_n]}(y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2x}\int_0^1 \chi_{[0,2x]}(y)f(y)dy = \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy = f(x).\end{aligned}$$

よって $f \in C(0, 1/2)$. 同様に $f \in C(1/2, 1)$. また，

$$0 \ge \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy \ge \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_0(y)dy = \lim_{x\searrow 0} f_1(x) = 0$$

より $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ だから f は $x = 0$ で連続．同様に $x = 1$ でも連続．

$$\lim_{x\searrow 1/2} f(x) = \lim_{x\searrow 1/2}\frac{1}{2-2x}\int_{2x-1}^1 f(y)dy = \int_0^1 f(y)dy = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

より $x = 1/2$ でも連続．よって $f \in C[0,1]$ である．$f_n \in X \subset C[0,1]$ だから Dini の定理より f_n は f に一様収束する．$f \equiv 0$ を示す．$f \in C[0,1]$ より $m = \min_{0\le x\le 1} f(x)$ が存在する．$m < 0$ と仮定する．$f(\alpha) = m$ となる $\alpha \in (0,1)$ を一つ取る．$\alpha \in (0, 1/2]$ とすると，$f \in C[0,1]$ よりある区間 $[l, r] \subset [0, \alpha)$ 上では $f(x) > m$ だから

$$m = f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} f(y)dy > \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} m dy = m$$

となり矛盾．$\alpha \in (1/2, 1)$ の時も同様に矛盾する．よって $m \ge 0$ だから $0 \ge f(x) \ge m \ge 0$ より $f \equiv 0$. これで示された． □

問 8

三次元空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid -\infty < x,y,z < \infty\}$ において，z 軸を極軸とする極座標を (r,θ,φ) とする．原点を中心とする半径 $a(>0)$ の剛体球の外側に密度 ρ が一定の非圧縮流体があるとする．球が z 軸を回転軸として，時間的に周期的な角速度 $\Omega = \Omega_0 \cos(\sigma t)$ で回転運動をする場合を考える．ただし，Ω_0 と σ は定数である．このとき流体運動は z 軸について軸対称で，流体速度は φ 方向の速度成分 $v(r,\theta)$ のみを持つとすると，流体の運動粘性を ν（定数とする），圧力を p, 時間を t として次の方程式が成り立つ．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]$$

この方程式に関して次の問に答えよ．

(i) $\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ を示せ．

(ii) $\omega = \dfrac{v}{r\sin\theta}$ とするとき ω が θ に依存しない（すなわち $\omega = \omega(r,t)$）と仮定して，ω の満たす方程式を導け．

(iii) (ii) で導いた方程式について，

$$\omega(r,t) = \mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)r+i\sigma t} r^n g(r)\right]$$

（$g(r)$ は r の多項式，$n \in \mathbb{Z}$）の形を仮定して，境界条件

1. $\omega \longrightarrow 0\,(r \longrightarrow \infty)$
2. $\omega(a,t) = \Omega_0 \cos(\sigma t)$

を満たす解 $\omega(r,t)$ を求めよ．ただし，$\alpha = \sqrt{\sigma/2\nu}$ とする．

解答． (i)

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho r\sin\theta\left[-\frac{\partial v}{\partial t} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]\right]$$

の右辺は仮定より φ によらない．よって φ によらない関数 $\Phi_0(r,\theta,t), \Phi_1(r,\theta,t)$ が存在して $p = \varphi\Phi_0 + \Phi_1$ と書ける．p は φ について周期 2π だから $\Phi_0 \equiv 0$. 従って $p = \Phi_1$ だから $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$.

(ii) $v = \omega r \sin\theta$ より方程式の左辺は $\frac{\partial \omega}{\partial t} r\sin\theta$, 右辺の $[\,]$ 内は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}r + 2\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\sin\theta + \frac{1}{r^2}(-\omega r\sin\theta) + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}r + \omega\right)\sin\theta + \frac{\cot\theta}{r^2}\omega r\cos\theta - \frac{\omega r\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\\ &= \left[r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 4\frac{\partial \omega}{\partial r}\right]\sin\theta\end{aligned}$$

だから

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right].$$

(iii) $\beta = \alpha(1+i)$ とし，$h = -\beta r + i\sigma t, G = r^n g, f = e^h G$ とおく．$\omega = \mathrm{Re}\, f$ である．

$$\begin{aligned}\nu^{-1}\frac{\partial f}{\partial t} &= i\frac{\sigma}{\nu}e^h G = 2i\alpha^2 e^h G = \beta^2 e^h G,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial f}{\partial r} &= (\beta^2 G - 2\beta G' + G'')e^h + \frac{4}{r}(-\beta G + G')e^h\\ &= \left[G'' + \left(\frac{4}{r} - 2\beta\right)G' + \left(\beta^2 - \frac{4\beta}{r}\right)G\right]e^h\end{aligned}$$

だから，

$$rG'' + (4 - 2\beta r)\,G' - 4\beta G = 0$$

であれば (ii) の方程式を満たす．$G=\sum_{k=n}^{N} g_k r^k\,(g_n, g_N \neq 0)$ とおけば

$$
\begin{aligned}
& rG'' + (4-2\beta r)\,G' - 4\beta G \\
=& \sum_{k=n}^{N} k(k-1) g_k r^{k-1} + 4\sum_{k=n}^{N} k g_k r^{k-1} - 2\beta \sum_{k=n}^{N} k g_k r^k - 4\beta \sum_{k=n}^{N} g_k r^k \\
=& \sum_{k=n}^{N} k(k+3) g_k r^{k-1} - 2\beta \sum_{k=n}^{N} (k+2) g_k r^k \\
=& n(n+3) g_n r^{n-1} + \sum_{k=n}^{N-1} [(k+1)(k+4) g_{k+1} - 2\beta(k+2) g_k] r^k - 2\beta(N+2) g_N r^N
\end{aligned}
$$

だから $n=-3, N=-2$. さらに $0=(n+1)(n+4)g_{n+1}-2\beta(n+2)g_n = -2g_{-2}+2\beta g_{-3}$ より $G=C(r^{-3}+\beta r^{-2}) = Cr^{-3}(1+\beta r)$. $r\to\infty$ の時 $h\to-\infty, G\to 0$ なので $f\to 0$, 従って $\omega\to 0$ で境界条件 (1) を満たす．

$$
\omega(a,t) = \mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)a+i\sigma t} C a^{-3} (1+\alpha(1+i)a)\right]
$$

だから $e^{-\alpha(1+i)a} C a^{-3}(1+\alpha(1+i)a) = \Omega_0$ となるように C を定めれば境界条件 (2) を満たす．よって

$$
\begin{aligned}
\omega(r,t) &= \mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)r+i\sigma t} C r^{-3} (1+\alpha(1+i)r)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\Omega_0 e^{-\alpha(1+i)(r-a)+i\sigma t} \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \frac{1+\alpha(1+i)r}{1+\alpha(1+i)a}\right].
\end{aligned}
$$

□

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 5

次の微分方程式を考える．

$$(*) \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u = 0.$$

(i) $u_1(x) = e^{-x^2/4}$ は $(*)$ の解であることを示し，それを利用して $u_2(0) = 0, \dfrac{du_2}{dx}(0) = 1$ をみたす $(*)$ の解 $u_2(x)$ を（積分表示の形で）求めよ．

(ii) $x \to +\infty$ のとき

$$e^{-x^2/4}u_2(x) = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

と表されることを示せ．また，定数 a_1, a_2, a_3 を求めよ．

解答． (i) $u_1' = -\frac{x}{2}u_1$ より

$$u_1'' = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{x}{2}u_1' = -\frac{1}{2}u_1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 u_1 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u_1.$$

よって u_1 は $(*)$ の解．$u_2(x) = C(x)u_1(x)$ とおくと $u_2' = C'u_1 + Cu_1'$. $u_2(0) = 0, u_2'(0) = 1$ より $C(0) = 0, C'(0) = 1$.

$$\begin{aligned} u_2'' &= C''u_1 + 2C'u_1' + Cu_1'' = C''u_1 + 2C'\left(-\frac{x}{2}u_1\right) + C\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u_1 \\ &= \left(C'' - xC' + C\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)\right)u_1 \end{aligned}$$

より

$$u_2'' - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u_2 = (C'' - xC')u_1.$$

よって $C'' - xC' = 0$ だから $(e^{-x^2/2}C')' = e^{-x^2/2}(C'' - xC') = 0$. $\therefore e^{-x^2/2}C' = C'(0) = 1$. 従って $C' = e^{x^2/2}$ なので

$$C(x) = \int_0^x e^{t^2/2}dt \qquad \therefore u_2(x) = e^{-x^2/4}\int_0^x e^{t^2/2}dt$$

(ii) $\varepsilon > 0$ を十分小さく取ると

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^x e^{t^2/2}dt &= t^{-1}e^{t^2/2}\Big|_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x t^{-2}e^{t^2/2}dt = t^{-1}e^{t^2/2}\Big|_\varepsilon^x + t^{-3}e^{t^2/2}\Big|_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x 3t^{-4}e^{t^2/2}dt \\ &= (x^{-1} + x^{-3})e^{x^2/2} - (\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-3})e^{\varepsilon^2/2} + \int_\varepsilon^x 3t^{-4}e^{t^2/2}dt \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} e^{-x^2/4}u_2(x) &= e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt \\ &= x^{-1} + x^{-3} + e^{-x^2/2}\left(\int_0^\varepsilon e^{t^2/2}dt - (\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-3})e^{\varepsilon^2/2}\right) + 3e^{-x^2/2}\int_\varepsilon^x t^{-4}e^{t^2/2}dt. \end{aligned}$$

$x \to \infty$ の時第 3 項は 0 に収束するから $O(x^{-4})$, また第 4 項は

$$\left|\frac{e^{-x^2/2}\int_\varepsilon^x t^{-4}e^{t^2/2}dt}{x^4}\right| \le \frac{e^{-x^2/2}\int_\varepsilon^x \varepsilon^{-4}e^{x^2/2}dt}{x^4} = \frac{(x-\varepsilon)\varepsilon^{-4}}{x^4} \to 0$$

なので

$$e^{-x^2/4}u_2(x) = x^{-1} + x^{-3} + O(x^{-4}) \quad (x \to \infty).$$

□

問 6

連続微分可能な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が

$$f(0)=f(1)=0$$

をみたすとき，次の不等式を示せ．

$$\int_0^1 |f(x)|^2dx \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

解答． $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 1)\\ -f(-x) & (-1\le x<0)\end{cases}$$

で定める．この時

$$\lim_{x\nearrow 0} g(x)=\lim_{x\nearrow 0}(-f(-x))=-f(0)=0=f(0)=g(0),$$
$$\lim_{x\searrow -1} g(x)=\lim_{x\searrow -1}(-f(-x))=-f(1)=0=f(1)=g(1)$$

より g は周期 2 の関数として連続．さらに

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (0<x<1)\\ f'(-x) & (-1<x<0)\end{cases},$$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),\quad \lim_{x\nearrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{-f(-x)}{x}=f'(0),$$
$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1),\quad \lim_{x\searrow -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\searrow -1}\frac{-f(-x)}{x+1}=f'(1)$$

だから g は周期 2 の関数として C^1. よって g の Fourier 展開を $g(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{in\pi x}$ とすると

$$g'(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\pi g_n e^{in\pi x},\quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=\sum_n |g_n|^2,\quad \int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=\sum_n (n\pi)^2|g_n|^2.$$

また，g は奇関数だから $g_0=\int_{-1}^1 g(x)dx=0$. $|g|^2,|g'|^2$ は偶関数だから

$$\int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=2\int_0^1 |f(x)|^2dx,\quad \int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=2\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2dx &= \frac12\int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=\frac12\sum_{n\ne 0}|g_n|^2=\frac{1}{\pi^2}\frac12\sum_{n\ne 0}\pi^2|g_n|^2\\ &\le \frac{1}{\pi^2}\frac12\sum_{n\ne 0}(n\pi)^2|g_n|^2=\frac{1}{\pi^2}\frac12\int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

□

問 7

xy 平面上の極座標を (r,θ) とする $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$. 頂角 $\alpha\,(0<\alpha<\pi/2)$ の扇形領域

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0<r<1, 0<\theta<\alpha\}$$

を考える．断面が D のまっすぐな管の中を流れる流体の速度を $u=u(x,y)$ とするとき，次の方程式が成り立つことが知られている．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C & (D \text{ の内部}), \\ u=0 & (D \text{ の境界上}). \end{cases}$$

ここで C は定数であり，u は D 上で境界までこめて連続な関数である．このとき，次の問に答えよ．

(i) 関数 $u_1=u_1(x,y)$ を

$$u(x,y)=\frac{Cr^2}{4}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+u_1(x,y)$$

で定めるとき，D において u_1 がみたす方程式，および，D の境界における u_1 の値を求めよ．

(ii) u_1 の θ に関するフーリエ級数展開

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(r)\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}$$

において，$A_k(r)\,(k=1,2,\cdots)$ を求めよ．

解答. (i) x による偏微分を ∂_x などと略記する．

$$\partial_r=\frac{\partial x}{\partial r}\partial_x+\frac{\partial y}{\partial r}\partial_y=\cos\theta\cdot\partial_x+\sin\theta\cdot\partial_y,\quad \partial_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}\partial_x+\frac{\partial y}{\partial\theta}\partial_y=-r\sin\theta\cdot\partial_x+r\cos\theta\cdot\partial_y$$

より

$$\partial_x=\cos\theta\cdot\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta,\quad \partial_y=\sin\theta\cdot\partial_r+\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta$$

なので

$$\begin{aligned}
\partial_x^2&=\cos\theta\left(\cos\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\cdot\partial_r+\cos\theta\cdot\partial_r\partial_\theta-\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta^2\right)\\
&=\cos^2\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial_\theta^2-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta,\\
\partial_y^2&=\sin\theta\left(\sin\theta\cdot\partial_r^2-\frac{\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right)+\frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta\cdot\partial_r+\sin\theta\cdot\partial_r\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta^2\right)\\
&=\sin^2\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial_\theta^2+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta.
\end{aligned}$$

よって

$$\partial_x^2+\partial_y^2=\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

ここで $u_0=u-u_1$ とおくと

$$\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right)u_0=\frac{C}{2}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+\frac{C}{2}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+C\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}=C$$

なので，u_1 が満たす微分方程式と境界条件は

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)u_1=0,\quad u_1=\begin{cases}0 & (\theta=0,\alpha)\\ -\frac{C}{4}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right) & (r=1).\end{cases}$$

(ii) $\lambda = \pi/\alpha$ とおく．(i) から

$$0 = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right) u_1 = \sum_{k\geq 1}\left(A_k'' + \frac{1}{r}A_k' - \frac{(k\lambda)^2}{r^2}A_k\right)\sin(k\lambda\theta)$$

なので $r^2A_k'' + rA_k' - (k\lambda)^2A_k = 0$. D 上では $0 < r < 1$ だから $r = e^{-t}$ とおける．$\frac{d}{dr} = d_r$ などと略記する．$B_k(t) = A_k(e^{-t})$ とおけば

$$d_r = \frac{dt}{dr}d_t = -e^t d_t, \quad d_r^2 = e^t d_t e^t d_t = e^{2t}(d_t^2 + d_t)$$

より

$$r^2A_k'' + rA_k' - (k\lambda)^2A_k = ((d_t^2 + d_t) - d_t - (k\lambda)^2)B_k(t) = (d_t^2 - (k\lambda)^2)B_k(t).$$

よって $B_k(t) = c_k e^{-k\lambda t} + c_k' e^{k\lambda t}$ なので $A_k(r) = c_k r^{k\lambda} + c_k' r^{-k\lambda}$. 今 u_1 は ∂D までこめて連続だから $c_k' = 0$. 従って

$$u_1 = \sum_{k\geq 1} c_k r^{k\lambda}\sin(k\lambda\theta). \qquad \therefore \sum_{k\geq 1} c_k \sin(k\lambda\theta) = -\frac{C}{4}\left(1 - \frac{\cos(2\theta - \alpha)}{\cos\alpha}\right)$$

ここで $k, j \geq 1$ に対し

$$\int_0^\pi \sin(kx)\sin(jx)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(k+j)x - \cos(k-j)x)dx = \begin{cases} \pi/2 & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

だから

$$\int_0^\alpha \sum_{j\geq 1} c_j \sin(j\lambda\theta)\sin(k\lambda\theta)d\theta = \sum_{j\geq 1} c_j \int_0^\pi \sin(j\theta)\sin(k\theta)\frac{d\theta}{\lambda} = c_k\frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{2}c_k.$$

また，

$$\int_0^\alpha \sin(k\lambda\theta)d\theta = \left.\frac{-1}{k\lambda}\cos(k\lambda\theta)\right|_0^\alpha = \frac{1}{k\lambda}(1 - (-1)^k),$$

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \cos(2\theta - \alpha)\sin(k\lambda\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha (\sin(k\lambda\theta + (2\theta - \alpha)) + \sin(k\lambda\theta - (2\theta - \alpha)))d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{-1}{k\lambda + 2}\cos(k\lambda\theta + (2\theta - \alpha)) + \frac{-1}{k\lambda - 2}\cos(k\lambda\theta - (2\theta - \alpha))\right)\right|_0^\alpha \\ &= \frac{k\lambda}{(k\lambda)^2 - 4}(1 - (-1)^k)\cos\alpha\end{aligned}$$

なので

$$\frac{\alpha}{2}c_k = -\frac{C}{4}\left[\frac{1}{k\lambda}(1 - (-1)^k) - \frac{k\lambda}{(k\lambda)^2 - 4}(1 - (-1)^k)\right] = C\frac{1 - (-1)^k}{k\lambda((k\lambda)^2 - 4)}.$$

よって

$$A_k(r) = c_k r^{k\lambda} = \frac{2C}{\alpha}\frac{1 - (-1)^k}{k\lambda((k\lambda)^2 - 4)}r^{k\lambda} = \frac{2C}{k\pi}\frac{1 - (-1)^k}{(k\pi/\alpha)^2 - 4}r^{k\pi/\alpha}.$$

□

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 5

$f(z)$ を $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ 上の正則関数とする．

(i) 微分方程式

$$z^2 \frac{du}{dz}(z) + zu(z) = \lambda + f(z)$$

をみたす D 上の正則関数 $u(z)$ と定数 λ の組 $(u(z), \lambda)$ がただ一つ存在することを示せ．

(ii) r を $0 < r < 1$ をみたす実数とするとき，(i) の $u(z)$ に対して

$$\sup_{|z|\le r} |u(z)| \le \frac{2}{r} \sup_{|z|\le r} |f(z)|, \qquad \sup_{|z|\le r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| \le \frac{4}{r^2} \sup_{|z|\le r} |f(z)|$$

が成立することを示せ．

解答． (i) $z = 0$ とすると $0 = \lambda + f(0)$ だから $\lambda = -f(0)$ が必要．よって $\lambda = -f(0)$ の時 u が一意に存在することを示せば良い．$f(z) - f(0)$ は $z = 0$ に零点を持つから $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ は D 上正則．よって

$$(zu)' = zu' + u = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

を線分 $[0, z]$ 上で積分できて

$$zu(z) = \int_0^z \frac{f(t) - f(0)}{t} dt.$$

ゆえに

$$u(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f(t) - f(0)}{t} dt = \int_0^1 \frac{f(zs) - f(0)}{zs} ds.$$

この被積分関数は D 上正則だったから，u も D 上正則．もし u_1, u_2 が条件を満たすとすると，$v = u_1 - u_2$ は $\lambda + f \equiv 0$ の時の解であるから，上の積分表示より $v \equiv 0$. つまり u は一意．

(ii) 正則関数に関する最大値原理により $\sup_{|z|\le r} |f(z)| = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ であるから，上の積分表示より

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\le r} |u(z)| &= \sup_{\substack{|z|\le r \\ 0\le s\le 1}} \left|\frac{f(zs) - f(0)}{zs}\right| = \sup_{|z|\le r} \left|\frac{f(z) - f(0)}{z}\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z) - f(0)}{z}\right| \\
&\le \frac{1}{r} \left(\sup_{|z|=r} |f(z)| + |f(0)| \right) \le \frac{2}{r} \sup_{|z|\le r} |f(z)|.
\end{aligned}$$

また，u が微分方程式の解であることから，

$$\sup_{|z|=r} \left| z\frac{du}{dz}(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z} - u(z)\right| \le \frac{2}{r} \sup_{|z|\le r} |f(z)| + \sup_{|z|\le r} |u(z)| \le \frac{4}{r} \sup_{|z|\le r} |f(z)|.$$

よって

$$\sup_{|z|\le r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| = \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} \left|z\frac{du}{dz}(z)\right| \le \frac{4}{r^2} \sup_{|z|\le r} |f(z)|.$$

□

問 6

H を複素ヒルベルト空間，$A : H \to H$ を有界線形作用素とする．このとき，

$$w(A) = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(Ax, x)|$$

とおく．ただし，$(\cdot,\cdot)$ は H の内積であり，それから導かれるノルムを $\|\cdot\|$ で表わす．

(i) $r(A) = \sup_{z \in \sigma(A)} |z|$ とおく．ここで，$\sigma(A)$ は A のスペクトルである．このとき，$r(A) < w(A) < \|A\|$ となる具体例を一つあげよ．ただし，$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} \|Ax\|$.

