数理解析研究所 院試過去問解答 (基礎科目)

nabla *

目 次

*Twitter:@nabla_delta Github: https://github.com/nabla-delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．

平成 25 年度 (2012 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) 次の 3 次正方行列 $A_i\,(i=1,2,3)$ に対して，A_i^{2012} を求めよ．

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

(ii) 行列式

$$\begin{vmatrix} & & & b_1\\ & E_n & & \vdots\\ & & & b_n\\ a_1 & \cdots & a_n & 0\end{vmatrix}$$

を求めよ．ただし，n は正整数，E_n は n 次単位行列，$a_i, b_j\,(1\le i,j\le n)$ は実数とする．

解答. (i) $A_1^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A_1^3=0$ だから $A_1^{2012}=0$. これより

$$\begin{aligned}A_2^{2012}&=(I+A_1)^{2012}=\sum_{k=0}^{2012}\binom{2012}{k}A_1^k\\&=I+2012A_1+\binom{2012}{2}A_1^2\\&=\begin{pmatrix}1&2012&2012+\binom{2012}{2}\\0&1&2012\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

また，$A_3^2=3A_3$ から $A_3^{2012}=A_3^2\cdot A_3^{2010}=3A_3\cdot A_3^{2010}=3A_3^{2011}=\cdots=3^{2011}I.$

(ii) 第 k 行の $-b_k$ 倍を第 $(n+1)$ 行に足す操作を $1\le k\le n$ に対して行うことで

$$\begin{vmatrix} & & & b_1\\ & E_n & & \vdots\\ & & & b_n\\ a_1 & \cdots & a_n & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & b_1\\ & E_n & & \vdots\\ & & & b_n\\ 0 & \cdots & 0 & -\sum_{k=1}^n a_kb_k\end{vmatrix}=-\sum_{k=1}^n a_kb_k.$$

□

問 2

m と n は正整数で，$m \leq n$ とする．A と $A_k\,(k = 1, 2, \dots)$ は m 行 n 列の実行列であって，$k \to \infty$ のとき A_k の各成分が，対応する A の各成分に収束するものとする．さらに，A の階数が m であると仮定する．このとき，十分大きな k について，A_k の階数が m であることを証明せよ．

解答． A_k, A の第 i 列ベクトルをそれぞれ $a_i^{(k)}, a_i$ とする．仮定から $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ であって $d := \det(a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}) \neq 0$ となるものが存在する．$d_k = \det(a_{i_1}^{(k)}, \cdots, a_{i_m}^{(k)})$ とおく．A_k は A に各成分で収束するから，d_k は d に収束する．行列式は成分についての多項式だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し N があって任意の $k \geq N$ に対し $|d - d_k| < \varepsilon$ となる．$d \neq 0$ だから，ε を十分小さく取ることで $d_k \neq 0\,(k \geq N)$ と出来る．この時 $m = \operatorname{rank}(a_{i_1}^{(k)}, \cdots, a_{i_m}^{(k)}) \leq \operatorname{rank} A_k \leq m$ だから $\operatorname{rank} A_k = m$． □

問 3

次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) 実数 x に対して，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{Arctan}x+\mathrm{Arctan}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\right)$$

を求めよ．ただし，Arctan は tan の逆関数で，$-\pi/2<\mathrm{Arcran}x<\pi/2$ とする．

(ii) 定積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$$

を求めよ．ただし n は正整数とする．

解答． (i)

$$\tan\left(\arctan x+\arctan\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\right)=\frac{x+\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}}{1-x\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}}=x\left(1+\frac{x^2+1}{\varepsilon^2}\right)\overset{\varepsilon\to 0}{\to}\begin{cases}\infty & x>0\\ 0 & x=0\\ -\infty & x<0\end{cases}$$

である．これと $-\pi<\arctan x+\arctan\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}<\pi$ であること，$\arctan x+\arctan\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$ と x は同符号であることから，答えは

$$\begin{cases}\pi/2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -\pi/2 & x<0\end{cases}.$$

(ii) 求める積分を I_n とおくと

$$\begin{aligned}I_{n+2}-I_n&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(n+2)x-\sin nx}{\sin x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{2\cos(n+1)x\sin x}{\sin x}dx\\&=\int_0^{2\pi}2\cos(n+1)xdx=0.\end{aligned}$$

これと

$$I_1=\int_0^{2\pi}dx=2\pi,\quad I_2=\int_0^{2\pi}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}dx=\int_0^{2\pi}2\cos xdx=0$$

より

$$I_n=\begin{cases}2\pi & n:\text{奇数}\\ 0 & n:\text{偶数}\end{cases}$$

□

問 4

実数 $x>0$ に対して，

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\cos \pi y}{x+y}dy$$

とおく．このとき，次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) $g(x)=f(x)-\dfrac{2}{\pi^2 x(x+1)}$ とおくとき，すべての $x>2$ に対して，

$$|g(x)|\le \frac{C}{x^3}$$

となる定数 C が存在することを証明せよ．

(ii) 極限値

$$\lim_{x\to+\infty} x\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$$

を求めよ．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin \pi y}{\pi}\frac{1}{x+y}\bigg|_0^1-\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi}\frac{-1}{(x+y)^2}dy=\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi}\frac{1}{(x+y)^2}dy \\
&= \frac{-\cos \pi y}{\pi^2}\frac{1}{(x+y)^2}\bigg|_0^1-\int_0^1 \frac{-\cos \pi x}{\pi^2}\frac{-2}{(x+y)^3}dy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{(x+y)^3}dy
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \left|\frac{1}{\pi x^2(x+1)^2}-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{(x+y)^3}dy\right| \\
&= \frac{1}{\pi x^2(x+1)^2}+\frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^3}dy \\
&\le \frac{1}{\pi x^2(x+1)^2}+\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{x^3}\le \frac{1}{\pi x^3}+\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{x^3}.
\end{aligned}$$

よって $C=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}$ とすれば良い．

(ii) (i) より

$$\left|x\sum_{k=1}^{\infty} g(x+k)\right|\le x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{(x+k)^3}\le x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{(2\sqrt{xk})^3}=\frac{C}{8x^{1/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\to 0 \quad (x\to\infty).$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k) &= \lim_{x\to+\infty} x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(x+k)(x+k+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\pi^2}\frac{1}{x+1}=\frac{2}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

□

問 5

実正方行列 A に対して，非負整数列 $R(A)$ を

$$R(A) = (\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(A^2), \mathrm{rank}(A^3), \dots)$$

で定める．ただし，$\mathrm{rank}(B)$ は行列 B の階数を表す．正整数 n に対して，

$$\mathbb{S}_n = \{R(A)\,|A \text{ は } n \text{ 次実正方行列 }\}$$

とおくとき，次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) $\mathbb{S}_2$ を決定せよ．

(ii) 任意の正整数 n に対して，$\mathbb{S}_n$ は有限集合であることを証明せよ．

解答． 正則行列 P, Q に対し $\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$ だから，

$$\mathbb{S}_n = \{R(A)\,;\, A \text{ は Jordan 標準形 }\}$$

である．また，$\mathrm{rank}(A)$ を $r(A)$ と略記する．

(i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda\mu \neq 0)$ の時 $A^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & \\ & \mu^j \end{pmatrix}$ だから $R(A) = (2, 2, 2, \dots)$.

$A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0)$ の時 $A^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & \\ & 0 \end{pmatrix}$ だから $R(A) = (1, 1, 1, \dots)$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ の時 $A^j = 0\,(j \geq 2)$ だから $R(A) = (1, 0, 0, \dots)$.

$A = 0$ の時 $R(A) = (0, 0, 0, \dots)$.

よって

$$\mathbb{S}_2 = \{(2, 2, 2, \dots), (1, 1, 1, \dots), (1, 0, 0, \dots), (0, 0, 0, \dots)\}.$$

(ii)

$$\mathbb{S}_n = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \{R(A)\,;\, A = \mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_k, n_k)), \lambda_j \in \mathbb{C}\}$$

である．$S(k; n_1, \dots, n_k) = \{R(A)\,;\, A = \mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_k, n_k)), \lambda_j \in \mathbb{C}\}$ とおく．$1 \leq k \leq n, n_1 + \cdots + n_k = n$ を満たす $(k; n_1, \dots, n_k)$ は有限個だから，$S(k; n_1, \dots, n_k)$ が有限集合であることを示せば良い．

・$\lambda_1 \cdots \lambda_k \neq 0$ の時：$r(J(\lambda_i, n_i)^j) = n_i$ だから

$$r(A^j) = r(\mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_1)^j, \dots, J(\lambda_k, n_k)^j)) = \sum_{i=1}^{k} r(J(\lambda_i, n_i)^j) = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

よって $R(A)$ は $(n, n, n, \dots)$ の 1 種類のみ．

・$\lambda_1 \cdots \lambda_k = 0$ の時:$\lambda_1 \cdots = \lambda_l = 0, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k \neq 0$ として良い．$A_1 = \mathrm{diag}(J(0, n_1), \dots, J(0, n_l)), A_2 = \mathrm{diag}(J(\lambda_{l+1}, n_{l+1}), \dots, J(\lambda_k, n_k))$ とおくと $r(A^j) = r(A_1^j) + r(A_2^j)$ だから $R(A) = R(A_1) + R(A_2)$. $R(A_2)$ は λ_j によらない $\sum_{i=l+1}^{k} n_i$ が続く数列だから $\#S(k; n_1, \dots, n_k)$ に影響しない．よって $A = A_1$ の場合を示せば良い．改めて $A = \mathrm{diag}(J(0, n_1), \dots, J(0, n_k))$ とおく．$r(J(0, n_i)^j)$ は広義単調減少だから，$r(A^j) = \sum_{i=1}^{k} r(J(0, n_i)^j)$ も広義単調減少．$r(A) = n - k, r(A^n) = 0$ だから $R(A)$ の種類は $n - k \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n = 0$ を満たす $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ の個数以下．これは有限だから $R(A)$ の種類も有限．

以上から $\#S(k; n_1, \dots, n_k) < \infty$. $\square$

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 1

A, B を n 次実正方行列とする．このとき，次の二条件 (a), (b) は同値であることを示せ．

(a) n 次実正方行列 Q が存在して，

$$A = QB.$$

(b) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$Bv = 0 \quad \Longrightarrow \quad Av = 0.$$

解答． (a)$\Longrightarrow$(b): $v \in \mathbb{R}^n$ が $Bv = 0$ を満たすなら $Av = BQv = B0 = 0$.

(b)$\Longrightarrow$(a): 仮定から $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} A$ だから，$v_i, \ldots, v_i \in \mathbb{R}^n$ を $\operatorname{Ker} B$ の基底とする時，$v_{i+1}, \ldots, v_j \in \mathbb{R}^n$ をうまく選んで $v_1, \ldots, v_j$ が $\operatorname{Ker} A$ の基底になるように出来る．さらに，$v_{j+1}, \ldots, v_n$ をうまく選んで $v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるように出来る．

ここで $Bv_{i+1}, \ldots, Bv_n$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示す．$c_{i+1}Bv_{i+1} + \cdots + c_nBv_n = 0\,(c_{i+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$ とすると，$B(c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n) = 0$ だから $c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n \in \operatorname{Ker} B$. よって $c_1, \ldots, c_i \in \mathbb{R}$ があって $c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n = c_1v_1 + \cdots + c_iv_i$. ここで $v_1, \ldots, v_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だったから $c_1 = \cdots = c_n = 0$. これで示せた．

$\tilde{v}_{i+1} = Bv_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_n = Bv_n$ とおく．上で示したことから，$\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_i \in \mathbb{R}^n$ をうまく選んで $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるように出来る．この時

$$Av_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^{(k)} \tilde{v}_l$$

となる $\alpha_l^{(k)} \in \mathbb{R}$ が存在する．

$$Q = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) \left(\begin{array}{c|ccc} & \alpha_1^{(j+1)} & \cdots & \alpha_1^{(n)} \\ 0_{n \times j} & \vdots & & \vdots \\ & \alpha_n^{(j+1)} & \cdots & \alpha_n^{(n)} \end{array} \right) (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)^{-1}$$

とおけば

$$\begin{aligned} Q(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) &= (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) \left(\begin{array}{c|ccc} & \alpha_1^{(j+1)} & \cdots & \alpha_1^{(n)} \\ 0_{n \times j} & \vdots & & \vdots \\ & \alpha_n^{(j+1)} & \cdots & \alpha_n^{(n)} \end{array} \right) \\ &= \left(0, \ldots, 0, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^{(j+1)} \tilde{v}_l, \ldots, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^{(n)} \tilde{v}_l \right) \\ &= (0, \ldots, 0, Av_{j+1}, \ldots, Av_n). \end{aligned}$$

よって $Q\tilde{v}_{i+1} = \cdots = Q\tilde{v}_j = 0, Q\tilde{v}_{j+1} = Av_{j+1}, \ldots, Q\tilde{v}_n = Av_n$ なので

$$QB(v_1, \ldots, v_n) = Q(0, \ldots, 0, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_n) = (0, \ldots, 0, Av_{j+1}, \ldots, Av_n) = A(v_1, \ldots, v_n).$$

$v_1, \ldots, v_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$. よって $QB = A$. $\square$

問 2

$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx+\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$$

の具体形を求めよ．積分を用いずにできるだけ簡単な形で表すこと．

解答． 第 1 項の積分の被積分関数を $g(x,t)$ とおく．$g(x,t), \frac{\partial g}{\partial t}=-2te^{-t^2(1+x^2)}$ はともに $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上連続だから，x についての積分と t についての微分の順序が交換できて

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\int_0^1 -2te^{-t^2(1+x^2)}dx+2\int_0^t e^{-x^2}dx\cdot e^{-t^2}\\
&=-2e^{-t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds+2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx \quad (1\ \text{項目で}\ s=tx\ \text{と置換})\\
&=0.
\end{aligned}$$

よって

$$f(t)=f(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

□

問 3

A を n 次複素正方行列とする．

(i) n 次複素正則対称行列 S で，

$$Q(v,w) = {}^t vSw \quad (v, w \in \mathbb{C}^n)$$

とおいたときに，

$$Q(Av,w) = Q(v,Aw)$$

となるものがあることを示せ．ただし ${}^t v$ は v の転置を表す．

(ii) n 次複素正則行列 P を取り，PAP^{-1} が対称行列となるようにできることを示せ．

解答． (i) $Q(Av,w) = {}^t v {}^t ASw, Q(v,Aw) = {}^t vSAw$ だから，${}^t AS = SA$ となる S が存在することを示せば良い．A の Jordan 標準形を $X^{-1}AX = J := \mathrm{diag}(J(\lambda_1,n_1),\dots,J(\lambda_k,n_k))\,(X \in GL_n(\mathbb{C}))$ とすれば

$$\begin{aligned}
{}^t AS = SA &\Longleftrightarrow {}^t(XJX^{-1})S = SXJX^{-1} \Longleftrightarrow {}^t X^{-1} {}^t J {}^t XS = SXJX^{-1} \\
&\Longleftrightarrow {}^t J {}^t XSX = {}^t XSXJ \Longleftrightarrow {}^t({}^t XSXJ) = {}^t XSXJ \\
&\Longleftrightarrow {}^t XSXJ \text{ は対称} \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

である．$Y_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$ とすると

$$Y_n J(0,n) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

は対称だから $Y = \mathrm{diag}(Y_{n_1},\dots,Y_{n_k})$ とおけば YJ も対称．従って $S = {}^t X^{-1}YX^{-1}$ とおけば $(*)$ が成立し，Y が対称だから S も対称．

(ii)

$$\begin{aligned}
PAP^{-1} \text{ が対称} &\Longleftrightarrow PAP^{-1} = {}^t(PAP^{-1}) \Longleftrightarrow PAP^{-1} = {}^t P^{-1} {}^t A {}^t P \\
&\Longleftrightarrow PXJX^{-1}P^{-1} = {}^t P^{-1} {}^t(XJX^{-1}) {}^t P \\
&\Longleftrightarrow {}^t(PX)PXJ = {}^t J {}^t(PX)PX \Longleftrightarrow {}^t(PX)PXJ = {}^t({}^t(PX)PXJ) \\
&\Longleftrightarrow {}^t(PX)PXJ \text{ は対称} \quad \cdots (*)'
\end{aligned}$$

である．Y は対称だから，直交行列 Z があって ${}^t ZYZ = D := \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ と書ける．$\tilde{D} = \mathrm{diag}(\mu_1^{1/2},\dots,\mu_n^{1/2}), P = Z\tilde{D} {}^t ZX^{-1}$ とおく（$\mu_j^{1/2}$ の取り方は 2 通りあるがどちらでも良い）．$\det D = \det Y \neq 0$ より $\det \tilde{D} \neq 0$ なので $P \in GL_n(\mathbb{C})$. この時

$${}^t(PX)PX = {}^t(Z\tilde{D} {}^t Z)Z\tilde{D} {}^t Z = Z\tilde{D} {}^t ZZ\tilde{D} {}^t Z = ZD {}^t Z = Y.$$

(i) より YJ は対称だから $(*)'$ が成立することが従う．これで示された． □

問 4

α を正の実数とするとき，次の等式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{2\alpha\pi}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}.$$

解答. 左辺の積分を I, その被積分関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の特異点は $1+e^x=0$ なる点だから $x=(2n+1)\pi i\,(n\in\mathbb{Z})$. これらは 2 位の極である．$R>0$ として，4 点 $P_1,\dots,P_4$ をそれぞれ $R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R$ とする．線分 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ を順に $C_1,\dots,C_4$ とし． $C_1+\cdots+C_4$ 上で積分して

$$\int_{C_1+\cdots+C_4} f(x)dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(x), x=\pi i).$$

$R\to\infty$ の時

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} f(x)dx \to I,\\
&\int_{C_3} f(x)dx = \int_{R}^{-R} \frac{e^{i\alpha(t+2\pi i)}e^{t+2\pi i}}{(1+e^{t+2\pi i})^2}dt = -e^{-2\pi\alpha}\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\alpha t}e^t}{(1+e^t)^2}dt \to -e^{-2\pi\alpha}I,\\
&\left|\int_{C_2} f(x)dx\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\alpha(R+it)}e^{R+it}}{(1+e^{R+it})^2}idt\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{e^{-\alpha t}e^R}{(e^R-1)^2}dt = \frac{(1-e^{-2\pi\alpha})e^R}{\alpha(e^R-1)^2}\to 0,\\
&\left|\int_{C_4} f(x)dx\right| = \left|\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{i\alpha(-R+it)}e^{-R+it}}{(1+e^{-R+it})^2}idt\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{e^{-\alpha t}e^{-R}}{(1-e^{-R})^2}dt = \frac{(1-e^{-2\pi\alpha})e^{-R}}{\alpha(1-e^{-R})^2}\to 0.
\end{aligned}$$

$x=\pi i$ の近傍で

$$\begin{aligned}
1+e^x &= 1-e^{x-\pi i} = -(x-\pi i) - \frac{1}{2}(x-\pi i)^2 - \cdots\\
\therefore \frac{1}{1+e^x} &= \frac{-1}{x-\pi i}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-\pi i)+\cdots} = \frac{-1}{x-\pi i}\sum_{n\ge 0}\left(-\frac{1}{2}(x-\pi i)+\cdots\right)^n\\
&= \frac{-1}{x-\pi i}\left(1-\frac{1}{2}(x-\pi i)+\cdots\right) = \frac{-1}{x-\pi i}+\frac{1}{2}+\cdots\\
\therefore \frac{1}{(1+e^x)^2} &= \frac{1}{(x-\pi i)^2} - \frac{1}{x-\pi i} + \cdots
\end{aligned}$$

これと

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha x}e^x &= e^{(1+i\alpha)(x-\pi i)}e^{(1+i\alpha)\pi i} = -e^{-\pi\alpha}e^{(1+i\alpha)(x-\pi i)}\\
&= -e^{-\pi\alpha}(1+(1+i\alpha)(x-\pi i)+\cdots)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\alpha x}e^x}{(1+e^x)^2} &= -e^{-\pi\alpha}(1+(1+i\alpha)(x-\pi i)+\cdots)\left(\frac{1}{(x-\pi i)^2}-\frac{1}{x-\pi i}+\cdots\right)\\
&= -e^{-\pi\alpha}\left(\frac{1}{(x-\pi i)^2}+\frac{i\alpha}{x-\pi i}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

よって

$$I + 0 - e^{-2\pi\alpha}I + 0 = 2\pi i(-i\alpha e^{-\pi\alpha}) = 2\pi\alpha e^{-\pi\alpha}.$$

$$\therefore I = \frac{2\pi\alpha e^{-\pi\alpha}}{1-e^{-2\pi\alpha}} = \frac{2\pi\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}$$

□

問 5A

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数 $f(x)$ が，すべての $x \in [0,1]$ において

$$\overline{\lim_{y \to x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$$

を満たすならば， $f(1)-f(0) \leq 1$ であることを示せ．ただし，$\overline{\lim}$ は上極限を表す．

解答. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．仮定より，任意の $x \in [0,1]$ に対し $\delta(x) > 0$ があって $|y-x| < \delta(x)$ の時 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1+\varepsilon$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &\leq (1+\varepsilon)(y-x) \quad (y \in (x, x+\delta(x))) \\ f(y)-f(x) &\geq (1+\varepsilon)(y-x) \quad (y \in (x-\delta(x), x)). \end{aligned}$$

これより $0 < y < \delta(0)$ において $f(y)-(1+\varepsilon)y \leq f(0)$. よって $f(y)-(1+\varepsilon)y \leq f(0)$ が成り立つような区間 $[0,L]$ が存在する．そのような最大の $L<1$ が存在したとすると，$L < y < L+\delta(L)$ において $f(y)-(1+\varepsilon)y \leq f(L)-(1+\varepsilon)L \leq f(0)$. これは L の最大性に反する．よって任意の $y<1$ に対し $f(y)-(1+\varepsilon)y \leq f(0)$ だから，$y \nearrow 1$ として

$$\lim_{y \nearrow 1} f(y) - (1+\varepsilon) \leq f(0).$$

一方 $1-\delta(1) < y < 1$ において $f(y)-f(1) \geq (1+\varepsilon)(y-1)$ だから $y \nearrow 1$ として

$$\lim_{y \nearrow 1} f(y) - f(1) \geq 0.$$

よって $f(1) \leq \lim_{y \nearrow 1} f(y) \leq f(0)+1+\varepsilon$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意だから $f(1)-f(0) \leq 1$.

