力学　予習ノート　第 3 回

学生番号 05502211

2023 年 8 月 5 日

1　剛体の回転運動についての一般論

大きさがある物体 (剛体) は回転可能である。密度 ρ の剛体 M を考える。
体積 ΔV_i の N 個の ΔM_i に分割することを考える。すなわち $\Delta M_i = \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i$ である。このとき、剛体の質量 M は

$$M = \lim_{N\to\infty} \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i = \int \rho(\boldsymbol{r}_i) dV \tag{1}$$

同様に体積は

$$V = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = \int dV \tag{2}$$

重心について

$$M\boldsymbol{r}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i, \qquad \boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{3}$$

であったので、剛体の重心 $\boldsymbol{r}_G$ について

$$M\boldsymbol{r}_G = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \Delta M_i = \lim_{N\to\infty} \boldsymbol{r}_i \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{4}$$

となる。ある点から見た剛体の各点の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$ であり、その点から見た重心の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_G$ である。この重心から見た剛体の各点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'_i$ とすると、$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G$ であるので

$$\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}) dV = \int (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G)\rho(\boldsymbol{r}) dV = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) dV - M\boldsymbol{r}_G = 0 \tag{5}$$

となる。これは自明で重心位置から見たとき、その重心は原点となる。

＜例＞厚み d で、底辺 a 高さ b の三角形の重心を求めよ。
まず、この連続体の全質量は

$$M = \int \rho dV = \rho d \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy = \rho d \int_0^a \frac{b}{a} x dx = \frac{b\rho d}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{abd}{2}\rho$$

次に重心の x 座標について

$$
\begin{aligned}
Mx_G &= \int \rho x dV = \rho d \int_0^a x dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy \\
&= \rho d \int_0^a \frac{b}{a} x^2 dx = \frac{b\rho d}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2 bd}{3}\rho \qquad\qquad \therefore x_G = \frac{2}{3}a
\end{aligned}
$$

次に重心の y 座標について

$$
\begin{aligned}
My_G &= \int \rho y dV = \rho d \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} y dy = \rho d \int_0^a dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{b}{a}x} \\
&= \rho d \int_0^a \frac{b^2}{2a^2} x^2 dx = \frac{b^2 \rho d}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab^2 d}{6}\rho \qquad\qquad \therefore y_G = \frac{1}{3}b
\end{aligned}
$$

＜例＞一様な面密度 σ の半径 a の重心の位置を求めよ。
極座標系で考える。まず、$dS = rdrd\theta$、$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$
重心座標 x について

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{Mx_G}{M} = \frac{\int \sigma x dS}{\int \sigma dS} = \frac{\int_0^a \int_0^\pi \sigma r \cos\theta r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^\pi \sigma r dr d\theta} = \frac{\sigma \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \cos\theta d\theta}{\sigma \int_0^a r dr \int_0^\pi d\theta} \\
&= \frac{\frac{a^2}{3}\left[\sin\theta\right]_0^\pi}{\frac{a^2}{2}\pi} = \frac{2a}{3\pi} \times 0 = 0
\end{aligned}
$$

y 座標について

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{My_G}{M} = \frac{\int \sigma y dS}{\int \sigma dS} = \frac{\int_0^a \int_0^\pi \sigma r \sin\theta r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^\pi \sigma r dr d\theta} = \frac{\sigma \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta}{\sigma \int_0^a r dr \int_0^\pi d\theta} \\
&= \frac{\frac{a^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi}{\frac{a^2}{2}\pi} = \frac{4a}{3\pi}
\end{aligned}
$$

重力について、物体は質量に比例する力を受けるので、微小体積に分割して考えられる。重力 $\boldsymbol{F}_g$ について

$$
\boldsymbol{F}_g = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \Delta M_i \boldsymbol{g} = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i\right)\boldsymbol{g} = \int \rho(\boldsymbol{r}) dV \boldsymbol{g} = M\boldsymbol{g} \tag{6}
$$

これより剛体の運動を考えるとき、<u>重力は重心に働く</u>と考えても良い。剛体の角運動量は

$$
\boldsymbol{L} = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times \Delta M_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \int \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dV \tag{7}
$$

