力学　予習ノート　第 4 回

学生番号 05502211

2023 年 8 月 5 日

1　慣性モーメントの計算例

< 例題 1 >
質量 M で半径 a の薄円盤の x, y, z 各軸の周りの慣性モーメントと回転半径を求めよ。

>>> まず単位面積あたりの質量 σ は $M = \pi a^2 \times \sigma$ より $\sigma = \dfrac{M}{\pi a^2}$ である。z 軸周りの慣性モーメントを定義通り計算していくと

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\sigma dS = \int \xi^2 \sigma dS = \sigma \int_0^a \int_0^{2\pi} \xi^2 \xi d\theta d\xi$$
$$= \sigma \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sigma \left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\sigma a^4}{2} = \frac{M}{2}a^2$$

となる。ただし、$dS = \xi d\xi d\theta$ である。これより z 軸周りの慣性モーメントは $\dfrac{M}{2}a^2$ で、回転半径は
$k = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ である。
円盤は対称的であることと、平板の合成則を用いて

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x \qquad \therefore I_x = I_y$$

であるから、x 軸及び y 軸周りの慣性モーメントと回転半径は

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{M}{4}a^2 \qquad k = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

< 例題 2 >
質量 M、密度 ρ 半径 a の球の、中心周りの慣性モーメントを極座標計算で求めよ。

>>> 体積要素は $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$、また、$\xi = r\sin\theta$、$M = \dfrac{4\pi\rho a^3}{3}$、$\rho = \dfrac{3M}{4\pi a^3}$ である。

球は中心で点対称であるから、中心を通る z 軸を任意に選び、その慣性モーメントを求めると

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int \xi^2 \rho dV = \rho \int\int\int r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4 \sin^2\theta \cdot \sin\theta dr d\theta d\phi = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a d\theta d\phi \\
&= \rho \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} - \int_1^{-1} (1-t^2) dt d\phi \qquad (\because \cos\theta = t,\ -\sin\theta d\theta = dt,\ 0 \to \pi : 1 \to -1) \\
&= \rho \frac{a^5}{5}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{3M}{4\pi a^3}\cdot\frac{a^5}{5}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)2\pi = \frac{2}{5}Ma^2
\end{aligned}
$$

と求まる。

< 例.3 >
上の例題 2 において、中心周りの慣性モーメントを対称性から求めよ。

>>> 対称性より $I = I_x = I_y = I_z$ である。またそれぞれ、

$$
I_x = \int\int\int \rho(y^2+z^2)dV, \quad I_y = \int\int\int \rho(x^2+z^2)dV, \quad I_z = \int\int\int \rho(x^2+y^2)dV
$$

であるから、

$$
3I = I_x + I_y + I_z = \int\int\int 2\rho(x^2+y^2+z^2)dV
$$

よって

$$
\begin{aligned}
I_z = I &= \frac{2}{3}\int\int\int \rho r^2 dV = \frac{2}{3}\rho\int\int\int r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{2}{3}\rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a \int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\phi \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3M}{4\pi a^3}\cdot\frac{a^5}{5}\cdot 4\pi = \frac{2}{5}Ma^2
\end{aligned}
$$

< 例.4 >
重心と中心が原点となるような 3 辺 a, b, c の質量 M の直方体を考える。この直方体について、各軸の慣性モーメントと回転半径を求めよ。

>>> 密度は $\rho = \dfrac{M}{abc}$ である。z 軸周りの慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int (x^2+y^2)\rho dV = \rho \left(\int x^2 dV + \int y^2 dV \right) = \rho \int_{[c]} \int_{[b]} \int_{[a]} x^2 dxdydz + \rho \int_{[c]} \int_{[b]} \int_{[a]} y^2 dxdydz \\
&= \rho \int_{[c]} \int_{[b]} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-a/2}^{a/2} dydz + \rho \int_{[c]} \int_{[a]} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-b/2}^{b/2} dxdz \\
&= \frac{\rho}{3} \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{8} \int_{[c]} \int_{[b]} dydz + \frac{\rho}{3} \cdot 2 \frac{b^3}{8} \int_{[c]} \int_{[a]} dxdz = \frac{a^3}{12} \rho \cdot bc + \frac{b^3}{12} \rho \cdot ca = \frac{\rho}{12} abc(a^2+b^2) \\
&= \frac{M}{12}(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

回転半径は $k_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{M}} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}}$. I_x と I_y も同様である。巡回置換をとって

$$
I_x = \frac{M}{12}(b^2+c^2) \quad k_x = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\sqrt{3}}, \qquad I_y = \frac{M}{12}(c^2+a^2) \quad k_y = \frac{\sqrt{c^2+a^2}}{2\sqrt{3}}
$$

実体振り子について。
大きさのある振り子を考える。剛体における回転運動の運動方程式は

$$
N_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1}
$$

であった。実体振り子の力のモーメント N_z を求めると

$$
N_z = \Big[\boldsymbol{r}_G \times Mg\boldsymbol{e}_x \Big]_z = Mg\Big[(x_G, y_G, 0) \times (0,0,1) \Big]_z = -y_G Mg = -Mgh\sin\theta
$$

ただし、実体振り子の質量は M、振り子の重心と x 軸がなす角を θ とし、$h = \sqrt{x_G^2 + y_G^2}$ $\quad y_G = h\sin\theta$ である。これより実体振り子の運動方程式は

$$
I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\sin\theta \simeq -Mgh\theta \tag{2}
$$

となる。つまり

$$
\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I_z}\theta \tag{3}
$$

となって

$$
\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I_z}} \tag{4}
$$

であり、一般解は

$$
\theta = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{5}
$$

で与えられる。通常の単振り子の表式に習って

$$
\omega' = \sqrt{\frac{g}{l_E}} \tag{6}
$$

と置いたときに得られる

$$
l_E \equiv \frac{I_z}{Mh} \tag{7}
$$

を相当単振り子の長さという。I_z について移動則で展開すると

$$l_E = \frac{I_G + Mh^2}{Mh} = \frac{I_G}{Mh} + h = \frac{k_G^2}{h} + h \tag{8}$$

となる。ここで k_G は重心周りの回転半径である。

$$\frac{dl_E}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\frac{k_G^2}{h} + h\right) = \left(-\frac{k_G^2}{h^2} + 1\right) = 0$$

を解いて分かるように l_E は $h = k_G$ で極小値をとる。すなわち、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_E}{g}}$$

であるから、$h = k_G$ のとき、一番早く振動することが分かる。

[練習問題]

(94)

質量 M で半径 a の薄円盤の x, y, z 各軸周りの慣性モーメントと回転半径 k を求めよ。

(95)

質量 M、密度 ρ、半径 a の球の、中心周りの慣性モーメントを極座標計算で求めよ。

(95-3)*

質量 M 面密度 σ 半径 a の球殻の、中心周りの慣性モーメントを極座標計算で求めよ。また回転半径を求めよ。

(95-4)*

質量 M 面密度 σ 半径 a の球殻の、中心周りの慣性モーメントを対称性から求めよ。

(95-5)

重心と中心が原点となるような 3 辺の a, b, c の質量 M の直方体を考える。この直方体について、各軸の慣性モーメントと回転半径を求めよ。

(96)

重心から h だけ離れたところに軸がある実体振り子の周期を求めよ。また周期を最小にする h の値とそのときに周期の最小値を求めよ。