□

問 5B

実数 $r>1$ に対して $\mathbb{R}$ の部分集合 C を次のように定義する．

$$C_0=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\},$$
$$C_{n+1}=\left\{\frac{x}{r}\,\middle|\,x\in C_n\right\}\cup\left\{\frac{r-1+x}{r}\,\middle|\,x\in C_n\right\}\quad(n=0,1,2,\dots),$$
$$C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n.$$

このとき，C は無限に多くの点を含むことを示せ．

解答． $1<r<2$ の時 $C_1=(0,\frac{1}{r})\cup(\frac{r-1}{r},1)=(0,1)$ だから帰納的に $C_n=(0,1)$. よって $C=(0,1)$ だから $\#C=\infty$. 以下 $r\geq 2$ とする．まず

$$C_n=\bigcup_{\varepsilon_j^{(n)}\in\{0,1\}}\left((r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j},(r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j}+r^{-n}\right)$$

となることを帰納法で示す．ただし $n=0$ の時の $\sum$ は 0 とみなす．$n=0$ の時は自明．n で正しい時

$$\begin{aligned}C_{n+1}=&\bigcup_{\varepsilon_j^{(n)}\in\{0,1\}}\left\{\left((r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j-1},(r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j-1}+r^{-n-1}\right)\right.\\&\left.\cup\left((r-1)r^{-1}+(r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j-1},(r-1)r^{-1}+(r-1)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{(n)}r^{-j-1}+r^{-n-1}\right)\right\}\\=&\bigcup_{\varepsilon_j^{(n+1)}\in\{0,1\}}\left((r-1)\sum_{j=1}^{n+1}\varepsilon_j^{(n+1)}r^{-j},(r-1)\sum_{j=1}^{n+1}\varepsilon_j^{(n+1)}r^{-j}+r^{-n-1}\right)\end{aligned}$$

だから $n+1$ でも正しい．これで示せた．

今 $P=\{A\subset\mathbb{N};\#A=\#(\mathbb{N}\setminus A)=\infty\}$ とおき，$f:P\to\mathbb{R}$ を $f(A)=(r-1)\sum_{j\geq 1}\chi_A(j)r^{-j}$ で定める．ここで $\chi_A(j)$ は A の定義関数．$f(P)\subset C$ を示す．任意に $A\in P,n\geq 0$ を取る．$n_1,n_2>n$ なる $n_1\in A,n_2\in\mathbb{N}\setminus A$ が存在するから

$$(r-1)\sum_{j=1}^{n}\chi_A(j)r^{-j}<f(A)<(r-1)\sum_{j=1}^{n}\chi_A(j)r^{-j}+(r-1)\sum_{j>n}r^{-j}=(r-1)\sum_{j=1}^{n}\chi_A(j)r^{-j}+r^{-n}.$$

よって

$$f(A)\in\left((r-1)\sum_{j=1}^{n}\chi_A(j)r^{-j},(r-1)\sum_{j=1}^{n}\chi_A(j)r^{-j}+r^{-n}\right)\subset C_n.$$

n は任意だから $f(A)\in C$. ゆえに $f(P)\subset C$. 次に f は単射であることを示す．異なる $A,A'\in P$ に対し $k=\min\{j\,;\chi_A(j)\neq\chi_{A'}(j)\}$ とおく．$\chi_A(k)=1,\chi_{A'}(k)=0$ として良い．この時

$$\begin{aligned}f(A)-f(A')&=(r-1)\left(r^{-k}+\sum_{j>k}(\chi_A(j)-\chi_{A'}(j))r^{-j}\right)\\&>(r-1)\left(r^{-k}-\sum_{j>k}r^{-j}\right)=r^{-k}(r-2)\geq 0\end{aligned}$$

だから f は単射．よって $\#C\geq\#P$ である．任意の $k\geq 2$ に対し $\{n^k\,;n\in\mathbb{N}\}\in P$ だから $\#P=\infty$. 従って $\#C=\infty$. □

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) n 次実正方行列 A が $A^2+I=0$ を満たすとする．（ただし，I は単位行列を表す．）このとき，n は偶数であることを示せ．

(ii) 正の整数 m に対して，次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2m}}.$$

解答． (i) $0 \le |A|^2 = |A^2| = |-I| = (-1)^n$ だから n は偶数．

(ii) 積分を I_m とおく． $R>0$ を十分大として

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x\,;\, 0 \le x \le R\}, \\ C_2 &= \{x = Re^{i\theta}\,;\, 0 \le \theta \le \pi/m\}, \\ C_3 &= \{x = re^{\pi i/m}\,;\, 0 \le x \le R\} \end{aligned}$$

として $C = C_1 + C_2 + C_3$ とおく．I_m の被積分関数は C 上正則で，極のうち C が囲む領域にあるものは 1 位の極 $x = e^{\pi i/2m}$ のみ．よって

$$\int_C \frac{dx}{1+x^{2m}} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+x^{2m}}, x = e^{\pi i/2m}\right).$$

ここで $R \to \infty$ の時

$$\begin{aligned} &\int_{C_1} \frac{dx}{1+x^{2m}} \to I_m, \\ &\left|\int_{C_2} \frac{dx}{1+x^{2m}}\right| = \left|\int_0^{\pi/m} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^{2m}}\right| \le \int_0^{\pi/m} \frac{Rd\theta}{R^{2m}-1} = \frac{\pi}{m}\frac{R}{R^{2m}-1} \to 0, \\ &\int_{C_3} \frac{dx}{1+x^{2m}} = \int_R^0 \frac{e^{\pi i/m}dr}{1+(re^{\pi i/m})^{2m}} = -e^{\pi i/m}\int_0^R \frac{dr}{1+r^{2m}} \to -e^{\pi i/m} I_m \end{aligned}$$

であり，

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+x^{2m}}, x = e^{\pi i/2m}\right) = \lim_{x\to e^{\pi i/2m}} \frac{x - e^{\pi i/m}}{1+x^{2m}} = \lim_{x\to e^{\pi i/2m}} \frac{1}{2mx^{2m-1}} = -\frac{1}{2m}e^{\pi i/2m}$$

なので

$$I_m + 0 - e^{\pi i/m} I_m = 2\pi i \cdot \frac{-1}{2m} e^{\pi i/2m} = \frac{-\pi i}{m} e^{\pi i/2m}.$$

よって

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{1-e^{\pi i/m}}\frac{-\pi i}{m}e^{\pi i/2m} = \frac{1}{e^{\pi i/2m} - e^{-\pi i/2m}}\frac{\pi i}{m} \\ &= \frac{1}{2i \sin\frac{\pi}{2m}}\frac{\pi i}{m} = \frac{\frac{\pi}{2m}}{\sin\frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

□

問 2

整数 $n \geq 2$ に対して，実 $(2n-1)$ 次元線形空間 V およびその 2 次元線形部分空間の列 $W_1, \ldots, W_n$ を考える．このとき，次の条件 $(*)$ を満たす V の $(n-1)$ 次元線形部分空間 U が存在することを示せ．

$(*)$　すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $W_i \cap U \neq \{0\}$.

解答. 任意の i, j に対し $W_i \cap W_j \neq \{0\}$ とすると

$$2n - 1 = \dim V \geq \dim(W_1 + \cdots + W_n) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_n = 2n$$

で矛盾．よって $W_i \cap W_j \neq \{0\}$ となる i, j が存在する．そのような i, j を一組固定する．$v \in W_i \cap W_j$ なる $v \neq 0$ を取り，U を v で生成される V の部分空間とする．また，$k \neq i, j$ に対し $v_k \in W_k$ なる $v_k \neq 0$ を取り U の生成元に追加する．この操作で U の生成元として追加された V の元は $n-1$ 個だから $\dim U \leq n-1$ である．もし $\dim U < n-1$ なら V の元をうまく選んで U の生成元に追加すれば $\dim U = n-1$ と出来る．よって $\dim U = n-1$. この時 $v \in (W_i \cap W_j) \cap U = (W_i \cap U) \cap (W_j \cap U)$ と $v \neq 0$ より $W_i \cap U \neq \{0\}, W_j \cap U \neq \{0\}$. $k \neq i, j$ なら $v_k \in W_k \cap U$ だから $v \neq 0$ より $W_k \cap U \neq \{0\}$. よってこの U は $(*)$ を満たす． $\square$

問 3

実数 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ に対して，(i,j) 成分が

$$a_{ij} = \begin{cases} \rho_i & (i > j \text{ のとき}) \\ \rho_j & (i \leq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ を考える．条件 $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n > 0$ が成り立つとき，A は正定値であることを示せ．

解答． A の左上の $k \times k$ 行列を A_k とおく（$1 \leq k \leq n$）．A が正定値であることと，任意の $1 \leq k \leq n$ に対し $\det A_k > 0$ であることは同値であるから，$\det A_k > 0$ を帰納法で示せば良い．$k = 1$ の時は $\det A_1 = \rho_1 > 0$ だから良い．$k-1$ で正しい時，

$$\det A_k = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} & \rho_k \\ \rho_2 & \rho_2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \cdots & \cdots & \rho_{k-1} & \rho_k \\ \rho_k & \cdots & \cdots & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho_1 - \rho_k & \rho_2 - \rho_k & \cdots & \rho_{k-1} - \rho_k & 0 \\ \rho_2 - \rho_k & \rho_2 - \rho_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} - \rho_k & \cdots & \cdots & \rho_{k-1} - \rho_k & 0 \\ \rho_k & \cdots & \cdots & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}$$

（第 k 行の (-1) 倍を第 j 行に足す $(1 \leq j \leq k-1)$）

$$= (-1)^{k+k} \rho_k \begin{vmatrix} \rho_1 - \rho_k & \rho_2 - \rho_k & \cdots & \rho_{k-1} - \rho_k \\ \rho_2 - \rho_k & \rho_2 - \rho_k & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{k-1} - \rho_k & \cdots & \cdots & \rho_{k-1} - \rho_k \end{vmatrix}.$$

右辺の $(k-1) \times (k-1)$ 行列を A'_{k-1} とおくと，A'_{k-1} の (i,j) 成分は

$$\begin{cases} \rho_i - \rho_k & (i > j) \\ \rho_j - \rho_k & (i \leq j). \end{cases}$$

仮定より $\rho_1 - \rho_k > \rho_2 - \rho_k > \cdots > \rho_{k-1} - \rho_k > 0$ だから，帰納法の仮定より $\det A'_{k-1} > 0$. よって $\det A_k = \rho_k \det A'_{k-1} > 0$ で k の時も正しい．これで示された． $\square$

問 4

次の条件 (a), (b) を満たす $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 級関数 $f(x)$ を考える．

(a) $f(0) = \dfrac{df}{dx}(0) = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dx^2}(0) \neq 0.$

(b) $x \neq 0$ に対しては $f(x) > 0.$

このとき，次の積分 (i), (ii) それぞれについて収束するか発散するかを判定し，その理由を述べよ．

(i)
$$\iint_{|x_1|^2+|x_2|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2}{f(x_1) + f(x_2)}.$$

(ii)
$$\iiint_{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}.$$

解答． (a) より $f(x) = x^2 g(x)\,(g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), g(0) \neq 0)$ とおける．$x \neq 0$ の時 (b) より $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} > 0$ だから，$g \in C^\infty$ より $g(0) > 0$. よって任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $g(x) > 0$. 従って $g(x)$ の $[-1, 1]$ における最大値，最小値をそれぞれ M, m とおくと $M, m > 0$ である．

(i) 問題の積分を I_2 とおき，I_2 の積分領域を $R^{-2} \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1\,(R \geq 1)$ とした積分を $I_2(R)$ とおく．$x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_2(R) &= \iint_{R^{-2} \leq |x_1|^2+|x_2|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 g(x_1) + x_2^2 g(x_2)} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{R^{-1}}^1 \frac{r dr d\theta}{r^2\cos^2\theta g(r\cos\theta) + r^2 \sin^2\theta g(r\sin\theta)} \\
&\geq \int_0^{2\pi} \int_{R^{-1}}^1 \frac{dr d\theta}{rM(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_{R^{-1}}^1 \frac{dr d\theta}{r} \\
&= \frac{2\pi}{M} \log R \to \infty \quad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

だから $I_2 = \lim_{R\to\infty} I_2(R)$ は存在しない．

(ii) 問題の積分を I_3 とおき，I_3 の積分領域を $R^{-2} \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 \leq 1\,(R \geq 1)$ とした積分を $I_3(R)$ とおく．$x_1 = r\cos\theta\sin\varphi, x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, x_3 = r\cos\varphi$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_3(R) &= \iiint_{R^{-2} \leq |x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_1^2 g(x_1) + x_2^2 g(x_2) + x_3^2 g(x_3)} \\
&\leq \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R^{-1}}^1 \frac{r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi}{m(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi)} \\
&= \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R^{-1}}^1 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi(1 - R^{-1})}{m} \leq \frac{4\pi}{m}.
\end{aligned}$$

よって $I_3(R)$ は上に有界．また，(b) より $I_3(R)$ は単調増加．従って $\lim_{R\to\infty} I_3(R)$ は有限値に収束するので I_3 は存在する． □

問 5

次の条件 $(*)$ を満たす連続写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．

$$(*) \quad \text{すべての } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } \varphi(\varphi(x)) = -x.$$

解答． 条件を満たす φ が存在したとする．$\varphi(x) = \varphi(y)$ とすると $-x = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(\varphi(y)) = -y$ より φ は単射．この時 φ は単調増加であるか，単調減少である．実際，そうでないとすると $x < z < y$ であって $\varphi(x), \varphi(y) < \varphi(z)$ または $\varphi(x), \varphi(y) > \varphi(z)$ となるものが存在する．前者の場合，中間値の定理より，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi(x_0) = \varphi(z) - \varepsilon$ となる $x_0 \in (x, z)$ と，$\varphi(y_0) = \varphi(z) - \varepsilon$ となる $y_0 \in (z, y)$ が存在する．これは単射であることに矛盾．後者の場合も同様に矛盾．よって φ は単調．ここで $\varphi(\varphi(0)) = 0$ より $\varphi(0) = \varphi(\varphi(\varphi(0))) = -\varphi(0)$ だから $\varphi(0) = 0$. もし φ が単調増加なら，$x > 0$ の時 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ より $-x = \varphi(\varphi(x)) > \varphi(0)) = 0$ で矛盾．もし φ が単調減少なら，$x > 0$ の時 $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ より $-x = \varphi(\varphi(x)) > \varphi(0) = 0$ で矛盾．いずれにしても矛盾する． $\square$

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 1

関数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して $\delta f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ を

$$\delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

と定義する．ある整数 $n \geq 1$ に対して

$$\delta^n f = \underbrace{\delta \circ \cdots \circ \delta}_{n\text{ 個}} f = 0$$

が成り立つとき，極限

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}}$$

が存在することを示せ．

解答． まず $n \in \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{j=0}^{x} j^n$ は x についての $(n+1)$ 次多項式であることを n についての帰納法で示す．$n=0$ の時は明らか．$n-1$ 以下で正しいとする．$(j+1)^{n+1} - j^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}j^k$ を $j=0,1,\ldots,x$ について足して

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1} &= \sum_{j=0}^{x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}j^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\sum_{j=0}^{x}j^k \\ &= (n+1)\sum_{j=0}^{x}j^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\sum_{j=0}^{x}j^k \\ \therefore (n+1)\sum_{j=0}^{x}j^n &= (x+1)^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\sum_{j=0}^{x}j^k\end{aligned}$$

右辺の第 1 項は x についての $(n+1)$ 次多項式，第 2 項は帰納法の仮定より x についての高々 n 次多項式の和だから，左辺は x についての $(n+1)$ 次多項式．よって n でも正しい．これで示せた．

問題に戻る．$1 \leq k \leq n$ に対し，$\delta^{n-k}f$ は x についての $(k-1)$ 次式であることを帰納法で示す．$k=1$ の時は $\delta^{n-1}f(x+1) - \delta^{n-1}f(x) = \delta^n f(x) = 0$ だから $\delta^{n-1}f$ は定数関数となり良い．k で正しい時，$\delta^{n-k}f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\delta^{n-k-1}f(x) &= \delta^{n-k-1}f(0) + \sum_{j=0}^{x-1}(\delta^{n-k-1}f(j+1) - \delta^{n-k-1}f(j)) \\ &= \delta^{n-k-1}f(0) + \sum_{j=0}^{x-1}\delta^{n-k}f(j) \\ &= \delta^{n-k-1}f(0) + \sum_{l=0}^{k-1}c_l\sum_{j=0}^{x-1}j^l.\end{aligned}$$

最初に示したことから，右辺は x についての k 次多項式だから，$k+1$ でも正しい．これで示せた．特に $k=n$ として f は $(n-1)$ 次多項式だから，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}$ は存在する． □

問 2

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内に，原点を端点とする 5 本の半直線が与えられているとする．このうちの 2 本を選び，それらが原点において成す角が高々 90° になるようにできることを示せ．

解答. 半直線と S^2 の交点を $P_i(x_i, y_i, z_i)\,(1 \le i \le 5)$ とする．適当に回転させて $P_1(-1, 0, 0)$ として良い．P_i が $x \le 0$ にあれば $\cos\angle P_1OP_i = -x_i \ge 0$ だから半直線 OP_1 と OP_i が条件を満たす．よって $P_2, \ldots, P_5$ は $x > 0$ にあるとして良い．適当に回転させて $P_2(\cos\theta, \sin\theta, 0)\,(0 \le \theta < \pi/2)$ として良い．$\theta = 0$ なら $\cos\angle P_2OP_i = x_i > 0\,(i = 3, 4, 5)$ だから OP_2 と OP_i が条件を満たす．以下 $0 < \theta < \pi/2$ とする．もし $x_i \cos\theta + y_i \sin\theta \ge 0$ なら $\cos\angle P_2OP_i \ge 0$ だから OP_2 と OP_i が条件を満たす．よって P_3, P_4, P_5 が $\{x > 0\} \cap \{x\cos\theta + y\sin\theta < 0\} = \{x > 0\} \cap \{y < -x\cot\theta\}$ にある時を考えれば良い．

$$T_\pm = \{(x, y, z) \in S^2\,;\, x > 0, y < -x\cot\theta, \pm z \ge 0\}$$

とおく．$T_\pm$ のうちどちらかは P_3, P_4, P_5 のうち 2 点を含む．$P_i, P_j \in T_+$ の時は

$$\cos\angle P_iOP_j = x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j > x_ix_j + x_ix_j\cot^2\theta = x_ix_j(1 + \cot^2\theta) > 0$$

だから OP_i と OP_j が条件を満たす．$P_i, P_j \in T_-$ の時も同様．これで示された． □

問 3

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ で定義された関数

$$\frac{\sin x}{x}$$

について次の問に答えよ．

(i) 次の関係を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 f(sx)ds$$

(ii) x_0 を 0 でない実数とし，$\dfrac{\sin x}{x}$ の $x = x_0$ における Taylor 展開を

$$\frac{\sin x}{x} = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

とするとき

$$|a_n| \le \frac{1}{(n+1)!} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を示せ．

解答． (i) $sx = t$ と置換すれば

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 f(sx)ds = \int_0^x f(t)\frac{dt}{x}. \qquad \therefore \int_0^x f(t)dt = \sin x$$

これを微分して $f(x) = \cos x$.

(ii)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^1 \cos(sx)ds\bigg|_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \cos(sx)ds\bigg|_{x=x_0} \end{aligned}$$

である．ここで

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \cos(sx) = s^n \times (\pm\sin(sx) \text{ or } \pm\cos(sx))$$

だから

$$|a_n| \le \frac{1}{n!}\int_0^1 s^n ds = \frac{1}{(n+1)!}.$$

□

問 4

次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh(\pi x)} e^{-x^2} dx$$

解答． 積分を I とおく．

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{\cosh(\pi x)} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x^2+ix}}{\cosh(\pi x)} dx$$

である．

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+ix}}{\cosh(\pi x)}, \quad J = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

とおく．$\cosh(\pi x) = 0$ となるのは $e^{2\pi x} = -1$, すなわち $x = (k+1/2)i\,(k \in \mathbb{Z})$. よって $f(x)$ の特異点はこれらのみで，全て 1 位の極.