(ii) $\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|$ となることを証明せよ．また，左の不等式において，係数 $\frac{1}{2}$ はこれ以上大きくはできないことを示せ.（ヒント：$x \in H$ と $y \in H$ が任意に与えられたとき，$u, v, \cdots \in H$ をうまく選んで (Ax, y) を $(Au, u), (Av, v), \cdots$ で表わせ.）

解答. (i) $H = \mathbb{C}, A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とする．内積は $(u, v) = {}^t u \overline{v}$ とする．$r(A) = 1$ である．$x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ と書く．$\|x\| = 1$ なる任意の $x \in H$ に対し

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \overline{x_1} x_2 = 1 + \overline{x_1} x_2$$

だから $1 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 2|x_1||x_2|$ と合わせて $|(Ax, x)| \leq 1 + |x_1||x_2| \leq \frac{3}{2}$. $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時等号成立するから $w(A) = \frac{3}{2}$.

$$\|A\|^2 = \|A^* A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(A^* A x, x)|$$

である．ただし 2 番目の等号は $A^* A$ が自己共役であることによる．$A^* A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ はユニタリ行列 P を用いて $P^* A^* A P = \mathrm{diag}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ と書けるから，x が $A^* A$ の固有値 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ に対応する長さ 1 の固有ベクトルの時 $|(A^* A x, x)|$ は最大値 $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ を取る．よって $\|A\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ だから $r(A) < w(A) < \|A\|$.

(ii) $\|x\| = 1$ なる任意の $x \in H$ に対し $|(Ax, x)| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$ だから $w(A) \leq \|A\|$. 任意の $x, y \in H$ に対し

$$\begin{aligned} &4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy), \\ &(Ax, x) = \left(A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \|x\|^2 \leq w(A)\|x\|^2 \end{aligned}$$

だから $\|x\| = \|y\| = 1$ の時

$$\begin{aligned} 4|(Ax, y)| &\leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| + |(A(x+iy), x+iy)| + |(A(x-iy), x-iy)| \\ &\leq w(A)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) \\ &= 4w(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 8w(A). \end{aligned}$$

特に $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ とすると左辺は $4\|Ax\|$ だから $\|Ax\| \leq 2w(A)$. x は任意だから $\|A\| \leq 2w(A)$.

$H = \mathbb{C}^2, A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とする．$x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ に対し $|(Ax, x)| = |x_1||x_2| \leq \frac{1}{2}$. $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時等号成立するから $w(A) = \frac{1}{2}$. 一方 $\|Ax\| = |x_2| \leq 1$ で，これは $x_1 = 0, x_2 = 1$ の時等号だから $\|A\| = 1$. よって $\frac{1}{2}\|A\| = w(A)$ となるから，問題の不等式の係数 $\frac{1}{2}$ は最良. □

問 7

一次元空間における流体の運動方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を考える．ここで x は空間座標 $(-\infty < x < \infty)$, t は時間 $(t \geq 0)$ とし，速度 $u = u(x,t)$, 密度 $\rho = \rho(x,t)$ はいずれもなめらかな関数とする．次の問に答えよ．

(i) 時間 t の関数 $x_i(t)\,(i=1,2)$ は

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u(x_i(t), t) \qquad (i = 1, 2)$$

をみたすものとする．このとき次の式を示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx = 0. \tag{2}$$

(ii) ラグランジュ座標を (ξ, t) とする．すなわち $x = x(\xi, t)$ は

$$\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial t} = u(x(\xi,t),t), \quad x(\xi, 0) = \xi$$

をみたすものとする．このとき，(2) における積分変数の変換を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$\rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial \xi} = \rho(\xi, 0).$$

(iii) $\rho(x,0) = \rho_0$（定数），$u(x,t) = \dfrac{1}{\cosh x}$ のとき，(1) の解 $\rho(x,t)$ を求めよ．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dx + \frac{dx_2(t)}{dt}\rho(x_2(t),t) - \frac{dx_1(t)}{dt}\rho(x_1(t),t) \\
&= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx + u(x_2(t),t)\rho(x_2(t),t) - u(x_1(t),t)\rho(x_1(t),t) \\
&= -\rho(x,t)u(x,t)\Big|_{x_1(t)}^{x_2(t)} + u(x_2(t),t)\rho(x_2(t),t) - u(x_1(t),t)\rho(x_1(t),t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) (i) より任意の t に対し

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx = \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(x,0)dx = \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(\xi,0)d\xi.$$

左辺の積分は $x = x(\xi,t)$ と置換すれば，$x_i(t) = x_i(x_i(0),t)$ より

$$\int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi$$

に等しい．$x_1(0), x_2(0)$ は任意だから

$$\rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial \xi} = \rho(\xi,0).$$

(iii) (ii) の $x(\xi,t)$ を求める．$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\cosh x}$ より

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^x - e^{-x} - 2t) = (e^x + e^{-x})\frac{\partial x}{\partial t} - 2 = 0$$

だから

$$e^x - e^{-x} - 2t = e^\xi - e^{-\xi}.$$

これを ξ で微分して $(e^x + e^{-x})\frac{\partial x}{\partial \xi} = e^\xi + e^{-\xi}$. 一方 e^ξ について解くと，$e^\xi > 0$ より

$$e^\xi = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x} - 2t + \sqrt{(e^x - e^{-x} - 2t)^2 + 4}\right].$$

$$\therefore e^{-\xi} = \frac{-1}{2}\left[e^x - e^{-x} - 2t - \sqrt{(e^x - e^{-x} - 2t)^2 + 4}\right]$$

よって

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sqrt{(e^x - e^{-x} - 2t)^2 + 4}}{e^x + e^{-x}}$$

だから

$$\rho(x,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}\rho_0 = \frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{(e^x - e^{-x} - 2t)^2 + 4}}\rho_0.$$

□

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 5

$f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上定義された正則関数とする．

$$z^2 \frac{d}{dz}u(z) + u(z) = f(z)$$

をみたす $\mathbb{C}$ 上定義された正則関数 $u(z)$ が存在するためには

$$\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz = 0$$

となることが必要十分であることを示せ．ただし $\oint$ は $|z| = 1$ を一周する積分である．

解答． $\cdot$ $z^2u' + u = f$ となる正則関数 u が存在する時：$z \neq 0$ に対し

$$(e^{-1/z}u)' = e^{-1/z}(u' + z^{-2}u) = z^{-2}e^{-1/z}(z^2u' + u) = z^{-2}e^{-1/z}f$$

だから

$$\begin{aligned}\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz = \oint \frac{d}{dz}(e^{-1/z}u(z))dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}}\frac{d}{d\theta}(e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta}))ie^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}(e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta}))d\theta = e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

ただし最後の等号は $e^{-1/z}u(z)$ が $\mathbb{C}^\times$ 上 1 価正則であることによる．

$\cdot$ $\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz = 0$ が成り立つ時：$\mathbb{C}^\times$ 上の関数 $u(z)$ を

$$u(z) = e^{1/z}\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}f(t)dt$$

で定める．ただし積分路は 1 と z を結ぶ $\mathbb{C}^\times$ 上の任意の路とする．u の被積分関数は $\mathbb{C}^\times$ 上正則だから u は $\mathbb{C}^\times$ 上正則．さらに $\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz = 0$ より u の積分は積分路の取り方によらないから，u は $\mathbb{C}^\times$ 上 1 価正則である．

$$\lim_{z\to 0} u(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\displaystyle\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}f(t)dt}{e^{-1/z}} = \lim_{z\to 0}\frac{z^{-2}e^{-1/z}f(z)}{z^{-2}e^{-1/z}} = f(0)$$

だから u は $z = 0$ でも正則で，$u(0) = f(0)$. さらに $\mathbb{C}^\times$ において

$$u' = e^{1/z}\left(z^{-2}e^{-1/z}f - z^{-2}\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}fdt\right) = z^{-2}f - z^{-2}u$$

より $z^2u' + u = f$. この式で $z = 0$ とすると $u(0) = f(0)$ となるが，これが成り立つことは上で示した．よって $\mathbb{C}$ 上 $z^2u' + u = f$ となり示された． $\square$

問 6

単位区間 $[0,1]$ 上で定義された複素数値可測関数の列 $u_n(x)\,(n=1,2,\dots)$ は次の条件 (a), (b) をみたすと仮定する．

(a) すべての n とすべての $x\in[0,1]$ に対して，$|u_n(x)|=1$.

(b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|>0.$

このとき，以下を示せ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy<\infty.$

(ii) ある数列 $c_n\,(n=1,2,\dots)$ が存在して，集合

$$\{x\in[0,1]\,;\,\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-c_n)=0\}$$

のルベーグ測度は 1 である．

解答． (i) (a) より

$$\int_0^1\int_0^1|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy=\int_0^1\int_0^1 2(1-\mathrm{Re}(u_n(x)\overline{u_n(y)}))dxdy=2\left(1-\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|^2\right).$$

(b) より $\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|\neq 0$ だから，$\log x\le x-1\,(x>0)$ から

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1}\int_0^1\int_0^1|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy&=2\sum_{n\ge1}\left(1-\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|^2\right)\\&\le-2\sum_{n\ge1}\log\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|^2=-4\log\prod_{n\ge1}\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|.\end{aligned}$$

また，仮定から

$$0<\prod_{n\ge1}\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|\le\prod_{n\ge1}\int_0^1|u_n(x)|dx=1$$

だから，

$$0\le-4\log\prod_{n\ge1}\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|<\infty.$$

よって示された．

(ii) μ を Lebesgue 測度とする．$\varepsilon>0$ を任意に取る．$A_n(y)=\{x\in[0,1]\,;\,|u_n(x)-u_n(y)|\ge\varepsilon\}$ とおくと，(i) より

$$\begin{aligned}\infty>\sum_{n\ge1}\int_0^1\int_0^1|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy&\ge\sum_{n\ge1}\int_0^1\int_{A_n(y)}|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy\\&\ge\sum_{n\ge1}\int_0^1\int_{A_n(y)}\varepsilon^2dxdy=\varepsilon^2\sum_{n\ge1}\int_0^1\mu(A_n(y))dy.\end{aligned}$$

任意の $y_n\in[0,1]$ に対し $\int_0^1\mu(A_n(y))dy<\mu(A_n(y_n))$ とすると

$$\int_0^1\mu(A_n(y_n))dy_n>\int_0^1\int_0^1\mu(A_n(y))dydy_n=\int_0^1\int_0^1\mu(A_n(y))dy_ndy=\int_0^1\mu(A_n(y))dy$$

となり矛盾．よって $\int_0^1\mu(A_n(y))dy\ge\mu(A_n(y_n))$ となる $y_n\in[0,1]$ が存在する．この時 $\sum_{n\ge1}\mu(A_n(y_n))<\infty$ である．$c_n=u_n(y_n)$ とおいた時，これが条件を満たすことを示す．以下 $A_n(y_n)$ を A_n と書く．c_n の取り方から

$$\mu\left(\bigcap_{n\ge1}\bigcup_{k\ge n}A_k\right)\le\mu\left(\bigcup_{k\ge n}A_k\right)\le\sum_{k\ge n}\mu(A_k)\to0\quad(n\to\infty)$$

だから
$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0.$$
よって
$$1 = \mu\left(\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c\right)$$
である．ここで
$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c &= \{x \in [0,1]\,;\, n \geq 1 \text{ があって任意の } k \geq n \text{ に対し } x \in A_k^c\} \\ &= \{x \in [0,1]\,;\, n \geq 1 \text{ があって任意の } k \geq n \text{ に対し } |u_k(x) - c_k| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in [0,1]\,;\, \varlimsup_{n\to\infty} |u_n(x) - c_n| < \varepsilon\}\end{aligned}$$
だから
$$\mu(\{x \in [0,1]\,;\, \varlimsup_{n\to\infty} |u_n(x) - c_n| < \varepsilon\}) = 1.$$
$\varepsilon > 0$ は任意だから
$$\mu(\{x \in [0,1]\,;\, \lim_{n\to\infty} (u_n(x) - c_n) = 0\}) = 1.$$
□

問 7

2 次元非圧縮性流体の流れ場は流れ関数 $\psi(x,y)$ によって記述される．非粘性の定常流では，渦度 $\omega=-\Delta\psi\,(\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$ と流れ関数 ψ の間に関数関係が成立することが知られており，渦列による流れ等は次の方程式によって議論されることがある．

$$\Delta\psi=\exp(-2\psi) \tag{$*$}$$

この方程式について以下の問に答えよ．ただし，$z=x+iy\,(i=\sqrt{-1})$ とする．

(i) 方程式 $(*)$ の解 $\psi(x,y)$ に対し，

$$\psi_G(x,y)=\psi(\mathrm{Re}[G(z)],\mathrm{Im}[G(z)])-\log\left|\frac{dG}{dz}(z)\right|$$

は再び $(*)$ の解となることを示せ．ただし，$G(z)$ は z の正則関数で dG/dz が零点をもたないものとする．また，Re,Im はそれぞれ複素数の実部，虚部を表す．

(ii) 方程式 $(*)$ の解で $s=x^2+y^2$ のみに依存するものを $\psi=f(s)$ とおく．このとき，$f(s)$ は

$$s(f''+(f')^2)'+2(f''+(f')^2)=0$$

をみたすことを示し，$f(0)=0$ かつ $f(s)$ は特異点をもたないとして $f(s)$ を求めよ．
ただし，$'$ は s に関する微分を表す．また，必要があればラプラシアンの極座標表示

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

を用いてもよい．

(iii) (i) および (ii) の解を用いて，$(*)$ の解で $\psi(x+2\pi,y)=\psi(x,y),\psi(0,y)\neq\psi(\pi,y)$ をみたし特異点をもたないものを一つ求めよ．

解答． (i) $\mathrm{Re}\,G=u,\mathrm{Im}\,G=v$ とおく．

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,v)=\psi_x(u,v)u_x+\psi_y(u,v)v_x,\quad \frac{\partial}{\partial y}\psi(u,v)=\psi_x(u,v)u_y+\psi_y(u,v)v_y$$

より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(u,v)=&\left[\psi_{xx}(u,v)u_x+\psi_{xy}(u,v)v_x\right]u_x+\psi_x(u,v)u_{xx}\\&+[\psi_{xy}(u,v)u_x+\psi_{yy}(u,v)v_x]v_x+\psi_y(u,v)v_{xx},\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(u,v)=&[\psi_{xx}(u,v)u_y+\psi_{xy}(u,v)v_y]u_y+\psi_x(u,v)u_{yy}\\&+[\psi_{xy}(u,v)u_y+\psi_{yy}(u,v)v_y]v_y+\psi_y(u,v)v_{yy}.\end{aligned}$$

G は正則だから $u_x=v_y,u_y=-v_x,\Delta u=\Delta v=0$ となることに注意すると，

$$\Delta(\psi(u,v))=(\Delta\psi)|_{(u,v)}((u_x)^2+(u_y)^2).$$

ここで，$\frac{dG}{dz}$ は正則で零点を持たないから $\mathrm{Log}\,\frac{dG}{dz}$ も正則．$\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}\,\frac{dG}{dz}=\log|\frac{dG}{dz}|$ だから $\Delta\log|\frac{dG}{dz}|=0$．
これと $\frac{dG}{dz}=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)(u+iv)=u_x-iu_y$ より

$$\begin{aligned}\Delta\psi_G=\Delta(\psi(u,v))=(\Delta\psi)|_{(u,v)}((u_x)^2+(u_y)^2)=\exp(-2\psi(u,v))((u_x)^2+(u_y)^2)\\=\exp(-2\psi_G)\left|\frac{dG}{dz}\right|^{-2}((u_x)^2+(u_y)^2)=\exp(-2\psi_G).\end{aligned}$$

(ii) $\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial x} f' = 2xf'$ より $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2(f' + 2x^2 f'')$. よって $\Delta\psi = 4(f' + sf'')$ なので，$(*)$ は $4(f' + sf'')\exp(2f) = 1$ と同値．これを s で微分して

$$\begin{aligned}0 &= 4\exp(2f)[2f'(f' + sf'') + (f'' + f'' + sf''')] = 4\exp(2f)[s(f''' + 2f'f'') + 2(f'' + (f')^2)] \\ &= 4\exp(2f)[s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2)].\end{aligned}$$

従って $s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2) = 0$. これより $\frac{(f''+(f')^2)'}{f''+(f')^2} = -\frac{2}{s}$ なので $f'' + (f')^2 = c_0 s^{-2}$. f は 原点を特異点に持たないから $c_0 = 0$. よって $((f')^{-1})' = -(f')^{-2} f'' = 1$ から $f' = \frac{1}{s+c_1}$. 従って $f = \log(s + c_1) + c_2$. ここで $0 = f(0) = \log c_1 + c_2$ より

$$f(s) = \log(s + c_1) - \log c_1 = \log\left(1 + \frac{s}{c_1}\right)$$

であることが必要．f は特異点を持たないから $c_1 > 0$. ここで $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{s+c_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(s+c_1-2x^2)}{(s+c_1)^2}$ より $\Delta f = \frac{4c_1}{(s+c_1)^2}$. 一方 $\exp(-2f) = \frac{c_1^2}{(s+c_1)^2}$ だから $c_1 = 4$. ゆえに

$$f(s) = \log\left(1 + \frac{s}{4}\right).$$

(iii) ψ を (ii) で求めたものとし，$G(z) = \exp(e^{iz})$ とすると，

$$\begin{aligned}G &= \exp(e^{-y}e^{ix}) = \exp(e^{-y}(\cos x + i\sin x)) = \exp(e^{-y}\cos x)\exp(ie^{-y}\sin x), \\ \frac{dG}{dz} &= ie^{-y}e^{ix}G = i\exp(-y + e^{-y}\cos x)\exp(i(x + e^{-y}\sin x))\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\psi_G(x, y) &= \log\left(1 + \frac{|G|^2}{4}\right) - \log\left|\frac{dG}{dz}\right| \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(2e^{-y}\cos x)\right) + y - e^{-y}\cos x.\end{aligned}$$

$\frac{dG}{dz}$ は零点を持たないから，(i) より ψ_G は $(*)$ の解である．また，$G, \frac{dG}{dz}$ は x について周期 2π だから $\psi_G(x + 2\pi, y) = \psi_G(x, y)$ を満たす．さらに

$$\begin{aligned}\psi_G(0, y) &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(2e^{-y})\right) + y - e^{-y}, \\ \psi_G(\pi, y) &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(-2e^{-y})\right) + y + e^{-y}\end{aligned}$$

より $\psi_G(0, y) \neq \psi_G(\pi, y)$. また，$\psi_G$ が特異点を持たないことは明らか．よって ψ_G は求める解の一つである． □

平成 18 年度 (2005 年 8 月実施)

問 5

α, β を正の定数とし，$x > 0$ に対して，

$$u(x) = \int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

とおく．

(i) $u(x)$ は微分方程式

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha+\beta-x)\frac{du}{dx} - \alpha u = 0$$

を満たすことを示せ．

(ii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^\beta u(x)$ を求めよ．

(iii) (i) の微分方程式の $x > 0$ における解であって，$u(x)$ と 1 次独立なものを（積分の形で）与えよ．また，それが $u(x)$ と 1 次独立である理由を述べよ．

解答． (i) $R > 0$ を任意に取る．$0 < x \leq R$ において $\left|\frac{\partial}{\partial x} e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\right| \leq e^{Rt} t^\alpha (1-t)^{\beta-1} \in L^1(0,1)$ だから

$$u' = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^1 e^{xt} t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt.$$

$R > 0$ は任意だから，これは $x > 0$ で成立．2 階微分についても同様．よって

$$\begin{aligned}
& xu'' + (\alpha+\beta-x)u' - \alpha u \\
=& x\int_0^1 e^{xt} t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1} dt + (\alpha+\beta-x)\int_0^1 e^{xt} t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt - \alpha\int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \\
=& \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} e^{xt} \cdot t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1} dt + (\alpha+\beta)\int_0^1 e^{xt} t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt \\
& - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} e^{xt} \cdot t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt - \alpha\int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \\
=& -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} e^{xt} \cdot t^\alpha (1-t)^\beta dt - \alpha\int_0^1 e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt + \beta\int_0^1 e^{xt} t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt \\
=& -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(e^{xt} t^\alpha (1-t)^\beta) dt = -e^{xt} t^\alpha (1-t)^\beta \big|_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

(ii) $(1-t)x = s$ とおくと

$$\begin{aligned}
e^{-x}x^\beta u(x) &= \int_0^1 e^{-(1-t)x} t^{\alpha-1}((1-t)x)^{\beta-1} x dt = \int_0^x e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\
&= \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(s) e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

$x \to \infty$ の時を考えるから，$R > 0$ があって $x > R$ として良い．この時

$$\left|\chi_{(0,x)}(s) e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^{\beta-1}\right| \leq \begin{cases} e^{-s}s^{\beta-1} & (\alpha \geq 1) \\ e^{-s}\left|1-\frac{s}{R}\right|^{\alpha-1} s^{\beta-1} & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

で，右辺はいずれも $L^1(0,\infty)$ の元．よって Lebesgue の収束定理から

$$\int_0^\infty \chi_{(0,x)}(s) e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \to \int_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1} ds = \Gamma(\beta).$$

ゆえに $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^\beta u(x) = \Gamma(\beta)$.