と書ける。$\rho(\boldsymbol{r})$ はスカラーであることに注意する。次に重力のモーメントは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_g &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \times \Delta M_i \boldsymbol{g} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) dV \times \boldsymbol{g} = \int (\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}) dV \times \boldsymbol{g} \\
&= \int \boldsymbol{r}_G \rho(\boldsymbol{r}) dV \times \boldsymbol{g} + \int \boldsymbol{r}' \rho(\boldsymbol{r}) dV \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_G \left(\int \rho(\boldsymbol{r}) dV\right) \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\boldsymbol{r}_G$ は重心の位置ベクトルで $\boldsymbol{r}'$ は重心を原点とする剛体の各点の位置ベクトルである。第二段目の第一式は重心のモーメントと重心周りのモーメントであるが、2 項目に関しては 0 になる。これにより $\boldsymbol{N}_g = \boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g}$ が求まるが、これより剛体の重力のモーメントは、重心に働くと考えてよい。ただし、全モーメントによる角運動量の変化を考える際には、重力以外の他の外力は個々で計算して和をとる必要がある。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{9}$$

偶力のモーメントについて少し考える。偶力とは、剛体の 2 点に逆向きに等しい力が働いているときのそれぞれの力である。すなわち、$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ であり、$\boldsymbol{F}_1 // \boldsymbol{F}_2$ である。このとき、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_1 = 0$$

であるから、並進運動はしない。しかし、原点周りの偶力のモーメントは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \neq 0$$

と相対的な位置ベクトルと力の積となる。これより偶力のモーメントの大きさは原点の取り方に依らない。

次に慣性モーメントについて考えていく。
まず z 方向の角運動量 L_z は

$$L_z = \left[\int \boldsymbol{r} \times \rho(\boldsymbol{r}) \frac{d\boldsymbol{r}}{dtdV}\right]_z = \int \rho(\boldsymbol{r}) \left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_z dV = \int \rho(\boldsymbol{r})(xv_y - yv_x)dV \tag{10}$$

である。これを円柱座標系に直してみる。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の xy 平面への射影が x 軸となす角を θ、z 軸へのあしの長さを ξ とする。剛体では ξ が一定であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\theta, \qquad y = \xi \sin\theta \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\cos\theta - \xi\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = -\xi\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sin\theta + \xi\frac{d\theta}{dt}\cos\theta = \xi\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \end{aligned}$$

であるから、角運動量 L_z は

$$\begin{aligned} L_z &= \int \rho(\boldsymbol{r})(xv_y - uv_x)dV = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{d\theta}{dt}dV \\ &= \left(\int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV\right)\frac{d\theta}{dt} = I_z \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \tag{11}$$

と表せられる。ここで

$$I_z \equiv \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV = \int (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \qquad [L^2M] \tag{12}$$

と定義した。この I_z が慣性モーメントと呼ばれ、回転運動での質量的役割、回転のしにくさを表す量である。これより力のモーメントは

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{13}$$

で表され、剛体の回転における運動方程式が立てられる。実際にニュートンの運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ と見比べても I_z が回転運動での質量に対応していることが分かる。
以上は回転軸が常に一定の方向を考え、L_z の場合に限り議論したが、一般の場合には

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \int \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\rho dV \\ &= \int \left[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\right]\rho dV \end{aligned} \tag{14}$$

$\boldsymbol{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{e}_x + \omega_y\boldsymbol{e}_y + \omega_z\boldsymbol{e}_z$ を用いて成分ごとに計算すると

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{15}$$

ただし、

$$\begin{cases} I_{xx} = \int (y^2+z^2)\rho dV, \quad I_{xy} = -\int xy\rho dV, \quad I_{xz} = -\int xz\rho dV \\ I_{yx} = I_{xy}, \quad I_{yy} = \int (z^2+x^2)\rho dV, \quad I_{yz} = -\int yz\rho dV \\ I_{zx} = I_{xz}, \quad I_{zy} = I_{yz}, \quad I_{zz} = \int (x^2+y^2)\rho dV \end{cases} \tag{16}$$