$R > 0$ を十分大きく取り，4 点 $P_1, \ldots, P_4$ をそれぞれ $R, R+i, -R+i, -R$ とする．線分 $C_1, \ldots, C_4$ を順に線分 $P_4P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$ で定めると

$$\int_{C_1+\cdots+C_4} f(x)dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f(x), x = \frac{i}{2}\right).$$

ここで

$$f(x+i) = \frac{e^{-(x+i)^2+i(x+i)}}{\cosh(\pi(x+i))} = \frac{e^{-x^2-ix}}{-\cosh(\pi x)} = -f(-x)$$

だから $R \to \infty$ の時

$$\int_{C_3} f(x)dx = \int_R^{-R} f(t+i)dt = \int_R^{-R} -f(-t)dt = \int_{-R}^R f(t)dt \to J.$$

また，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} f(x)dx\right| &= \left|\int_0^1 f(R+it)dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{-(R+it)^2+i(R+it)}}{\cosh(\pi(R+it))}dt\right| \\
&\le \int_0^1 \frac{2\exp(-R^2+t^2-t)}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}}dt \le \int_0^1 \frac{2\exp(-R^2)}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}}dt = \frac{2\exp(-R^2)}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}} \to 0, \\
\left|\int_{C_4} f(x)dx\right| &= \left|\int_1^0 f(-R+it)dt\right| = \left|\int_1^0 \frac{e^{-(-R+it)^2+i(-R+it)}}{\cosh(\pi(-R+it))}dt\right| \\
&\le \int_0^1 \frac{2\exp(-R^2+t^2-t)}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}}dt \to 0, \\
\mathrm{Res}\left(f(x), x = \frac{i}{2}\right) &= \lim_{x\to i/2} \frac{x-i/2}{\cosh(\pi x)} e^{-x^2+ix} = \lim_{x\to i/2} \frac{1}{\pi\sinh(\pi x)} \exp(-(i/2)^2 + i(i/2)) \\
&= \frac{e^{-1/4}}{\pi \sinh\frac{\pi i}{2}} = \frac{e^{-1/4}}{\pi i}
\end{aligned}$$

だから

$$J + 0 + J + 0 = 2\pi i \frac{e^{-1/4}}{\pi i} \qquad \therefore J = e^{-1/4}$$

よって

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,J = \frac{1}{2}e^{-1/4}.$$

□

問 5A

$\theta \in \mathbb{R}$ を定数として，

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおき，帰納的に

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n \cos\theta & -A_n \sin\theta \\ A_n \sin\theta & A_n \cos\theta \end{pmatrix}$$

により 2^n 次正方行列 A_n を定める．このとき A_n の固有値を重複度も込めて求めよ．ただし，$\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ と仮定する．

解答． A_n の固有値は $e^{i(n-2k)\theta}\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ で重複度は $\binom{n}{k}$ であることを帰納法で示す．$n = 1$ の時 A_1 の固有多項式は $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$ だから $\lambda = e^{\pm i\theta}$．よって $n = 1$ の時は正しい．n で正しいとする．

$$\begin{aligned}
|A_{n+1} - \lambda I| &= \begin{vmatrix} A_n \cos\theta - \lambda I & -A_n \sin\theta \\ A_n \sin\theta & A_n \cos\theta - \lambda I \end{vmatrix} \\
&= |A_n \cos\theta - \lambda I + iA_n \sin\theta||A_n \cos\theta - \lambda I - iA_n \sin\theta| \\
&= |e^{i\theta} A_n - \lambda I||e^{-i\theta} A_n - \lambda I| \\
&= |A_n - \lambda e^{i\theta} I||A_n - \lambda e^{-i\theta} I|
\end{aligned}$$

であるから，A_{n+1} の固有値は A_n の固有値の $e^{\pm i\theta}$ 倍である．ここで異なる $k, k' \in \mathbb{Z}$ に対し $e^{ik\theta} \neq e^{ik'\theta}$ である．実際，$e^{ik\theta} = e^{ik'\theta}$ とすると，$(k-k')\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ だから $\frac{\theta}{\pi} \in \frac{2}{k-k'}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ となって仮定に反する．よって $e^{i\theta}$ 倍する方からは，相異なる $(n+1)$ 種類の固有値 $e^{i(n-2k+1)\theta}\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ が重複度 $\binom{n}{k}$ で得られる．$e^{-i\theta}$ 倍する方からは，相異なる $(n+1)$ 種類の固有値 $e^{i(n-2k-1)\theta} = e^{i(n+1-2(k+1))\theta}\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ が重複度 $\binom{n}{k}$ で，すなわち $e^{i(n+1-2k)\theta}\,(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ が重複度 $\binom{n}{k-1}$ で得られる．以上から固有値は $e^{i(n+1-2k)\theta}\,(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ で，重複度は $k = 0, n+1$ の時 1．$k = 1, \ldots, n$ の時 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$．よって $n+1$ でも正しい．これで示された． $\square$

問 5B

集合 X, Y と二つの単射 $f : X \to Y, g : Y \to X$ が与えられたとき，次の条件を満たす全単射 $h : X \to Y$ が存在することを証明せよ．

$h(x) = y$ ならば，$f(x) = y$ または $g(y) = x$ となる．

解答． $f(X) = Y$ なら f は全単射だから $h = f$ とすればよい．以下 $Y \setminus f(X) \neq \emptyset$ とする．$Y_0 = Y \setminus f(X)$ とし，$X_n, Y_n (n \geq 1)$ を

$$X_n = g(Y_{n-1}), \quad Y_n = f(X_n)$$

で定める．さらに

$$X_+ = \bigcup_{n \geq 1} X_n, \quad Y_+ = \bigcup_{n \geq 0} Y_n, \quad X_- = X \setminus X_+, \quad Y_- = Y \setminus Y_+$$

とおく．この時

$$g(Y_+) = g\left(\bigcup_{n \geq 0} Y_n\right) = \bigcup_{n \geq 0} g(Y_n) = \bigcup_{n \geq 0} X_{n+1} = X_+,$$
$$f(X_+) = f\left(\bigcup_{n \geq 1} X_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} f(X_n) = \bigcup_{n \geq 1} Y_n.$$

また，f の単射性より

$$f(X) = f((X \setminus X_+) \cup X_+) = f(X \setminus X_+) \cup f(X_+) = f(X \setminus X_+) \sqcup f(X_+)$$

であるから，$f(X \setminus X_+) = f(X) \setminus f(X_+)$. よって

$$\begin{aligned} f(X_-) &= f(X \setminus X_+) = f(X) \setminus f(X_+) \\ &= (Y \setminus Y_0) \setminus \bigcup_{n \geq 1} Y_n = Y \setminus \bigcup_{n \geq 0} Y_n \\ &= Y_-. \end{aligned}$$

以上から $g|_{Y_+} : Y_+ \to X_+$, $f|_{X_-} : X_- \to Y_-$ はともに全単射．そこで $h : X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f|_{X-}(x) & x \in X_- \\ (g|_{Y_+})^{-1}(x) & x \in X_+ \end{cases}$$

と定めれば，$h(x) = y$ は $x \in X_-$ の時 $f(x) = y$, $x \in X_+$ の時 $g(y) = x$ となるから示された．$\square$

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii), (iii) の問に答えよ．

(i) 実関数 $f(x) = e^x \sin x$ の n 階導関数を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(ii) 正の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}.$$

(iii) $\gamma_i\,(i = 1, 2, \cdots, N)$ を相異なる実数とする．実数 $a_i\,(i = 1, 2, \cdots, N)$ で，任意の実数 x に対し

$$\sum_{i=1}^{N} a_i e^{\gamma_i x} = 0$$

となるものは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$ に限ることを示せ．

解答． (i)

$$f(x) = e^x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}}{2i}$$

だから

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2i}((1+i)^n e^{(1+i)x} - (1-i)^n e^{(1-i)x}) \\
&= \frac{1}{2i}((\sqrt{2}e^{\pi i/4})^n e^{(1+i)x} - (\sqrt{2}e^{-\pi i/4})^n e^{(1-i)x}) \\
&= \frac{2^{n/2}}{2i} e^x \left(e^{i\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)} - e^{-i\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)}\right) \\
&= 2^{n/2} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{4} + x\right).
\end{aligned}$$

(ii) $f(x) = \log(a_1^x + \cdots + a_n^x)$ とおくと，$f(0) = \log n$ だから

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x} &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&\overset{x\to 0}{\to} f'(0) = \left.\frac{a_1^x \log a_1 + \cdots + a_n^x \log a_n}{a_1^x + \cdots + a_n^x}\right|_{x=0} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log a_k = \log\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

よって答えは $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$.

(iii) $f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{\gamma_i x}$ とおく．$f(x) \equiv 0$ だから，$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \gamma_i^k e^{\gamma_i x} \equiv 0$ である．特に $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(N-1)}(0) = 0$ だから，

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_N \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1^{N-1} & \cdots & \gamma_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = 0.$$

左辺の $N \times N$ 行列の行列式は $\prod_{1\le i<j\le N} (\gamma_j - \gamma_i) \neq 0$ だから $a_1 = \cdots = a_N = 0$. □

問 2

複素 n 次正方行列 A, B に対し

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2 + \sqrt{-1}(AB - BA))$$

が成り立つことを示せ.

解答.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A - iB & iA + B \\ -B & A \end{vmatrix} \quad (\text{第 } (k+n) \text{ 行の } i \text{ 倍を第 } k \text{ 行に足す } (1 \leq k \leq n)) \\
&= \begin{vmatrix} A - iB & 0 \\ -B & A + iB \end{vmatrix} \quad (\text{第 } k \text{ 列の } (-i) \text{ 倍を第 } (k+n) \text{ 列に足す } (1 \leq k \leq n)) \\
&= |A - iB||A + iB| \\
&= |(A - iB)(A + iB)| \\
&= |A^2 + B^2 + i(AB - BA)|.
\end{aligned}$$

□

問 3

正の整数 m に対し

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2m}}$$

とおく．

(i) 積分 I_m の値を求めよ．

(ii) 極限値 $\lim_{m\to\infty} I_m$ を求めよ．

解答． (i)

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}dx$$

である．この被積分関数の特異点は $x^{2(m+1)}-1=0$ かつ $x^2-1\neq 0$ を満たす点であるから，$x=\zeta^k\,(k=1,\dots,m,m+2,\dots,2m+1)$ である．ただし $\zeta=\exp\left(\frac{\pi i}{m+1}\right)$. これらは全て 1 位の極である．$R>0$ を十分大きく取り，C_1 を線分 $[-R,R], C_2$ を上半平面にある $(R,0)$ から $(-R,0)$ への円弧とする．C_1+C_2 上で積分して

$$\int_{C_1+C_2} \frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}, x=\zeta^k\right).$$

$R\to\infty$ の時

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1}\frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}dx \to I_m,\\
&\left|\int_{C_2}\frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}dx\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{R^2e^{2i\theta}-1}{R^{2(m+1)}e^{2(m+1)i\theta}-1}iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi}\frac{R^2+1}{R^{2(m+1)}-1}Rd\theta\\
&\qquad = \frac{\pi R(R^2+1)}{R^{2(m+1)}-1}\to 0.
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}, x=\zeta^k\right) &= \lim_{x\to\zeta^k}\frac{x^2-1}{x^{2(m+1)}-1}(x-\zeta^k) = \lim_{x\to\zeta^k}\frac{x-\zeta^k}{x^{2(m+1)}-1}(x^2-1)\\
&= \lim_{x\to\zeta^k}\frac{1}{2(m+1)x^{2(m+1)-1}}(\zeta^{2k}-1) = \frac{\zeta^k}{2(m+1)}(\zeta^{2k}-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}(\zeta^{3k}-\zeta^k) &= \frac{\zeta^3-\zeta^{3(m+1)}}{1-\zeta^3} - \frac{\zeta-\zeta^{m+1}}{1-\zeta} = \frac{\zeta^3+1}{1-\zeta^3} - \frac{\zeta+1}{1-\zeta}\\
&= \frac{2\zeta(\zeta^2-1)}{(\zeta^3-1)(\zeta-1)} = \frac{2\zeta(\zeta+1)}{\zeta^3-1} = \frac{2(\zeta^{1/2}+\zeta^{-1/2})}{\zeta^{3/2}-\zeta^{-3/2}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{2(m+1)}}{i\sin\frac{3\pi}{2(m+1)}}
\end{aligned}$$

だから

$$I_m = 2\pi i\frac{1}{2(m+1)}\frac{2\cos\frac{\pi}{2(m+1)}}{i\sin\frac{3\pi}{2(m+1)}} = \frac{2\pi}{m+1}\frac{\cos\frac{\pi}{2(m+1)}}{\sin\frac{3\pi}{2(m+1)}}.$$

(ii)

$$\lim_{m\to\infty} I_m = \lim_{m\to\infty}\frac{4}{3}\frac{\frac{3\pi}{2(m+1)}}{\sin\frac{3\pi}{2(m+1)}}\cos\frac{\pi}{2(m+1)} = \frac{4}{3}$$

□

問 4

複素 n 次正方行列 A に対し，複素 n 次正方行列 X で A と可換 $(AX = XA)$ なもの全体のなす複素ベクトル空間を V とする．このとき，V の次元は n 以上であることを証明せよ．

解答． $P \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $Z(P) = \{X \in M_n(\mathbb{C})\,;\, PX = XP\}$ とおく．A の Jordan 標準形を $Q^{-1}AQ = D := \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \ldots, J(\lambda_k, n_k))$ とする．$X_j \in Z(J(\lambda_j, n_j))$ を取り $X = Q \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)Q^{-1}$ とすると

$$\begin{aligned} AX &= QDQ^{-1}Q \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)Q^{-1} \\ &= Q \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1)X_1, \ldots, J(\lambda_k, n_k)X_k)Q^{-1} \\ &= Q \operatorname{diag}(X_1 J(\lambda_1, n_1), \ldots, X_k J(\lambda_k, n_k))Q^{-1} \\ &= Q \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)Q^{-1}QDQ^{-1} \\ &= XA \end{aligned}$$

だから

$$\{Q \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)Q^{-1}\,;\, X_j \in Z(J(\lambda_j, n_j))\} \subset Z(A).$$

よって

$$\begin{aligned} \dim Z(A) &\geq \dim\{Q \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)Q^{-1}\,;\, X_j \in Z(J(\lambda_j, n_j))\} \\ &= \dim\{\operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_k)\,;\, X_j \in Z(J(\lambda_j, n_j))\} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \dim Z(J(\lambda_j, n_j)) \end{aligned}$$

だから，任意の $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対し $\dim Z(J(\lambda, n)) \geq n$ を示せば十分である．$J(\lambda, n) = \lambda I + J(0, n)$ だから $J(\lambda, n)$ は $J(0, n)^j$ $(j \in \mathbb{N})$ と可換．$I, J(0, n), \ldots, J(0, n)^{n-1}$ はいずれも零行列でなく，$\mathbb{C}$ 上一次独立であるから

$$\dim Z(J(\lambda, n)) \geq \dim \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} c_j J(0, n)^j \,;\, c_j \in \mathbb{C} \right\} = n.$$

これで示された．　□

問 5

n を正の整数とし，0 でない複素数 α に対して α の n 乗根を $\beta_1, \cdots, \beta_n$ とする．このとき，複素変数 z に関する次の恒等式を示せ．

$$\frac{1}{1-\alpha z^n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\beta_j z}.$$

解答． $f(z) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1-\alpha z^n}{1-\beta_j z}$ とおく．$f(z) \equiv 1$ を示せば良い．$1-\alpha(\beta_j^{-1})^n = 1-\alpha\cdot\alpha^{-1} = 0$ だから，$1-\alpha z^n$ は $z=\beta_j^{-1}$ を根に持つ．よって $\dfrac{1-\alpha z^n}{1-\beta_j z}$ は $(n-1)$ 次多項式．ゆえに $f(z)$ もそう．従って相異なる n 個の点 $z=\beta_k^{-1}$ において $f(z)=1$ となることを示せばよい．

$$\lim_{z\to\beta_k^{-1}}\frac{1-\alpha z^n}{1-\beta_k z} = \lim_{z\to\beta_k^{-1}}\frac{-n\alpha z^{n-1}}{-\beta_k} = n\alpha\beta_k^{-n} = n,$$

$j \neq k$ の時

$$\lim_{z\to\beta_k^{-1}}\frac{1-\alpha z^n}{1-\beta_j z} = \frac{1-\alpha\beta_k^{-n}}{1-\beta_j\beta_k^{-1}} = \frac{1-\alpha\cdot\alpha^{-1}}{1-\beta_j\beta_k^{-1}} = 0$$

だから

$$f(\beta_k^{-1}) = \lim_{z\to\beta_k^{-1}}\frac{1}{n}\left(\frac{1-\alpha z^n}{1-\beta_k z} + \sum_{j\neq k}\frac{1-\alpha z^n}{1-\beta_j z}\right) = \frac{1}{n}(n+0) = 1.$$

これで示された． □

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii) の問に答えよ.

(i) 次の実関数の $x = 0$ におけるテイラー展開を x^3 の項まで計算せよ.（たとえば $\exp(x)$ ならば $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.）

$$(A)\ \sqrt{1+2x+3x^2} \qquad (B)\ (1+x)^{\frac{1}{x}}\ (\text{ただし } x=0 \text{ での値は } \lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ で定義する.})$$

(ii) 次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

ここで，$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$.

解答. (i)(A) $\sqrt{1+2x+3x^2} = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ とすると

$$\begin{aligned}1+2x+3x^2 &= (1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2 \\ &= 1 + 2a_1x + (2a_2+a_1^2)x^2 + 2(a_3+a_1a_2)x^3 + \cdots.\end{aligned}$$

係数比較して $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$. よって $\sqrt{1+2x+3x^2} = 1 + x + x^2 - x^3 + \cdots$.

(B) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ とおく.

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) \\ &= e\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right)^n \\ &= e\left[1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{8}x^3 + \cdots\right) + \cdots\right] \\ &= e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \cdots.\end{aligned}$$

(ii) 積分を I とおく．$x = r\cos\theta\sin\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\varphi$ と置換すると

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi \\ &= 4\pi\int_0^1\frac{r^2dr}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt \quad (r = \sin t \text{ と置換}) \\ &= 4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt = 2\pi\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt \\ &= \pi^2.\end{aligned}$$

□

問 2

$n \geq 2$ を自然数，x を実数とする．n 次正方行列 $A = (x^{ij} - 1)_{1 \leq i,j \leq n}$ の行列式 $\det A$ について

$$\det A = (x-1)(x^2-1)\cdots(x^n-1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x^j - x^i)$$

を示せ．

解答.

$$|A| = \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 & \cdots & x^{n-1}+\cdots+x+1 \\ 1 & x^2+1 & x^4+x^2+1 & \cdots & x^{2(n-1)}+\cdots+x^2+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^n+1 & x^{2n}+x^n+1 & \cdots & x^{n(n-1)}+\cdots+x^n+1 \end{vmatrix}$$

(第 i 行から $x^i - 1$ をくくりだす $(1 \leq i \leq n)$)

$$= \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2+x & \cdots & x^{n-1}+\cdots+x \\ 1 & x^2 & x^4+x^2 & \cdots & x^{2(n-1)}+\cdots+x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^n & x^{2n}+x^n & \cdots & x^{n(n-1)}+\cdots+x^n \end{vmatrix}$$

(第 1 列の (-1) 倍を 第 $2, \ldots, n$ 列に足す)

$$= \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}+\cdots+x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 & \cdots & x^{2(n-1)}+\cdots+x^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^n & x^{2n} & \cdots & x^{n(n-1)}+\cdots+x^{2n} \end{vmatrix}$$

(第 2 列の (-1) 倍を 第 $3, \ldots, n$ 列に足す)

$$= \cdots = \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & x^2 & x^4 & \cdots & x^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^n & x^{2n} & \cdots & x^{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x^i - 1) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x^j - x^i)$$

□

問 3

正の実数列 $\lambda_n\,(n=1,2,\cdots)$ に対して，2 つの級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(\lambda_n x),\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\exp(\lambda_n x)$$

を考える．今，$a\in\mathbb{R}$ とし，$f(a)<\infty$ であると仮定する．

(i) $x<a$ のとき，$f(x),g(x)$ ともに収束することを示せ．

(ii) $x<a$ となる全ての x において $f(x)$ は微分可能であって，$f'(x)=g(x)$ となることを示せ．

解答． (i) $x<a$ を任意に固定する．$\lambda_n>0$ より

$$|f(x)|=\sum_{n\geq 1}\exp(\lambda_n x)<\sum_{n\geq 1}\exp(\lambda_n a)=f(a)<\infty$$

だから $f(x)$ は収束する．$f(a)<\infty$ から $\lim_{n\to\infty}\exp(\lambda_n a)=0$ であるが，もし $a\geq 0$ なら $\lambda_n>0$ より $\exp(\lambda_n a)\geq 1$ となり不適なので $a<0$. 再び $\lim_{n\to\infty}\exp(\lambda_n a)=0$ より $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. これと $\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ より，N があって任意の $n>N$ に対し $\frac{\log\lambda_n}{\lambda_n}<a-x$, すなわち $\lambda_n\exp(\lambda_n x)<\exp(\lambda_n a)$ だから

$$\begin{aligned}|g(x)|&=\sum_{n\leq N}\lambda_n\exp(\lambda_n x)+\sum_{n>N}\lambda_n\exp(\lambda_n x)<\sum_{n\leq N}\lambda_n\exp(\lambda_n x)+\sum_{n>N}\exp(\lambda_n a)\\&<\sum_{n\leq N}\lambda_n\exp(\lambda_n x)+f(a)<\infty.\end{aligned}$$

よって $g(x)$ も収束する．

(ii) $h(x)=\sum_{n\geq 1}\lambda_n^2\exp(\lambda_n x)$ とおく．任意に $x<a$ を固定すると (i) と同様，十分大きな任意の n に対し $\frac{\log\lambda_n}{\lambda_n}<\frac{a-x}{2}$, すなわち $\lambda_n^2\exp(\lambda_n x)<\exp(\lambda_n a)$. よって $g(x)$ と同様に $h(x)$ は $x<a$ において収束する．また，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し

$$|e^t-1-t|=\left|\sum_{n\geq 2}\frac{t^n}{n!}\right|\leq\sum_{n\geq 2}\frac{|t|^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{|t|^{n+2}}{(n+2)!}\leq\sum_{n\geq 0}\frac{|t|^{n+2}}{n!}=|t|^2e^{|t|}$$

である．よって $x<a$ を任意に固定し，$|\varepsilon|<a-x$ なる ε を任意に取れば

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-g(x)\right|&\leq\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\exp(\lambda_n\varepsilon)-1}{\varepsilon}-\lambda_n\right|\exp(\lambda_n x)\\&\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|\varepsilon|}(\lambda_n|\varepsilon|)^2\exp(\lambda_n|\varepsilon|)\exp(\lambda_n x)\\&=|\varepsilon|h(|\varepsilon|+x)\to 0\cdot h(x)=0\quad(\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

であるから示された． □

問 4

V を n 次元実ベクトル空間とする $(n > 0)$．$f : V \to V$ は V 上の線形変換で，V の任意の $(n-1)$ 次元部分ベクトル空間 W に対し $f(W) \subseteq W$ をみたしているものとする．

(i) $n = 2$ のとき，f は恒等変換のスカラー倍であることを示せ．

(ii) n が一般のときも，f は恒等変換のスカラー倍であることを示せ．

解答. V の基底を $e_1, \ldots, e_n$ とし，これについての f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とする．

(i) W を e_1 で張られる部分空間とすれば $f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \in W$ より $a_{21} = 0$. 同様に e_2 で張られる部分空間を考えて $a_{12} = 0$. W を $e_1 + e_2$ で張られる部分空間とすれば，$f(e_1+e_2) = a_{11}e_1 + a_{22}e_2 \in W$ より $a_{11}e_1 + a_{22}e_2 = c(e_1 + e_2)$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在する．e_1, e_2 は一次独立だから $a_{11} = a_{22} = c$. よって A は単位行列のスカラー倍，つまり f は恒等変換のスカラー倍であることが必要だが，逆にこの時条件を満たすことは明らか.

(ii) W を $e_j\,(j \neq i)$ で張られる部分空間とすれば，$j \neq i$ の時 $f(e_j) = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n \in W$ より $a_{ij} = 0$. よって A は対角行列である．以下 $a_i = a_{ii}$ とおく．$e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n$ で張られる部分空間を W とする．$f(e_1 + e_2) = a_1e_1 + a_2e_2 \in W$ なので，$c_k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} a_1e_1 + a_2e_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k(e_k + e_{k+1}) \\ &= c_1e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + \cdots + (c_{n-2} + c_{n-1})e_{n-1} + c_{n-1}e_n \end{aligned}$$

と書ける．これより $a_1 = c_1, a_2 = c_1 + c_2, c_2 + c_3 = \cdots = c_{n-2} + c_{n-1} = c_{n-1} = 0$ だから $c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0, a_1 = a_2 = c_1$. 同様に $f(e_2 + e_3), \ldots, f(e_{n-1} + e_n)$ を考えて $a_2 = \cdots = a_n$. よって A は単位行列のスカラー倍，つまり f は恒等変換のスカラー倍であることが必要だが，逆にこの時条件を満たすことは明らか. $\square$

問 5

空でない集合 X について，次の性質をみたす写像 $h : X \times X \to X$ を考える：

任意の写像 $f : X \to X$ と任意の $x, y \in X$ に対して

$$f(h(x,y)) = h(f(x), f(y))$$

が成り立つ．

以下の問に答えよ．

(i) 任意の $x \in X$ に対して $h(x,x) = x$ を示せ．

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) \in \{x, y\}$ を示せ．

(iii) 「任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) = x$」かまたは「任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) = y$」のいずれかが成り立つことを示せ．

解答． (i) $x_0 \in X$ を任意に取り $f : X \to X$ を $f(x) = x_0$ で定めると，

$$h(x_0, x_0) = h(f(x_0), f(x_0)) = f(h(x_0, x_0)) = x_0.$$

x_0 は任意だから $h(x,x) = x$.