(iii) $v(x)=\int_\gamma e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ とおく．(i) の計算で積分路が影響するのは最後の等号だけであることに注意すると，$xv''+(\alpha+\beta-x)v'-\alpha v=-e^{xt}t^\alpha(1-t)^\beta|_{\partial\gamma}$ であるから，$e^{xt}t^\alpha(1-t)^\beta|_{\partial\gamma}=0$ となる γ を取れば v は微分方程式の解となる．$\gamma=(-\infty,0)$ とする．ただし $(-\infty,0],[1,\infty)$ にカットを入れて $t^{\alpha-1}|_{t=1}=1,(1-t)^{\beta-1}|_{t=0}=1$ となる分枝を取る．γ は $\arg t=\pi$ または $\arg t=-\pi$ となるように取る．この時

$$\begin{aligned}v(x)&=\int_{-\infty}^0 e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_0^\infty e^{-xt}(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt\\&=e^{\pm(\alpha-1)\pi i}\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt\end{aligned}$$

である．ただし複号は γ が $\arg t=\pi$ となる時 $+$, $\arg t=-\pi$ となる時 $-$ である．微分方程式は線形だから，改めて

$$v(x)=\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt$$

として良い．これが u と一次独立な非自明解であることを示す．$W=\begin{vmatrix}u&v\\u'&v'\end{vmatrix}$ とおく．この時

$$xW'=\begin{vmatrix}u&v\\xu''&xv''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u&v\\\alpha u-(\alpha+\beta-x)u'&\alpha v-(\alpha+\beta-x)v'\end{vmatrix}=-(\alpha+\beta-x)W$$

だから $\frac{W'}{W}=1-\frac{\alpha+\beta}{x}$. よって定数 C が存在して $W=Ce^xx^{-\alpha-\beta}$ と書ける．もし u と v が一次従属であるか v が自明な解なら $W\equiv 0$ だから $C=0$. よって $C\neq 0$ を示せば良い．$x\searrow 0$ とすると

$$\begin{aligned}u^{(n)}&\to\int_0^1 t^{\alpha+n-1}(1-t)^{\beta-1}dt=B(\alpha+n,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)},\\x^{\alpha+\beta}v'&=-\int_0^\infty e^{-xt}(xt)^\alpha(x(1+t))^{\beta-1}xdt=-\int_0^\infty e^{-s}s^\alpha(x+s)^{\beta-1}ds\to-\Gamma(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

$\alpha+\beta\neq 1$ の時 $\alpha+\beta-1>-1$ だから

$$x^{\alpha+\beta}v=x\cdot x^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt=x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}(x+s)^{\beta-1}ds\to 0\cdot\Gamma(\alpha+\beta-1)=0,$$

$\alpha+\beta=1$ の時 $0<\alpha<1$ だから

$$0<xv=x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}(x+s)^{-\alpha}ds<x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}x^{-\alpha}ds=x^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\to 0.$$

いずれにしても

$$C=\lim_{x\searrow 0}x^{\alpha+\beta}W=\lim_{x\searrow 0}\begin{vmatrix}u&x^{\alpha+\beta}v\\u'&x^{\alpha+\beta}v'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}&0\\\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}&-\Gamma(\alpha+\beta)\end{vmatrix}=-\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\neq 0.$$

これで示された． □

問 6

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を無限回連続微分可能な狭義単調増加関数で $h(1)=1$ を満たすものとする．

$$f_n(x_1,\dots,x_n)=n(1-\max(h(x_1),\dots,h(x_n)))$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f_n(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

を求めよ．

解答． 積分を I_n とおく．この時

$$\begin{aligned}
I_n &= n!\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} f_n(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n\\
&= n!\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} n(1-h(x_n))dx_1\cdots dx_n\\
&= n\cdot n!\int_0^1(1-h(x_n))\left(\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n} dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n\\
&= n\cdot n!\int_0^1(1-h(x_n))\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,x_n]^{n-1}} dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n\\
&= n^2\int_0^1 x_n^{n-1}(1-h(x_n))dx_n = n^2\int_0^1 x^{n-1}(1-h(x))dx\\
&= nx^n(1-h(x))|_0^1-\int_0^1 nx^n(-h'(x))dx\\
&= \int_0^1 nx^nh'(x)dx=\int_0^1 nth'(t^{1/n})\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt\quad (t=x^n)\\
&= \int_0^1 t^{1/n}h'(t^{1/n})dt.
\end{aligned}$$

仮定から $M:=\max_{0\le t\le 1}|h'(t)|<\infty$ だから，$[0,1]$ 上 $|t^{1/n}h'(t^{1/n})|\le M\in L^1[0,1]$. よって Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\int_0^1\lim_{n\to\infty}t^{1/n}h'(t^{1/n})dt=\int_0^1 h'(1)dt=h'(1).$$

□

問 7

(x,y) 平面内で 2 つの壁 $y=0$ と $y=h\,(h>0)$ の間を x 方向に一様に流れる粘性流 $(u(y,t),0)$ は，動粘性係数を定数 $\nu>0$ とするとき，次の方程式に従う．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

以下，時間 $t\geq 0$ で考える．上側の壁 $y=h$ が静止し，下側の壁 $y=0$ が x 方向に一定の速度 U で動くとき，$u(y,t)$ の満たす境界条件は $u(h,t)=0, u(0,t)=U$ で与えられる．

(i) 上の境界条件を満たす (1) の定常解 $u_1(y)$ を求めよ．

(ii) 初期条件 $u(y,0)=0\,(0<y<h)$ を満たす解 $u_2(y,t)$ は

$$u_2(y,t)=u_1(y)-\frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$$

となることを示せ．

(iii) 上の配置において定常粘性流 $(u(y),v_0)$ (v_0 は定数) を考える．このとき，$u(y)$ は次の方程式に従う．

$$v_0\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

境界条件 $u(h)=0, u(0)=U$ を満たす (2) の解を求めよ．

解答． (i) $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ だから $u_1=c_0+c_1y$ とおける．これと境界条件から $u_1(y)=U(1-\frac{y}{h})$.

(ii) $u_0=u_2-u_1$ とおく．u_1,u_2 が (1) の解であり境界条件を満たすこと，および $u_0(y,0)=u_2(y,0)-u_1(y)=-u_1(y)$ が成り立つことから，u_0 は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ u(h,t)=u(0,t)=0\\ u(y,0)=-u_1(y)\end{cases}$$

の解．これを求める．$u=Y(y)T(t)$ とおくと $YT'=\nu Y''T$ より $\frac{Y''}{Y}=\nu^{-1}\frac{T'}{T}$. 左辺は y の関数，右辺は t の関数だからこれは定数．それを $-\lambda$ とおく．$\lambda=0$ とすると $Y=a+by$ と書けるが，境界条件から $a=b=0$ となり不適．$\lambda<0$ とすると $Y=ae^{\sqrt{-\lambda}y}+be^{-\sqrt{-\lambda}y}$ と書ける．境界条件から

$$\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-\lambda}h} & e^{-\sqrt{-\lambda}h}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0.$$

ところが左辺の 2 次行列の行列式は $e^{\sqrt{-\lambda}h}-e^{-\sqrt{-\lambda}h}>0$ だから $a=b=0$ となり不適．$\lambda>0$ の時，$Y=ae^{i\sqrt{\lambda}y}+be^{-i\sqrt{\lambda}y}$ と書ける．境界条件から

$$\begin{pmatrix}e^{i\sqrt{\lambda}h} & e^{-i\sqrt{\lambda}h}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0.$$

$(a,b)\neq(0,0)$ だから 2 次行列式 $e^{i\sqrt{\lambda}h}-e^{-i\sqrt{\lambda}h}$ は 0 であることが必要．よって $e^{2i\sqrt{\lambda}h}=1$ だから $\sqrt{\lambda}h=n\pi\,(n=1,2,\dots)$. 従って $\lambda=(\frac{n\pi}{h})^2$. この時 $a+b=0$ から $Y=a(e^{i\sqrt{\lambda}y}-e^{-i\sqrt{\lambda}y})=2ia\sin\frac{n\pi}{h}y$. また，$T'=-\nu\lambda T$ より $T=c\exp(-\nu\lambda t)$ だから，$2iac$ を c_n とおけば

$$u_0=\sum_{n\geq 1}c_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\nu t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right).$$

境界条件から

$$\sum_{n\geq 1}c_n\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)=-u_1(y).$$

ここで $n, m \geq 1$ に対し

$$\int_0^{\pi} \sin(ny)\sin(my)dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(n+m)y - \cos(n-m)y)dy = \begin{cases} \pi/2 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

だから

$$\int_0^h \sum_{m\geq 1} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)dy = \sum_{m\geq 1} c_m \int_0^{\pi} \sin(my)\sin(ny)\frac{h}{\pi}dy = c_n\frac{\pi}{2}\frac{h}{\pi} = \frac{h}{2}c_n.$$

また,

$$\int_0^h \left(1-\frac{y}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)dy = \left(1-\frac{y}{h}\right)\frac{-h}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\bigg|_0^h - \int_0^h \frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right)dy = \frac{h}{n\pi}$$

なので $\frac{h}{2}c_n = -U\frac{h}{n\pi}$. よって $c_n = -\frac{2U}{n\pi}$ だから

$$u_0 = -\frac{2U}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \nu t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right).$$

これで示された.

(iii) ・$v_0 = 0$ の時 : $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ で, 境界条件は u_1 のものと同じだから $u(y) = u_1(y) = U(1-\frac{y}{h})$.
・$v_0 \neq 0$ の時 : $v_0\lambda = \nu\lambda^2$ の解は $\lambda = 0, v_0/\nu$ だから $u = \alpha + \beta e^{v_0 y/\nu}$ とおける. 境界条件から $\alpha + \beta e^{v_0 h/\nu} = 0, \alpha + \beta = U$ なので

$$\alpha = \frac{-e^{v_0 h/\nu}U}{1-e^{v_0 h/\nu}}, \quad \beta = \frac{U}{1-e^{v_0 h/\nu}}.$$

よって

$$u(y) = \frac{e^{v_0 y/\nu} - e^{v_0 h/\nu}}{1-e^{v_0 h/\nu}}U.$$

□

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 6

$f \in L^1(0,\infty)$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy$$

とおく.

(i) $F(x)$ は任意の $x > 0$ に対して意味を持ち,

$$F(x) = x\int_0^\infty e^{-xy} g(y)dy$$

が成り立つことを示せ. ただし, $g(y) = \displaystyle\int_0^y f(t)dt.$

(ii) ある $a > 0$ が存在して任意の正整数 $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $F(ma) = 0$ が成り立つならば, $F \equiv 0$ であることを証明せよ.

解答. (i) $\|\cdot\|$ を $L^1(0,\infty)$ ノルムとする. 任意の $x > 0$ に対し

$$|F(x)| \le \int_0^\infty e^{-xy}|f(y)|dy \le \|f\| < \infty$$

だから $F(x)$ は意味を持つ.

$$F(x) = e^{-xy}g(y)|_0^\infty - \int_0^\infty (-xe^{-xy})g(y)dy = \lim_{y\to\infty} e^{-xy}g(y) + x\int_0^\infty e^{-xy}g(y)dy$$

であるが,

$$|e^{-xy}g(y)| \le e^{-xy}\int_0^y |f(t)|dt \le e^{-xy}\|f\| \to 0 \quad (y \to \infty)$$

だから上式の右辺の第 1 項は 0 となり示された.

(ii) $t = e^{-ay}$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 = F(ma) &= ma\int_0^\infty e^{-may}g(y)dy \\ &= ma\int_1^0 t^m g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)\frac{-1}{a}\frac{dt}{t} = m\int_0^1 t^{m-1}g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)dt. \end{aligned}$$

よって任意の $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ に対し

$$\int_0^1 p(t)g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)dt = 0.$$

ここで (i) で見たように, 任意の $y \ge 0$ に対し $|g(y)| \le \|f\| < \infty$ だから $g(-\frac{1}{a}\log t) \in L^2[0,1]$. 今 $\varepsilon_n \to 0$ を満たす正の実数列 $\{\varepsilon_n\}$ を任意に取る. Stone-Weierstrass の定理より, $\mathbb{C}[t]$ は $C[0,1]$ において稠密. また $C[0,1]$ は $L^2[0,1]$ において稠密だから, $\mathbb{C}[t]$ は $L^2[0,1]$ において稠密. よって $\int_0^1 |g(-\frac{1}{a}\log t) - p_n(t)|^2 dt < \varepsilon_n$ となる $p_n(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在する. この時

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \left(g\left(-\frac{1}{a}\log t\right) - p_n(t)\right)\overline{g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)}dt\right|^2 &\le \int_0^1 \left|g\left(-\frac{1}{a}\log t\right) - p_n(t)\right|^2 dt \int_0^1 \left|\overline{g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)}\right|^2 dt \\ &\le \varepsilon_n\|f\|^2 \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 \left|g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)\right|^2 dt = \int_0^1 \left(g\left(-\frac{1}{a}\log t\right) - p_n(t)\right)\overline{g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)}dt + \int_0^1 p_n(t)\overline{g\left(-\frac{1}{a}\log t\right)}dt$$

の右辺第 2 項は 0, 第 1 項は $n \to \infty$ の時 $\to 0$ だから $g(-\frac{1}{a}\log t) = 0$ a.e.$[0,1]$. つまり $g(y) = 0$ a.e.$(0,\infty)$ だから $F(x) \equiv 0$. □

問 7

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たすとき，

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ は無限個の } A_i \text{ に含まれる }\}) = 0$$

であることを示せ．

(ii) $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ は可測関数列で，任意の実数 $a \le b$ に対して

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, a \le \xi_i(\omega) \le b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすものとする．このとき，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ について

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, |\xi_i(\omega)| \le (1-\varepsilon)^i\}) < \infty$$

となることを示せ．

(iii) z を複素数とする．(ii) の $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ を係数とするべき級数

$$f_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega) z^k$$

の収束半径は，ほとんどすべての ω に対して 1 以下であることを示せ．

解答． (i) 仮定より $\sum_{k \ge n} \mu(A_k) \to 0 \, (n \to \infty)$ だから，任意の N に対し

$$(\text{左辺}) = \mu\left(\bigcap_{n \ge 0} \bigcup_{k \ge n} A_k\right) \le \mu\left(\bigcup_{k \ge N} A_k\right) \le \sum_{k \ge N} \mu(A_k) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

これで示された．

(ii)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i \ge 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(1-\varepsilon)^i}^{(1-\varepsilon)^i} e^{-x^2/2} dx \le \sum_{i \ge 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(1-\varepsilon)^i}^{(1-\varepsilon)^i} dx = \sum_{i \ge 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-\varepsilon)^i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

(iii) $\varepsilon \in (0,1)$ を任意に取り，$A_n = \{\omega \in \Omega \,;\, |\xi_n(\omega)|^{1/n} \le 1 - \varepsilon\}$ とすると (ii) よりこれは (i) の仮定を満たす．よって (i) より

$$\begin{aligned}
1 &= \mu\left(\left(\bigcap_{n \ge 0} \bigcup_{k \ge n} A_k\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n \ge 0} \bigcap_{k \ge n} A_k^c\right) \\
&= \mu(\{\omega \in \Omega \,;\, \text{ある } n = n(\omega) \text{ があって任意の } k \ge n \text{ について } \omega \in A_k^c\}) \\
&= \mu(\{\omega \in \Omega \,;\, \text{ある } n = n(\omega) \text{ があって任意の } k \ge n \text{ について } |\xi_k(\omega)|^{1/k} > 1 - \varepsilon\}) \\
&= \mu(\{\omega \in \Omega \,;\, \varlimsup_{n \to \infty} |\xi_n(\omega)|^{1/n} > 1 - \varepsilon\}).
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\varlimsup_{n \to \infty} |\xi_n(\omega)|^{1/n} \ge 1$. これはほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対し $f_\omega(z)$ の収束半径が 1 以下であることを意味する． $\square$

問 8

2 次元渦なし流れの解析はラプラス方程式の境界値問題に帰着される場合がある．ここでは楕円内部の流れで中央に板がある場合を考える（図 1）．このような流れを表す流れ関数を次の手順に従って求めよ．

$\mathbb{R}^2$ 上の点 P の座標 (x,y) に対し，$r=\overline{OP}, s=\overline{AP}$ とおく（図 2）．ここで O は座標原点，A は点 $(a,0)$ を表す $(a>0)$.

(i) (r,s) を新しい座標系と考えて，ラプラシアン $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ が次のように表されることを示せ．

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}$$

(ii) k は $k>1$ を満たす定数とし，楕円 $r+s=ka$ を C, 線分 OA を L とおく．C の内部で，L 上を除き，ラプラス方程式 $\Delta\psi=0$ を満たす関数 ψ で次の 3 条件を満たすものを求めよ．

(a) C 上で $\psi=0$.

(b) L 上で $\psi=1$.