である。この I_{ij} という 3^2 個の量の組は、慣性テンソルと呼ばれる 2 階のテンソルである。さらに、$i = j$ なる成分は慣性能率、$i \neq j$ なる成分は慣性乗積と呼ばれる。ここで (14) の式の注意をしておくと、一行目から二行目の式変形では、

$$\boldsymbol{r}^2 = (\text{一定}), \qquad \therefore \boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$$

より速度ベクトルは位置ベクトルと直交していて、適当な $\boldsymbol{\omega}(t)$ を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t)$$

と書くことが可能であることを用いた。この ω が角速度であることは、相対運動 (回転運動) を参照。また、二行目から三行目の式変形にはベクトル解析の BAC-CAB 則を用いた。
回転軸が常に z 軸であるとき、$\boldsymbol{\omega} = \left(0, 0, \omega_z = \frac{d\theta}{dt}\right)$ と取れるので、以前の議論と一致する。
また、軸まわりの慣性能率を

$$I = \int (x^2+y^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \equiv Mk^2 \tag{17}$$

と置いたとき、この k を回転半径と呼ぶ。

$$k := \sqrt{\int \xi^2\rho(\boldsymbol{r})dV \Big/ M}$$

で表される通り、剛体の各部分の回転軸からの距離に質量の重みをつけた 2 乗平均として解釈される。

慣性モーメントについて 2 つ定理を挙げる。

[定理 1]　移動則

質量 M なる剛体の重心 G を通る軸の周りの慣性モーメント (慣性能率) を I_G、その軸に平行で h だけ離れた軸まわりの慣性モーメントを I_z とすると、

$$I_z = I_G + Mh^2 \tag{18}$$

が成り立つ。

[定理 2]　平板合成則

薄い平板状の剛体の一点 O を通り板に垂直な軸まわりの慣性モーメント (慣性能率) を I_{zz} とし、O 点を通り、平板に平行で互いに直交する 2 軸のまわりの慣性モーメント (慣性能率) を I_{xx}, I_{yy} とすれば、

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \tag{19}$$

が成り立つ。

(証明 1)

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}'$、慣性モーメントの定義　$I_G = \int (x'^2 + y'^2)\rho dV$ を用いて I_z について式変形をしていくと

$$\begin{aligned}
I_z &= \int (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \\
&= \int \left((x_G + x')^2 + (y_G + y')^2\right)\rho(\boldsymbol{r})dV \\
&= (x_G^2 + y_G^2)\int \rho(\boldsymbol{r})dV + 2x_G\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV + 2y_G\int y'\rho(\boldsymbol{r})dV + \int (x'^2 + y'^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \\
&= Mh^2 + I_G
\end{aligned}$$

ただし、重心を原点としたときの重心座標は 0 であるから $\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV = \int y'\rho(\boldsymbol{r})dV = 0.$

(証明 2)

I_{zz} について

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dV = \int (x^2 + y^2)\sigma(\boldsymbol{r})dS \\
&= \int x^2\sigma(\boldsymbol{r})dS + \int y^2\sigma(\boldsymbol{r})dS
\end{aligned}$$

体積要素から面素への変換を行った。この場合、薄い平板を仮定してるので、z 方向に質点は存在しない。

$$\begin{aligned}
I_{xx} &:= \int (y^2 + z^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \quad \longrightarrow \quad \int y^2\sigma(\boldsymbol{r})dS \\
I_{yy} &:= \int (z^2 + x^2)\rho(\boldsymbol{r})dV \quad \longrightarrow \quad \int x^2\sigma(\boldsymbol{r})dS
\end{aligned}$$

となるので、結局 $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$.

[演習問題]

(91)*

一様な面密度 σ で半径 a の 1/4 円 $(x > 0, y > 0)$ の重心の位置を求めよ。

(91-2)*

厚み d 密度 ρ で一辺 a の正三角形の板について重心を計算せよ。

(92)*

一様な密度 ρ の半径 a の半球の質量を極座標で求めよ。さらにその重心の高さ z_G を求めよ。

(93.1)

慣性モーメントの重心からの移動則を証明せよ。

(93.2)

慣性モーメントの平板の合成則を証明せよ。