(ii) $\#X = 1$ または $x = y$ のときは (i) から成り立つ．以下 $\#X \geq 2$ とし，異なる $x, y \in X$ に対し $h(x,y) \in \{x, y\}$ となることを示す．異なる $x_0, y_0 \in X$ を任意に取り，$f : X \to X$ を

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & (x = x_0) \\ y_0 & (x \neq x_0) \end{cases}$$

で定めると

$$h(x_0, y_0) = h(f(x_0), f(y_0)) = f(h(x_0, y_0)) \in \{x_0, y_0\}.$$

x_0, y_0 は任意だから $h(x,y) \in \{x, y\}$.

(iii) $\#X = 1$ の時は (i) より成り立つ．以下 $\#X \geq 2$ とする．

$$X_1 = \{(x,y) \in X \times X \,;\, x \neq y, h(x,y) = x\},$$
$$X_2 = \{(x,y) \in X \times X \,;\, x \neq y, h(x,y) = y\}$$

とおく．$X_1 = \emptyset$ または $X_2 = \emptyset$ となることを示せばよい．$X_1 \neq \emptyset$ かつ $X_2 \neq \emptyset$ とすると，$(x_1, y_1) \in X_1, (x_2, y_2) \in X_2$ が取れる．$f : X \to X$ を

$$f(x) = \begin{cases} x_2 & (x = x_1) \\ y_2 & (x = y_1) \\ x & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定めると，$x_1 \neq y_1$ より f は well-defined である．この時

$$y_2 = h(x_2, y_2) = h(f(x_1), f(y_1)) = f(h(x_1, y_1)) = f(x_1) = x_2$$

となるが，これは $(x_2, y_2) \in X_2$ に矛盾． □

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii) の問に答えよ．

(i) α, β は正の実数とする．無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\beta}$$

の各々に対して，それが収束する α, β の範囲を求め，その理由を述べよ．

(ii) 定積分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$$

を計算せよ．

解答． (i) $\frac{1}{x^\alpha}$ は $x > 0$ において単調減少だから

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}. \qquad \therefore \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

よって問題の無限級数が収束することと $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が収束することは同値．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^\infty = \begin{cases} \infty & (\alpha \leq 1) \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & (\alpha > 1) \end{cases}$$

だから，収束するのは $\alpha > 1$ のときに限る．同様に $\frac{1}{x(\log x)^\beta}$ は $x > 0$ において単調減少だから

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x(\log x)^\beta} < \frac{1}{n(\log n)^\beta} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x(\log x)^\beta}.$$
$$\therefore \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\beta} < \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\beta} < \frac{1}{2(\log 2)^\beta} + \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\beta}$$

よって問題の無限級数が収束することと $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\beta}$ が収束することは同値．

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\beta} = \begin{cases} \log\log x|_2^\infty = \infty & (\beta = 1) \\ \left.\dfrac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_2^\infty = \begin{cases} \infty & (\beta < 1) \\ \dfrac{1}{(\beta-1)(\log 2)^{\beta-1}} & (\beta > 1) \end{cases} \end{cases}$$

だから，収束するのは $\beta > 1$ のときに限る．

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta &= \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} d\theta = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \mathrm{Re}\oint_{|z|=1} e^z \frac{dz}{iz} \qquad (z = e^{i\theta} \text{ と置換}) \\ &= \mathrm{Re}(2\pi e^z|_{z=0}) = 2\pi \end{aligned}$$

□

問 2

次の (i), (ii) の問に答えよ．

(i) 実 2 次正方行列 A, B が $AB = -BA$ をみたしているとする．このとき，実数 r が存在して，$(AB)^2 = rI$ が成り立つことを示せ．ただし，I は 2 次単位行列を表す．

(ii) n 次以下の 1 変数実係数多項式 $f(x)$ 全体のなす実線形空間を V_n とする．このとき，$f(x)$ に対して $f(x) + f'(x)$ を対応させる V_n の線形変換は可逆であることを示せ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す．

解答． (i) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(-BA) = \mathrm{tr}(-AB) = -\mathrm{tr}(AB)$ だから $\mathrm{tr}(AB) = 0$. よって Cayley-Hamilton の定理より $(AB)^2 = -\det(AB)I$. $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ だから $\det(AB) \in \mathbb{R}$. よって $r = -\det(AB)$ とすればよい．

(ii) 対応 $f(x) \to f(x) + f'(x)$ を $Tf(x)$ とする．$T : V_n \to V_n$ は線型写像で，V_n は有限次元ベクトル空間だから $\dim \mathrm{Im}\, T + \dim \mathrm{Ker}\, T = \dim V_n$. よって $\dim \mathrm{Ker}\, T = 0$ を示せば T は単射，しかも $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim V_n$ となり $\mathrm{Im}\, T = V_n$, つまり T は全射となって T は可逆となる．$f \in \mathrm{Ker}\, T$ とすれば，$(e^x f)' = e^x(f + f') = 0$ だから $e^x f = c\,(c : \text{定数})$. よって $f = ce^{-x}$ となるが，f は多項式だから $c = 0$. よって $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$. □

問 3

$f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数とする．有限な極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するとき，

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{y-x}f(y)dy = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

であることを示せ．

解答． $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく．任意に $\varepsilon > 0$ を取ると，$R > 0$ が存在して $x > R$ の時 $|f(x) - L| < \varepsilon$ となる．$x \to \infty$ の極限を考えるので $x > R$ として良い．

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x e^{y-x}f(y)dy - \int_R^x e^{y-x}Ldy\right| &= \left|\int_0^R e^{y-x}f(y)dy + \int_R^x e^{y-x}f(y)dy - \int_R^x e^{y-x}Ldy\right| \\ &\leq \int_0^R e^{y-x}|f(y)|dy + \int_R^x e^{y-x}|f(y)-L|dy \\ &\leq e^{-x}\int_0^R e^{y}|f(y)|dy + \int_R^x e^{y-x}\varepsilon dy \\ &\leq e^{-x}\int_0^R e^{y}|f(y)|dy + \varepsilon(1-e^{R-x})\end{aligned}$$

f は連続なので右辺第 1 項の積分は有限値．よって $x \to \infty$ とすると (右辺) $\to \varepsilon$. 左辺の第 2 項は

$$\int_R^x e^{y-x}Ldy = L(1-e^{R-x}) \to L.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{y-x}f(y)dy = L.$$

□

問 4

V は実 $2n$ 次元線形空間，W_1, W_2, W_3 は V の実 n 次元線形部分空間とし，

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$$

と仮定する．このとき，次の条件ア)，イ)，ウ) をみたす V の基底 $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ．

ア) $e_1, \ldots, e_n$ は W_1 の基底．

イ) $f_1, \ldots, f_n$ は W_2 の基底．

ウ) $e_1 + f_1, \ldots, e_n + f_n$ は W_3 の基底．

解答． $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2n = \dim V$ と $W_1 + W_2 \subset V$ より $W_1 + W_2 = V$. これと $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ より $W_1 \oplus W_2 = V$. よって $v_1, \ldots, v_n$ を W_1 の基底，$v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$ を W_2 の基底とすると $v_1, \ldots, v_{2n}$ は V の基底となるから，W_3 の基底は $\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(i)} v_j \, (1 \leq i \leq n)$ と書ける．

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^{(1)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{n+1}^{(1)} & \cdots & a_{n+1}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(n)} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

とおく．$W_1 \cap W_3 = \{0\}$ から $W_1 \oplus W_3 = V$ なので

$$2n = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_n & A_1 \\ & A_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_n & \\ & A_2 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank} A_2.$$

よって $\operatorname{rank} A_2 = n$ なので $A_2 \in GL_n$. 同様に $A_1 \in GL_n$. 従って

$$(v_1, \cdots, v_n) A_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)} v_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} v_j \right),$$
$$(v_{n+1}, \cdots, v_{2n}) A_2 = \left(\sum_{j=n+1}^{2n} a_j^{(1)} v_j, \cdots, \sum_{j=n+1}^{2n} a_j^{(n)} v_j \right)$$

はそれぞれ W_1, W_2 の基底となる．よって

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)} v_j, \quad f_i = \sum_{j=n+1}^{2n} a_j^{(i)} v_j$$

とすれば条件を満たす． $\square$

問 5A

$f(x,y) = (x+y)^2 + x$ として，以下の問に答えよ．

(i) f は $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への単射を与えることを示せ．

(ii) f は $\mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$ から $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ への写像として単射でないことを示せ．

ただし，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負整数の集合を，また $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ は非負有理数の集合を表す．

解答． (i)

$$\begin{aligned} S_k &= \{f(x,y)\,;\, x+y=k, (x,y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &= \{k^2 + x\,;\, 0 \leq x \leq k\} \end{aligned}$$

とおく．(S_k の最大元) $= k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 =$ (S_{k+1}の最小元) だから，$k \neq k'$ なら $S_k \cap S_{k'} = \emptyset$. 従って $f(x,y) = f(x',y') \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} S_k$ とすると $x+y = x'+y'$ となるから，$(x+y)^2 + x = (x'+y')^2 + x'$ より $x = x'$. 従って $y = y'$ なので $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は単射．

(ii) $f(0,1) = f(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}) = 1$ だから $f : \mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ は単射でない． $\square$

問 5B

$a_1, \ldots, a_n$ は正の実数とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ 内の単位球面 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ における，関数 $a_1 x_1^6 + \cdots + a_n x_n^6$ の最大値と最小値を求めよ．

解答． $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^6 + \cdots + a_n x_n^6$ とおく．$0 \le x_i^2 \le x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ より $x_i^6 \le x_i^2$. よって

$$f \le a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \le \max_{1 \le i \le n} a_i \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \max_{1 \le i \le n} a_i.$$

$\max_{1 \le i \le n} a_i$ （のうちの一つ）を a_j とすると $x_j = 1, x_i = 0\,(i \ne j)$ の時等号が成立するから，f の最大値は $\max_{1 \le i \le n} a_i$.

最小値を求める．$\lambda \in \mathbb{R}$ として $F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1)$ とおく．単位球面は有界閉だから，連続関数 f は最小値を持つ．特にこの最小値は極値でもある．Lagrange の未定乗数法により，極値を取る点となりうる $(x_1, \ldots, x_n)$ は

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 6a_i x_i^5 - 2\lambda x_i = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

の解．各 i について $x_i = 0$ か $3a_i x_i^4 = \lambda$ であるが，第 2 式から，全ての i に対し $x_i = 0$ となることはない．よって $1 \le n_1 < \cdots < n_k \le n$ があって $i \in \{n_1, \ldots, n_k\}$ の時 $3a_i x_i^4 = \lambda$, そうでない時 $x_i = 0$ となる．この時

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^k x_{n_i}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3a_{n_i}}} \qquad \therefore \sqrt{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{3a_{n_i}}} \right)^{-1}$$

よって

$$x_{n_i}^2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3a_{n_i}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{n_i}}} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{a_{n_j}}} \right)^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^n a_i x_i^6 = \sum_{i=1}^k a_{n_i} x_{n_i}^6 = \sum_{i=1}^k a_{n_i} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{n_i}}} \right)^3 \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{a_{n_j}}} \right)^{-3} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{a_{n_i}}} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{a_{n_j}}} \right)^{-3} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{a_{n_i}}} \right)^{-2}. \end{aligned}$$

k と n_i を動かした時，これの最小値は

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^{-2}$$

である．よってこれが f の最小値としてありうるが，実際 $x_i = \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_j}} \right)^{-1/2} \quad (1 \le i \le n)$ の時 f はこの値を取り，この点は単位球面上にあるから，f の最小値は

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^{-2}.$$

□

平成 18 年度 (2005 年 8 月実施)

問 1

次の定積分 (1), (2), (3) を求めよ，ただし $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする．なお $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ax} dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx$

解答. 問題の積分を順に $I_1(a), I_2(n), I_3$ とする．

(1)

$$I_1(a) = e^{a^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a/2)^2} dx$$

である．$a/2 = \alpha + i\beta\,(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とする．$R > 0$ を取り，4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 を順に $R, R+i\beta, -R+i\beta, -R$ とする．$e^{-(x-a/2)^2}$ を長方形 $P_1P_2P_3P_4$ 上で 積分すると 0. 一方 $R \to \infty$ の時

$$\begin{aligned}
&\int_{P_4P_1} e^{-(x-a/2)^2} dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a/2)^2} dx, \\
&\int_{P_2P_3} e^{-(x-a/2)^2} dx = -\int_{-R}^{R} e^{-(t-\alpha)^2} dt \to -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = -\sqrt{\pi}, \\
&\left| \int_{P_1P_2} e^{-(x-a/2)^2} dx \right| = \left| \int_0^{\beta} e^{-(R+it-\alpha-i\beta)^2} i dt \right| \le \int_0^{\beta} e^{-(R-\alpha)^2+(t-\beta)^2} dt \to 0, \\
&\left| \int_{P_3P_4} e^{-(x-a/2)^2} dx \right| = \left| \int_{\beta}^{0} e^{-(-R+it-\alpha-i\beta)^2} i dt \right| \le \int_0^{\beta} e^{-(R+\alpha)^2+(t-\beta)^2} dt \to 0
\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a/2)^2} dx = \sqrt{\pi}$. よって $I_1(a) = \sqrt{\pi} e^{a^2/4}$.

(2) $e^{ax} = \sum_{n \ge 0} \frac{(ax)^n}{n!}$ は x の関数として $\mathbb{R}$ 上広義一様絶対収束するから

$$I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sum_{n \ge 0} \frac{(ax)^n}{n!} dx = \sum_{n \ge 0} \frac{a^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^n dx = \sum_{n \ge 0} \frac{a^{2n}}{(2n)!} I_2(n).$$

一方 (1) より

$$I_1(a) = \sqrt{\pi} \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{a^2}{4} \right)^n$$

だから a^{2n} の係数を比べて

$$I_2(n) = \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

(3)

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \frac{1}{2}(I_1(i) + I_1(-i)) = \sqrt{\pi} e^{-1/4}$$

□

問 2

次の (i), (ii) の問に答えよ．

(i) V, W を有限次元実線形空間，v, w をそれぞれ V, W の元とし，$v \neq 0$ と仮定する．このとき，線形写像 $f : V \to W$ で $f(v) = w$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 2 行 2 列複素行列 A で，$A = B^2$ となる 2 行 2 列複素行列 B が存在しない例を 1 つあげよ．その例についてこのような B が存在しないことを証明せよ．

解答. (i) $\dim V = n$ とする．$v \neq 0$ だから，$v_1 = v, v_2, \ldots, v_n \in V$ が V の基底になるように取れる．$f : V \to W$ を

$$f(v_i) = \begin{cases} w & (i = 1) \\ 0 & (i > 1) \end{cases}$$

から定まる線形写像とすれば，これが条件を満たす．

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A = B^2$ となる $B \in M_2(\mathbb{C})$ が存在したとする．$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+w) \\ z(x+w) & w^2 + yz \end{pmatrix}.$$

$(1, 2)$ 成分から $x + w \neq 0$ だから，$(2, 1)$ 成分より $z = 0$. よって $(1, 1), (2, 2)$ 成分より $x = w = 0$. この時 $(2, 2)$ 成分が 0 となって矛盾． □

問 3

t を正の実数，a_0, a_1, a_2, a_3 を実数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 t^n + a_2\left(\dfrac{t^2}{2!}\right)^n + a_3\left(\dfrac{t^3}{3!}\right)^n}{1 + t^n + \left(\dfrac{t^2}{2!}\right)^n + \left(\dfrac{t^3}{3!}\right)^n}$$

を求めよ．

解答． $f_j(t) = \dfrac{t^j}{j!}$ とおく．

$$f_0 - f_1 = 1 - t, \quad f_0 - f_2 = \frac{2-t^2}{2}, \quad f_0 - f_3 = \frac{6-t^3}{6},$$
$$f_1 - f_2 = \frac{t(2-t)}{2}, \quad f_1 - f_3 = \frac{t(6-t^2)}{6}, \quad f_2 - f_3 = \frac{t^2(3-t)}{6}$$

であるから，各 t に対し $f_j - f_k$ の符号と $M := \max_j f_j$ は以下のようになる．

t	$f_0 - f_1$	$f_0 - f_2$	$f_0 - f_3$	$f_1 - f_2$	$f_1 - f_3$	$f_2 - f_3$	M
$0 < t < 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	f_0
$t = 1$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$f_0 = f_1$
$1 < t < 2$	$-$	$(*)$	$(*)$	$+$	$+$	$+$	f_1
$t = 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$f_1 = f_2$
$2 < t < 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$(*)$	$+$	f_2
$t = 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$f_2 = f_3$
$3 < t$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	f_3

ただし $(*)$ は t により $+, -, 0$ のいずれかになることを表す．問題の極限を L とおく．唯一の j で $M = f_j$ となる時は $L = a_j$, 異なる j, k で $M = f_j = f_k$ となる時は $L = \dfrac{a_j + a_k}{2}$ だから

$$L = \begin{cases} a_0 & (0 < t < 1) \\ \dfrac{a_0 + a_1}{2} & (t = 1) \\ a_1 & (1 < t < 2) \\ \dfrac{a_1 + a_2}{2} & (t = 2) \\ a_2 & (2 < t < 3) \\ \dfrac{a_2 + a_3}{2} & (t = 3) \\ a_3 & (3 < t) \end{cases}.$$

□

問 4

$a_n\,(n=1,2,\dots)$ を複素数とし，等式

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n(1-z)^{2n}$$

が $z=0$ の複素近傍で成り立つとする．

(i) $f(z)=z(1-z)^2$ として，a_n が $\dfrac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}$ の $z=0$ における留数と等しいことを証明せよ．

(ii) $a_n\,(n=1,2,\dots)$ を求めよ．

解答． (i) $z=0$ は $f(z)$ の 1 位の零点だから $f'(0)\neq 0$. よって $z=0$ の近傍で $f(z)$ の逆関数 $z=g(w)$ が存在する．与式で $z=g(w)$ として

$$g(w)=\sum_{n\geq 1}a_nf(g(w))^n=\sum_{n\geq 1}a_nw^n.$$

$f(0)=0$ だから，これは $w=0$ の近傍で成立する．ここで 0 の近傍で

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$$

となることを示す．ただし積分は $r>0$ を十分小さく取り $|z|=r$ 上を正の向きに行う．被積分関数の特異点は $f(z)=w$ となる点だから $z=g(f(z))=g(w)$. $g(0)=0$ だから，w が 0 の近傍にある時，$g(w)$ は 0 の近傍にある．よって $z=g(w)$ は積分路が囲む領域内にあるとして良い．一方 $f(g(w))=w$ を微分して $f'(g(w))g'(w)=1$ だから $(f(z)-w)'|_{z=g(w)}=f'(g(w))\neq 0$. よって $z=g(w)$ は 1 位の極だから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz&=\operatorname{Res}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)-w},z=g(w)\right)=\lim_{z\to g(w)}\frac{z-g(w)}{f(z)-w}zf'(z)\\&=\frac{1}{f'(g(w))}g(w)f'(g(w))=g(w).\end{aligned}$$

これで示せた．この式を n 回微分して

$$g^{(n)}(w)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{zf'(z)}{(f(z)-w)^{n+1}}dz.$$

よって

$$a_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}dz=\operatorname{Res}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}},z=0\right).$$

(ii) $z=0$ の近傍で $\frac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 0}z^k$ で，これは絶対一様収束するから $2n$ 回微分して

$$\frac{(2n)!}{(1-z)^{2n+1}}=\sum_{k\geq 2n}k(k-1)\cdots(k-(2n-1))z^{k-2n}=\sum_{k\geq 2n}\frac{k!}{(k-2n)!}z^{k-2n}.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}&=\frac{z(1-z)(1-3z)}{z^{n+1}(1-z)^{2(n+1)}}=\frac{1-3z}{z^n}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}}\\&=\frac{1-3z}{(2n)!}\sum_{k\geq 2n}\frac{k!}{(k-2n)!}z^{k-3n}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{(3n-1)!}{((3n-1)-2n)!}-3\frac{(3n-2)!}{((3n-2)-2n)!}\right)\\&=\frac{2(3n-2)!}{(2n)!(n-1)!}.\end{aligned}$$

□

問 5A

n を自然数，k を正の奇数とし，A を n 次実対称行列とする．n 次実正方行列 X に対して同値関係

$$XA = AX \iff XA^k = A^k X$$

が成り立つことを証明せよ．

解答． $\Longrightarrow$: k についての帰納法で示す．$k=1$ の時自明．k 以下で成り立つ時，

$$XA^{k+2} = XA^k A^2 = A^k XA^2 = A^k AXA = A^{k+1}AX = A^{k+2}X$$

だから $k+2$ でも成り立つ．これで示された．

$\Longleftarrow$: A は実対称だから，直交行列 P があって ${}^tPAP = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,(\lambda \in \mathbb{R})$ とできる．この時 $A^k = PD^k{}^tP$ だから

$$\begin{aligned} XA^k = A^k X &\iff XPD^k{}^tP = PD^k{}^tPX \\ &\iff {}^tPXPD^k = D^k{}^tPXP. \end{aligned}$$

${}^tPXP = (x_{ij})$ とする．$D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ だから，${}^tPXPD^k$ の (i,j) 成分は $x_{ij}\lambda_j^k$, $D^k{}^tPXP$ の (i,j) 成分は $x_{ij}\lambda_i^k$. よって $x_{ij}\lambda_j^k = x_{ij}\lambda_i^k$ だから $x_{ij} = 0$ または $\lambda_j^k = \lambda_i^k$. k は奇数だから $x_{ij} = 0$ または $\lambda_j = \lambda_i$. これは $k=1$ の場合の成立を意味するから $XA = AX$. $\square$