(c) ψ は $z=r+s$ のみに依存する関数．

解答． $\frac{\partial}{\partial x}$ を ∂_x などと略記する．

(i) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{x-a}{s}, \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{y}{s}$ より

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\left(\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{x}{r} & \frac{y}{r}\\ \frac{x-a}{s} & \frac{y}{s}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{r}{a} & -\frac{s}{a}\\ -\frac{r(x-a)}{ay} & \frac{sx}{ay}\end{pmatrix},$$

$$\partial_x=\frac{x}{r}\partial_r+\frac{x-a}{s}\partial_s,\quad \partial_y=\frac{y}{r}\partial_r+\frac{y}{s}\partial_s.$$

よって

$$\begin{aligned}\partial_x^2=&\frac{x}{r}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\right)\partial_r+\frac{x}{r}\partial_r^2+\frac{\partial x}{\partial r}\frac{1}{s}\partial_s+\frac{x-a}{s}\partial_r\partial_s\right]\\&+\frac{x-a}{s}\left[\frac{\partial x}{\partial s}\frac{1}{r}\partial_r+\frac{x}{r}\partial_r\partial_s+\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{1}{s}-\frac{x-a}{s^2}\right)\partial_s+\frac{x-a}{s}\partial_s^2\right]\\=&\frac{x^2}{r^2}\partial_r^2+\frac{(x-a)^2}{s^2}\partial_s^2+\frac{2x(x-a)}{rs}\partial_r\partial_s+\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\partial_r+\left(\frac{1}{s}-\frac{(x-a)^2}{s^3}\right)\partial_s,\\ \partial_y^2=&\frac{y}{r}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{y}{r^2}\right)\partial_r+\frac{y}{r}\partial_r^2+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{1}{s}\partial_s+\frac{y}{s}\partial_r\partial_s\right]\\&+\frac{y}{s}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{r}\partial_r+\frac{y}{r}\partial_r\partial_s+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{s}-\frac{y}{s^2}\right)\partial_s+\frac{y}{s}\partial_s^2\right]\\=&\frac{y^2}{r^2}\partial_r^2+\frac{y^2}{s^2}\partial_s^2+\frac{2y^2}{rs}\partial_r\partial_s+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\partial_r+\left(\frac{1}{s}-\frac{y^2}{s^3}\right)\partial_s.\end{aligned}$$

ここで $r^2+s^2-a^2=(x^2+y^2)+((x-a)^2+y^2)-a^2=2(x(x-a)+y^2)$ だから

$$\Delta=\partial_r^2+\partial_s^2+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}\partial_r\partial_s+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{s}\partial_s.$$

(ii) $w=r-s$ とおく．この時 $\partial_r=\partial_z+\partial_w, \partial_s=\partial_z-\partial_w$. また，$r=\frac{1}{2}(z+w), s=\frac{1}{2}(z-w)$ より $r^2+s^2=\frac{1}{2}(z^2+w^2), rs=\frac{1}{4}(z^2-w^2)$ だから，(i) より

$$\begin{aligned}\Delta=&(\partial_z+\partial_w)^2+(\partial_z-\partial_w)^2+\frac{\frac{1}{2}(z^2+w^2)-a^2}{\frac{1}{4}(z^2-w^2)}(\partial_z+\partial_w)(\partial_z-\partial_w)\\&+\frac{2}{z+w}(\partial_z+\partial_w)+\frac{2}{z-w}(\partial_z-\partial_w)\\=&\frac{4}{z^2-w^2}\left[(z^2-a^2)\partial_z^2-(w^2-a^2)\partial_w^2+z\partial_z-w\partial_w\right].\end{aligned}$$

これと (c) から，ψ は $(z^2-a^2)\psi''+z\psi'=0$ を満たす．よって

$$\frac{\psi''}{\psi'}=-\frac{z}{z^2-a^2}. \qquad \therefore \psi'=\frac{c}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

L 上では $r+s=a$ だから (b) より $\psi(a)=1$. よって

$$\psi(z)=1+\int_a^z \frac{c}{\sqrt{s^2-a^2}}ds=1+c\int_1^{z/a}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=1+c\log\left(\frac{z}{a}+\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2-1}\right).$$

(a) より $0=\psi(ka)=1+c\log(k+\sqrt{k^2-1})$ なので

$$\psi(z)=1-\frac{\log((z/a)+\sqrt{(z/a)^2-1})}{\log(k+\sqrt{k^2-1})}.$$

$\square$

平成 16 年度 (2003 年 8 月実施)

問 6

A を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 $(X, (,))$ における自己共役作用素とする．さらに，定数 $\alpha > 0$ が存在してすべての $u \in X$ に対して $(Au, u) \geq \alpha(u, u)$ が成立するものとする．このとき，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 + A^2\right)^{-1} dx$$

が X 上の作用素として意味があることを示し，その具体形を求めよ．

解答． $\sigma(A), \rho(A)$ をそれぞれ A のスペクトル集合，レゾルベント集合とする．$\sigma(A) \subset [\alpha, \infty)$ であることを示す．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \infty)$ を取る．$\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ の時，$\lambda = a + ib\,(a, b \in \mathbb{R})$ とおくと $b \neq 0$ であり，任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|(aI - A)x + ibx\|^2 \\
&= \|(aI - A)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2 - i((aI - A)x, bx) + i(bx, (aI - A)x) \\
&= \|(aI - A)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2 \\
&\geq |b|^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

よって $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ は $0 = \|(\lambda I - A)x\| \geq |b|\|x\|$ を満たすから $b \neq 0$ より $x = 0$. 従って $\lambda I - A$ は単射．次に $R(\lambda I - A)$ が X の閉部分空間であることを示す．X の部分空間であることは明らか．$(\lambda I - A)x_n \in R(\lambda I - A)$ が $(\lambda I - A)x_n \to y$ を満たすとすると，

$$|b|\|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| = \|(\lambda I - A)x_n - (\lambda I - A)x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

と $b \neq 0$ より $\{x_n\}$ は Cauchy 列．よって $x_n \to x \in X$ だから $y = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = (\lambda I - A)x \in R(\lambda I - A)$. ゆえに $R(\lambda I - A)$ は閉集合．これより $X = R(\lambda I - A) \oplus R(\lambda I - A)^{\perp}$. $x \in R(\lambda I - A)^{\perp}$ とすると

$$\begin{aligned}
|b|^2\|x\|^2 \leq \|(\lambda I - A)x\|^2 &= ((\lambda I - A)x, (\lambda I - A)x) \\
&= ((\bar{\lambda} I - A)(\lambda I - A)x, x) = ((\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - A)x, x) = 0
\end{aligned}$$

と $b \neq 0$ より $x = 0$. よって $R(\lambda I - A) = X$. 以上から $\lambda I - A$ は全単射．よって Banach の逆写像定理より $(\lambda I - A)^{-1}$ は有界線型作用素だから $\lambda \in \rho(A)$. $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ の時，$\lambda < \alpha$ だから仮定より

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|(\lambda - \alpha)x + (\alpha I - A)x\|^2 \\
&= |\lambda - \alpha|^2\|x\|^2 + \|(\alpha I - A)x\|^2 + 2(\lambda - \alpha)((\alpha I - A)x, x)) \\
&= |\lambda - \alpha|^2\|x\|^2 + \|(\alpha I - A)x\|^2 + 2(\lambda - \alpha)(\alpha\|x\|^2 - (Ax, x)) \\
&\geq |\lambda - \alpha|^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ の時と同様に $\lambda \in \rho(A)$. これで示せた．

$\lambda \in \sigma(A)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + \lambda^2)^{-1} dx = \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x}{\lambda}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \pi\lambda^{-1}$$

であり，これは $\sigma(A)$ 上の連続関数．よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + A^2)^{-1} dx$ は意味を持ち，πA^{-1} に等しい．

□

問 7

N を自然数とし，N 次多項式 $p(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ の係数は $c_k=\pm 1\,(k=0,\dots,N)$ をみたすものとする．実数 $\alpha\in[1,\infty)$ に対し，

$$\|p\|_\alpha=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|p(e^{i\theta})\right|^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}$$

と定義する（多項式を複素平面で定義された関数とみなしている）．このとき次の問に答えよ．

(i) $\|p\|_2=\sqrt{N+1}$ を証明せよ．

(ii) $2<\alpha$ のとき，

$$\sqrt{N+1}\le\|p\|_\alpha\le N+1$$

を証明せよ．

(iii) $1\le\alpha<2$ のとき，

$$1\le\|p\|_\alpha\le\sqrt{N+1}$$

を証明せよ．

解答． (i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2 d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{0\le j,k\le N} c_j c_k e^{i(j-k)\theta}d\theta=\sum_{k=0}^{N}c_k^2=N+1$$

だから $\|p\|_2=\sqrt{N+1}$.

(ii)

$$|p(e^{i\theta})|=\left|\sum_{k=0}^{N}c_k e^{ik\theta}\right|\le\sum_{k=0}^{N}|c_k||e^{ik\theta}|=\sum_{k=0}^{N}1=N+1$$

だから

$$\|p\|_\alpha\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(N+1)^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}=N+1.$$

任意の $1\le\beta<\gamma$ を取る．q を $\frac{\beta}{\gamma}+\frac{1}{q}=1$ で定めると，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\beta d\theta&\le\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^{\beta\cdot\gamma/\beta}d\theta\right)^{\beta/\gamma}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^q}d\theta\right)^{1/q}\\&=\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^{\gamma}d\theta\right)^{\beta/\gamma}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{q-1}{q}}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^{\gamma}d\theta\right)^{\beta/\gamma}.\end{aligned}$$

よって $\|p\|_\beta\le\|p\|_\gamma$ なので $\|p\|_\alpha\ge\|p\|_2=\sqrt{N+1}$.

(iii) (ii) で示したことから $\|p\|_\alpha\le\|p\|_2=\sqrt{N+1}$. $\alpha>1$ の時は β を $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ で定めると $\beta>2$. よって Hölder の不等式と (ii) より

$$\begin{aligned}2\pi(N+1)=\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2d\theta&\le\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\beta d\theta\right)^{1/\beta}\\&=(2\pi)^{1/\alpha}\|p\|_\alpha\cdot(2\pi)^{1/\beta}\|p\|_\beta=2\pi\|p\|_\alpha\|p\|_\beta\le2\pi(N+1)\|p\|_\alpha.\end{aligned}$$

よって $\|p\|_\alpha\ge1$. $\alpha=1$ の時は

$$2\pi(N+1)=\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2d\theta\le\int_0^{2\pi}(N+1)|p(e^{i\theta})|d\theta=2\pi(N+1)\|p\|_1$$

より $\|p\|_1\ge1$. □

問 8

k を正の整数とする．正の実数 x に対して

$$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt$$

で定義される $(0,\infty)$ 上の関数 $u(x)$ について次の問に答えよ．

(i) $-\frac{du}{dx}+u$ を求めよ．

(ii) $u(x)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に多価解析関数として解析接続されることを示せ．さらに，原点の回りを正の方向に一回り解析接続して得られる $(0,\infty)$ 上の関数を $u_1(x)$ で表すとき $u_1(x)-u(x)$ を求めよ．

解答． (i) $r>0$ を任意に取り $x>r$ とする．任意の $t>0$ に対し $e^{xt}\geq\frac{x^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}$ だから

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}\right|=e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}\leq\begin{cases}\frac{t^k}{t+1} & (0\leq t\leq r)\\ \frac{(k+1)!}{x^{k+1}t^{k+1}}\frac{t^k}{t+1}\leq\frac{(k+1)!}{r^{k+1}t(t+1)} & (t>r)\end{cases}.$$

右辺の関数は $t\geq 0$ で可積分だから，

$$u'(x)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt=-\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}dt.$$

$r>0$ は任意だったからこれは任意の $x>0$ で成立．よって

$$\begin{aligned}-u'+u&=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}dt+\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt=\int_0^\infty e^{-xt}t^{k-1}dt\\&=\int_0^\infty e^{-s}\left(\frac{s}{x}\right)^{k-1}\frac{ds}{x}\qquad(xt=s)\\&=x^{-k}\int_0^\infty e^{-s}s^{k-1}ds=x^{-k}\Gamma(k)=(k-1)!x^{-k}.\end{aligned}$$

(ii) $(e^{-x}u)'=e^{-x}(u'-u)=-(k-1)!x^{-k}e^{-x}$ だから，$x_0>0$ を任意に取り線分 $[x_0,x]$ 上で積分して

$$e^{-x}u(x)-e^{-x_0}u(x_0)=-(k-1)!\int_{x_0}^x t^{-k}e^{-t}dt.$$
$$\therefore u(x)=e^{x-x_0}u(x_0)-(k-1)!e^x\int_{x_0}^x t^{-k}e^{-t}dt$$

右辺の第 1 項は $\mathbb{C}$ 上正則．第 2 項の被積分関数は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則だから，積分も $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則．よって $u(x)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に（多価正則関数として）解析接続出来る．x が原点の回りを 1 回転すると，積分路は原点を正の向きに 1 回転する閉曲線と線分 $[x_0,x]$ になる．積分の被積分関数は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上 1 価だから，原点の回りを 1 回転しても分枝は変わらないことに注意すると，$\varepsilon>0$ として Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}u_1(x)-u(x)&=-(k-1)!e^x\oint_{|t|=\varepsilon}t^{-k}e^{-t}dt=-e^x\cdot 2\pi i\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}e^{-t}\Big|_{t=0}\\&=-e^x\cdot 2\pi i(-1)^{k-1}=(-1)^k 2\pi i e^x.\end{aligned}$$

□

問 9

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の単連結領域 D の内部にある 2 次元非粘性非圧縮流体の運動を考える．流体の速度場を $(u,v)=(u(x,y,t),v(x,y,t))$, 流れ関数を $\psi=\psi(x,y,t)$ とするとき，次の問に答えよ．ただし $(x,y)\in D$, t は時間，$u=\partial\psi/\partial y, v=-\partial\psi/\partial x$ とし，領域 D はなめらかな境界 ∂D を持つものとする．

(i) 領域 D の位置が時間的に一定である場合の定常流を考える．

(a) 境界 ∂D における速度場の境界条件を述べよ．

(b) 境界 ∂D に沿って流れ関数 $\psi(x,y)$ は定数であることを示せ．

(c) 速度場が渦なしのとき，$\Delta\psi=0$ となることを示せ．
ただし $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ とする．

(ii) 領域 D が原点の回りに一定角速度 ω で回転している場合を考える．

(a) 時刻 t における境界の形を $F(x,y,t)=0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にとどまることを用いて，境界 ∂D 上で

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

が成り立つことを示せ．さらに，境界が角速度 ω で回転していることから

$$\frac{\partial F}{\partial t}-\omega y\frac{\partial F}{\partial x}+\omega x\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

も成り立つことを示せ．

(b) 流れ関数を

$$\psi(x,y,t)=-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\Psi(x,y,t)\quad((x,y)\in D)$$

とおくと，境界 ∂D 上では $\Psi(x,y,t)=C(t)$ となることを示せ．ここで $C(t)$ は時間 t のみの関数を表す．

(c) $t=0$ における境界 ∂D が楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$（a,b : 正定数）であるとき，D における渦なし速度場の流れ関数 $\psi(x,y,0)$ を求めよ．

解答. (i) (a) $(x,y)\in\partial D$ における ∂D の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$(u,v)\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ なら流体が ∂D 上を出入りすることになり不適．よって $(u,v)\cdot\boldsymbol{n}=0$, すなわち (u,v) は ∂D の接ベクトルである．

(b) ∂D のパラメータ表示を $(x,y)=(f(s),g(s))$ とすると，(x,y) での接ベクトルは $(f'(s),g'(s))$ だから (a) より

$$\begin{aligned}0&=\begin{vmatrix}u & v\\ f'(s) & g'(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial y}(f(s),g(s)) & -\frac{\partial\psi}{\partial x}(f(s),g(s))\\ f'(s) & g'(s)\end{vmatrix}\\&=g'(s)\frac{\partial\psi}{\partial y}(f(s),g(s))+f'(s)\frac{\partial\psi}{\partial x}(f(s),g(s))=\frac{d}{ds}\psi(f(s),g(s)).\end{aligned}$$

従って ψ は ∂D に沿って定数．

(c) 渦なしだから $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$. よって

$$\Delta\psi=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

(ii) (a) 時刻 t で $(x,y)\in\partial D$ にある粒子は，微小時間後の時刻 $t+\Delta t$ において $(x+u\Delta t,y+v\Delta t)\in\partial D$ にあるから $F(x+u\Delta t,y+v\Delta t,t+\Delta t)=0$. よって

$$0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(x+u\Delta t,y+v\Delta t,t+\Delta t)-F(x,y,t)}{\Delta t}=u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

また，時刻 t で $(x,y)\in\partial D$ にある点は時刻 $t+t'$ で $(x\cos\omega t'-y\sin\omega t',x\sin\omega t'+y\cos\omega t')\in\partial D$ にあるから

$$F(x\cos\omega t'-y\sin\omega t',x\sin\omega t'+y\cos\omega t',t+t')=0.$$

これを t' で微分して $t'=0$ とおけば

$$-\omega y\frac{\partial F}{\partial x}+\omega x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

(b) $u=-\omega y+\frac{\partial\Psi}{\partial y}, v=\omega x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ を (a) の第 1 式に代入して第 2 式を使うと $\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=0$. よって $(\frac{\partial\Psi}{\partial y},-\frac{\partial\Psi}{\partial x})$ は ∂D の法ベクトル $(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})$ に垂直，すなわち ∂D の接ベクトルである．よって時刻 t での ∂D のパラメータ表示を $(f_t(s),g_t(s))$ とすると (i-b) と同様に $\frac{d}{ds}\Psi(f_t(s),g_t(s),t)=0$ だから，Ψ は ∂D 上 t のみの関数となる．

(c) ψ を (b) の形とする．∂D 上 $\Psi=C(t)$ である．また，渦なしだから $0=\Delta\psi=-2\omega+\Delta\Psi$. よって $\Psi_0=\Psi(x,y,0)$ とおくと Ψ_0 は

$$\begin{cases}\Delta\Psi_0=2\omega & \text{on } D\\ \Psi_0=C(0) & \text{in } \partial D\end{cases}$$

の解である．今

$$\Psi_1=\Psi_0-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

とおくと Ψ_1 は

$$\begin{cases}\Delta\Psi_1=0 & \text{on } D\\ \Psi_1=C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2} & \text{in } \partial D\end{cases}$$

を満たすから，調和関数の最大値原理より $D\cup\partial D$ 上 $\Psi_1=C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}$ となる．よって

$$\Psi_0=\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

流れ関数は定数差によらないから

$$\psi(x,y,0)=-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

□

平成 15 年度 (2002 年 8 月実施)

問 4

K を実直線 $\mathbb{R}$ に含まれる閉区間 $[-1,1]$ とし，$\mathbb{C}$ 内の開集合 U が K を含むとする．以下 $\mathcal{O}(U)$ および $\mathcal{O}(U \setminus K)$ は各々 U および $U \setminus K$ で正則な関数全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表わすものとし，$\mathcal{O}(K)$ は K のある複素連結近傍で正則な関数全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表わすものとする．この時，商ベクトル空間 $\mathcal{O}(U \setminus K)/\mathcal{O}(U)$ の元 $[f]$ および $\mathcal{O}(K)$ の元 g に対し，$[f]$ の代表元 $f \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ を一つ取り，積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma f(z)g(z)dz$$

を考える．ただし γ は K のまわりを（正の向きに）一周し，かつ $U \setminus K$ および g の定義域に含まれる滑らかな閉曲線とする.[2] この時以下の (i), (ii) を示し，さらに (iii) に答えよ．

(i) 積分値は代表元 f および積分路 γ の取り方によらずに定まる．

(ii) 上の積分により定められる双線形写像

$$F : (\mathcal{O}(U \setminus K)/\mathcal{O}(U)) \times \mathcal{O}(K) \to \mathbb{C}$$

は非退化である．ただし双線形写像 $F : A \times B \to C$ が非退化であるとは F が次の 2 つの条件 (A), (B) を満たすことを意味する．

(A) $F(a,b) = 0$ が任意の $b(\in B)$ に対して成り立つならば $a = 0$.

(B) $F(a,b) = 0$ が任意の $a(\in A)$ に対して成り立つならば $b = 0$.