問 5B

$\mathbb{R}^4$ における 4 点 $P_i\,(i=1,2,3,4)$ と 2 点 $Q_j\,(j=1,2)$ が次のように与えられているとする．

$$P_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\2\end{bmatrix},\qquad P_2=\begin{bmatrix}-2\\2\\2\\-1\end{bmatrix},\qquad P_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\qquad P_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\3\end{bmatrix},$$
$$Q_1=\begin{bmatrix}-2\\4\\2\\-3\end{bmatrix},\qquad Q_2=\begin{bmatrix}2\\-3\\-2\\5\end{bmatrix}$$

このとき領域

$$D=\left\{\sum_{i=1}^{4}\alpha_iP_i\,\middle|\,\alpha_i\geq 0\,(i=1,2,3,4)\right\}$$

と線分 $\overline{Q_1Q_2}$ は点を共有するか？　点を共有するとすれば，D と $\overline{Q_1Q_2}$ の交わりの端点を求めよ．

解答.

$$\overline{Q_1Q_2}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\\8\end{pmatrix}\quad(0\leq\lambda\leq 1)$$

であるから，もし $D\cap\overline{Q_1Q_2}\neq\emptyset$ なら，その共有点の座標は

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\\8\end{pmatrix}$$

である．これを $Ax=b, x={}^t(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\lambda)$ の形で書いたときの $(A|b)$ に行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&-1&-4&-2\\0&2&-1&1&7&4\\-2&2&2&-2&4&2\\2&-1&0&3&-8&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&3&-3&0&0\\0&2&-1&1&7&4\\-1&1&1&-1&2&1\\0&1&2&1&-4&-1\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&-1&0&0\\0&0&-5&-1&15&6\\-1&0&-1&-2&6&2\\0&1&2&1&-4&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&-1&0&0\\0&0&-6&0&15&6\\-1&0&-3&0&6&2\\0&1&3&0&-4&-1\end{pmatrix}.$$
$$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\left(-\frac{3}{2}\lambda+1,-\frac{7}{2}\lambda+2,\frac{5}{2}\lambda-1,\frac{5}{2}\lambda-1\right)$$

$\alpha_j\geq 0, 0\leq\lambda\leq 1$ を満たす λ は $\frac{2}{5}\leq\lambda\leq\frac{4}{7}$. よって条件を満たす λ,α_i が存在するので，$\overline{Q_1Q_2}$ と D は点を共有する．その交わりの端点は $\lambda=\frac{2}{5},\frac{4}{7}$ の時の点だから

$$\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-3\end{pmatrix}+\frac{2}{5}\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\\1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-3\end{pmatrix}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\11\end{pmatrix}.$$

□

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 1

次の (i), (ii), (iii) のすべてに解答せよ．

(i) n が十分大きい正整数であるとして

$$100^n, \quad n^{100}, \quad n^n, \quad (2n)!, \quad n!$$

を大きい順に並べ，その理由を簡単に述べよ．

(ii) 次の積分 I の値を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

(iii) n を正整数，C を円 $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ を反時計回りに一周する経路とするとき，次の積分 I_n の値を求めよ．

$$I_n = \int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

解答． (i)

$$(2n)! > n^n > n! > 100^n > n^{100}$$

である．実際，n が十分大きい時，

$$\sum_{k=1}^{2n} \log k - n\log n > \sum_{k=1}^{n} \log(n+k) - n\log n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) > 0$$

より $(2n)! > n^n$.

$$n^n = \prod_{k=1}^{n} n > \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

$$\sum_{k=1}^{n} \log k - n\log 100 > \sum_{k=100}^{n} \log k - n\log 100 = \sum_{k=100}^{n} \log\frac{k}{100} - 99\log 100 > 0$$

より $n! > 100^n$. また，$f(x) = \frac{\log x}{x}\ (x > e)$ とおけば $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} < 0$ だから $f(n) < f(100)$. つまり $100^n > n^{100}$.

(ii)

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right|_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi$$

であり，被積分関数は正だから $I = \sqrt{\pi}$.

(iii)

$$I_n = \int_C \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z^{-1})^{n-k} \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_C z^{2k-n-1} dz$$

だから，n が偶数の時 z^{-1} の項だけが残り $I_n = 2\pi i\binom{n}{n/2}$. n が奇数の時 z^{-1} の項はないから $I_n = 0$. □

問 2

次の (i) と (ii) に解答せよ．

(i) α を実定数とする．実 3 変数 (x,y,z) の関数

$$f(x,y,z) = (\alpha+1)x^2 + (\alpha+1)y^2 + \alpha z^2 + 2xy + 2\alpha xz + 4yz$$

が任意の $(x,y,z)(\neq (0,0,0))$ に対して常に正の値を取るための，α に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) $n \times n$ 行列 A の各列の成分は 1 が高々一個，-1 が高々一個でその他は 0 であるとする．このような行列 A の行列式の取り得る値を求めよ．

解答． (i)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha+1 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおけば $f(x,y,z) = {}^t\!vAv$ だから，任意の $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対し $f(v) > 0$ となることは，3 つの小行列式

$$\alpha+1, \quad \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+2), \quad \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha+1 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 4$$

が全て正であることと同値だから，$\alpha > 2$.

(ii) 条件を満たす $n{\times}n$ 行列の行列式の取り得る値の集合を D_n とおく．A の 1 列目が 0 のみからなる時は $|A| = 0$. 1 列目に ±1 のどちらかのみがある時，$a_{i1} = \pm1$ とし，A から i 行目と 1 列目を除いた $(n-1)$ 次行列を A' とすれば，A' も条件を満たすから $|A| = \pm(-1)^{i-1}|A'| \in \{\pm d\,;\, d \in D_{n-1}\}$. 1 列目に ±1 どちらもある時，$a_{i1} = 1, a_{i'1} = -1$ とする．i 行を i' 行に足しても $|A|$ は変わらない．この時 i' 行目の成分が $(i',1)$ 成分を除いて変わらなければ，A' も条件を満たすから $|A| = (-1)^{i-1}|A'| \in \{\pm d\,;\, d \in D_{n-1}\}$. (i',j) 成分が変わるとすると $a_{ij} \neq 0$. $a_{ij} = 1$ なら $a_{i'j} = -1, 0$. 前者なら A の 1 列と j 列が等しくなり $|A| = 0$. 後者なら基本変形後の i 行と 1 列を除いた $(n-1)$ 次行列を A' とすれば A' も条件を満たすから $|A| = (-1)^{i-1}|A'| \in \{\pm d\,;\, d \in D_{n-1}\}$. $a_{ij} = -1$ の時も同様．以上から

$$D_n \subset \{0\} \cup \{\pm d\,;\, d \in D_{n-1}\}.$$

ここで $D_1 = \{0, \pm1\}$ は明らかだから $D_n \subset \{0, \pm1\}$. $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix}$ $(\varepsilon = 0, \pm1)$ は条件を満たし $|A| = \varepsilon$ だから逆の包含も成り立つ．よって $D_n = \{0, \pm1\}$. $\square$

問 3

正定数 a に対し数列 $x_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ を

$$x_0=0,\quad x_{n+1}=a+2x_n^2\quad (n\geq 0)$$

により定める．$n\to\infty$ のとき x_n が有限値に収束するための，a に関する必要十分条件を求めよ．

解答． ・$a>1/8$ の時

$$x_{n+1}-x_n=(a+2x_n^2)-x_n=2\left(x_n-\frac{1}{4}\right)^2+a-\frac{1}{8}>0$$

だから x_n は単調増加．もし x_n が上に有界なら有限値に収束するが，$L=\lim_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}$ とおくと，$L=a+2L^2$ より $L=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}\notin\mathbb{R}$ となって矛盾．よって x_n は上に有界でないので，有限値に収束しない．

・$a\leq 1/8$ の時，まず $x_n<x_{n+1}<L:=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}$ となることを帰納法で示す．$n=0$ の時は

$$\begin{aligned}&x_1-x_0=a>0,\\&L-x_1=(a+2L^2)-a=2L^2>0\end{aligned}$$

だからよい．n で正しい時，$x<L$ なら $x<a+2x^2$ となることから，

$$\begin{aligned}&x_{n+2}-x_{n+1}=(a+2x_{n+1}^2)-x_{n+1}>0,\\&L-x_{n+2}=(a+2L^2)-(a+2x_{n+1}^2)=2(L+x_{n+1})(L-x_{n+1})>0\end{aligned}$$

だから $n+1$ でも正しい．これで示された．よって x_n は上に有界な単調増加列だから，有限値に収束する．

以上から必要十分条件は $a\leq 1/8$. $\square$

問 4

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $(0\le x\le 1)$ として関数 f を定義する．このとき，

$$(\log x)(\log(1-x))+f(x)+f(1-x)$$

が $0<x<1$ で定数となり，その定数は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ で与えられることを示せ.

解答. $F(x)=(\log x)(\log(1-x))+f(x)+f(1-x)$ とおく．$0\le x\le 1$ 上

$$\sum_{n\ge 1}\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\le\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}<\infty$$

だから Weierstrass の優級数定理より $f(x)$ は $0\le x\le 1$ 上一様収束．よって $0<x<1$ において

$$f'(x)=\sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}=-\frac{\log(1-x)}{x}.$$

これより

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\log(1-x)}{x}-\frac{\log x}{1-x}+f'(x)-f'(1-x)\\&=\frac{\log(1-x)}{x}-\frac{\log x}{1-x}-\frac{\log(1-x)}{x}+\frac{\log x}{1-x}=0\end{aligned}$$

だから $F(x)$ は $0<x<1$ 上定数.

再び f の一様収束性から

$$\lim_{x\searrow 0}f(x)=0,\quad \lim_{x\searrow 0}f(1-x)=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}.$$

また，

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}(\log x)(\log(1-x))&=\lim_{x\searrow 0}(x\log x)\frac{\log(1-x)}{x}=\lim_{x\searrow 0}x\log x\cdot\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(1-x)}{x}\\&=\lim_{x\searrow 0}\frac{\log x}{1/x}\cdot(\log(1-x))'|_{x=0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1/x}{-1/x^2}\cdot\left.\frac{-1}{1-x}\right|_{x=0}\\&=0\cdot(-1)=0\end{aligned}$$

だから，

$$F(x)=\lim_{x\searrow 0}F(x)=0+0+\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}.$$

□

問 5A

E を実 p 次元線形空間，F を実 q 次元線形空間とし，$\mathrm{Hom}(E,F)$ で E から F への実線形写像全体のなす線形空間を表すものとする．E の元 e を固定して写像 $\varphi : \mathrm{Hom}(E,F) \to F$ を

$$\varphi(f) = f(e) \quad (f \in \mathrm{Hom}(E,F))$$

で定めるとき，φ は実線形写像であることを示し，さらにその階数を求めよ．

解答. 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in \mathrm{Hom}(E,F)$ に対し

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(e) = \lambda f(e) + \mu g(e) = \lambda\varphi(f) + \mu(g)$$

だから φ は実線形写像．

$x_1, \ldots, x_p$ を E の基底，$y_1, \ldots, y_q$ を F の基底とする．$f_{ij} \in \mathrm{Hom}(E,F)$ を

$$f_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_j & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$$

から定まるものとする．f_{ij} たちは $\mathrm{Hom}(E,F)$ の基底であることを示す．$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}f_{ij} = 0\,(\gamma_{ij} \in \mathbb{R})$ とすると，任意の $1 \leq k \leq p$ に対し

$$0 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}f_{ij}(x_k) = \sum_{j=1}^{q}\gamma_{kj}y_j.$$

$y_1, \ldots, y_q$ は一次独立だから $\gamma_{k1} = \cdots = \gamma_{kq} = 0$. k は任意だから $\gamma_{ij} = 0$. よって f_{ij} は一次独立．任意に $f \in \mathrm{Hom}(E,F)$ を取ると $f(x_i) = \sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}y_j$ と書けるので

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_i\beta_{ij}y_j = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k\right).$$

よって f は f_{ij} の一次結合で書ける．以上から f_{ij} は $\mathrm{Hom}(E,F)$ の基底である．

これより

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\varphi &= \dim\mathrm{Hom}(E,F) - \dim\operatorname{Ker}\varphi \\ &= pq - \dim\operatorname{Ker}\varphi.\end{aligned}$$

$e = 0$ の時は任意の $f \in \mathrm{Hom}(E,F)$ に対し $f(e) = 0$ だから $\dim\operatorname{Ker}\varphi = pq$. $e \neq 0$ とする．E の基底を取り直して $x_1 = e$ として良い．$f = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}f_{ij} \in \operatorname{Ker}\varphi$ は

$$0 = \varphi(f) = f(x_1) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}f_{ij}(x_1) = \sum_{j=1}^{q}\gamma_{1j}y_j$$

を満たす．$y_1, \ldots, y_q$ は一次独立だから $\gamma_{11} = \cdots = \gamma_{1q} = 0$．よって $\dim\operatorname{Ker}\varphi = pq - q$.

以上から

$$\operatorname{rank}\varphi = \begin{cases} 0 & (e = 0) \\ q & (e \neq 0). \end{cases}$$

□

問 5B

2 つのパラメータ α, β を含む次のような $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ に関する連立一次方程式 (E) を考える．

$$(E) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5-\alpha-3\beta \\ -2 \\ 2+2\alpha+2\beta \\ 6 \end{pmatrix}$$

このとき次の (i), (ii) に答えよ．

(i) 解が存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) 解が一意に存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

解答． (i) (E) を $Ax = b$ と書き，A に列基本変形，$(A|b)$ に行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 & -5-\alpha-3\beta \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 & -2 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 & 2+2\alpha+2\beta \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & 5 & 1-\alpha & -7-\alpha & -5-\alpha-3\beta \\ -3 & -2 & 6 & 0 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & -9 & 2+\alpha & 5+\alpha+\beta & 2+2\alpha+2\beta \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & 0 & -5 & -2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 & 1-\alpha & -7-\alpha & -5-\alpha-3\beta \\ 3 & 4 & -9 & 2+\alpha & 5+\alpha+\beta & 2+2\alpha+2\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1-\alpha & -3-\alpha & 1-\alpha-3\beta \\ 0 & 4 & -10 & 3+\alpha & 3+\alpha+\beta & -1+2\alpha+2\beta \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\alpha & -\alpha-3\beta \\ 0 & 0 & 4 & 1+\alpha & -3+\alpha+\beta & 1+2\alpha+2\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha+3\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha+\beta & 2\alpha+2\beta \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha+3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

だから，これの左側の 5×5 行列を A', 第 6 列を b' とすれば，(E) が解を持つことは $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A'|b)$ と同値．

$$\mathrm{rank}(A') = \begin{cases} 3 & (\alpha = \beta = 0) \\ 4 & (\alpha, \beta \text{ のうち一方のみが } 0) \\ 5 & (\alpha\beta \neq 0) \end{cases}, \qquad \mathrm{rank}(A'|b') = \begin{cases} 3 & (\alpha = \beta = 0) \\ 5 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

だから，解を持つ必要十分条件は $\alpha = \beta = 0$ または $\alpha\beta \neq 0$.

(ii) 解が一意であることは， $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A'|b)$ かつ A' が full-rank と同値だから，$\alpha\beta \neq 0$ が必要十分． □

平成 16 年度 (2003 年 8 月実施)

問 1

$m \times n$ 実行列 A の最初の n' 列 $(n' \le n)$ よりなる $m \times n'$ 行列を B とする．また，A, B の最初の m' 行 $(m' \le m)$ よりなる $m' \times n$ 行列，$m' \times n'$ 行列をそれぞれ A', B' とする．これらの行列に対して

$$r(A) - r(A') \ge r(B) - r(B')$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$r(X)$ は行列 X の階数とする．

解答． $A = \left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ Z & W \end{smallmatrix}\right)$ と書く．ただし $X \in M(m', n', \mathbb{R}), Y \in M(m', n-n', \mathbb{R}), Z \in M(m-m', n', \mathbb{R}), W \in M(m-m', n-n', \mathbb{R})$. この時 $B = \left(\begin{smallmatrix} X \\ Z \end{smallmatrix}\right), A' = \left(\begin{smallmatrix} X & Y \end{smallmatrix}\right), B' = X$ であるから

$$\begin{aligned}
r(A) + r(B') &= r\begin{pmatrix} X & Y & \\ Z & W & \\ & & X \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X & Y & \\ Z & W & \\ X & Y & X \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X & Y & \\ Z & W & \\ & Y & X \end{pmatrix} \\
&= r\begin{pmatrix} X & & Y \\ Z & & W \\ & X & Y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} B & * \\ & A' \end{pmatrix} \ge r(B) + r(A').
\end{aligned}$$

□

問 2

2 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a + d \geq 2$ をみたしているとする．ある整数 $k \geq 1$ に対して $A^k = I$ が成り立つとき，$A = I$ であることを証明せよ．ただし，I は 2 次単位行列を表す．

解答． A の固有値を λ, 対応する固有ベクトルを v とすると，$\lambda^k v = A^k v = v$ より $\lambda^k = 1$. よって A の固有値は $\exp\left(\frac{2\pi i m}{k}\right), \exp\left(\frac{2\pi i n}{k}\right)$ $(0 \leq m, n < k)$ とおける．従って

$$2 \leq a + d = \operatorname{tr} A = \exp\left(\frac{2\pi i m}{k}\right) + \exp\left(\frac{2\pi i n}{k}\right).$$

実部と虚部を見て

$$\cos\frac{2\pi m}{k} + \cos\frac{2\pi n}{k} \geq 2, \qquad \sin\frac{2\pi m}{k} + \sin\frac{2\pi n}{k} = 0.$$

(第 1 式の左辺) $\leq 1 + 1 = 2$ であるから，等号が成立し $m = n = 0$. この時第 2 式も成立する．よって A の固有値は 1 のみだから，Jordan 標準形は I または $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$. 後者とすると，$P \in GL_2(\mathbb{C})$ があって $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$ となるが，

$$I = P^{-1}A^k P = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ & 1 \end{pmatrix}$$

となって $k \geq 1$ に反する．よって A の Jordan 標準形は I となるが，これは $A = I$ を意味する． $\square$

問 3

n 次実正方行列の全体 $M_n(\mathbb{R})$ を n^2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．正則行列全体のなす開集合 $U \subset M_n(\mathbb{R})$ からそれ自身への写像 $\varphi : U \to U$ と $A \in U$ に対して

$$\delta_{\varphi,A} = \lim_{r\to 0} \frac{\varphi(B_r(A))\text{ の体積}}{B_r(A)\text{ の体積}}$$

とおく．ただし，$B_r(A)$ は $A = (a_{ij})$ を中心とする半径 r の球

$$\left\{ (x_{ij}) \in M_r(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{1\le i,j\le n} |x_{ij} - a_{ij}|^2 < r^2 \right\}$$

である．次の 2 つの場合に $\delta_{\varphi,A}$ を求めよ．

(i) $\varphi(X) = BX$. ただし，B は n 次実正則行列.

(ii) $\varphi(X) = X^{-1}$.

解答. $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ に対し $d(X,Y) = (\sum_{i,j} |x_{ij} - y_{ij}|^2)^{1/2}$, 立体 S の体積を $V(S)$ とおく．また，$dX = dx_{11}\cdots dx_{1n}\cdots dx_{n1}\cdots dx_{nn}$ などと略記する.

(i) $\varphi(B_r(A)) = \{Y = BX\,;\, d(X,A) < r\} = \{Y\,;\, d(B^{-1}Y, A) < r\}$ である．$Y = BX$ を x_{kl} で微分して

$$\frac{\partial Y}{\partial x_{kl}} = B\frac{\partial X}{\partial x_{kl}} = BE_{kl}.$$

ただし E_{ij} は行列単位．両辺の (i,j) 成分を比べて

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}} = \begin{cases} b_{ik} & (j = l) \\ 0 & (j \ne l) \end{cases}.$$

よって写像 $Y = \varphi(X)$ の Jacobian は

$$\frac{\partial(y_{11},\dots,y_{1n},y_{21},\dots,y_{2n},\dots,y_{n1},\dots,y_{nn})}{\partial(x_{11},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{2n},\dots,x_{n1},\dots,x_{nn})} = \begin{vmatrix} b_{11}I_n & \cdots & b_{1n}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}I_n & \cdots & b_{nn}I_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^K \begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} & & & \\ & b_{11}\cdots b_{1n} & & \\ & & \cdots & \\ & & & b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} & & & \\ & b_{n1}\cdots b_{nn} & & \\ & & \cdots & \\ & & & b_{n1}\cdots b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{2K} \begin{vmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix} = (\det B)^n.$$

ただし K は列基本変形をした回数.[1] これより

$$V(\varphi(B_r(A))) = \int_{d(B^{-1}Y,A)<r} dY = \int_{d(X,A)<r} |\det B|^n dX = |\det B|^n V(B_r(A)).$$

よって $\delta_{\varphi,A} = |\det B|^n$.

(ii) $\varphi(B_r(A)) = \{Y = X^{-1}\,;\, d(X,A) < r\} = \{Y\,;\, d(Y^{-1}, A) < r\}$ である．$YX = I$ を x_{kl} で微分して

$$\frac{\partial Y}{\partial x_{kl}}X + YE_{kl} = 0 \qquad \therefore \frac{\partial Y}{\partial x_{kl}} = -YE_{kl}X^{-1} = -YE_{kl}Y = (-y_{ik}y_{lj})_{ij}$$

[1] 行列の Kronecker 積を知っていれば，これは $\det(B\otimes I) = (\det B)^n(\det I)^n = (\det B)^n$ とすぐわかる.

両辺の (i,j) 成分を比べて $\dfrac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}} = -y_{ik}y_{lj}$. よって写像 $Y=\varphi(X)$ の Jacobian は

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} -y_{11}{}^tY & \cdots & -y_{1n}{}^tY \\ \vdots & & \vdots \\ -y_{n1}{}^tY & \cdots & -y_{nn}{}^tY \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_{11}I_n & \cdots & -y_{1n}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ -y_{n1}I_n & \cdots & -y_{nn}I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^tY & & \\ & \ddots & \\ & & {}^tY \end{vmatrix} \\ =&|-Y|^n \cdot |{}^tY|^n = (-1)^n|Y|^{2n} = (-1)^n|X|^{-2n}.\end{aligned}$$

A は正則で $r\to 0$ の時を考えるから，$d(X,A)<r$ を満たす X は正則であるとして良い．任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta'>0$ があって $d(X,A)<\delta'$ の時 $\left||\det X|^{-2n} - |\det A|^{-2n}\right| < \varepsilon$ となる．$r<\delta'$ として良い．この時

$$\begin{aligned}V(\varphi(B_r(A))) &= \int_{d(Y^{-1},A)<r} dY = \int_{d(X,A)<r} |\det X|^{-2n} dX \\ &= \int_{d(X,A)<r} (|\det X|^{-2n} - |\det A|^{-2n}) dX + |\det A|^{-2n} V(B_r(A))\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\left|\frac{V(\varphi(B_r(A)))}{V(B_r(A))} - |\det A|^{-2n}\right| &= \left|\frac{1}{V(B_r(A))}\int_{d(X,A)<r} (|\det X|^{-2n} - |\det A|^{-2n}) dX\right| \\ &\le \frac{1}{V(B_r(A))}\int_{d(X,A)<r} \left||\det X|^{-2n} - |\det A|^{-2n}\right| dX \\ &< \frac{1}{V(B_r(A))}\int_{d(X,A)<r} \varepsilon dX = \varepsilon.\end{aligned}$$

$r\to 0$ として $\left|\delta_{\varphi,A} - |\det A|^{-2n}\right| < \varepsilon$. $\varepsilon>0$ は任意だから $\delta_{\varphi,A} = |\det A|^{-2n}$. □

問 4

λ は非負実数とし，$\{a_{ij}\}_{1\le j\le i<\infty}$ は以下の条件 (A), (B) をみたす正の実数の 2 重数列とする．

(A) $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\max_{1\le j\le i} a_{ij} = 0$,

(B) $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \lambda$.

このとき，次の (i), (ii) に答えよ．

(i) $\displaystyle\varlimsup_{i\to\infty}\prod_{j=1}^{i}(1+a_{ij}) \le e^{\lambda}$ を証明せよ．ただし，$\varlimsup$ は上極限を表す．

(ii) $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\prod_{j=1}^{i}(1+a_{ij})$ が存在することを示し，その値を求めよ．

解答． (i) $x \ge 0$ において $1+x \le e^x$ だから

$$\prod_{j=1}^{i}(1+a_{ij}) \le \prod_{j=1}^{i} e^{a_{ij}} = \exp\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right) \to e^{\lambda} \quad (i\to\infty).$$

よって $\displaystyle\varlimsup_{i\to\infty}\prod_{j=1}^{i}(1+a_{ij}) \le e^{\lambda}$.

(ii) $i\to\infty$ の時を考えるから，(A) より $\displaystyle\max_{1\le j\le i} a_{ij} < 1/2$ として良い．ここで $0<x<1/2$ に対し

$$|\log(1+x)-x| = \left|-\sum_{n\ge 2}\frac{(-x)^n}{n}\right| < \frac{1}{2}\sum_{n\ge 2} x^n < \frac{1}{2}\sum_{n\ge 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} x^2 = x^2$$

であるから，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{i}(\log(1+a_{ij})-a_{ij})\right| &\le \sum_{j=1}^{i}|\log(1+a_{ij})-a_{ij}| < \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^2 \\ &\le \max_{1\le j\le i} a_{ij}\cdot\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \to 0\cdot\lambda = 0 \quad (i\to\infty).\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{i\to\infty}\prod_{j=1}^{i}(1+a_{ij}) = \lim_{i\to\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{i}\log(1+a_{ij})\right) = \lim_{i\to\infty}\exp\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right) = e^{\lambda}.$$

□

問 5A

集合 X からそれ自身への単射 $f: X \to X$ について考える．f を m 回くり返す合成 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m}$ を f^m で表す．X の有限部分集合 Y で

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X \,|\, f^m(x) \in Y\}$$

をみたすものがあるとする．このとき，次を証明せよ．

(i) 任意の $x \in X$ に対して

$$T_x = \{f^m(x) \,|\, m = 1, 2, \cdots\} \subset X$$

は有限集合である．

(ii) X は有限集合である．

解答． (i) $x \in X$ を任意に取る．仮定から任意の $k \geq 1$ に対し $m_k \geq 1$ があって $f^{m_k}(f^k(x)) \in Y$ となる．m_k はこのようなもののうち最小のものとしておく．$n_k\,(k \geq 1)$ を $n_1 = 1, n_{k+1} = m_{n_k} + n_k$ で定める．$m_{n_k} \geq 1$ より n_k は単調増加である．この時 $k \geq 1$ に対し $j + m_j\,(n_k \leq j < n_{k+1})$ は一定であることを示す．$n_k + m_{n_k} < j + m_j$ となる $n_k \leq j < n_{k+1}$ があれば $m_j > n_k + m_{n_k} - j > n_k + m_{n_k} - n_{k+1} = 0$ と $f^{n_k + m_{n_k} - j}(f^j(x)) = f^{n_k + m_{n_k}}(x) \in Y$ より m_j の最小性に反する．$n_k + m_{n_k} > j + m_j$ となる $n_k \leq j < n_{k+1}$ があれば $m_{n_k} > (j - n_k) + m_j > 0$ と $f^{j - n_k + m_j}(f^{n_k}(x)) = f^{j + m_j}(x) \in Y$ より m_{n_k} の最小性に反する．これで示された．よって

$$\{f^{m_k}(f^k(x))\,;\, k \geq 1\} = \{f^{m_k + k}(x)\,;\, k \geq 1\} = \{f^{m_{n_k} + n_k}(x)\,;\, k \geq 1\} = \{f^{n_{k+1}}(x)\,;\, k \geq 1\}$$

は Y の部分集合．$\#Y < \infty$ より $f^{n_i}(x) = f^{n_j}(x)$ となる $2 \leq i < j$ が存在する．f は単射だから $f^{n_i - 1}(x) = f^{n_j - 1}(x), \ldots, f(x) = f^{n_j - n_i + 1}(x)$. よって $\{f^m(x)\}_m$ は周期 $n_j - n_i (> 0)$. 従って $\#T_x$ は高々 $n_j - n_i$ で有限．

(ii) $y \in Y$ に対し $X_y = \{x \in X\,;\, \exists m \geq 1, f^m(x) = y\}$ とおくと

$$X = \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{y \in Y} \{x \in X\,;\, f^m(x) = y\} = \bigcup_{y \in Y} \{x \in X\,;\, \exists m \geq 1, f^m(x) = y\} = \bigcup_{y \in Y} X_y.$$

$\#Y < \infty$ だから $\#X_y < \infty$ を示せば良い．任意に $y \in Y$ を取る．(i) の議論より $M \geq 1$ があって $f^M(y) = y$ だから $y \in X_y$. また，X_y の定義から，任意の $x \in X_y$ に対し $m(x) \geq 1$ があって $f^{m(x)}(x) = y$ となる．$m(x)$ はそのようなもののうち最小のものとしておく．$m(x) = m(x')$ とすると $f^{m(x)}(x) = y = f^{m(x')}(x') = f^{m(x)}(x')$ と f の単射性より $x = x'$. よって $m(x)$ は相異なる．今 $m(x) > m(y)$ となる $x \in X_y$ が存在したとすると，$f^{m(x)}(x) = y = f^{m(y)}(y)$ と f の単射性より $f^{m(x) - m(y)}(x) = y$. これは $m(x)$ の最小性に矛盾．よって任意の $x \in X_y$ に対し $m(x) \leq m(y)$ だから，$m(x)$ が相異なることと合わせて $\#X_y \leq m(y) < \infty$. これで示された． □

問 5B

実数 a に対して

$$f(a)=\int_\Gamma e^{2az-z^2}\frac{dz}{z}$$

とおく．ただし，ε を正の実数として，Γ は下図に示すように複素平面内において実軸上を $-\infty$ から $-\varepsilon$ に進み，次に円周 $|z|=\varepsilon$ 上を時計回りに ε に進み，その後実軸上を $+\infty$ まで進む積分路とする．このとき，$f(a)$ は a によらない適当な定数 c_1,c_2 を用いて

$$f(a)=c_1\int_0^a e^{t^2}dt+c_2$$

と表されることを示せ．また，定数 c_1,c_2 を求めよ．なお，計算に際し

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

は既知としてよい．

解答． Γ のうち，$-\infty$ から $-\varepsilon$ までの部分を C_1, 円周上の $-\varepsilon$ から ε までの部分を C_2, ε から ∞ までの部分を C_3 とする．$R>0$ を任意に取り，$|a|<R$ とする．

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{2az-z^2}}{z}\right|=|2e^{2az-z^2}|=2e^{2a\operatorname{Re}z-\operatorname{Re}(z^2)}\le\begin{cases}2e^{2R|z|-z^2} & \text{on } C_1\\ 2e^{2R\varepsilon+\varepsilon^2} & \text{on } C_2\\ 2e^{2Rz-z^2} & \text{on } C_3\end{cases}$$

であり，右辺の関数は Γ 上可積分なので

$$f'(a)=\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial a}e^{2az-z^2}\frac{dz}{z}=\int_\Gamma 2e^{2az-z^2}dz.$$

$R>0$ は任意だったからこれは任意の $a\in\mathbb{R}$ で成立．右辺の被積分関数は $\mathbb{C}$ 上正則だから

$$f'(a)=\int_{-\infty}^{\infty}2e^{2az-z^2}dz=2e^{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(z-a)^2}dz=2e^{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=2\sqrt{\pi}e^{a^2}.$$

また，$-C_2$ は円周 $|z|=\varepsilon$ 上を時計回りに ε から $-\varepsilon$ まで進む路であるから

$$\begin{aligned}f(-a)&=\int_\Gamma e^{-2az-z^2}\frac{dz}{z}=\int_{-\Gamma}e^{2az-z^2}\frac{dz}{z}=\int_\infty^\varepsilon+\int_{-C_2}+\int_{-\varepsilon}^{-\infty}\\&=-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{C_2}+\int_\varepsilon^\infty\right)+\int_{C_2}+\int_{-C_2}\\&=-f(a)-\oint_{|z|=\varepsilon}e^{-2az-z^2}\frac{dz}{z}=-f(a)-2\pi i\cdot e^{-2az-z^2}|_{z=0}\\&=-f(a)-2\pi i.\end{aligned}$$

特に $f(0)=-\pi i$ であるから

$$f(a)=2\sqrt{\pi}\int_0^a e^{t^2}dt-\pi i.$$

□

平成 15 年度 (2002 年 8 月実施)

問 1

有限次元実線形空間 X, Y に対し，X から Y への線形写像全体を $\mathrm{Hom}(X, Y)$ と記す．$\mathrm{Hom}(X, Y)$ を，写像の和とスカラー倍により線形空間とみなす．このとき，X の部分線形空間 V と Y の部分線形空間 W に対し，

$$\{f \in \mathrm{Hom}(X, Y) \mid f(V) \subset W\}$$

の次元を，X, Y, V, W の次元を用いて表わせ．

解答． $\dim X = N, \dim Y = M, \dim V = n, \dim W = m$ とする．$x_1, \ldots, x_n$ を V の基底，$y_1, \ldots, y_m$ を W の基底とし，これらを拡張して $x_1, \ldots, x_N$ を X の基底，$y_1, \ldots, y_M$ を Y の基底となるようにする．$f_{ij} \in \mathrm{Hom}(X, Y)\,(1 \le i \le N, 1 \le j \le M)$ を

$$f_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_j & (k = i) \\ 0 & (k \ne i) \end{cases}$$

から定まるものとする．f_{ij} たちが $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の基底になることを示す．$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma_{ij} f_{ij} = 0\,(\gamma_{ij} \in \mathbb{R})$ とすると，$1 \le k \le N$ に対し

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma_{ij} f_{ij}(x_k) = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{kj} y_j.$$

$y_1, \ldots, y_M$ は Y の基底だから $\gamma_{k1} = \cdots = \gamma_{kM} = 0$. k は任意だから $\gamma_{ij} = 0$. よって f_{ij} は一次独立．任意に $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ を取り $f(x_i) = \sum_{j=1}^{M} \beta_{ij} y_j$ とする．この時

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i \beta_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \beta_{ij} f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k\right)$$

だから f は f_{ij} の一次結合で書ける．以上から f_{ij} は $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の基底である．

$f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ が $f(V) \subset W$ を満たすことは，任意の $1 \le k \le n$ に対し $f(x_k) \in W$ となることと同値．$f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma_{ij} f_{ij}$ とすると

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma_{ij} f_{ij}(x_k) = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{kj} y_j$$

だから，これが $f(V) \subset W$ を満たすことと $\gamma_{k,m+1} = \cdots = \gamma_{kM} = 0\,(1 \le k \le n)$ は同値．よって $\{f \in \mathrm{Hom}(X, Y) \mid f(V) \subset W\}$ の次元は $NM - (M - m)n$. □

問 2

$A(x)$ は x の実係数多項式を要素とする n 次正方行列で，

$$A(0) = I_n \quad (\text{単位行列}),$$
$$A(x+y) = A(x)A(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

を満たすとする．このような $A(x)$ をすべて求めよ．

解答． $A(x)$ は多項式成分だから微分可能．

$$A'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(x+\varepsilon) - A(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(x)A(\varepsilon) - A(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} A(x) \frac{A(\varepsilon) - A(0)}{\varepsilon} = A(x)A'(0)$$

だから

$$\frac{d}{dx}\left(A(x)e^{-A'(0)x}\right) = (A'(x) - A(x)A'(0))e^{-A'(0)x} = 0.$$

よって x によらない行列 C が存在して $A(x) = Ce^{A'(0)x}$ と書けるが，$A(0) = I$ から $C = I$. 従って $A(x) = e^{A'(0)x}$. ここで

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}(A'(0))^n$$

は多項式成分だから，$N \geq 0$ があって $n \geq N$ なる任意の n について $(A'(0))^n = 0$，すなわち $A'(0)$ はベキ零であることが必要．逆に $A'(0)$ がベキ零なら $e^{A'(0)x}$ は条件を全て満たす．よって

$$A(x) = e^{Px} \quad (P \in M_n(\mathbb{R}) \text{ はベキ零行列}).$$

□

問 3

M を 3 次実正則行列とする．$M^n\,(n \in \mathbb{Z})$ の各成分が有界ならば，$M\vec{x} = \vec{x}$ または $M\vec{x} = -\vec{x}$ を満たす $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ が存在することを示せ．

解答． M の固有値を λ, 対応する固有ベクトルを $v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ とする．v_1, v_2, v_3 のうち少なくとも 1 つは 0 でないから，それを v_i とする．M は正則だから $\lambda \neq 0$. また，$M^n v = \lambda^n v\,(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の左辺は仮定から有界だから，第 i 成分から $\lambda^n v_i$ は $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で有界．よって $0 < |\lambda| \leq 1$. 一方 $Mv = \lambda v$ から $M^{-1}v = \lambda^{-1}v$ なので，M^{-1} は固有値 λ^{-1} を持つ．$M^{-n}v = \lambda^{-n}v\,(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ なので先程と同様にして $|\lambda^{-1}| \leq 1$. 以上から M の任意の固有値は絶対値が 1 である．今 $M \in GL_3(\mathbb{R})$ だから，M の固有多項式は実数係数 3 次多項式．よって実数の固有値を少なくとも 1 つ持つ．この固有値は ± 1 のどちらかなので，これに対応する固有ベクトルが条件を満たす． $\square$

問 4

$S=(s_{jk})_{1\le j,k\le n}$ を正定値 n 次実対称行列とし，

$$Q(p_1,\dots,p_n)=(p_1,\dots,p_n)S\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=\sum_{1\le j,k\le n}s_{jk}p_jp_k$$

とおくとき，級数

$$\sum_{(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}\frac{1}{Q(p_1,\dots,p_n)^\lambda}$$

が収束するような実数 λ の範囲を求めよ．

解答． S は正定値な実対称行列だから，直交行列 T があって ${}^tTST=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ と書ける．ただし $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. $p={}^t(p_1,\dots,p_n), {}^tTp={}^t(q_1,\dots,q_n)$ とおくと

$$Q(p)={}^tpT\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n){}^tTp=\sum_{i=1}^n\lambda_iq_i^2\le\lambda_n\sum_{i=1}^nq_i^2=\lambda_n\|{}^tTp\|^2=\lambda_n\|p\|^2.$$

同様に $Q(p)\ge\lambda_1\|p\|^2$ だから，問題の級数の収束は $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{\|p\|^{2\lambda}}$ の収束と同値．その部分和を

$$S_m=\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ \max_{1\le i\le n}|p_i|\le m}}\frac{1}{\|p\|^{2\lambda}}=\sum_{k=1}^m\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ \max_{1\le i\le n}|p_i|=k}}\frac{1}{\|p\|^{2\lambda}}$$

とし，$A_k=\#\{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\,;\max_{1\le i\le n}|p_i|=k\}$ とおく．$\max_{1\le i\le n}|p_i|=k$ の時 $k^2\le\|p\|^2\le nk^2$ だから，S_m の収束は $\displaystyle\sum_{k=1}^m\frac{A_k}{k^{2\lambda}}$ の収束と同値．ここで

$$\begin{aligned}A_k&=\#\left\{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\,;\max_{1\le i\le n}|p_i|\le k\right\}-\#\left\{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\,;\max_{1\le i\le n}|p_i|\le k-1\right\}\\&=((2k+1)^n-1)-((2k-1)^n-1)=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(1-(-1)^{n-j})(2k)^j\end{aligned}$$

は k についての非負係数 $(n-1)$ 次多項式だから，$A_k=\sum_{j=0}^{n-1}a_jk^j\ (a_j\ge0)$ とおける．この時

$$a_{n-1}\sum_{k=1}^m\frac{1}{k^{2\lambda-n+1}}\le\sum_{k=1}^m\frac{A_k}{k^{2\lambda}}\le\sum_{j=0}^{n-1}a_j\sum_{k=1}^m\frac{1}{k^{2\lambda-j}}$$

である．$\lambda\le n/2$ の時左辺は発散し，$\lambda>n/2$ の時右辺の各項は $2\lambda-j>n-j\ge1$ より収束するので右辺も収束する．よって答えは $\lambda>n/2$. □

問 5

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の 4 点 $1, i, -1, -i$ にそれぞれ 1 匹ずつ蟻がおり，各々を A, B, C, D と名づける．今，時刻 $t=0$ から，4 匹の蟻が動き始め，蟻 A は常に蟻 B に向かって，蟻 B は蟻 C に，蟻 C は蟻 D に，蟻 D は蟻 A に向かって歩くものとする.（下図参照．この図の意味についての質問は受け付けない．各自推測せよ.）さらに 4 匹の蟻の歩く速さは同一の定数 c であるものとする．このとき次の (i)(ii) に答えよ．

(i) 蟻 A の動く曲線を求めよ．

(ii) 4 匹の蟻が衝突する時刻を求めよ．

ただし，蟻の大きさは無視せよ．

解答． (i) 時刻 t での蟻 A の位置を $x(t)$ とすると，蟻 B, C, D の位置はそれぞれ $ix(t), -x(t), -ix(t)$ となる．$\overrightarrow{AB} = (i-1)x(t)$ だから，蟻 A の速さについての条件から

$$x'(t) = c\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = c\frac{(i-1)x(t)}{\sqrt{2}|x(t)|}.$$

$x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ と極座標表示すると，$r(0)=1, \theta(0)=0$. 代入して

$$r'e^{i\theta} + ir\theta' e^{i\theta} = \frac{c}{\sqrt{2}}(i-1)e^{i\theta} \qquad \therefore r' + ir\theta' = \frac{c}{\sqrt{2}}(i-1)$$

実部と虚部を比べて

$$r' = -\frac{c}{\sqrt{2}}, \quad r\theta' = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

よって $r(t) = 1 - \dfrac{c}{\sqrt{2}}t$. 第 2 式に代入して

$$\theta' = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{1-\frac{c}{\sqrt{2}}t} \qquad \therefore \theta(t) = -\log\left(1-\frac{c}{\sqrt{2}}t\right)$$

よって蟻 A の動く曲線は

$$x(t) = \left(1-\frac{c}{\sqrt{2}}t\right)\exp\left(-i\log\left(1-\frac{c}{\sqrt{2}}t\right)\right).$$

(ii) 4 匹が衝突するのは $x(t) = ix(t) = -x(t) = -ix(t)$ の時，すなわち $x(t)=0$ のときだから，$r=0$. よって $t = \dfrac{\sqrt{2}}{c}$. □

平成 14 年度 (2001 年 8 月実施)

問 1

$n \geq 1$ は整数とし，A は $A^2 = 0$ を満たす n 次複素正方行列とする．このとき，条件

$$PAP^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{a} & \overbrace{\quad}^{a} & \overbrace{\quad}^{b} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & E_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}a \\ \}a \\ \}b \end{array}$$

を満たす可逆な n 次正方行列 P と，$2a+b=n$ なる整数 $a, b \geq 0$ が存在することを示せ．ただし，E_a は a 次単位行列を表す．

解答． A の固有値を λ, それに対応する固有ベクトルを v とすると $\lambda^2 v = A^2 v = 0$ より $\lambda = 0$. よって A の Jordan 標準形は $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ を用いて $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(J(0,n_1), \ldots, J(0,n_k))$ と書ける．

$$\mathrm{diag}(J(0,n_1)^2, \ldots, J(0,n_k)^2) = \mathrm{diag}(J(0,n_1), \ldots, J(0,n_k))^2 = Q^{-1}A^2Q = 0$$

であるが，$J(0,k)^2 = 0$ となるのは $k = 1, 2$ の時のみだから，A の Jordan 細胞のサイズは 2 以下．よって

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\underbrace{J(0,1), \ldots, J(0,1)}_{a}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{b}) \quad (2a+b=n)$$

として良い．$e_i \in \mathbb{R}^a$ を列基本ベクトルとして

$$J = \mathrm{diag}(\underbrace{J(0,1), \ldots, J(0,1)}_{a}), \quad X = \begin{pmatrix} e_1 & & e_2 & & \cdots & e_a & \\ & e_1 & & e_2 & \cdots & & e_a \end{pmatrix} \in M_{2a}(\mathbb{C})$$

とおく．この時

$$XJ = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & e_2 & \cdots & 0 & e_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_a & I_a \\ 0_a & 0_a \end{pmatrix} X,$$

$$|\det X| = \left| \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_a & & & \\ & & & e_1 & \cdots & e_a \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0$$

である．よって $R = \begin{pmatrix} X & \\ & I_b \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$ とおくと

$$\begin{aligned} RQ^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} X & \\ & I_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & \\ & 0_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XJ & \\ & 0_b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_a & I_a \\ 0_a & 0_a \end{pmatrix} X & \\ & 0_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_a & I_a & \\ 0_a & 0_a & \\ & & 0_b \end{pmatrix} R \end{aligned}$$