(iii) 次の性質 (P) を持つ $\mathcal{O}(U \setminus K)$ の元の列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ は存在するか．

(P) すべての n に対し $F([f_n], g) = 0$ が成り立つような g は 0 のみである．

解答． (i) 任意に f の代表元 $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ と積分路 γ_1, γ_2 を取る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f_1(z)g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f_2(z)g(z)dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f_1(z)g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f_2(z)g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f_2(z)g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f_2(z)g(z)dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} (f_1(z)-f_2(z))g(z)dz + +\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f_2(z)g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f_2(z)g(z)dz \qquad (*)
\end{aligned}$$

$f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(U)$ だから $(f_1 - f_2)g \in \mathcal{O}(K)$. よって $(*)$ の第 1 項は 0. $f_2 g$ は $U \setminus K$ 上正則で γ_1 と γ_2 は $U \setminus K$ 上ホモトピックだから第 2 項と第 3 項は等しい．よって積分は代表元と積分路の選び方によらない．

(ii) 任意の $g \in \mathcal{O}(K)$ に対し $F([f], g) = 0$ とする．$[f]$ の代表元 $f \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ を任意に取る．f に特異点があるとすればそれらは全て K 上にあるが，K は有限閉区間だから特異点は集積しない．よって特異点は有限個である．f の極を $z = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, 真性特異点を $z = \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m$ とし，$z = \alpha_j$ での f の主要部を $\sum_{k \geq 1} f_{jk}(z - \alpha_j)^{-k}$ とする．$z = \alpha_j \ (1 \leq j \leq n)$ での f の極の位数を $d_j (\geq 1)$ とすると $f_{j,d_j} \neq 0$ である．仮定から任意の $1 \leq j \leq n$ に対し

$$0 = F\left([f], \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)^{d_k}\right) = \sum_{k=n+1}^{m} f_{k1},$$

$$0 = F\left([f], (z - \alpha_j)^{d_j - 1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (z - \alpha_k)^{d_k}\right) = f_{j,d_j} + \sum_{k=n+1}^{m} f_{k1}$$

[2] 問題 PDF の最後のページに次の注あり．
「注：専門科目 4 番の問題中の「一周し，かつ $U \setminus K$ および g の定義域に含まれる」は,「一周する K に十分近い」とした方がより親切で適切な表現でした.」

だから $f_{j,d_j}=0$. これは矛盾．よって f は K 上極を持たない．これより任意の $d'_j\geq 1$ に対し

$$0=F\left([f],\prod_{k=n+1}^{m}(z-\alpha_k)^{d'_k-1}\right)=\sum_{k=n+1}^{m}f_{k,d'_k}$$

である．$n+1\leq j\leq m$ を任意に選び $d'_k\,(k\neq j)$ を固定したまま d'_j を動かすと，上の式から $f_{j1}=f_{j2}=\cdots$ となる．よって f の $z=\alpha_j$ における主要部は $f_{j1}\sum_{k\geq 1}(z-\alpha_j)^{-k}$ である．$f_{j1}=0$ なら $z=\alpha_j$ が特異点であることに反するから $f_{j1}\neq 0$. よって主要部は α_j の十分小さい近傍の $z=\alpha_j$ 以外の任意の点で発散するが，これは主要部の定義に矛盾．従って f は K 上真性特異点を持たない．以上から $f\in\mathcal{O}(K)$ だから $f\in\mathcal{O}(U)$. よって $[f]=0$.
任意の $[f]\in\mathcal{O}(U\setminus K)/\mathcal{O}(U)$ に対し $F([f],g)=0$ とする．任意に $z_0\in K$ を取り $f(z)=\frac{1}{z-z_0}\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ とすれば

$$0=F([f],g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(z)}{z-z_0}dz=g(z_0).$$

$z_0\in K$ は任意だから $g(z)=0$.
　(iii) 存在する．$f_n(z)=\frac{1}{z-1/n}\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ とすれば

$$0=F([f_n],g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-1/n}g(z)dz=g\left(\frac{1}{n}\right).$$

つまり $0\in K$ に収束する点列 $\{1/n\}$ の g による像が 0. 一致の定理より $g\equiv 0$. $\square$

問 5

(a) $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 X における有界線形作用素 T が

$$\|I+T\| \leq 1 \text{ と } \|I-T\| \leq 1 \text{ を満たすならば } T=0 \text{ である} \qquad (\sharp)$$

(ただし I は恒等作用素である). これを証明せよ.

(b) 同じ命題 $(\sharp)$ が Banach 空間の場合にも成立することを次の要領で証明せよ.

(i) レゾルベント $R(z)=(zI-T)^{-1}\,(z\in\mathbb{C})$ は $|z+1|>1$ において正則であることを証明せよ.

(ii) $R(z)$ は実は $z\neq 0$ で正則で，かつ，$z=0$ で高々 2 位の極をもつことを示せ.

(iii) 任意の自然数 n に対して $(I+T)^n = I+nT$ が成り立つことを示せ.

(iv) $T=0$ であることを示せ.

解答. (a) $\|x\|=1$ なる任意の $x\in X$ に対し

$$1 \geq \|(I\pm T)x\|^2 = \langle x\pm Tx, x\pm Tx\rangle = 1+\|Tx\|^2 \pm\langle x, Tx\rangle \pm \langle Tx, x\rangle \quad (\text{複号同順})$$

だから，これらを足して整理して $\|Tx\|^2\leq 0$. よって $\|Tx\|^2=0$. $x\in X$ は任意なので $T=0$.

(b) (i) $|z+1|>1$ において $\|(z+1)^{-1}(I+T)\|<1$ だから

$$\begin{aligned}\|R(z)\| &= \|((z+1)I-(I+T))^{-1}\| = |z+1|^{-1}\|(I-(z+1)^{-1}(I+T))^{-1}\| \\ &\leq \sum_{n\geq 0}|z+1|^{-n-1}\|I+T\|^n \leq \sum_{n\geq 0}|z+1|^{-n-1} = \frac{|z+1|^{-1}}{1-|z+1|^{-1}} = \frac{1}{|z+1|-1}.\end{aligned}$$

よって $R(z)$ は $|z+1|>1$ で正則.

(ii) $R(z)=((z-1)I+(I-T))^{-1}=(z-1)^{-1}(I+(z-1)^{-1}(I-T))^{-1}$ だから，(i) と同様にして $|z-1|>1$ において

$$\|R(z)\| \leq \frac{1}{|z-1|-1}.$$

よって $R(z)$ は $\{|z+1|>1\}\cup\{|z-1|>1\}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則．今 $z\neq 0$ が $\mathrm{Re}\,z\geq 0$ を満たす時，$|1+z|^2=1+|z|^2+2\,\mathrm{Re}\,z\geq 1+|z|^2>1$ だから $|1+z|\geq(1+|z|^2)^{1/2}>1$. よって (i) の不等式から

$$\begin{aligned}\|R(z)\| &\leq \frac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}-1} = \frac{(1+|z|^2)^{1/2}+1}{|z|^2} \\ &\leq \frac{|z+1|+1}{|z|^2} \leq \frac{|z|+1+1}{|z|^2} = |z|^{-1}+2|z|^{-2}.\end{aligned}$$

$z\neq 0$ が $\mathrm{Re}\,z\leq 0$ の時は $|1-z|^2=1+|z|^2-2\,\mathrm{Re}\,z\geq 1+|z|^2>1$ だから同じ評価が得られる．以上から $z\neq 0$ なら $\|R(z)\|\leq |z|^{-1}+2|z|^{-2}$. $R(z)$ は $z\neq 0$ で正則だから $R(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}R_n z^n\,(z\neq 0)$ とおける．$n\geq 3$ の時

$$\|R_{-n}\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z^{n-1}R(z)dz\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n-1}(r^{-1}+2r^{-2})rd\theta = r^{n-1}+2r^{n-2}\to 0 \quad (r\to 0)$$

だから $R(z)=\sum_{n\geq -2}R_n z^n$ となり，$R(z)$ は $z=0$ に高々 2 位の極を持つ.

(iii) $|z|>\|T\|$ において $R(z)=z^{-1}(1-z^{-1}T)^{-1}=z^{-1}(I+z^{-1}T+z^{-2}T^2+\cdots)$ だから，z^{-3} の係数を見ると (ii) より $T^2=0$. よって

$$(I+T)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}T^j = \sum_{j=0}^{1}\binom{n}{j}T^j = I+nT.$$

(iv) $\|x\|=1$ なる任意の $x\in X$ に対し

$$1\geq \|I+T\|^n \geq \|(I+T)^n\| = \|(I+nT)x\| \geq |1-n\|Tx\||$$

だから $0\leq\|Tx\|\leq\frac{2}{n}$. これが任意の n で成立するから $\|Tx\|=0$. $x\in X$ は任意だから $T=0$. $\square$

問 6

$\mathbb{R}^1$ 上でルベーグ積分可能な関数 f で，2 条件

$$f(x) \geq 0 \text{ a.e.}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を満たすものの全体を $\mathcal{P}$ で表し，$f \in \mathcal{P}$ に対して，

$$\begin{aligned} \check{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}x\xi} f(x)dx && (\xi \in \mathbb{R}^1), \\ \nu_f(M) &= \int_{|x|>M} f(x)dx && (M > 0) \end{aligned}$$

とおく．

(i) 任意の正数 M に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\nu_f(2M) < M \int_{-\frac{1}{M}}^{\frac{1}{M}} (1 - \check{f}(\xi))d\xi.$$

(ii) $\mathcal{P}$ 内の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ に対して，各点 ξ で極限

$$g(\xi) = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n(\xi)$$

が存在し，しかも，関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は原点において連続とする．

このとき，任意の正数 ε に対して，正数 M が存在して，次の性質が成り立つことを示せ．

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して，} \nu_{f_n}(2M) < \varepsilon. \qquad (*)$$

(iii) 上の (ii) において，極限 g が原点で不連続ならば，一般に $(*)$ は成立しない．このことを反例によって示せ．

解答． (i) Fubini の定理より

$$\begin{aligned} M\int_{-1/M}^{1/M}(1-\check{f}(\xi))d\xi &= M\int_{-1/M}^{1/M}\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{ix\xi})f(x)dxd\xi \\ &= M\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1/M}^{1/M}(1-e^{ix\xi})f(x)d\xi dx \\ &= M\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi - \frac{e^{ix\xi}}{ix}\right)\Bigg|_{-1/M}^{1/M} f(x)dx = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin x/M}{x/M}\right)f(x)dx \quad (1) \end{aligned}$$

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $|\sin x| \leq |x|$ より $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$. よって $1 - \frac{\sin x}{x} \geq 0$. また，$x > 2M$ の時 $\frac{\sin x/M}{x/M} < \frac{1}{x/M} < \frac{1}{2}$. $\frac{\sin x}{x}$ は偶関数だから $x < -2M$ でも同じ評価が成り立つ．これより

$$(1) \geq 2\int_{|x|>2M}\left(1-\frac{\sin x/M}{x/M}\right)f(x)dx > \int_{|x|>2M} f(x)dx = \nu_f(2M).$$

(ii) $\check{f}_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$ より $g(0) = 1$. g の $\xi = 0$ での連続性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M_1 > 0$ が存在し，$|\xi| < 1/M_1$ の時 $|1 - g(\xi)| < \varepsilon/4$ となる．一方 $\check{f}_n$ が各点収束することと，$|g(\xi) - \check{f}_n(\xi)| \leq |g(\xi)| + |\check{f}_n(\xi)| \leq 1 + 1 = 2$ より Lebesgue の収束定理で $M_1\int_{-1/M_1}^{1/M_1} |g(\xi) - \check{f}_n(\xi)|d\xi \to 0\,(n \to \infty)$. よって上の ε に対し N があって任意の $n > N$ に対し $M_1\int_{-1/M_1}^{1/M_1} |g(\xi) - \check{f}_n(\xi)|d\xi < \varepsilon/2$. よって $n > N$ の時

$$\begin{aligned} \nu_{f_n}(2M_1) &< M_1\int_{-1/M_1}^{1/M_1}(1-\check{f}_n(\xi))d\xi \\ &\leq M_1\int_{-1/M_1}^{1/M_1}(|1-g(\xi)| + |g(\xi)-\check{f}_n(\xi)|)d\xi \\ &< M_1\int_{-1/M_1}^{1/M_1}\frac{\varepsilon}{4}d\xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{P}$ に対し $\int_{|x| \le M} f(x)dx$ は単調増加で $M \to \infty$ の時 1 に収束するから，$\nu_f(M) = 1 - \int_{|x|\le M} f(x)dx$ は単調減少で $M \to \infty$ の時 0 に収束する．よって上の ε に対し $M_2 > 0$ が存在して $\max_{1\le n\le N} \nu_{f_n}(2M_2) < \varepsilon$ と出来る．従って $M = \max\{M_1, M_2\}$ とすれば $(*)$ を満たす．

(iii) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \in \mathcal{P}$ とすると

$$\check{f}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2n}(x - in\xi)^2\right) d\xi \exp\left(-\frac{n\xi^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{n\xi^2}{2}\right)$$

$$\therefore g(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = 0) \\ 0 & (\xi \neq 0) \end{cases}$$

よって g は $\xi = 0$ で不連続．任意の $M > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\nu_{f_n}(2M) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{|x|>2M} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_{2M}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) dx \\
&> \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_{2M}^{2M+\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) dx \\
&> \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_{2M}^{2M+\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{(2M+\sqrt{n})^2}{2n}\right) dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{\sqrt{n}} + 1\right)^2\right) \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-1/2} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

だから $(*)$ を満たさない． □

問 8

次の Euler 方程式に従う 3 次元非粘性非圧縮性流体 ($\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$) の定常運動を考える．

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p.$$

ここで $\boldsymbol{u}=(u_1(x_1,x_2,x_3),u_2(x_1,x_2,x_3),u_3(x_1,x_2,x_3)),\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$, p は圧力，ρ_0 は流体密度（定数）とする．

(i)

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}-\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$$

であることを示し，渦なし場 ($\nabla\times\boldsymbol{u}=0$) のとき，流体中では $H\equiv\dfrac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}+\dfrac{p}{\rho_0}$ が定数であることを示せ．

(ii) $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ のとき $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i=\nabla\cdot(\boldsymbol{u}u_i), i=1,2,3$ となることに注意して，流体中の領域 V において

$$-\int_S\frac{p}{\rho_0}\boldsymbol{n}dS=\int_S\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})dS$$

を示せ．ただし，S は V の境界面，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

(iii) x 軸に平行な直円筒内で，静止した物体 A のまわりの渦なし定常流を考える．断面 S_1,S_2 が十分遠くにあれば，S_1,S_2 上の流れは速度 $\boldsymbol{U}$ （定ベクトル）の一様流と考えてよい．このとき，流体が物体 A に及ぼす力の x 方向成分はゼロであることを (i) と (ii) の結果を用いて示せ．

解答． (i) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を ∂_i と略記する．$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$ の第 1 成分は

$$\begin{aligned}&(u_1\partial_1+u_2\partial_2+u_3\partial_3)u_1+u_2(\partial_1u_2-\partial_2u_1)-u_3(\partial_3u_1-\partial_1u_3)\\=&u_1\partial_1u_1+u_2\partial_1u_2+u_3\partial_1u_3=\frac{1}{2}\partial_1|\boldsymbol{u}|^2.\end{aligned}$$

他の成分も同様だから $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2$. また，

$$\nabla H=\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2+\frac{1}{\rho_0}\nabla p=((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}))-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})=0$$

だから H は定数．

(ii) $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3),\boldsymbol{F}=(p,0,0)$ とすると，Gauss の発散定理より

$$\begin{aligned}-\int_S\frac{p}{\rho_0}n_1dS&=-\int_S\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS=-\int_V\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F}dV=-\int_V\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_1}dV=\int_V(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_1dV\\&=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{u}u_1)dV=\int_S(\boldsymbol{u}u_1)\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_S u_1(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})dS.\end{aligned}$$

他も同様だから，まとめると示すべき式を得る．

(iii) S_i での圧力を p_i とすると，(i) より $\frac{1}{2}|\boldsymbol{U}|^2+\frac{p_1}{\rho_0}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{U}|^2+\frac{p_2}{\rho_0}$ だから $p_1=p_2$. 円筒の側面に働く力の x 成分は 0 だから，A に働く力の x 成分を D とすると，円筒の表面に働く力の x 成分は

$$\int_{S_1}p_1dS-\int_{S_2}p_2dS-D=-D.$$

これは (ii) より

$$-\int_{S_1}\rho_0u_1^2dS+\int_{S_2}\rho_0u_1^2dS=-\rho_0u_1^2S_1+\rho_0u_1^2S_2=0$$

に等しい．よって $D=0$. □

平成 14 年度 (2001 年 8 月実施)

問 4

$n\times n$ 行列 $A(x,t),B(x,t)$ の各成分は，実変数 (x,t) の C^∞ 級関数であって，x に関しては周期 π をもつ周期関数とする．このとき，$n\times n$ 行列 $U(x,t)$ を未知関数とする連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}U &= A(x,t)U \qquad \cdots(1) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U &= B(x,t)U \qquad \cdots(2) \end{cases}$$

を考える．この連立微分方程式が至る所 $\det V\neq 0$ を満たす C^∞ 級の解 $V(x,t)$ を持つと仮定して，以下の問に答えよ．

(i) 等式

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x}+AB-BA=0$$

が成り立つことを示せ．また，$M(t)=V(0,t)^{-1}V(\pi,t)$ とおくとき，M は t によらないことを示せ．

(ii) 次に，至る所 $\det W\neq 0$ を満たす，(1) の C^∞ 級の解 $W(x,t)$ が与えられたとする．（ただし，$W(x,t)$ が (2) を満たすとは仮定しない．）このとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t)-B(x,t)W(x,t)$$

も (1) を満たすことを示せ．さらに，$N(t)=W(0,t)^{-1}W(\pi,t)$ とおくとき，

$$\frac{d}{dt}N(t)=N(t)\Lambda(t)-\Lambda(t)N(t)$$

を満たす行列 $\Lambda(t)$ が存在することを示せ．

(iii) $N(t)$ の固有値は t によらないことを示せ．

解答． 一般に，微分可能な関数を成分とする行列 $X(t)$ に対し $\det X\neq 0$ なら $XX^{-1}=I$ を微分して $\frac{dX}{dt}X^{-1}+X\frac{dX^{-1}}{dt}=0$. よって $\frac{dX^{-1}}{dt}=-X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}$ であることに注意する．

(i) V は微分方程式系を満たすので，(1),(2) を をそれぞれ t,x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}&=\frac{\partial A}{\partial t}V+A\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial t}V+ABV,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}&=\frac{\partial B}{\partial x}V+B\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}V+BAV.\end{aligned}$$

これらは等しく，至る所 $\det V\neq 0$ だから

$$\frac{\partial A}{\partial t}+AB=\frac{\partial B}{\partial x}+BA.$$

また，B は x について周期 π だから

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt}&=-V(0,t)^{-1}\frac{dV(0,t)}{dt}V(0,t)^{-1}V(\pi,t)+V(0,t)^{-1}\frac{dV(\pi,t)}{dt}\\ &=-V(0,t)^{-1}B(0,t)V(\pi,t)+V(0,t)^{-1}B(\pi,t)V(\pi,t)\\ &=0.\end{aligned}$$

(ii) (i) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)&=\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x}W-B\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}(AW)-\frac{\partial B}{\partial x}W-BAW\\ &=\left(\frac{\partial A}{\partial t}W+A\frac{\partial W}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial t}+AB\right)W=A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right).\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial x}W^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)=-W^{-1}\frac{\partial W}{\partial t}W^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)+W^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)$$
$$=-W^{-1}A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)+W^{-1}A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)=0$$

だから，x によらない行列 $Z(t)$ があって $\frac{\partial W}{\partial t}-BW=WZ(t)$ と書ける．この時 B が x について周期 π であることから

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt}=&-W(0,t)^{-1}\frac{dW(0,t)}{dt}W(0,t)^{-1}W(\pi,t)+W(0,t)^{-1}\frac{dW(\pi,t)}{dt}\\=&-W(0,t)^{-1}(B(0,t)W(0,t)+W(0,t)Z(t))W(0,t)^{-1}W(\pi,t)\\&+W(0,t)^{-1}(B(\pi,t)W(\pi,t)+W(\pi,t)Z(t))\\=&W(0,t)^{-1}W(\pi,t)Z(t)-Z(t)W(0,t)^{-1}W(\pi,t)\\=&N(t)Z(t)-Z(t)N(t).\end{aligned}$$

よって $\Lambda(t)=Z(t)$ とすれば良い．

(iii) $\Phi(t)=\exp(\int_0^t\Lambda(s)ds)$ とおく．$\Phi(t)^{-1}=\exp(-\int_0^t\Lambda(s)ds)$ だから (ii) より

$$\frac{d}{dt}\Phi N\Phi^{-1}=\Phi\Lambda N\Phi^{-1}+\Phi(N\Lambda-\Lambda N)\Phi^{-1}+\Phi N(-\Lambda\Phi^{-1})=0.$$

よって $\Phi(t)N(t)\Phi(t)^{-1}=N(0)$ だから $\det(N(t)-\lambda I)=\det(N(0)-\lambda I)$. 従って $N(t)$ の固有多項式は t によらないから，その固有値も t によらない． □

問 5

区間 $[0,1)$ 上の関数 $X_n(\omega)\,(\omega\in[0,1),\,n=1,2,\dots)$ を，2 進法による ω の小数展開

$$\omega=0.a_1(\omega)a_2(\omega)\cdots\qquad(a_n(\omega)\in\{0,1\})$$

を利用して，

$$X_n(\omega)=1-2a_n(\omega)$$

で定義する．さらに，$\lim_{n\to\infty}c_n=0$ を満たす実数列 $\{c_n\}$ を 1 つ与えて，

$$Y_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}c_kX_k(\omega)$$
$$\varphi_n(x)=\int_0^1 e^{\sqrt{-1}xY_n(\omega)}d\omega\qquad(x\in\mathbb{R})$$

とおく．次の問に答えよ．

(i) $\varphi_n(x)$ を具体的に求めよ．それを利用して，$n\to\infty$ のとき，$\varphi_n(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で各点収束することを，次の (A), (B) の場合に分けて証明せよ．

$$(A)\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2<\infty,\qquad\qquad(B)\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\infty.$$

(ii) (A) の場合 $Y_n(\omega)$ は $[0,1)$ 上 L^2 収束するが，(B) の場合には L^2 収束しないことを示せ．

解答． (i) 長さ 2^{-n} の区間 $I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\,(\varepsilon_j\in\{0,1\})$ を

$$I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\{\omega=0.a_1(\omega)a_2(\omega)\cdots\,;\,a_1(\omega)=\varepsilon_1,\dots,a_n(\omega)=\varepsilon_n\}$$

で定める．$I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ 上 $Y_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}c_k(1-2\varepsilon_k)$ は定数．よって

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)&=\sum_{\varepsilon_j\in\{0,1\}}\int_{I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}e^{ixY_n(\omega)}d\omega=\sum_{\varepsilon_j\in\{0,1\}}\frac{1}{2^n}\exp\left(ix\sum_{k=1}^{n}c_k(1-2\varepsilon_k)\right)\\&=\sum_{\varepsilon'_j\in\{\pm1\}}\frac{1}{2^n}\exp\left(ix\sum_{k=1}^{n}c_k\varepsilon'_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{ixc_k}+e^{-ixc_k}}{2}=\prod_{k=1}^{n}\cos c_kx.\end{aligned}$$

(A) の場合：

$$\varphi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-2\sin^2\frac{c_kx}{2}\right)$$

である．任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{n\ge1}2\sin^2\frac{c_nx}{2}\le\sum_{n\ge1}2\left(\frac{c_nx}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}\sum_{n\ge1}c_n^2<\infty$$

なので $\varphi_n(x)$ は絶対収束し，特に $\mathbb{R}$ 上各点収束する．

(B) の場合：$\varphi_n(0)=1$ より $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$. 以下 $x\neq0$ を任意に固定する．$\lim_{n\to\infty}c_n=0$ から，N が存在して $k\ge N$ の時 $|\frac{c_kx}{2}|<\frac{\pi}{4}$ となる．この時 $2\sin^2\frac{c_kx}{2}<1$ である．これと $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\,(0\le x\le\frac{\pi}{2}),1+x\le e^x\,(x\in\mathbb{R})$ より

$$\begin{aligned}0&<\prod_{k=N}^{n}\left(1-2\sin^2\frac{c_kx}{2}\right)\le\prod_{k=N}^{n}\left(1-2\left(\frac{2}{\pi}\frac{c_kx}{2}\right)^2\right)\\&\le\prod_{k=N}^{n}\exp\left(-2\left(\frac{c_kx}{\pi}\right)^2\right)=\exp\left(-\frac{2x^2}{\pi^2}\sum_{k=N}^{n}c_k^2\right)\to0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\prod_{k=N}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{c_kx}{2}\right)=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$.