となるから，$P = RQ^{-1}$ とすれば良い． □

問 2

$m \geq 1, n \geq 1$ は整数，A は $m \times n$ 実行列とする．A を線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と考え，その像を $V(\subseteq \mathbb{R}^m)$ とする．このとき，行列の積 A^tA を線形写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ と考えれば，V の A^tA による像は V 全体に等しいことを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

解答． $A^tAV = A^tAA\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A^tAA, V = A\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A$ だから，$\operatorname{Im} A^tAA = \operatorname{Im} A$ を示せば良い．今 $\operatorname{Im} A^tAA, \operatorname{Im} A$ はともに $\mathbb{R}^m$ の線型部分空間であり，$\operatorname{Im} A^tAA \subset \operatorname{Im} A$ だから，$\dim \operatorname{Im} A^tAA = \dim \operatorname{Im} A$ を示せば良い．

$$\dim \operatorname{Im} A = n - \dim \operatorname{Ker} A, \quad \dim \operatorname{Im} A^tAA = n - \dim \operatorname{Ker} A^tAA$$

だから，結局 $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^tAA$ が示せれば十分．$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^tAA$ は明らか．$x \in \operatorname{Ker} A^tAA$ とすると

$$\begin{aligned} \|{}^tAAx\|^2 &= {}^tx^tAA^tAAx = {}^tx^tA0 = 0 \quad \therefore {}^tAAx = 0 \\ \|Ax\|^2 &= {}^tx^tAAx = {}^tx0 = 0 \quad \therefore Ax = 0 \end{aligned}$$

よって $x \in \operatorname{Ker} A$. これで示された． □

問 3

複素数 z , 整数 $n \geq 1$ に対して 2×2 行列

$$A_n(z) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} z & 1 - z + \dfrac{1}{z} \\ 0 & 1 + \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}^n$$

を考える．このとき単位円 $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ に沿う（反時計回りの）線積分

$$\int_\Gamma A_n(z) dz \tag{1}$$

は n によらないことを証明せよ．ただし，(1) は成分ごとに積分を行って得られる行列とする．

解答． $A_n(z) = \frac{1}{n} B_n(z)^n$ とおく．$B_n(z)$ の固有値は $z, 1 + \frac{1}{z}$, それぞれに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1} B_n(z) P = \begin{pmatrix} z & \\ & 1 + \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore B_n(z)^n = P \begin{pmatrix} z^n & \\ & \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} z^n & -z^n + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \\ & \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \end{pmatrix}$$

これの z^{-1} の係数は $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & n \end{pmatrix}$ だから

$$\int_\Gamma A_n(z) dz = \frac{1}{n} \int_\Gamma B_n(z)^n dz = \frac{2\pi i}{n} \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & n \end{pmatrix} = 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で n によらない． □

問 4

$\mathbb{N}$ を非負整数全体からなる集合，$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とし，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}^*$ への関数全体からなる集合を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ からそれ自身への写像 φ を次で定義する：任意の $f \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\varphi(f)(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ f([n/2]) + 1 & (n \neq 1). \end{cases}$$

このとき，φ の不動点（すなわち，$\varphi(f) = f$ を満たす $f \in \mathcal{F}$）をすべて求めよ．ただし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\infty + n = n + \infty = \infty + \infty = \infty$ とし，Gauss 記号 $[n/2]$ は $n/2$ を超えない最大の整数とする．

解答． $f \in \mathcal{F}$ が φ の不動点なら

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ f([n/2]) + 1 & (n \neq 1). \end{cases}$$

$f(0) = f([0/2]) + 1 = f(0) + 1$ だから $f(0) \notin \mathbb{N}$. よって $f(0) = \infty$ でなければならないが，これは $\infty + 1 = \infty$ と整合する．従って $f(0) = \infty$.

$n \in \mathbb{N}_{>1}$ とする．n の 2 進数展開を $n = \sum_{j=0}^{d-1} a_j 2^j$ $(a_j \in \{0, 1\}, a_{d-1} = 1)$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\left[\sum_{j=0}^{d-1} a_j 2^{j-1}\right]\right) + 1 = f\left(\sum_{j=1}^{d-1} a_j 2^{j-1}\right) + 1 \\ &= f\left(\left[\sum_{j=1}^{d-1} a_j 2^{j-2}\right]\right) + 2 = f\left(\sum_{j=2}^{d-1} a_j 2^{j-2}\right) + 2 \\ &= \cdots = f\left(a_{d-1}\right) + d - 1 \\ &= f(1) + d - 1 = d - 1. \end{aligned}$$

よって $f(n) = (n$ を 2 進数で書いたときの桁数$)-1$ である．

$$\begin{aligned} n > 1 \text{ が 2 進数で } k \text{ 桁} &\iff 2^{k-1} \leq n < 2^k \\ &\iff \log_2 n < k \leq 1 + \log_2 n \\ &\iff k = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$

だから，$f(n) = (1 + \lfloor \log_2 n \rfloor) - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

よって φ の不動点は

$$f(n) = \begin{cases} \lfloor \log_2 n \rfloor & (n \neq 0) \\ \infty & (n = 0) \end{cases}$$

のみ． □

問 5

正の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が収束しているとする．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ．

(ii) 任意の $x>0$ に対して，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)$$

が収束することを示せ．

(iii)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)\right\}=0$$

が成り立つことを示せ．

解答． (i) $f_N(x)=\prod_{n=1}^{N}(x+a_n)$ とおく．$a_n>0$ より $f_N(x)\in\mathbb{R}_{>0}[x]$ だから

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=(f_N\text{ の }x^{N-1}\text{ の係数})<f_N(1)=\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\to\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\quad(N\to\infty).$$

よって $\sum_{n=1}^{N}a_n$ は上に有界．$a_n>0$ から $\sum_{n=1}^{N}a_n$ は単調増加だからこれは有限値に収束する．

(ii) $x>0$ の時 $1+x<e^x$ だから

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n x)<\prod_{n=1}^{N}e^{a_n x}=\exp\left(x\sum_{n=1}^{N}a_n\right)\to\exp\left(x\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\quad(N\to\infty).$$

よって $\prod_{n=1}^{N}(1+a_n x)$ は上に有界．$1+a_n>1$ から $\prod_{n=1}^{N}(1+a_n x)$ は（N について）単調増加なので，これは有限値に収束する．

(iii) (i) より，任意に $\varepsilon>0$ を取ると $N>0$ があって任意の $n>N$ について $0<\sum_{n>N}a_n<\varepsilon$ となる．また，$x>0$ の時 $0<\log(1+x)<x$ だから

$$\begin{aligned}0<\frac{1}{x}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)&=\sum_{n\le N}\frac{\log(1+a_n x)}{x}+\sum_{n>N}\frac{\log(1+a_n x)}{x}\\&<\sum_{n\le N}\frac{\log(1+a_n x)}{x}+\sum_{n>N}a_n<\sum_{n\le N}\frac{\log(1+a_n x)}{x}+\varepsilon\to\varepsilon\quad(x\to\infty)\end{aligned}$$

である．$\varepsilon>0$ は任意なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)=0.$$

□

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 1

A は n 次複素正方行列であり，その固有値 $a_1, \ldots, a_n$ は相異なるものとする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$AB = \lambda BA$ を満たす n 次複素正方行列 B 全体のなす複素ベクトル空間を $E(\lambda)$ とする：

$$E(\lambda) = \{B\,;\,AB = \lambda BA\}$$

(i) $E(\lambda) \neq \{0\}$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．また，そのとき $E(\lambda)$ の次元を決定せよ．

(ii) $E(1)$ の基底を一組与えよ．

解答. (i) $E(\lambda)$ を $E_A(\lambda)$ と書く．仮定より $P \in GL_n(\mathbb{C})$ があって $P^{-1}AP = D := \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ と書ける．この時

$$AB = \lambda BA \Longleftrightarrow PDP^{-1}B = \lambda BPDP^{-1} \Longleftrightarrow DP^{-1}BP = \lambda P^{-1}BPD$$

なので

$$E_A(\lambda) = \{B\,;\,DP^{-1}BP = \lambda P^{-1}BPD\} = \{PXP^{-1}\,;\,DX = \lambda XD\} = PE_D(\lambda)P^{-1}.$$

よって $E_A(\lambda) = \{0\}$ と $E_D(\lambda) = \{0\}$ は同値．ゆえに $E_A(\lambda) \neq \{0\}$ と $E_D(\lambda) \neq \{0\}$ は同値．$X = (x_{ij}) \in E_D(\lambda)$ を取る．DX の (i,j) 成分は $a_i x_{ij}$, XD の (i,j) 成分は $a_j x_{ij}$ だから，$DX = \lambda XD$ は $a_i x_{ij} = \lambda a_j x_{ij}\,(1 \leq i,j \leq n)$ と同値．よって任意の i,j に対し $x_{ij} = 0$ または $a_i = \lambda a_j$ であるが，任意の i,j で $x_{ij} = 0$ なら $X = 0$ となるので，$a_i = \lambda a_j$ となる (i,j) が存在することが必要．逆に $a_i = \lambda a_j$ となる (i,j) が存在すれば，x_{kl} は $a_k = \lambda a_l$ の時任意，そうでない時 0 だから $E_D(\lambda) \neq \{0\}$. また，P は正則だから $\dim E_A(\lambda) = \dim E_D(\lambda)$. よって

$$\lambda = \frac{a_i}{a_j}\,(1 \leq i,j \leq n, a_j \neq 0), \quad \dim E_A(\lambda) = \#\{(i,j)\,;\,1 \leq i,j \leq n, a_i = \lambda a_j\}.$$

(ii) $a_1, \ldots, a_n$ は相異なるから，

$$\dim E_A(1) = \#\{(i,j)\,;\,1 \leq i,j \leq n, a_i = a_j\} = \#\{(i,i)\,;\,1 \leq i \leq n\} = n.$$

また，(i) の X について

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{任意} & (a_i = a_j) \\ 0 & (a_i \neq a_j) \end{cases} = \begin{cases} \text{任意} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

よって $E_D(1)$ の基底は $E_1, \ldots, E_n$. ただし E_i は行列単位 E_{ii}. 基底を正則行列で写しても基底であるから，$E_A(1)$ の基底も $E_1, \ldots, E_n$. $\square$

問 2

$n \geq 2,\ x_1, \ldots, x_n$ は独立変数として，n 次正方行列の行列式

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{pmatrix}$$

を考える．(注意：第 n 列の指数は $n-1$ ではなく n である．)

(i) $1 \leq i < j \leq n$ のとき $p(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_j - x_i$ で割り切れることを示せ．

(ii) $p(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1 + \cdots + x_n$ でも割り切れることを示せ．

(iii) $p(x_1, \ldots, x_n)$ を 1 次式の積で表わせ．

解答． (i) $x_k (k \neq j)$ を固定すると p は x_j の多項式となる．$x_j = x_i$ の時第 i 行と第 j 行が等しくなるから $p = 0$. よって p は $x_j = x_i$ を根に持つから p は $x_j - x_i$ で割り切れる．

(ii) $x_2, \ldots, x_n$ を固定して p を x_1 の多項式と見る．第 1 行と第 k 列を除いた行列の行列式を d_k とおいて，第 1 行について展開すると

$$p = d_1 - d_2 x_1 + \cdots + (-1)^n d_n x_1^{n-2} + (-1)^{n+1} d_n x_1^n.$$

d_k は x_1 によらないから，p の x^{n-1} の係数は 0. よって p を x_1 の多項式と見た時の根の総和は 0. (i) より $(n-1)$ 個の根は $x_2, \ldots, x_n$ だから，残り 1 つの根は $-x_2 - \cdots - x_n$. よって p は $x_1 - (-x_2 - \cdots - x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ で割り切れる．

(iii) (i),(ii) から

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_2, \ldots, x_n) \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j)$$

と書ける．(ii) の展開の x^n の係数を比べて

$$q = (-1)^{n+1} d_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

よって

$$\begin{aligned} p(x_1, \ldots, x_n) &= (-1)^{n+1} \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

□

問 3

複素数 α に対して

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \text{数列 } |z^n - \alpha^n|\,(n = 1, 2, \dots) \text{ が有界 }\}$$

とおく．$B_\alpha \neq \{\alpha\}$ となる α をすべて求めよ．

解答． ・$|\alpha| \leq 1$ の時，$|z| \leq 1$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $|z^n - \alpha^n| \leq |z|^n + |\alpha|^n \leq 1 + 1 = 2$ だから $\{z\,;\,|z| \leq 1\} \subset B_\alpha$.
・$|\alpha| > 1$ の時，$z \in B_\alpha$ を取る．$|z| > |\alpha|$ なら $|z^n - \alpha^n| = |z|^n|1 - (\alpha/z)^n| \to \infty\,(n \to \infty)$ で不適．$|z| < |\alpha|$ の時も同様に不適．よって $|z| = |\alpha|$ だから $z = \alpha e^{i\theta}\,(\theta \in \mathbb{R})$ と書ける．この時 $|z^n - \alpha^n| = |\alpha|^n|e^{in\theta} - 1|$ が有界だから，定数 $M > 0$ が存在して任意の $n = 1, 2, \dots$ に対し $|\alpha|^n|e^{in\theta} - 1| \leq M$. よって $|e^{in\theta} - 1| \leq M|\alpha|^{-n} \to 0\,(n \to \infty)$ だから $\lim_{n\to\infty}|e^{in\theta} - 1| = 0$ となることが必要．この時 $\lim_{n\to\infty} e^{in\theta} = 1$ だから $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. よって $z = \alpha$. 逆に $\alpha \in B_\alpha$ は明らかだから $B_\alpha = \{\alpha\}$.
以上から条件を満たす α は，$|\alpha| \leq 1$ を満たすもの全て． □

問 4

単位開円板 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の関数 u を

$$u(z) = \mathrm{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$$

で定める．ただし，Im は虚部を表わす．

(i) u は D 上の調和関数であることを示せ．

(ii) $\theta \in \mathbb{R}$ のとき，$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ を求めよ．

(iii) u は閉円板 $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ 上の連続関数に拡張できるか？

解答． (i) $f(z) = f_{\mathrm{Re}}(x+iy) + if_{\mathrm{Im}}(x+iy)\,(z = x+iy)$ が D 上正則とすると，

$$\frac{\partial^2 f_{\mathrm{Im}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{\mathrm{Im}}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f_{\mathrm{Re}}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_{\mathrm{Re}}}{\partial x} = 0$$

だから f_{Im} は D 上調和．今 $(\frac{1+z}{1-z})^2$ は D 上正則だから $u(z)$ は D 上調和．

(ii)

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2+2ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

だから

$$u(re^{i\theta}) = \frac{4r(1-r^2)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}.$$

よって $\cos\theta = 1$ の時は $\sin\theta = 0$ より $u(re^{i\theta}) = 0$. $\cos\theta \neq 1$ の時は

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = \frac{4\cdot 1\cdot 0\cdot \sin\theta}{(2-2\cos\theta)^2} = 0.$$

いずれにしても $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = 0$.

(iii) $\bar{D}$ まで連続に拡張できたとする．u は D 上調和だから，最大値，最小値は $\bar{D}$ の境界で取る．(ii) よりそれらはともに 0 だから $u \equiv 0$. これは矛盾．よって $\bar{D}$ まで連続に拡張できない． □

問 5A

自然数の対を入力にとる次のようなアルゴリズム F を考える.

$$F(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \text{ のとき} \\ F(m-1,1) & m \neq 0 \text{ かつ } n=0 \text{ のとき} \\ F(m-1,F(m,n-1)) & m \neq 0 \text{ かつ } n \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$F(2,n) = 2n+3$ が成り立つことを示せ.

(ii) すべての $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について，$F(m,n)$ が一意に定義されていることを示せ.

解答. (i) $F(1,0) = F(0,1) = 2$ である．これと $n \neq 0$ の時

$$F(1,n) = F(0,F(1,n-1)) = F(1,n-1)+1$$

となることから $F(1,n) = n+2$. よって $F(2,0) = F(1,1) = 3$. $n \neq 0$ の時

$$F(2,n) = F(1,F(2,n-1)) = F(2,n-1)+2$$

だから $F(2,n) = 2n+3$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $F(m,n)$ が一意に定義されていることを，m についての帰納法で示す. $m=0$ の時は定義より $F(0,n) = n+1$ だから良い．$m-1$ で正しいとする．$F(m,n)\,(n \in \mathbb{N})$ が一意に定義されていることを n についての帰納法で示す．$n=0$ の時，$F(m,0) = F(m-1,1)$ は m についての帰納法の仮定より一意に定義されている．$n-1$ まで正しいとする．$F(m,n) = F(m-1,F(m,n-1))$ であるが，n についての帰納法の仮定より $F(m,n-1)$ は一意に定義されている．従って m についての帰納法の仮定より $F(m-1,F(m,n-1))$ は一意に定義されている．よって n の時正しい．ゆえに $F(m,n)\,(n \in \mathbb{N})$ は一意に定義され，m の時も正しい．これで示された. □

問 5B

自然数 n に対して

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)\sqrt{x+1}} \qquad (0 \le x < \infty)$$

とおく．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = \pi$$

を示せ.

解答.

$$\sqrt{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m+1}{n}+1\right)\sqrt{\frac{m+1}{n}}}$$

である．ここで $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ は $x \ge 0$ において単調減少だから

$$\int_{\frac{m+1}{n}}^{\frac{m+2}{n}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \le \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{m+1}{n}+1\right)\sqrt{\frac{m+1}{n}}} \le \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

これを $m = 0, 1, 2, \dots$ について足して

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \le \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m+1}{n}+1\right)\sqrt{\frac{m+1}{n}}} \le \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m+1}{n}+1\right)\sqrt{\frac{m+1}{n}}} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{2dy}{y^2+1} \quad (x = y^2 \text{ と置換}) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

□

平成12年度 (1999年8月実施)

問1

行列 A, B, C に対して，不等式

$$r(ABC) + r(B) \geq r(AB) + r(BC)$$

が成り立つことを証明せよ．但し，A, B, C のサイズは積 ABC が定義できるようなものとし，$r(\cdot)$ は行列の階数を表す．

解答． $\begin{pmatrix} I & A \\ & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -I & \\ C & I \end{pmatrix}$ は正則だから，

$$\begin{aligned} r(ABC) + r(B) &= r\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix} = r\left(\begin{pmatrix} I & A \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & \\ C & I \end{pmatrix}\right) \\ &= r\begin{pmatrix} & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(BC). \end{aligned}$$

□

問 2

$\{-1,0,1\}$ に値をとる $\mathbb{Z}$ 上の関数全体の集合を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ への写像 S を次のように定める：任意の $f \in \mathcal{F}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$S(f)(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ のとき}, \\ f(n-5) & n \neq 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

(i) $S(f) = f$ となる $f \in \mathcal{F}$ の例をふたつ挙げよ．

(ii) $\mathcal{F}$ 上の半順序 $\sqsubseteq$ を次のように定める：

$$f \sqsubseteq g \iff f(n) \neq -1 \text{ を満たす任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して } f(n) = g(n).$$

そのとき，$S(f) = f$ を満たす $f \in \mathcal{F}$ の中で $\sqsubseteq$ について最小のものを求めよ．

解答． (i) $S(f) = f$ となることは

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ f(n-5) & (n \neq 0) \end{cases} \iff \begin{cases} f(5k) = f(0) = 0 & (k = 1, 2, \dots) \\ f(5k+j) = f(l) & (k \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3, 4) \\ f(-5k) = f(-5) & (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

と同値．よって例えば

$$f(n) = 0, \qquad f(n) = \begin{cases} 1 & (n \in 5\mathbb{Z}) \\ -1 & (n \notin 5\mathbb{Z}) \end{cases}.$$

(ii) $f \in \mathcal{F}$ に対し $A_j(f) = \{n \in \mathbb{Z}; f(n) = j\}$ とおく $(j = 0, \pm 1)$．この時

$$\begin{aligned} f \sqsubseteq g &\iff \text{任意の } n \in A_0(f) \cup A_1(f) \text{ に対し } f(n) = g(n) \\ &\iff \text{任意の } n \in A_0(f) \text{ に対し } g(n) = 0, \text{ かつ任意の } n \in A_1(f) \text{ に対し } g(n) = 1 \\ &\iff A_0(f) \subset A_0(g) \text{ かつ } A_1(f) \subset A_1(g) \end{aligned}$$

だから，$f_0 \in \mathcal{F}$ が $\sqsubseteq$ について最小であることは，$A_0(f_0)$ が $A_0(f)$ の中で（包含関係について）最小，かつ $A_1(f_0)$ が $A_1(f)$ の中で（包含関係について）最小となることと同値．(i) より任意の $f \in \mathcal{F}$ について $5\mathbb{Z}_{\geq 0} \subset A_0(f)$ だから，$A_0(f_0) = 5\mathbb{Z}_{\geq 0}, A_1(f_0) = \emptyset$ となる $f_0 \in \mathcal{F}$ が $\sqsubseteq$ について最小のもの．よって求めるものは

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n \in 5\mathbb{Z}_{\geq 0}) \\ -1 & (n \notin 5\mathbb{Z}_{\geq 0}) \end{cases}.$$

□

問 3

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の連続微分可能な実数値関数とする．

(i) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が単調増加ならば，$f(x)$ が凸関数となること，すなわち，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

となることを示せ．

(ii) ある実数 $c > 0$ が存在して $|f'(x) - f'(y)| \leq c|x-y|$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して成り立つならば，$f(x)$ は凸関数と 2 次関数の差として表されることを示せ．

解答． (i) 凸関数となる条件において，λ を $1-\lambda$ で置き換えれば x と y を入れ替えたものが得られるから，$x > y$ の場合を示せば良い．$x > y$ となる x, y を任意に固定し，$F(t) = \dfrac{f(t) - f(y)}{t - y}$ $(y < t < x)$ とおく．この時

$$F'(t) = \frac{1}{t-y}\left(f'(t) - \frac{f(t)-f(y)}{t-y}\right) = \frac{f'(t) - f'(s)}{t-y} \geq 0$$

である．ただし $s \in (y, t)$ であり，2 番目の等号は平均値の定理による．よって F は単調増加．任意の $\lambda \in [0,1]$ に対し $\lambda x + (1-\lambda)y \in [y, x]$ だから

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda x + (1-\lambda)y - y} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

$$\therefore f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\lambda \in [0,1], x > y$ は任意だったから f は凸関数．

(ii) $g(x)$ を 2 次関数であって，その 2 次の係数 a は $2a > c$ を満たすものとする．$h(x) = f(x) + g(x)$ とおくと，条件より $x > y$ の時

$$\begin{aligned} c(x-y) &\geq |(h'(x) - g'(x)) - (h'(y) - g'(y))| \\ &= |h'(x) - h'(y) - (g'(x) - g'(y))| \\ &= |h'(x) - h'(y) - 2a(x-y)|. \end{aligned}$$