(ii) $Y(\omega)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)$ とおく．$\int_0^1 X_k(\omega)^2d\omega=\int_0^1 d\omega=1$ および $k\neq k'$ の時

$$\int_0^1 X_k(\omega)X_{k'}(\omega)d\omega=\sum_{\substack{\varepsilon_j\in\{0,1\}\\ \varepsilon_k=\varepsilon_{k'}}}\int_{I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}d\omega+\sum_{\substack{\varepsilon_j\in\{0,1\}\\ \varepsilon_k\neq\varepsilon_{k'}}}\int_{I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(-1)d\omega=0$$

であるから，$\|\cdot\|$ を L^2 ノルムとすれば

$$\|Y_n\|^2=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n c_kX_k(\omega)\right|^2d\omega=\sum_{k=1}^n c_k^2<\infty.$$

よって $Y_n\in L^2[0,1)$. 同様に，任意の $n<m$ に対し

$$\|Y_n-Y_m\|^2=\sum_{k=n+1}^m c_k^2.$$

(A) の場合：$n,m\to\infty$ の時 $\|Y_n-Y_m\|\to 0$. よって Y_n は Cauchy 列となるが，L^2 の完備性より $Y\in L^2[0,1)$. また，n を固定して $m\to\infty$ とすれば $\|Y_n-Y\|\to 0$ だから Y_n は L^2 収束している．
(B) の場合：Y_n が L^2 収束したとすると $n,m\to\infty$ の時 $\|Y_n-Y_m\|\leq\|Y_n-Y\|+\|Y_m-Y\|\to 0$ より $\sum_{k=n+1}^m c_k^2\to 0$ となるが，これは $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\infty$ に矛盾． □

問 6

C^∞ 級実数値関数の空間 X を

$$X = \{f\,;\, f(x) \text{ は } 0 \le x \le 1 \text{ で } C^\infty \text{ 級かつ } f(0)=0, f(1)=1\}$$

で定義する．

(i) 次で定義される X 上の汎関数 J, K について，最大値・最小値のそれぞれが存在するかどうか，理由とともに答えよ．存在する場合にはそれを達成する関数 $f \in X$ を全て求めよ．

$$J(f) = \int_0^1 \left[(f(x))^2 + (f'(x))^2\right] dx, \qquad K(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+(f'(x))^2}.$$

(ii) 汎関数

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

の X における最小値が $\sqrt{2}$ であることを証明せよ．

解答． (i) $Y = \{f\,;\, f(x) \in C^\infty[0,1], f(0)=f(1)=0\}$, $f_0(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$ とおく．任意の $f \in X$ に対し $g \in Y$ があって $f = f_0 + g$ と書けるので

$$\begin{aligned}
J(f) - J(f_0) &= \int_0^1 ((f_0+g)^2 + (f_0'+g')^2 - f_0^2 - (f_0')^2)dx = \int_0^1 ((2f_0+g)g + (2f_0'+g')g')dx \\
&= \int_0^1 (2f_0+g)gdx + (2f_0'+g')g|_0^1 - \int_0^1 (2f_0''+g'')gdx \\
&= \int_0^1 (2(f_0 - f_0'') + (g-g''))gdx = \int_0^1 (g-g'')gdx \\
&= \int_0^1 g^2dx - g'g|_0^1 + \int_0^1 (g')^2dx = \int_0^1 (g^2+(g')^2)dx \ge 0.
\end{aligned}$$

よって $J(f) \ge J(f_0)$. 等号は $g = g' \equiv 0$ の時，すなわち $f = f_0$ の時のみだから，$J(f)$ の最小値は存在し，それを達成するのは $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$ のみ．また，$f_n(x) = x^n \in X\ (n \in \mathbb{N})$ とすると

$$J(f_n) = \int_0^1 (x^{2n} + n^2 x^{2(n-1)})dx = \frac{1}{2n+1} + \frac{n^2}{2n-1} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

だから $J(f)$ の最大値は存在しない．

$K(f)$ の被積分関数は正だから $K(f) > 0$. 一方 $f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)x \in X$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} K(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)x} = \int_0^1 0dx = 0$$

だから $K(f)$ の最小値は存在しない．ただし被積分関数の絶対値が 1 以下であることより Lebesgue の収束定理を用いた．$f_0(x) = x \in X$ とすると任意の $f \in X$ は $g \in Y$ があって $f = f_0 + g$ と書けるので

$$K(f) - K(f_0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+(1+g')^2} - \int_0^1 \frac{1}{2}dx = \int_0^1 \frac{1-(1+g')^2}{2(1+(1+g')^2)}dx \le 0.$$

よって $K(f) \le K(f_0)$. 等号成立は $(1+g')^2 \equiv 1 \iff g' = 0$ の時，すなわち $f(x) = x$ の時のみ．よって $K(f)$ の最大値は存在し，それを達成するのは $f(x) = x$ のみ．

(ii) $f_0(x) = x$ とおくと任意の $f \in X$ は $g \in Y$ があって $f = f_0 + g$ と書けるので

$$F(f) - F(f_0) = \int_0^1 (\sqrt{1+(1+g')^2} - \sqrt{2})dx = \int_0^1 \frac{(1+g')^2 - 1}{\sqrt{1+(1+g')^2}+\sqrt{2}}dx \ge 0.$$

よって $F(f) \ge F(f_0) = \sqrt{2}$. $f(x) = x$ の時等号成立するから $\displaystyle\min_{f\in X} F(f) = \sqrt{2}$. □

問 7

平面極座標 (r, θ) で，r 方向の速度がゼロで θ 方向の速度 $v(r)$ が

$$v(r) = \frac{A}{r} \qquad (r \neq 0)$$

である流れを考える．ここで A は正定数とする．

(i) この流れが $r \neq 0$ において非圧縮性条件を満足し，かつ，渦なしであることを確認せよ．

(ii) 時刻 $t = 0$ において，$\theta =$ 一定$, r_1 \leq r \leq r_2$ により定まる線分をなす流体要素にインクでしるしをつける $(r_2 > r_1 > 0)$. 時間が経つにつれ，この線分は流れによって引き伸ばされていく．時刻 t における，インクのついた流体からなる曲線の長さ $L(t)$ を具体的に計算し，$t \to \infty$ における漸近的な振舞いを求めよ．

(iii) 同様に，微小な長さをもつ流体線要素の引き伸ばしを考える．$t = 0$ で r 方向から角度 $\alpha\,(-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2)$ だけ傾けて原点以外に微小な線要素を置く．このとき微小時間に最も長く引き伸ばされる角度 α を答えよ．

解答. (i) xy 座標での流体の速度場を $\boldsymbol{u} = (u_1(x,y), u_2(x,y))$ とする．点 (x, y) での r 方向，θ 方向の単位ベクトルはそれぞれ $\frac{1}{r}(x,y), \frac{1}{r}(-y,x)$ だから

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v(r)\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{A}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{A}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

従って

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{u} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{2Axy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2Axy}{(x^2+y^2)^2} = 0, \\
\nabla \times \boldsymbol{u} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{A(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{A(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

だから非圧縮性条件を満たし，渦なしである．

(ii) $t = 0$ でのインクの位置を $(r, 0)\,(r_1 \leq r \leq r_2)$ とする．$(r, 0)$ にある流体要素は時刻 t では $(r\cos\frac{A}{r}t, r\sin\frac{A}{r}t)$ にあるから，時刻 t でのインクのなす曲線は $(x,y) = (r\cos\frac{At}{r}, r\sin\frac{At}{r})\,(r_1 \leq r \leq r_2)$ で与えられる．

$$\frac{dx}{dr} = \cos\frac{At}{r} + \frac{At}{r}\sin\frac{At}{r}, \quad \frac{dy}{dr} = \sin\frac{At}{r} - \frac{At}{r}\cos\frac{At}{r}$$

より

$$L(t) = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2}\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{At}{r}\right)^2}\,dr.$$

ここで $c > 0$ を定数として $\int \sqrt{1+\frac{c^2}{r^2}}dr$ を求める．$r = c\tan t$ と置換すれば

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+\frac{c^2}{r^2}}dr &= \int \frac{1}{\sin t}\frac{cdt}{\cos^2 t} = c\int \frac{\sin t dt}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t} = c\int \frac{-du}{(1-u^2)u^2} \quad (u = \cos t) \\
&= c\int \left[\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) - \frac{1}{u^2}\right]du \\
&= c\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}\right] = c\left[\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right] \\
&= \sqrt{c^2+r^2} - \frac{c}{2}\log\frac{1+\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}}}{1-\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}}} = \sqrt{c^2+r^2} - \frac{c}{2}\log\frac{\sqrt{c^2+r^2}+c}{\sqrt{c^2+r^2}-c} \\
&= \sqrt{c^2+r^2} - \frac{c}{2}\log\frac{(\sqrt{c^2+r^2}+c)^2}{r^2} = \sqrt{c^2+r^2} - c\log\frac{\sqrt{c^2+r^2}+c}{r}.
\end{aligned}$$

従って

$$L(t) = \sqrt{(At)^2 + r_2^2} - \sqrt{(At)^2+r_1^2} + At\log\frac{\sqrt{(At)^2+r_1^2}+At}{\sqrt{(At)^2+r_2^2}+At}\frac{r_2}{r_1}.$$

これは

$$\frac{r_2^2-r_1^2}{\sqrt{(At)^2+r_2^2}+\sqrt{(At)^2+r_1^2}}+At\log\frac{\sqrt{1+(r_1/At)^2}+1}{\sqrt{1+(r_2/At)^2}+1}\frac{r_2}{r_1}$$

と書けて，$t\to\infty$ の時第 1 項は $\to 0$, log の中は $\to r_2/r_1$ だから，$L(t)$ の漸近的な振る舞いは

$$At\log\frac{r_2}{r_1}$$

となる．

(iii) $t=0$ でのインクの位置を $\left(\begin{smallmatrix}d\\0\end{smallmatrix}\right)+r\left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{smallmatrix}\right)$ $(0\le r\le\varepsilon)$ とする．仮定から ε は十分小さい正数である．$R=\sqrt{(d+r\cos\alpha)^2+(r\sin\alpha)^2}=\sqrt{d^2+r^2+2dr\cos\alpha}$ とおくと，時刻 t でのインクのなす曲線は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R}\\ \sin\frac{At}{R} & \cos\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d+r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}\qquad(0\le r\le\varepsilon)$$

で表される．これより

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=At\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix}-\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R}\\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d+r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R}\\ \sin\frac{At}{R} & \cos\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r\partial t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=A\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix}-\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R}\\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d+r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}\\&\quad+At\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{A}{R}\begin{pmatrix}-\cos\frac{At}{R} & \sin\frac{At}{R}\\ -\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d+r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}+\frac{A}{R}\begin{pmatrix}-\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R}\\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\quad \left.\frac{\partial^2}{\partial r\partial t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|_{t=0}=A\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix}-r\sin\alpha\\ d+r\cos\alpha\end{pmatrix}+\frac{A}{R}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

よって微小時間での曲線の長さの増加量は

$$\begin{aligned}L'(0)&=\left.\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}dr\right|_{t=0}=\int_0^\varepsilon\left.\frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial t}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\partial r\partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial r})^2+(\frac{\partial y}{\partial r})^2}}\right|_{t=0}dr\\&=\int_0^\varepsilon Ad\sin\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)dr=Ad\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+\varepsilon^2+2d\varepsilon\cos\alpha}}-\frac{1}{d}\right)\\&=A\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon/d)^2+2(\varepsilon/d)\cos\alpha}}-1\right)\\&=A\sin\alpha\left(1-\frac{1}{2}((\varepsilon/d)^2+2(\varepsilon/d)\cos\alpha)+O(\varepsilon^2)-1\right)\\&=-\frac{A\varepsilon}{2d}\sin2\alpha+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

であるから，$\alpha=-\pi/4$ の時最大になる． □

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 5

$\nu \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,\nu > 0$ として，微分方程式

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)\right] f(z) = 0$$

を満たす (多価) 解析関数 $f(z)$ に対し $g(z) = f(z)/z^\nu$ とおく．

(i) $g(z)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(ii) 次の (a), (b) を仮定する．

(a) $g(z)$ は整関数．

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して定数 C_ϵ が存在し，次の評価式が成り立つ:

$$|g(z)| \le C_\epsilon \exp(\epsilon|z| + |\operatorname{Im} z|).$$

このとき，

$$g(z) = \int \exp(iz\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta$$

となる (超) 関数 $\varphi(\zeta)$ を求めよ．

解答. (i)

$$\begin{aligned}
&\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)\right] f(z)\\
=&z^2(\nu(\nu-1)z^{\nu-2}g + 2\nu z^{\nu-1}g' + z^\nu g'') + z(\nu z^{\nu-1}g + z^\nu g') + (z^2-\nu^2)z^\nu g\\
=&z^{\nu+1}(zg'' + (2\nu+1)g' + zg)
\end{aligned}$$

だから $zg'' + (2\nu+1)g' + zg = 0$.

(ii) φ を超関数と見ると

$$\begin{aligned}
zg &= z\int e^{iz\zeta}\varphi d\zeta = \int \frac{\partial}{\partial\zeta}(-ie^{iz\zeta})\varphi d\zeta = \int ie^{iz\zeta}\varphi' d\zeta,\\
g' &= \int i\zeta e^{iz\zeta}\varphi d\zeta,\\
zg'' &= z\int (i\zeta)^2 e^{iz\zeta}\varphi d\zeta = \int ie^{iz\zeta}(-\zeta^2\varphi)' d\zeta = \int ie^{iz\zeta}(-\zeta^2\varphi' - 2\zeta\varphi)d\zeta.
\end{aligned}$$

ただし最後の等式では最初の等式で φ を $-\zeta^2\varphi$ とした結果を使った．これより

$$\begin{aligned}
zg'' + (2\nu+1)g' + zg &= \int ie^{iz\zeta}((-\zeta^2\varphi' - 2\zeta\varphi) + (2\nu+1)\zeta\varphi + \varphi')d\zeta\\
&= \int ie^{iz\zeta}((1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi)d\zeta.
\end{aligned}$$

よって $(1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi = 0$ であれば良い．

$$\left(\log\varphi - \frac{2\nu-1}{2}\log(1-\zeta^2)\right)' = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{2\nu-1}{2}\frac{-2\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{(1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi}{(1-\zeta^2)\varphi} = 0$$

だから定数 C を用いて $\varphi = C(1-\zeta^2)^{\nu-1/2}$ と書ける．これが条件を満たすことを示す．$C = 1$ として良い．φ は $\zeta = \pm 1$ に $(\mathrm{Re}\,\nu - 1/2)$ 乗の特異性を持つから，$\mathrm{Re}\,\nu > 0$ より

$$g(z) := \int_{-1}^{1} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} e^{iz\zeta}(1-\zeta^2)^{\nu-1/2}d\zeta$$

が定義できる．$z \in \mathbb{C}, R > 0$ を任意に取り，$|w| < R$ なる $w \in \mathbb{C}$ を任意に取る．

$$\frac{g(z+w)-g(z)}{w} = \int_{-1}^{1} \frac{e^{iw\zeta}-1}{w} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta$$

であるが，

$$|e^z - 1| = \left|\int_0^z e^t dt\right| \leq |z| \max_{|t|\leq|z|} |e^t| \leq |z| \max_{|t|\leq|z|} e^{\operatorname{Re} t} = |z|e^{|z|}$$

だから

$$\left|\frac{e^{iw\zeta}-1}{w} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)\right| \leq \frac{|iw\zeta|e^{|iw\zeta|}}{|w|} e^{\operatorname{Re}(iz\zeta)}(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} \leq e^R e^{|\operatorname{Im} z|}(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2}.$$

この右辺は $(-1,1)$ で可積分だから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{w\to 0}\frac{g(z+w)-g(z)}{w} = \int_{-1}^{1}\lim_{w\to 0}\frac{e^{iw\zeta}-1}{w}e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} i\zeta e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

$z \in \mathbb{C}$ は任意だから g は整関数である．今

$$|g(z)| \leq \int_{-1}^{1} \exp(-\zeta \operatorname{Im} z)(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2}d\zeta \leq \exp(|\operatorname{Im} z|)\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2}d\zeta$$

であり，右辺の積分は有限値である．これを I とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し定数 $C_\varepsilon = I$ を取ると $|g(z)| \leq C_\varepsilon \exp(|\operatorname{Im} z|) \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z| + |\operatorname{Im} z|)$. これで示された． □

問 6

$n \geq 0$ を整数とし，次の 2 つの微分方程式

$$\text{(a)} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = u + t^n$$
$$\text{(b)} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = u^2 + t^n$$

を $t \geq 0$ で考える．

(i) 方程式 (a) を初期条件 $u(0) = \alpha, \frac{du}{dt}(0) = \beta$ (α, β は任意の実数) で解くとき，解はすべての $0 \leq t < \infty$ で存在することを示せ．

(ii) 方程式 (b) を (i) と同じ初期条件で解く．このとき，(解が存在するとして) 十分大きな t について $u(t)$ は単調増大であることを示せ．さらに，これを用いて α, β が何であっても解は必ず爆発すること，すなわち，$\lim_{t \to t_0} |u(t)| = \infty$ となる $t_0 < \infty$ が存在することを示せ．