よって $h'(x) - h'(y) \geq (2a-c)(x-y) > 0$ だから h' は単調増加．従って (i) より h は凸関数なので示された． □

問 4

a, b, c を実数，α を正の実数とする．線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & x(0) = a, \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{du}{dt} - u = 0, & u(0) = b, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = c \end{cases}$$

の解を $(x_\alpha(t), u_\alpha(t))$ とする．

(i) $u_\alpha(t)$ を求めよ．

(ii) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} x_\alpha(\alpha t)$ を求めよ．

解答． (i) $\lambda^2 + 2\alpha\lambda - 1 = 0$ の根は $\lambda = \lambda_\pm := -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1}$. よって定数 A, B を用いて $u_\alpha(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$ と書ける．初期条件から $A + B = b, A\lambda_+ + B\lambda_- = c$ だから

$$A = \frac{c - \lambda_- b}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{c + b(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}{2\sqrt{\alpha^2+1}}, \quad B = \frac{-c + \lambda_+ b}{\lambda_+ - \lambda_-} = -\frac{c + b(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})}{2\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

よって

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) =& \frac{c + b(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}{2\sqrt{\alpha^2+1}} \exp((-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})t) \\ &- \frac{c + b(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})}{2\sqrt{\alpha^2+1}} \exp((-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})t). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} x_\alpha(\alpha t) =& \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha t} u(s)ds \\ =& \frac{a}{\alpha} + \frac{c + b(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}(\exp((-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})\alpha t) - 1) \\ &- \frac{c + b(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})}(\exp((-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})\alpha t) - 1) \end{aligned}$$

である．ここで $\alpha \to \infty$ の時

$$\frac{c + b(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})} = \frac{\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha}{2\sqrt{\alpha^2+1}}\left(\frac{c}{\alpha} + b\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\right) \to 2b,$$

$$(-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha} \to \frac{1}{2},$$

$$\frac{c + b(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})} = \frac{-1}{2\sqrt{\alpha^2+1}(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}\left(\frac{c}{\alpha} + b\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\right) \to 0,$$

$$(-\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha)\alpha \to -\infty$$

だから

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} x_\alpha(\alpha t) = 0 + 2b(e^{t/2} - 1) - 0 = 2b(e^{t/2} - 1).$$

□

問 5

a を $0 \leq a < 1$ を満たす実数，D を $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ とする．関数族 $\mathcal{F}_a$ を

$$\mathcal{F}_a = \{f : D \to D \,|\, f \text{ は正則で } f(0) = a\}$$

と定義する．そのとき，任意の $w \in D$ に対して，$\mathbb{C}$ の部分集合 $\{f(w) \,|\, f \in \mathcal{F}_a\}$ を求めよ．

解答． $\varphi : D \to \mathbb{C}$ を $\varphi(z) = \dfrac{a-z}{1-az}$ で定める．$1 + a^2|z|^2 - (a^2 + |z|^2) = (1-a^2)(1-|z|^2) > 0$ より

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{a^2 - a(z+\bar{z}) + |z|^2}{1 - a(z+\bar{z}) + a^2|z|^2} < 1$$

だから $\varphi : D \to D$．また $\varphi(0) = a$ だから $\varphi \in \mathcal{F}_a$．

$$\varphi(\varphi(z)) = \frac{a - \frac{a-z}{1-az}}{1 - a\frac{a-z}{1-az}} = \frac{a(1-az) - (a-z)}{(1-az) - a(a-z)} = \frac{(1-a^2)z}{1-a^2} = z$$

により

$$f(w) = \varphi(\varphi(f(w))) = \frac{a - \varphi(f(w))}{1 - a\varphi(f(w))}.$$

ここで対応 $\mathcal{F}_a \to \mathcal{F}_0\,;\, f \mapsto \varphi(f)$ は全単射である．実際，$\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ なら両辺に φ を施せば $f_1 = f_2$ となるから単射．また，任意の $g \in \mathcal{F}_0$ に対し $\varphi(g) \in \mathcal{F}_a$ で $\varphi(\varphi(g)) = g$ だから全射．よって

$$\{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_a\} = \left\{\frac{a - \varphi(f(w))}{1 - a\varphi(f(w))}\,;\, f \in \mathcal{F}_a\right\} = \left\{\frac{a - f(w)}{1 - af(w)}\,;\, f \in \mathcal{F}_0\right\}.$$

従って $\{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_0\}$ を求めれば良い．$|z_0| \leq |w|$ となる $z_0 \in D$ を任意に取り，$f(z) = \frac{z_0}{w}z$ とすると，$|f(z)| \leq |\frac{z_0}{w}||z| < 1\,(z \in D)$ だから $f \in \mathcal{F}_0$．$f(w) = z_0$ だから

$$\{z \in D\,;\, |z| \leq |w|\} \subset \{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_0\}.$$

$f \in \mathcal{F}_0$ は $f(0) = 0$ を満たすから，$\frac{f(z)}{z}$ は D 上正則．よって任意の $r \in (0,1)$ を取ると最大値原理より

$$\max_{|z| \leq r}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \max_{|z| = r}\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

$r \to 1$ とすると (右辺) $\to 1$ だから $|z| < 1$ 上 $|f(z)| \leq |z|$. 特に $|f(w)| \leq |w|$. よって

$$\{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_0\} \subset \{z \in D\,;\, |z| \leq |w|\}.$$

従って $\{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_0\} = \{z \in D\,;\, |z| \leq |w|\}$ だから

$$\{f(w)\,;\, f \in \mathcal{F}_a\} = \left\{\frac{a-z}{1-az}\,;\, |z| \leq |w|\right\}.$$

□

平成 11 年度 (1998 年 8 月実施)

問 1

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間とする．U を V の線型部分空間で，$\{0\}$ でも V でもないものとし，$f: U \to U$ を線型写像とする．

(i) 線型写像 $g: V \to V$ で，g の U への制限が f と一致するものが存在することを示せ．このような g を f の V への拡張と呼ぶ．

(ii) ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $f: U \to U$ が $f(u) = \lambda u$ で与えられるスカラー写像のとき，f の V への拡張で，スカラー写像ではないが固有値はすべて λ であるものが存在することを示せ．

解答． (i) $\dim U = m, \dim V = n$ とする．$1 \le m \le n-1$ である．U の基底を $x_1, \ldots, x_m$ として，これを延長して $x_1, \ldots, x_n$ を V の基底とする．線形写像 $g: V \to V$ を

$$g(x_i) = \begin{cases} f(x_i) & (1 \le i \le m) \\ 0 & (m+1 \le i \le n) \end{cases}$$

から定まるものとする．$x \in U$ は $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \, (\alpha_i \in \mathbb{C})$ と一意に書けるから，

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g(x_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i) = f(x).$$

よって $g|_U = f$ だから，この g は条件を満たす．

(ii) 線形写像 $g: V \to V$ を

$$g(x_i) = \begin{cases} \lambda x_i & (1 \le i \le n-1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} x_j + \lambda x_n & (i = n) \end{cases}$$

から定まるものとする．この g が条件を満たすことを示す．

$x \in U$ を $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \, (\alpha_i \in \mathbb{C})$ と書くと，

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g(x_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda x_i = \lambda x$$

だから g は f の V への拡張．

$g: V \to V$ がスカラー倍写像とすると，$g(x_n) = c x_n$ となる $c \in \mathbb{C}$ が存在する．これより $\sum_{j=1}^{n-1} x_j + (\lambda - c) x_n = 0$ だが，これは $x_i, \ldots, x_n$ が 1 次独立であることに矛盾．よって $g: V \to V$ はスカラー倍写像ではない．

μ を g の固有値，$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ を対応する固有ベクトルとすると

$$\mu \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda x_i + \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \lambda x_n\right).$$

よって x_i の係数を比較して

$$\begin{pmatrix} \mu - \lambda & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mu - \lambda & -1 \\ & & & \mu - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

となる．$\mu \ne \lambda$ とすると，左辺の $n \times n$ 行列の行列式は $(\mu - \lambda)^n \ne 0$ だから $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ となり不適．よって g の固有値は λ のみ．

以上からこの g は条件を満たす． $\square$

問 2

A を n 次複素対角行列で，その対角成分 $\alpha_k\,(k=1,2,\dots,n)$ は相異なるものとする．n 次複素正方行列 $B=(b_{ij})$ と絶対値の十分小さな複素数 t に対して，行列 $A+tB$ の固有値を $\lambda_k(t)\,(k=1,2,\dots,n)$ とおく．ただし，$\lambda_k(t)$ は連続で，$\lambda_k(0)=\alpha_k\,(k=1,2,\dots,n)$ とする．

(i) 中心が α_k の適当な半径の円 C_k を選ぶと，

$$\lambda_k(t)-\alpha_k=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\,\mathrm{tr}[(zI-A-tB)^{-1}]dz$$

が成り立つことを示せ．ただし，C_k は正の向きにとる．また，tr は行列の跡（trace）を，I は n 次単位行列を表す．

(ii) $\lambda_k(t)$ の $t=0$ における Taylor 展開の 2 次までの係数を A と B の成分を用いて表せ．

解答． (i) 仮定から，$P(t)\in GL_n$ があって $P(t)^{-1}(A+tB)P(t)=\mathrm{diag}(\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t))$ と書ける．この時 $zI-A-tB=P(t)\,\mathrm{diag}(z-\lambda_1(t),\dots,z-\lambda_n(t))P(t)^{-1}$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(zI-A-tB)^{-1}]&=\mathrm{tr}[P(t)\,\mathrm{diag}((z-\lambda_1(t))^{-1},\dots,(z-\lambda_n(t))^{-1})P(t)^{-1}]\\&=\mathrm{tr}[\mathrm{diag}((z-\lambda_1(t))^{-1},\dots,(z-\lambda_n(t))^{-1})]=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-\lambda_j(t)}.\end{aligned}$$

これより

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\,\mathrm{tr}[(zI-A-tB)^{-1}]dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\sum_{j=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{z-\lambda_j(t)}dz \qquad (*)$$

である．$\lambda_k(t)$ は連続で $\lambda_k(0)=\alpha_k$ は相異なることから，$|t|$ が十分小さい時 $\lambda_k(t)$ は相異なり，$\lambda_k(t)$ は α_k の十分近くにある．よって中心 α_k の円 C_k の半径を十分小さく取れば，C_k の周および内部に $\lambda_j(t)\,(j\neq k)$ を含まず，しかも C_k の内部に $\lambda_k(t)$ があるように出来る．この時 $(*)$ の右辺は $j=k$ の項のみ残り，$\lambda_k(t)-\alpha_k$ に等しい．

(ii) 以下 $'$ は t による微分を表す．$X=zI-A-tB$ とおく．$XX^{-1}=I$ を微分して $X'X^{-1}+X(X^{-1})'=0$ だから $(X^{-1})'=-X^{-1}X'X^{-1}$. よって

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(X^{-1})'|_{t=0}]&=\mathrm{tr}[-X^{-1}X'X^{-1}|_{t=0}]=\mathrm{tr}[(zI-A)^{-1}B(zI-A)^{-1}]\\&=\mathrm{tr}[(b_{ij}(z-\alpha_i)^{-1}(z-\alpha_j)^{-1})_{ij}]=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jj}}{(z-\alpha_j)^2}\end{aligned}$$

なので

$$\lambda_k'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\,\mathrm{tr}[(X^{-1})'|_{t=0}]dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jj}}{(z-\alpha_j)^2}dz=b_{kk}.$$

同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(X^{-1})''|_{t=0}]&=\mathrm{tr}[(-X^{-1}X'X^{-1})'|_{t=0}]=\mathrm{tr}[2X^{-1}X'X^{-1}X'X^{-1}|_{t=0}]\\&=\mathrm{tr}[2(zI-A)^{-1}B(zI-A)^{-1}B(zI-A)^{-1}]\\&=\mathrm{tr}\left[\left(2\sum_{l=1}^{n}b_{il}b_{lj}(z-\alpha_l)^{-1}(z-\alpha_i)^{-1}(z-\alpha_j)^{-1}\right)_{ij}\right]\\&=\sum_{j=1}^{n}2\sum_{l=1}^{n}b_{jl}b_{lj}(z-\alpha_l)^{-1}(z-\alpha_j)^{-2}\end{aligned}$$

から

$$
\begin{aligned}
\lambda_k''(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\,\mathrm{tr}[(X^{-1})''|_{t=0}]dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}(z-\alpha_k)\sum_{1\le j,l\le n} 2b_{jl}b_{lj}(z-\alpha_l)^{-1}(z-\alpha_j)^{-2}dz \\
&= 2\sum_{\substack{1\le l\le n\\ l\ne k}}\frac{b_{kl}b_{lk}}{\alpha_k-\alpha_l}.
\end{aligned}
$$

最後の等号は，$z=\alpha_k$ での極の位数に注目すれば $j=k\ne l$ の項のみ残ることによる．よって $\lambda_k(t)$ の Taylor 展開は

$$
\lambda_k(t)=\alpha_k+b_{kk}t+2\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne k}}\frac{b_{kj}b_{jk}}{\alpha_k-\alpha_j}t^2+\cdots.
$$

□

問 3

$0 < a < 1$ として，$x \geq 0$ における関数列 $f_n(x)$ を

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a, \\ f_n(x) &= e^{-x} f_{n-1}(x) + \int_0^x e^{-(x-y)} (f_{n-1}(y))^2 dy \end{aligned}$$

により定める．

(i) $0 < f_n(x) < 1$ を示せ．

(ii) 各 $x \geq 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在することを示せ．

(iii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくとき，$f(x)$ は単調減少（非増加）であることを示せ．

解答． (i) n についての帰納法で示す．$n = 0$ の時は自明．$n-1$ で正しい時 $f_n(x) > 0$ は明らか．また，

$$f_n(x) < e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-y)} dy = e^{-x} + (1 - e^{-x}) = 1$$

より n でも正しい．これで示された．

(ii) $f_n(x) \leq f_{n-1}(x)$ を帰納法で示す．$n = 1$ の時は

$$f_1(x) - f_0(x) = (ae^{-x} + a^2(1 - e^{-x})) - a = (1 - e^{-x})(a^2 - a) \leq 0$$

だから正しい．n で正しい時，(i) より $0 < f_n(x) \leq f_{n-1}(x)$ だから

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-x}(f_n(x) - f_{n-1}(x)) + \int_0^x e^{-(x-y)}(f_n(y)^2 - f_{n-1}(y)^2) dy \leq 0.$$

よって $n+1$ でも正しい．これより $f_n(x)$ は n について単調減少．また (i) より下に有界だから $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する．

(iii) (i) より任意の $x \geq 0$ に対し

$$\int_0^x |e^{-(x-y)} f_{n-1}(y)^2| dy \leq \int_0^x e^{-(x-y)} dy = 1 - e^{-x} < \infty$$

だから，漸化式で $n \to \infty$ とすれば Lebesgue の収束定理より

$$f(x) = e^{-x} f(x) + \int_0^x e^{-(x-y)} f(y)^2 dy \qquad \therefore (e^x - 1) f(x) = \int_0^x e^y f(y)^2 dy$$

微分して

$$(e^x - 1) f'(x) + e^x f(x) = e^x f(x)^2 \qquad \therefore f'(x) = \frac{e^x f(x)(f(x) - 1)}{e^x - 1}$$

(i) より $x > 0$ において $0 \leq f(x) \leq 1$ だから $f'(x) \leq 0$. よって $f(x)$ は単調減少． $\square$

問 4

次の条件を満たす連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える：

任意の実数 x に対して $f(f(x)) = x+2$ であり，$f(0)$ は整数．

(i) f は単調増加であり，$f(x) > x$ がすべての実数 x について成り立つことを示せ．
(ii) 任意の整数 m に対して $f(m) = m+1$ となることを示せ．
(iii) ある実数 x について $f(x) \neq x+1$ となる f の例を挙げよ．

解答． (i) $f(x) = f(y)$ とすると $x+2 = f(f(x)) = f(f(y)) = y+2$ なので f は単射．f は連続だから，単調増加か単調減少である．実際 $x<y<z$ で $f(x), f(y) < f(z)$ となるものが存在したとすると，中間値の定理より十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $f(x_0) = f(y_0) = f(z) - \varepsilon$ となる $x_0 \in (x,z), y_0 \in (z,y)$ が存在する．これは f の単射性に反する．同様に $x<z<y$ であって $f(z) < f(x), f(y)$ となるものも存在しないので，f は単調．今 $f(x+2) = f(f(f(x))) = f(x)+2$ だから単調減少ではない．よって f は単調増加．また，$f(x) \le x$ となる x が存在したとすると $x+2 = f(f(x)) \le f(x) \le x$ で矛盾．

(ii) $f(0) \ge 2$ とすると $f(2) \le f(f(0)) = 2 \le f(0) = f(2)-2$. となり矛盾．従って $f(0) < 2$. (i) から $f(0) > 0$ だから，仮定と合わせて $f(0) = 1$. これより $f(1) = f(f(0)) = 2$. 任意の x に対し $f(x+2) = f(x)+2$ だったから，任意の整数 m に対し $f(m) = m+1$.

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2n)^2 + 2n + 1 & (2n \le x < 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt{x-(2n+1)} + 2(n+1) & (2n+1 \le x < 2(n+1),\ n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 2n+1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 2n+1} (x-2n)^2 + 2n + 1 = 2(n+1) = f(2n+1), \\ \lim_{x \nearrow 2n} f(x) &= \lim_{x \nearrow 2n} \sqrt{x-(2n-1)} + 2n = 2n+1 = f(2n) \end{aligned}$$

だから f は $\mathbb{R}$ 上連続．また $f(0) = 1 \in \mathbb{Z}$. $2n \le x < 2n+1$ の時 $2n+1 \le f(x) < 2(n+1)$ だから

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f((x-2n)^2 + 2n + 1) \\ &= \sqrt{(x-2n)^2 + 2n + 1 - (2n+1)} + 2(n+1) \\ &= x+2. \end{aligned}$$

$2n+1 \le x < 2(n+1)$ の時 $2(n+1) \le x < 2(n+1)+1$ だから

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(\sqrt{x-(2n+1)} + 2(n+1)) \\ &= (\sqrt{x-(2n+1)} + 2(n+1) - 2(n+1))^2 + 2(n+1) + 1 \\ &= x+2. \end{aligned}$$

よって任意の x に対し $f(f(x)) = x+2$. f は $2n \le x < 2n+1$ において下に凸，$2n+1 \le x < 2(n+1)$ において上に凸であり，$x \in \mathbb{Z}$ の時 $f(x) = x+1$ だから，$x \notin \mathbb{Z}$ の時 $f(x) \neq x+1$. よってこの f は条件を満たす． □

問 5A

連続関数 $|\sin x|$ の Fourier 展開

$$|\sin x| = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (-\pi < x < \pi)$$

の係数を決定せよ．両辺を 2 乗してその Fourier 展開の定数項を比較すると，どんな式が得られるか.

解答.

$$|\sin x| = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{|n|}e^{inx} \quad (*)$$

の両辺に $e^{-ikx}\,(k \geq 0)$ をかけて $(-\pi < x < \pi)$ 上で積分すると，右辺は πa_k. 左辺は $k \neq \pm 1$ の時

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}|\sin x|dx &= \int_0^{\pi} e^{-ikx}\sin x dx - \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} e^{-ikx}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx - \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx \\
&= \frac{-1}{2}\left(\frac{e^{(-k+1)ix}}{-k+1} - \frac{e^{(-k-1)ix}}{-k-1}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{-1}{2}\left(\frac{e^{(-k+1)ix}}{-k+1} - \frac{e^{(-k-1)ix}}{-k-1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} \\
&= -\frac{2(1+(-1)^k)}{k^2-1} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{4}{k^2-1} & k : 偶数 \\ 0 & k : 奇数, \end{cases}
\end{aligned}$$

$k = \pm 1$ の時

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mp ix}|\sin x|dx = \int_0^{\pi} e^{\mp ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}dx - \int_{-\pi}^{0} e^{\mp ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}dx = 0.$$

よって

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{k^2-1} & k : 偶数 \\ 0 & k : 奇数. \end{cases}$$

$(*)$ の両辺を 2 乗すると

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{|n|}^2 e^{2inx} + \sum_{m\neq n} a_{|m|}a_{|n|}e^{i(m+n)x}\right) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)$$

だから，定数項を比べると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(a_0^2 + \sum_{\substack{m\neq n \\ m+n=0}} a_{|m|}a_{|n|}\right) &= \frac{1}{4}\left(a_0^2 + 2\sum_{n\geq 1} a_n^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + 2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-4}{\pi}\frac{1}{(2n)^2-1}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

□

問 5B

有限個の文字からなる集合を一つ固定し，これらの文字からなる有限の長さの文字列について考える．長さ n の文字列 $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ と長さ m の文字列 $v = b_1 b_2 \cdots b_m$ に対して，これらを並べて得られる長さ $n+m$ の文字列を

$$uv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

と表す．

このとき，文字列の集合 A, B に対して，

$$X = A \cup BX$$

を満たす文字列の集合 X は存在するか．また，その一意性は成り立つか．ただし，

$$BX = \{ux \mid u \in B, x \in X\}.$$

（ここでは，”長さ 0 の文字列”は考えないことにする．）

解答． $X_0 = \bigcup_{n \geq 0} B^n A$ とすると

$$A \cup BX_0 = A \cup \bigcup_{n \geq 1} B^n A = \bigcup_{n \geq 0} B^n A = X_0.$$

だから条件を満たす．

条件を満たす X は一意であることを示す．まず，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} X = A \cup BX = A \cup B(A \cup BX) &= \bigcup_{n=0}^{1} B^n A \cup B^2 A \\ = \cdots &= \bigcup_{n=0}^{N} B^N A \cup B^{N+1} X \end{aligned}$$

が成立する．任意の $x \in X_0$ に対し $x \in B^N A$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在するが，

$$B^N A \subset \bigcup_{n=0}^{N} B^n A \cup B^{N+1} X = X$$

だから $x \in X$．よって $X_0 \subset X$．任意に $N \in \mathbb{N}$ を固定する．$|x| = N$ となる $x \in X$ を任意に取る．B は長さ 0 の文字列を含まないから，$B^{N+1}X$ の元の長さは $N+1$ 以上．よって $x \in \bigcup_{n=0}^{N} B^n A \subset \bigcup_{n \geq 0} B^n A \subset X_0$．$N$ は任意だから $X \subset X_0$．これで示せた． □