解答． (i) (a) は $(\partial - 1)(\partial + 1)u = t^n$ と同値だから，$v = u' + u$ は初期値問題 $(\partial - 1)v = t^n, v(0) = \alpha + \beta$ の解．$(e^{-t}v)' = e^{-t}(v' - v) = e^{-t}t^n$ だから

$$e^{-t}v(t) = (\alpha + \beta) + \int_0^t e^{-s}s^n ds.$$
$$\therefore (e^t u)' = e^t(u' + u) = e^t v = (\alpha + \beta)e^{2t} + \int_0^t e^{2t-s}s^n ds$$

積分して

$$\begin{aligned} e^t u(t) - \alpha &= \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t \int_0^{t'} e^{2t'-s}s^n ds dt' = \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t \int_t^s e^{2t'-s}s^n dt' ds \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t e^{-s}s^n \cdot \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{2s})ds \\ \therefore u(t) &= \alpha \cosh t + \beta \sinh t + \int_0^t s^n \sinh(t - s)ds \end{aligned}$$

任意の $T \geq 0$ に対し $0 \leq t \leq T$ において第 $1, 2$ 項は有限．第 3 項の被積分関数は有限だから第 3 項の積分も有限．よって $u(t)$ は $0 \leq t \leq T$ において存在．$T \geq 0$ は任意だから $u(t)$ は $t \geq 0$ で存在．

(ii) $u''(t) = u(t)^2 + t^n \geq t^n$ を積分して $u'(t) \geq \beta + \frac{1}{n+1}t^{n+1}$. 右辺は十分大きな T があって $t \geq T$ において正だから，u は $t \geq T$ において単調増加．この式をもう一度積分して $u(t) \geq \alpha + \beta t + \frac{1}{(n+1)(n+2)}t^{n+2}$. α, β によらず $t \to \infty$ の時 (右辺) $\to \infty$ だから $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = \infty \cdots (1)$. $t \geq T$ の時 $u''(t) \geq u(t)^2 + T^n$ だから $u'(t) > 0$ と合わせて

$$\left(\frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{3}u^3 - T^n u\right)' = u'(u'' - u^2 - T^n) > 0.$$
$$\therefore \frac{1}{2}(u'(t))^2 - \frac{1}{3}u(t)^3 - T^n u(t) > \frac{1}{2}(u'(T))^2 - \frac{1}{3}u(T)^3 - T^n u(T)$$
$$\therefore \frac{1}{2}(u'(t))^2 - \frac{1}{3}u(t)^3 > T^n u(t) + \frac{1}{2}(u'(T))^2 - \frac{1}{3}u(T)^3 - T^n u(T)$$

(1) より $T' > T$ があって $t \geq T'$ の時右辺は正かつ $u(t) > 0$. よって $t \geq T'$ において $\frac{1}{2}(u'(t))^2 - \frac{1}{3}u(t)^3 > 0$ だから $u' > \sqrt{\frac{2}{3}}u^{3/2}$. 従って $(-2u^{-1/2})' = u^{-3/2}u' > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\therefore -2u(t)^{-1/2} + 2u(T')^{-1/2} > \sqrt{\frac{2}{3}}(t - T') \qquad \therefore u(t) > \left(u(T')^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{6}}(t - T')\right)^{-2}$$

T' の取り方から $t_0 := T' + \sqrt{6}u(T')^{-1/2} > 0$ は有限であり，$t \to t_0$ の時 (右辺) $\to \infty$ だから $u(t)$ は爆発する． $\square$

問 7

Hilbert 空間 H 上の強連続ユニタリ群 $U_t,\ t\in\mathbb{R}$ に対して

$$Q(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin tx}{t}U_t dt$$

とする．

(i) $H=\mathbb{C},\ U_t=e^{it}$ の場合に，$Q(x)$ の値を求めよ．

(ii) $H=\mathbb{C}^n,\ U_t=e^{itA}$ の場合に，次の関係式を示せ．ただし，A は実対称行列とする．

$$(*)\qquad Q(x)Q(y)=Q(y)Q(x)=Q(x)\quad(0\le x<y)$$

(iii) 一般の場合に，関係式 $(*)$ を示せ．

解答． (i) $I(x,T)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}\frac{\sin tx}{t}dt$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin tx}{t}U_t dt&=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin tx\cos t}{t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin(1+x)t-\sin(1-x)t}{t}dt\\&=\frac{1}{2}(I(1+x,T)-I(1-x,T)).\end{aligned}$$

ここで $I(0,T)=0$ であり，$I(x,T)$ は x について奇関数．$x>0$ の時 $\displaystyle\lim_{T\to\infty}I(x,T)$ を求める．線分の和 $[-T,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,T]$ を C_1, 円弧 $\{\varepsilon e^{i\theta}\,;\,0\le\theta\le\pi\}$ を C_2, 円弧 $\{Te^{i\theta}\,;\,0\le\theta\le\pi\}$ を C_3 とすると

$$\int_{C_1+C_2+C_3}\frac{e^{itx}}{t}dt=0.$$

ここで $\varepsilon\to0, T\to\infty$ の時

$$\begin{aligned}&\int_{C_2}\frac{e^{itx}}{t}dt=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{ix\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta=-i\int_0^{\pi}e^{ix\varepsilon e^{i\theta}}d\theta\to-i\int_0^{\pi}d\theta=-\pi i,\\&\left|\int_{C_3}\frac{e^{itx}}{t}dt\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{ixTe^{i\theta}}}{Te^{i\theta}}iTe^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\pi}e^{-xT\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-xT\sin\theta}d\theta\le2\int_0^{\pi/2}e^{-xT\frac{2}{\pi}\theta}d\theta\to0\end{aligned}$$

だから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{t}dt=\pi i.\qquad\therefore\lim_{T\to\infty}I(x,T)=\lim_{T\to\infty}\mathrm{Im}\,\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{itx}}{t}dt=1$$

従って任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{T\to\infty}I(x,T)=\operatorname{sgn}x$ だから

$$\begin{aligned}Q(x)&=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1+x)-\operatorname{sgn}(1-x))\\&=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-(-1))&=&1&(x>1)\\\frac{1}{2}(1-0)&=&1/2&(x=1)\\\frac{1}{2}(1-1)&=&0&(-1<x<1)\\\frac{1}{2}(0-1)&=&-1/2&(x=-1)\\\frac{1}{2}(-1-1)&=&-1&(x<-1)\end{cases}.\end{aligned}$$

(ii) (i) で求めた $Q(x)$ を $Q_1(x)$ と書く．$P\in GL(n,\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP=D:=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ と書ける．ただし $\lambda_j\in\mathbb{R}$. この時

$$\begin{aligned}U_t&=\sum_{k\ge0}\frac{(it)^k}{k!}A^k=\sum_{k\ge0}\frac{(it)^k}{k!}(PDP^{-1})^k=P\sum_{k\ge0}\frac{(it)^k}{k!}D^kP^{-1}\\&=P\sum_{k\ge0}\frac{(it)^k}{k!}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)P^{-1}=P\,\mathrm{diag}(e^{i\lambda_1t},\dots,e^{i\lambda_nt})P^{-1}\end{aligned}$$

だから，

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{i\lambda t} dt$$

とおくと $Q(x) = P \operatorname{diag}(Q_2(\lambda_1, x), \ldots, Q_2(\lambda_n, x)) P^{-1}$. よって任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $Q_2(\lambda, x)$ が $(*)$ を満たすことを示せば良い．$\lambda = 0$ の時は

$$Q_2(0, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} dt = \lim_{T\to\infty} I(x, T) = \operatorname{sgn} x$$

だから良い．$\lambda > 0$ の時は

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \frac{\sin \frac{s}{\lambda} x}{s} e^{is} ds = Q_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

であり，$Q_1(x)$ が $(*)$ を満たすことから $Q_2(x)$ も $(*)$ を満たす．$\lambda < 0$ の時は

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{-i|\lambda|t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{T}^{-T} \frac{\sin(-tx)}{-t} e^{i|\lambda|t} (-dt) = Q_2(|\lambda|, x)$$

だから，$\lambda > 0$ の場合に帰着される．これで示された．

(iii) Stone の定理から，H 上の自己共役作用素 A が存在して $U_t = e^{itA}$ と書ける．$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$ を A のスペクトル分解とする．任意の $x \geq 0$ に対し $Q_2(\lambda, x)$ は λ についての有界な可測関数だから，

$$Q(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{itA} dt = \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda).$$

よって任意の $0 \leq x < y$ に対し

$$\begin{aligned} Q(x)Q(y) &= \left(\int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, y) dE(\lambda)\right) = \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) Q_2(\lambda, y) dE(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda) = Q(x). \end{aligned}$$

同様に $Q(y)Q(x) = Q(x)$. □

問 9A

(i) 非粘性流に対する運動方程式 (3 次元 Euler 方程式) を用いてポテンシャル流に対する Bernoulli の定理を導け．ただし，流体の密度 ρ は一定とし，外力はポテンシャル Φ を用いて $-\nabla\Phi$ と与えられているものとせよ．ただし，$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ とする．

(ii) 断面積 A の鉛直に置かれた円柱容器に液体が高さ h まで満たされている．下面に小さな断面積 $\alpha(<< A)$ を持つ長さ l の細い管を水平に取り付ける．管の先端を突然開くと液体が流れはじめ，やがて定常的に流れるようになる．管内流速を $v(t)$ とするとき，この細い管の中のポテンシャルは近似的に $\Phi = xv(t)\,(+\text{定数})$ と書けることを説明せよ．ただし，x 座標系は管の先端を原点に持ち，管に平行にとるものとする．また，液面の降下および粘性による散逸の降下は無視せよ．

(iii) $v(t)$ の満たす微分方程式を導き，

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{2gh}$$

となることを証明せよ．ただし，g は重力加速度である．

解答． (i) 流体の速度場を $\boldsymbol{u} = \nabla\psi$, 圧力を p とすると Euler 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi.$$

ここで

$$\nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi = \nabla\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

だから

$$\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0.$$

(ii) 管の断面積は小さいので，管内の流れは 1 次元であるとして良い．管内の速度を $u(x,t)$ とすると，$u(0,t) = v(t)$. また，ρ が定数であることと連続の方程式から $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. よって $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u(x,t) = v(t)$ だから $\Phi = xv(t) + (\text{定数})$.

(iii) 管の先端を P_0, 管と円柱の結合部を P_1, 円柱内部の水面を P_2 とする．大気圧を p_∞, P_1 での圧力を p_1 とおく．P_0, P_1 に Bernoulli の定理を使うと (ii) より

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = -lv'(t) + \frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_1}{\rho}. \qquad \therefore p_1 = p_\infty + \rho l v'(t)$$

また，P_1, P_2 に Bernoulli の定理を使うと

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + gh.$$

これらから p_1 を消去すると，v が満たす微分方程式

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + lv'(t) = gh, \quad v(0) = 0$$

を得る．これより

$$\frac{1}{2l} = \frac{v'}{2gh - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}}\left(\frac{v'}{\sqrt{2gh}+v} + \frac{v'}{\sqrt{2gh}-v}\right)$$

$$\therefore \frac{t}{2l} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}}\log\frac{\sqrt{2gh}+v}{\sqrt{2gh}-v}.$$

よって

$$v(t) = \sqrt{2gh}\frac{\exp\left(\frac{\sqrt{2gh}}{l}t\right) - 1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2gh}}{l}t\right) + 1} = \sqrt{2gh}\frac{1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2gh}}{l}t\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\sqrt{2gh}}{l}t\right)} \to \sqrt{2gh} \quad (t\to\infty).$$

□

平成 12 年度 (1999 年 8 月実施)

問 5

三角多項式の全体，すなわち有限個の複素数 $\hat{f}_{-n}, \hat{f}_{-n+1}, \cdots, \hat{f}_n \ (n \geq 0)$ により

$$f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{\sqrt{-1}k\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表される円周 $\mathbb{T}^1$ 上の関数 $f(\theta)$ の全体を D とする．$f, g \in D$ に対して

$$\begin{aligned}(f, g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta, \\ Q_1(f) &= (f - f'', f)\end{aligned}$$

とおき，

$$Q_2(f) = \sup\left\{ |(f,g)|^2 \,\middle|\, g \in D, Q_1(g) = 1 \right\}$$

と定める．ただし f'' は f の θ に関する 2 階微分を表す．

(i) すべての $f \in D$ に対して

$$Q_2(f) = Q_1(Tf)$$

を満たす線型作用素 $T : D \to D$ を求めよ．

(ii) 円周 $\mathbb{T}^1$ 上の 2 乗可積分関数全体の空間を $L^2(\mathbb{T}^1)$ とする．T が $L^2(\mathbb{T}^1)$ の有界線型作用素に拡張されることを示せ．

(iii) $T : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ がコンパクト作用素であることを示せ．また，T の固有値を求めよ．

解答． (i) $f(\theta) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in D$ とする．

$$Q_1(f) = \left(\sum_{|k|\leq n}(1+k^2)\hat{f}_k e^{ik\theta}, \sum_{|k|\leq n}\hat{f}_k e^{ik\theta} \right) = \sum_{|k|\leq n}(1+k^2)|\hat{f}_k|^2$$

である．また，$g(\theta) = \sum_{|k|\leq n'} \hat{g}_k e^{ik\theta} \in D$ が $Q_1(g) = 1$ を満たす時, $m = \min\{n, n'\}$ とおくと

$$|(f,g)|^2 = \left| \sum_{|k|\leq m} \hat{f}_k\overline{\hat{g}_k} \right|^2 \leq \left(\sum_{|k|\leq m} \frac{|\hat{f}_k|^2}{1+k^2} \right)\left(\sum_{|k|\leq m}(1+k^2)|\hat{g}_k|^2 \right) = \sum_{|k|\leq m}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1+k^2} \leq \sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1+k^2}.$$

$$g(\theta) = c\sum_{|k|\leq n}\frac{\hat{f}_k}{1+k^2}e^{ik\theta}, \qquad c^2 = \left(\sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1+k^2} \right)^{-1}$$

の時 $Q_1(g) = 1$ で等号成立するから

$$Q_2(f) = \sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1+k^2}.$$

よって

$$T\left(\sum_{|k|\leq n}\hat{f}_k e^{ik\theta} \right) = \sum_{|k|\leq n}\frac{\hat{f}_k}{1+k^2}e^{ik\theta}.$$[3]

[3] T は一意ではない．実際 $T(e^{ik\theta}) = \sum_l a_{kl}e^{il\theta}$ が $\sum_l (1+l^2)a_{kl}\overline{a_{k'l}} = \frac{1}{1+k^2}\delta_{k,k'}$ を満たせば条件を満たす．a_{kl} を動かせば T の固有値も動きうる．(例えば $\phi \in \mathbb{R}$ を任意に取り $T(1) = \cos\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi e^{i\theta}, T(e^{i\theta}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi + \frac{1}{2}\cos\phi e^{i\theta}, T(e^{ik\theta}) = \frac{1}{1+k^2}e^{ik\theta} \ (k = -1, |k| \geq 2)$ とすれば条件を満たすが，T は $3\cos\phi \pm \sqrt{9\cos^2\phi - 4}$ を固有値に持ち，これは (iii) の解答に挙げたものに含まれない.）そのため,「条件を満たす T を全て求めよ」ではなく「条件を満たす T を一つ求め，それについて (ii), (iii) に答えよ」と解釈した．

(ii) 線型であることは自明．任意の $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$ は $f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$ と書ける．この時

$$\|Tf\|^2 = \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta} \right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\hat{f}_k|^2}{(1+k^2)^2} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

だから $T : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ は有界線形作用素.

(iii) $T_n : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ を

$$T_n \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \right) = \sum_{|k|\le n} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta}$$

で定める．(ii) と同様にして T_n は有界線形作用素．また，T_n は有限階である．$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in L^2(\mathbb{T}^1)$ が $\|f\| = 1$ を満たすなら $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 = 1$ より $|\hat{f}_k| \le 1$ だから，

$$\begin{aligned} \|T_n - T\|^2 &= \sup_{\|f\|=1} \|(T_n - T)f\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \left\| \sum_{|k|>n} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta} \right\|^2 \\ &= \sup_{\|f\|=1} \sum_{|k|>n} \frac{|\hat{f}_k|^2}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+(n+1)^2)^2} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

よって T は有限階作用素 T_n のノルム極限だからコンパクト．λ を T の固有値，$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in L^2(\mathbb{T}^1)$ を対応する固有ベクトルとすると，$Tf = \lambda f$ より

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta} = \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta}.$$

$\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{T}^1)$ の正規直交基底だから $\frac{1}{1+k^2}\hat{f}_k = \lambda \hat{f}_k$. よって $\hat{f}_k = 0$ または $\lambda = \frac{1}{1+k^2}$. 任意の k で $\hat{f}_k = 0$ なら $f = 0$ で不適だから，$\lambda = \frac{1}{1+k^2}$ となる k が存在する．この時 $f(\theta) = e^{ik\theta}$ が固有ベクトルであるから，T の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{1+k^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

□

問 6

次の微分方程式 (Eq) を考える：

$$\text{(Eq)}\qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)\psi(x)=0.$$

ここで，E は整数でない複素数である．

(i) 複素平面上の積分路 C にそった積分

$$\psi(x)=\int_C \exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)f(\zeta)d\zeta$$

が確定していると仮定して，$\psi(x)$ が (Eq) の解となるための関数 $f(\zeta)$ の条件を求めよ．

(ii) $x>0$ において $\psi(x)$ が (Eq) の自明でない解となるような積分路 C と関数 $f(\zeta)$ の具体例を与えよ．

解答． (i) 部分積分の剰余項が全て消えるなら

$$\frac{1}{4}x^2\psi=\int_C \frac{1}{4}x^2\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)fd\zeta=\int_C \frac{\partial}{\partial\zeta}\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)\cdot fd\zeta=-\int_C \exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)f'd\zeta,$$

$$\begin{aligned}\psi''&=\frac{d}{dx}\int_C \frac{1}{2}x\zeta\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)fd\zeta=\int_C\left(\frac{1}{2}\zeta+\left(\frac{1}{2}x\zeta\right)^2\right)\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)fd\zeta\\&=\int_C\left(\frac{1}{2}\zeta f-(\zeta^2f)'\right)\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)d\zeta=\int_C\left(-\zeta^2f'-\frac{3}{2}\zeta f\right)\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)d\zeta.\end{aligned}$$

ただし 2 番目の等式では，最初の等式で f を $\zeta^2 f$ で置き換えた結果を使った．よって

$$\begin{aligned}\psi''+\left(E+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)\psi&=\int_C\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)\left[\left(-\zeta^2f'-\frac{3}{2}\zeta f\right)+\left(E+\frac{1}{2}\right)f+f'\right]d\zeta\\&=\int_C\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)\left[(1-\zeta^2)f'-\left(\frac{3}{2}\zeta-\left(E+\frac{1}{2}\right)\right)f\right]d\zeta.\end{aligned}$$

これが 0 になることと部分積分の剰余項が消えることから，f が満たすべき条件は

$$(1-\zeta^2)f'-\left(\frac{3}{2}\zeta-\left(E+\frac{1}{2}\right)\right)f=0,\quad \exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)f\Big|_{\partial C}=\exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)\zeta^2f\Big|_{\partial C}=0.$$

(ii) (i) より

$$\frac{f'}{f}=\frac{\frac{3}{2}\zeta-\left(E+\frac{1}{2}\right)}{1-\zeta^2}=\frac{E-1}{2}\frac{-1}{1-\zeta}-\frac{E+2}{2}\frac{1}{1+\zeta}.$$

(Eq) は線形だから

$$f(\zeta)=(1-\zeta)^{(E-1)/2}(1+\zeta)^{-E/2-1}$$

として良い．ただし $(-\infty,-1],[1,\infty)$ にカットを入れて $(1-\zeta)^{(E-1)/2}|_{\zeta=0}=1,(1+\zeta)^{-E/2-1}|_{\zeta=0}=1$ となる分枝を取る．この時 ψ の被積分関数は $\mathrm{Re}\,\zeta\to-\infty$ で指数的に減少するから，(i) の境界条件を満たす C として，$-\infty$ から実軸に沿って $-1-\varepsilon$ まで行き -1 の周りを正の向きに一周して $-1-\varepsilon$ まで戻り再び実軸に沿って $-\infty$ に戻る路が取れる．ただし $\varepsilon>0$ は十分小さいとする．この時 ψ が非自明解となることを示す．まず $\mathrm{Re}\,E<0$ とする．被積分関数は $\zeta=-1$ で $(-\mathrm{Re}\,E/2-1)$ 乗の特異性を持つから $\varepsilon\to0$ と出来て，円周に沿った積分は 0 に収束する．この時

$$\begin{aligned}\psi=&\int_\infty^0\exp\left(\frac{1}{4}x^2(-1+re^{-\pi i})\right)(2-re^{-\pi i})^{(E-1)/2}(re^{-\pi i})^{-E/2-1}e^{-\pi i}dr\\&+\int_0^\infty\exp\left(\frac{1}{4}x^2(-1+re^{\pi i})\right)(2-re^{\pi i})^{(E-1)/2}(re^{\pi i})^{-E/2-1}e^{\pi i}dr\\=&-\left(e^{\pi iE/2}-e^{-\pi iE/2}\right)\int_0^\infty\exp\left(\frac{-1}{4}x^2(1+r)\right)(2+r)^{(E-1)/2}r^{-E/2-1}dr\end{aligned}$$

である．$E\notin\mathbb{Z}$ から $e^{\pi iE/2}-e^{-\pi iE/2}\neq0$ なので，ψ は非自明解となる．C は $\zeta=-1$ を通らないから，$\mathrm{Re}\,E\geq0$ の時も C に沿った積分 ψ が非自明解となる．これで示された． □

問 7

$X_1, X_2, \cdots$ を独立同分布確率変数列とし，その分布は密度関数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}\,(x \in \mathbb{R})$ で与えられるものとする．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ が L^2 収束することを証明せよ．また，さらに強い意味での収束がいえるなら，それを示せ．

(ii) $\varphi_n(x) = n\varphi(nx),\, h_n = \varphi_1 * \varphi_2 * \cdots \varphi_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，次の等式が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ の分布を求めよ：

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解答． (i) $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{X_n}{n}, S = \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n}$ とおく．

$$E[X_1] = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} xe^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx\right) = \frac{1}{2}(-(x+1)e^{-x}|_0^{\infty} + (x-1)e^{x}|_{-\infty}^{0}) = 0,$$
$$E[X_1^2] = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} x^2e^{x}dx\right) = \frac{1}{2}(-(x^2+2x+2)e^{-x}|_0^{\infty} + (x^2-2x+2)e^{x}|_{-\infty}^{0}) = 2$$

と X_n の独立性から，任意の $N < M$ に対し

$$E[|S_N - S_M|^2] = E\left[\left|\sum_{N<n\leq M} \frac{X_n}{n}\right|^2\right] = \sum_{N<n\leq M} \frac{2}{n^2} \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

よって S_N は Cauchy 列となるから S_N は S に L^2 収束する．
さらに S_N は概収束することを示す．[4] Kolmogorov の不等式から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$P\left(\max_{N\leq n\leq M} |S_n - S_N| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}V(S_M - S_N) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{N<n\leq M} \frac{2}{n^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n>N} \frac{2}{n^2}.$$

$|S_n - S_m| \leq |S_n - S_N| + |S_m - S_N|$ より $\displaystyle\max_{N\leq n,m\leq M} |S_n - S_m| \leq 2\max_{N\leq n\leq M} |S_n - S_N|$ だから

$$P\left(\max_{N\leq n,m\leq M} |S_n - S_m| \geq 2\varepsilon\right) \leq P\left(\max_{N\leq n\leq M} |S_n - S_N| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n>N} \frac{2}{n^2}.$$

$M \to \infty$ として $\displaystyle\sup_{n,m\geq N} |S_n - S_m|$ が単調減少であることを用いると

$$P\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{n,m\geq N} |S_n - S_m| \geq 2\varepsilon\right) \leq P\left(\sup_{n,m\geq N} |S_n - S_m| \geq 2\varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n>N} \frac{2}{n^2} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

ε は任意だから $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sup_{n,m\geq N} |S_n - S_m| = 0$ a.s.. よって S_N は S に概収束する．

(ii) 関数 f の Fourier 変換を $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}f(x)dx$ とする．示すべき等式を Fourier 変換した等式が成り立つことを示せば良い．

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \frac{n}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{(i\xi-n)x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(i\xi+n)x}dx\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{-1}{i\xi-n} + \frac{1}{i\xi+n}\right) = \frac{n^2}{\xi^2+n^2}$$

[4]「L^p 収束 $\Rightarrow$ 確率収束 $\Rightarrow$ 法則収束」と「概収束 $\Rightarrow$ 確率収束 $\Rightarrow$ 法則収束」は成り立つが，一般に L^p 収束と概収束の間に収束の強弱はない．なので概収束は L^p 収束より強い収束とは言えないが，概収束するので示しておく．

より

$$\hat{h}_n(\xi) = \prod_{k=1}^n \hat{\varphi}_k(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{\xi^2+k^2} = \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^n(\xi^2+k^2)}.$$

一方

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\hat{\varphi}_k(\xi) &= \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\frac{k^2}{\xi^2+k^2} \\ &= \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^n(\xi^2+k^2)} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}k^2}{(n+k)!(n-k)!}\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne k}}(\xi^2+j^2)}_{=:p(\xi)}\end{aligned}$$

であるから，$p(\xi)\equiv 1$ となることを示せば良い．$p\in\mathbb{R}[\xi], \deg p \le 2(n-1)$ だから $\xi=\pm i, \pm 2i, \dots, \pm ni$ において $p(\xi)=1$ となることを示せば良い．$\xi = \pm ki$ の時，和は k の項のみ残り，

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne k}}(-k^2+j^2) &= \prod_{j=1}^{k-1}(j-k)\prod_{j=k+1}^{n}(j-k)\prod_{j=1}^{k-1}(j+k)\prod_{j=k+1}^{n}(j+k) \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(n-k)!\cdot\frac{(2k-1)!}{k!}\cdot\frac{(n+k)!}{(2k)!} = \frac{(n+k)!(n-k)!}{2(-1)^{k-1}k^2}\end{aligned}$$

だから $p(\pm ki)=1$. よって示された．

S の分布を求める．

$$P\left(\frac{X_n}{n}\le x\right) = P(X_n\le nx) = \int_{-\infty}^{nx}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x}\varphi(nt)ndt = \int_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)dt$$

だから $\frac{X_n}{n}$ の密度関数は φ_n である．よって X_n の独立性から，S_n の密度関数は $\varphi_1*\cdots*\varphi_n = h_n$ であるから，S_n の分布関数は $x<0$ の時

$$P(S_n\le x) = \int_{-\infty}^x h_n(t)dt = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\int_{-\infty}^x \varphi_k(t)dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}e^{kx}.$$

この e^{kx} の係数を $a_k^{(n)}$ とおく．$k>n$ の時は $a_k^{(n)}=0$ としておくと $P(S_n\le x) = \sum_{k\ge 1}a_k^{(n)}e^{kx}$ と書ける．$\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!} = \binom{n}{k}/\binom{n+k}{k} < 1$ だから任意の k,n に対し $|a_k^{(n)}|<1$. また $\sum_{k\ge1}e^{kx}<\infty$ だから，Weierstrass の優級数定理より $P(S_n\le x)$ は $x<0$ において広義絶対一様収束する．これと

$$\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!} = \prod_{j=1}^k\frac{n+1-j}{n+j} = \prod_{j=1}^k\frac{1-\frac{j-1}{n}}{1+\frac{j}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

より

$$P(S_n\le x)\to\sum_{k\ge1}(-1)^{k-1}e^{kx} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

また，h_n は偶関数だから $x>0$ の時 $P(S_n\le x) = 1-P(S_n\le -x)\to 1-\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$. 従って $\lim_{x\uparrow 0}P(S\le x) = \lim_{x\downarrow 0}P(S\le x) = \frac{1}{2}$. ところが分布関数は右連続だから，$P(S\le x)$ は $x=0$ でも連続となり，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $P(S\le x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ となる．よって S の密度関数は

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

□

平成 11 年度 (1998 年 8 月実施)

問 5

(i) $k \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

とおくと，K は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界線型作用素であることを示せ．

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R})$ と自然数 N に対して，

$$f_N(x) = f\left(\frac{x}{N}\right)$$

とおく．このとき，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(Kf_N, f_N) = \left(\int_{\mathbb{R}} k(x)dx\right)\|f\|^2$$

であることを示せ．ただし，$(\cdot,\cdot)$ と $\|\cdot\|$ で $L^2(\mathbb{R})$ における内積とノルムを表す．

(iii) さらに，k がコンパクトな台をもち，$f \in L^2(\mathbb{R})$ が L^2 微分可能な（つまり，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h}$ が L^2 極限をもつ）ときには，

$$\lim_{N\to\infty}\left\{(Kf_N, f_N) - N\left(\int_{\mathbb{R}} k(x)dx\right)\|f\|^2\right\} = 0$$

となることを示せ．

解答. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ をそれぞれ $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$ のノルムとする．

(i) 線形性は自明.

$$\begin{aligned}|Kf(x)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy\right|^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^{1/2}|k(x-y)|^{1/2}|f(y)|dy\right)^2 \\ &\le \int_{\mathbb{R}}|k(x-y)|dy\int_{\mathbb{R}}|k(x-y)||f(y)|^2dy = \|k\|_1\int_{\mathbb{R}}|k(x-y)||f(y)|^2dy\end{aligned}$$

だから

$$\|Kf\|_2^2 \le \|k\|_1\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|k(x-y)||f(y)|^2dydx = \|k\|_1\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^2\int_{\mathbb{R}}|k(x-y)|dxdy = \|k\|_1^2\|f\|_2^2 < \infty.$$

よって K は $L^2(\mathbb{R})$ の有界線形作用素.

(ii)

$$Kf_N(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f_N(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)f_N(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(\frac{x-y}{N}\right)dy$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}(Kf_N, f_N) &= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(\frac{x-y}{N}\right)dy\overline{f\left(\frac{x}{N}\right)}dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(x-\frac{y}{N}\right)dy\overline{f(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(y)\int_{\mathbb{R}} f\left(x-\frac{y}{N}\right)\overline{f(x)}dxdy = \int_{\mathbb{R}} k(y)\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy\end{aligned}$$

3 番目の等号は $\|f(\cdot - y/N)\overline{f(\cdot)}\|_1 \le \|f(\cdot - y/N)\|_2\|f\|_2 = \|f\|_2^2$ より $k(y)f(x-y/N)\overline{f(x)} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であることと，Fubini の定理による．$L^2(\mathbb{R})$ の平行移動の連続性により $\|f(\cdot - y/N) - f(\cdot)\|_2 \to 0$ だから $f(\cdot - y/N)$ は $f(\cdot)$ に強収束する．従って弱収束する．また，$|k(y)(f(\cdot - y/N), f(\cdot))| \le |k(y)|\|f\|_2^2 \in L^1(\mathbb{R})$ だから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}} k(y)\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)\lim_{N\to\infty}\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy = \left(\int_{\mathbb{R}} k(y)dy\right)\|f\|_2^2.$$

(iii) [5] f の L^2 微分を Df と書く．(ii) より

$$
\begin{aligned}
&(Kf_N, f_N) - N\left(\int_{\mathbb{R}} k(y)dy\right)\|f\|_2^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} k(y)\left(N\left(f\left(x - \frac{y}{N}\right) - f(x)\right), f(x)\right)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} yk(y)\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N}, f(x)\right)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} yk(y)\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x), f(x)\right)dy - \int_{\mathbb{R}} yk(y)(Df, f)dy.
\end{aligned}
$$

右辺の第 1 項は

$$
\left|\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x), f(x)\right)\right| \leq \left\|\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x)\right\|_2 \|f(x)\|_2 \to 0 \quad (N \to \infty)
$$

と $\operatorname{supp} k$ がコンパクトであることから，$N \to \infty$ の時 0 に収束する．また，$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は $h \to 0$ の時 Df に強収束するから弱収束する．よって

$$
\begin{aligned}
(Df, f) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(f(x), \frac{f(x-h) - f(x)}{h}\right) \\
&= -(f, Df) = -(Df, f)
\end{aligned}
$$

だから $(Df, f) = 0$ で第 2 項も 0. これで示された． □

[5] この問題では L^2 は実 Hilbert 空間とする．解答から複素 Hilbert 空間でも $\mathrm{Re}(Df, f) = 0$ は成り立つが $\mathrm{Im}(Df, f) = 0$ とは限らない．実際，$u = e^{-x^2}, v = e^{-1/(x(1-x))}\,(0 < x < 1), = 0\,(x \leq 0, 1 \leq x)$ とすると $u, v \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}), u', v' \in L^2(\mathbb{R})$ だから Du, Dv は通常の微分である.（岩波講座 現代数学の基礎 実関数と Fourier 解析 2, P250, 例 6.25）従って $f := u + iv$ についてもそう．これと $(v', u) = (u, v') = -(u', v)$ より $\mathrm{Im}(Df, f) = -(u', v) + (v', u) = -2(u', v) = 4\int_0^1 xe^{-x^2}e^{-1/(x(1-x))}dx > 0$. よって $\int yk(y)dy \neq 0$ だと問題の極限は 0 にならない．

問 6

$Q(x)$ は周期 π をもつ滑らかな（複素数値）周期関数（つまり，$Q(x+\pi)=Q(x)$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して成り立つ）とする．$-\infty<x<\infty$ において微分方程式

$$(1)\qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=Q(x)\varphi(x)$$

を考え，次の初期条件 (C_0), (C_1) を満たす (1) の解をそれぞれ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ で表す：

$$(C_0)\quad \begin{cases} \varphi_0(0) &= 1, \\ \dfrac{d\varphi_0}{dx}(0) &= 0, \end{cases} \qquad\qquad (C_1)\quad \begin{cases} \varphi_1(0) &= 0, \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx}(0) &= 1, \end{cases}$$

このとき，複素数 γ に対し，条件

$$(2)\qquad \text{任意の } x\in\mathbb{R} \text{ に対し } \varphi(x+\pi)=\gamma\varphi(x)$$

を満たす恒等的に 0 ではない (1) の解 $\varphi(x)$ が存在するための条件を，$\varphi_0(\pi)$, $\dfrac{d\varphi_1}{dx}(\pi)$ および γ を用いて書き下せ．

解答.

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x)\end{vmatrix}$$

とおく．この時

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0''(x) & \varphi_1''(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ Q(x)\varphi_0(x) & Q(x)\varphi_1(x)\end{vmatrix}=Q(x)\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x)\end{vmatrix}=0$$

だから $W(x)$ は定数．$W(0)=\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right|=1$ だから

$$W(\pi)=\varphi_0(\pi)\varphi_1'(\pi)-\varphi_0'(\pi)\varphi_1(\pi)=1. \tag{3}$$

条件 (2) を満たす φ が存在するとする．φ_0,φ_1 は (1) の一次独立な解だから，$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ を用いて $\varphi(x)=\alpha\varphi_0(x)+\beta\varphi_1(x)$ と一意に書ける．この時

$$\alpha\varphi_0(x+\pi)+\beta\varphi_1(x+\pi)=\varphi(x+\pi)=\gamma\varphi(x)=\gamma\alpha\varphi_0(x)+\gamma\beta\varphi_1(x)$$

だから $x=0$ として $\alpha\varphi_0(\pi)+\beta\varphi_1(\pi)=\gamma\alpha$. 微分して $x=0$ とすれば $\alpha\varphi_0'(\pi)+\beta\varphi_1'(\pi)=\gamma\beta$. よって

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\pi)-\gamma & \varphi_1(\pi)\\ \varphi_0'(\pi) & \varphi_1'(\pi)-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ だから $\det=(\varphi_0(\pi)-\gamma)(\varphi_1'(\pi)-\gamma)-\varphi_0'(\pi)\varphi_1(\pi)=0$. よって (3) より

$$\gamma^2-(\varphi_0(\pi)+\varphi_1'(\pi))\gamma+1=0. \tag{5}$$

逆に (5) が成り立つ時，(2) を満たす非自明解 φ が存在することを示す．(3) は φ の存在によらず成り立つから，(4) は非自明解を持つ．それを (α,β) として $\varphi(x)=\alpha\varphi_0(x)+\beta\varphi_1(x)$ とおく．$(\varphi(0),\varphi'(0))=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ だから φ は (1) の非自明解である．これが条件 (2) を満たすことを示す．$Q(x)$ は周期 π だから $\varphi(x+\pi)$ も (1) の解である．よって (1) の線形性から $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)$ も (1) の解．従って $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)$ と書ける．$x=0$ として (4) を用いると $a=\alpha\varphi_0(\pi)+\beta\varphi_1(\pi)-\gamma\alpha=0$. また，微分して $x=0$ とすれば $b=\alpha\varphi_0'(\pi)+\beta\varphi_1'(\pi)-\gamma\beta=0$. よって $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)\equiv 0$.

以上から求める必要十分条件は

$$\gamma^2-(\varphi_0(\pi)+\varphi_1'(\pi))\gamma+1=0.$$

□

問 7

磁気流体力学の 1 次元モデル方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial b}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} + u\dfrac{\partial b}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

を考える．ここで，$x\,(-\infty < x < +\infty)$ は空間変数で，$t\,(\geq 0)$ は時間変数であり，u は流体の速度を，b は磁場を表す．また，ν, λ は非負定数とする．未知関数 $u(x,t), b(x,t)$ の初期値 $u(x,0), b(x,0)$ は滑らかで，$|u(x,t)|$ と $|b(x,t)|$ は $|x| \to \infty$ で十分速く減衰しているものとする．

(i) この系の保存量を一つ挙げよ．また，全エネルギーに相当する量を適当に定義し，$\nu = \lambda = 0$ のときにはそれが保存されることを示せ．

(ii) $\nu > 0$ かつ $\lambda > 0$ のとき，自明な定常解 $u \equiv 0, b \equiv 0$ 以外の定常解が存在するか否かを調べよ．

(iii) $\nu = \lambda = 0$ のとき，第三の保存量の例を挙げよ．

解答． (i)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u dx = \int \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int \left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial b}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}u^2\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

だから $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u dx$ は保存量である．流体の運動エネルギー $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx$, 磁場エネルギー $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}b^2 dx$ は

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx = \int u\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int u\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial b}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = -\nu\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \int ub\frac{\partial b}{\partial x} dx,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}b^2 dx = \int b\frac{\partial b}{\partial t} dx = \int b\left(\lambda\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial b}{\partial x}\right) dx = -\lambda\int\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 dx - 3\int ub\frac{\partial b}{\partial x} dx$$

を満たす．ただし途中で部分積分を用いた．これより

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}b^2\right) dx = -\int\left[3\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\right] dx$$

であるから，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}b^2\right) dx$ を全エネルギーとすると，これは $\nu = \lambda = 0$ の時保存される．

(ii) $\nu, \lambda > 0$ より定常解 u, b は

$$u\frac{\partial u}{\partial x} > b\frac{\partial b}{\partial x}, \qquad u\frac{\partial b}{\partial x} > b\frac{\partial u}{\partial x}$$

を満たす．よって $\frac{\partial}{\partial x}(u^2 - b^2) = 2(u\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial b}{\partial x}) > 0$ より $u^2 - b^2$ は単調増加．ところが仮定から $u^2 - b^2 \to 0 - 0 = 0\,(x \to \pm\infty)$ だから $u^2 - b^2 \equiv 0$. 今 $u \not\equiv 0$ とすると，u が滑らかであるから区間 I が存在して I 上 $u \neq 0$. よって I 上 $\frac{b}{u} = \pm 1$. u, b は滑らかだから I 上 $\frac{b}{u} \equiv 1$ or $\equiv -1$. 一方 I 上

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{u} = \frac{\frac{\partial b}{\partial x}u - b\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2} > 0$$

だから $\frac{b}{u}$ は単調増加となり矛盾．よって $u \equiv 0$, 従って $b \equiv 0$ なので，定常解は自明解に限る．

(iii) $\nu = \lambda = 0$ なら

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}u^3 dx = \int u^2\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int u^2\left(b\frac{\partial b}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = -\int ub^2\frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} ub^2 dx &= \int\left(\frac{\partial u}{\partial t}b^2 + u\cdot 2b\frac{\partial b}{\partial t}\right) dx = \int\left[\left(b\frac{\partial b}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right)b^2 + 2ub\left(b\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial b}{\partial x}\right)\right] dx \\ &= \int ub^2\frac{\partial u}{\partial x} dx + 2\int ub^2\frac{\partial u}{\partial x} dx = 3\int ub^2\frac{\partial u}{\partial x} dx\end{aligned}$$

だから，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}(u^3 + ub^2) dx$ は保存量となる． □