解析力学 4　Noether の定理

1　Noether の定理

Neother の定理

LagrangianL$(q,\dot{q},t)$ が微小変換

$$q_i(t) \longrightarrow q_i(t) + \sum_A F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A$$

$$\dot{q}_i \longrightarrow \dot{q}_i(t) + \sum_A \frac{d}{dt}F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A$$

のもとで、その変化分 δL が時間についての全微分項

$$\delta L = \sum_A \frac{d}{dt}Y^A(q,\dot{q},t)\varepsilon_A$$

となるならば、

$$Q^A = \sum_i \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}F_i^A(q,\dot{q}) - Y^A(q,\dot{q},t)$$

で与えられる Q^A は保存量である。

index A は変換の種類を表し、ε_A は A 番目の変換の大きさを与える微小定数である。
定理の導出を行う。微小変換のもとで、Lagrangian の変化分 δL は多変数関数のテイラー展開

$$L(q+d_1,\dot{q}+d_2,t) = L(q,\dot{q},t) + \left(d_1\frac{\partial}{\partial q} + d_2\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right)L(q,\dot{q},t) + \frac{1}{2}\left(d_1\frac{\partial}{\partial q} + d_2\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right)^2 L(q,\dot{q},t) + \cdots$$

を利用して、1 次の微小量までとると、

$$\delta L = \left(\sum_A F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A\right)\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} + \left(\sum_A \frac{d}{dt}F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A\right)\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}$$

ここで E-L 方程式より

$$\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

であるから

$$\delta L = \left(\sum_A F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) + \left(\sum_A \frac{d}{dt}F_i^A(q,\dot{q})\varepsilon_A\right)\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}$$

積の微分法則より

$$\delta L = \sum_A \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} F_i^A(q, \dot{q}) \right) \right] \varepsilon_A$$

これが時間についての全微分項となるならば、

$$\sum_A \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} F_i^A \right) \right] \varepsilon_A = \sum_A \frac{d}{dt} Y^A(q, \dot{q}, t) \varepsilon_A$$
$$\Longrightarrow \sum_A \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A - Y^A \right) \right] = 0$$

各 A は独立であるから、各 A に対して

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} F_i^A - Y^A \right) = 0$$

すなわち、

$$Q^A = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A - Y^A$$

は時間に依らず一定で、保存量となる。

$$\frac{d}{dt} Q^A = 0$$

時間並進対称性とエネルギー保存則

系が時間並進対称性をもつとき、エネルギー

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q})$$

は保存される。

Noether の定理からこれを導く。
時間並進対称性をもつ (陽な時間依存性をもたない)Lagrangian を考える。微小時間 ε_0 だけ $t \to t + \varepsilon_0$ 変換すると、q と $\dot{q}$ は

$$q_i(t) \longrightarrow q_i(t + \varepsilon_0) \simeq q_i(t) + \dot{q}_i(t)\varepsilon_0$$
$$\dot{q}_i(t) \longrightarrow \dot{q}_i(t + \varepsilon_0) \simeq \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i\varepsilon_0$$

となる。このとき、Lagrangian の変化分 δL は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \varepsilon_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \varepsilon_0 = \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) \varepsilon_0$$

Noether の定理より、$F^A \to \dot{q}_i, Y^A \to L$ が対応して保存量

$$E = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$

を得る。

今、Lagrangian が

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

で与えられている N 自由度系を考える。$U(q)$ はポテンシャルエネルギーで、運動項 $T(q,\dot{q})$ は

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

と q の任意関数 $m_{ij}(q)$ を用いて表される。ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i &= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)\dot{q}_k\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{N} m_{i1}\dot{q}_i q_1 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{N} m_{1j}\dot{q}_1\dot{q}_j + m_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} m_{i2}\dot{q}_i q_2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{N} m_{2j}\dot{q}_2\dot{q}_j + m_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2\right) + \cdots \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2T
\end{aligned}$$

であるから

$$E = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T-U) = T(q,\dot{q}) + U(q)$$

以上より、この系のエネルギー E は Lagrangian のポテンシャル項 U の符号を逆にしたもので与えられる。

空間並進対称性と運動量保存則

ある N 質点系が空間並進対称性をもつとき、運動量

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n}$$

は保存される。

Noether の定理からこれを導く。今 Lagrangian が空間並進

$$\boldsymbol{x}_n(t) \longrightarrow \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}_n(t) \longrightarrow \dot{\boldsymbol{x}}_n(t)$$

に対して厳密に不変であるとする。つまり、$\delta L \to 0$ である。
Noether の定理より、質点のインデックス n と座標成分 i、空間並進の方向 j を用いて

$$q_i \to (\boldsymbol{x}_n)_i, \qquad \varepsilon_A \to \varepsilon_j, \qquad Y^A = 0$$

が対応して微小変換 $F^j_{(n,i)}$ は

$$F^j_{(n,i)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

となる。以上より保存量

$$P_j = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_n)_i}F^j_{(n,i)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_n)_j}, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n}$$

を得る。

質点系において空間並進の対称性に付随した保存量を運動量と呼ぶ。
質点 n の運動量 $\boldsymbol{p}_n$ を

$$\boldsymbol{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}} n}$$

と定義すると、全運動量は

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}_n$$

で与えられる。例として、空間並進対称性をもつ Lagrangian

$$L = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \dot{\boldsymbol{x}}_n^2 - U(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{N}, \cdots)$$

の場合、運動量は

$$\boldsymbol{p}_n = m_n \dot{\boldsymbol{x}}_n, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\boldsymbol{x}}_n$$

とニュートン力学で学んだものと一致する。

力学変数 q_i をもった一般の系において、q_i に対応した<u>一般化運動量</u>p_i を

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

で定義する。この系のエネルギーは

$$E = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$

で表される。
一般化運動量は一般には保存されないが、系の Lagrangian がある力学変数 q_k に依らない場合 ($\dot{q}_k$には依存してもよい)、q_k に対応した一般化運動量 $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ は保存する。
それは Lagrangian が $q_k \to q_k + \varepsilon, \ \ \dot{q}_k \to \dot{q}_k$ の変換で不変となり、p_k が Noether の定理の対応する保存量であることから分かる。直接的には

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

より導かれる。この q_k のように Lagrangian が依存しない力学変数を循環座標と呼ぶ。

空間回転対称性と角運動量保存則

系が空間回転対称性をもつとき、角運動量

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$$

は保存される。

Noether の定理よりこれを導く。微小ベクトル $\delta\boldsymbol{\varphi}$ により定められる微小空間回転

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{x}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} \longrightarrow \dot{\boldsymbol{x}} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{x}}$$

を考える。1 質点系の Lagrangian がこの微小空間回転で厳密に不変であるとする。
Noether の定理より、座標成分 i と回転方向 $j(=1,2,3)$ を用いて

$$q_i \to x_i, \quad \varepsilon_A \to \delta\varphi_j, \quad Y^A \to 0, \quad F_i^j = \varepsilon_{ijk} x_k$$

と対応する。これより

$$\begin{aligned} Q^A &= \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} F_i^A(q,\dot{q}) - Y^A(q,\dot{q},t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \varepsilon_{ijk} x_k = \varepsilon_{ijk} x_k p_i = \varepsilon_{jki} x_k p_i \end{aligned}$$

ベクトルで表すと保存量

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$$

を得る。

2 Noether の定理に依らない保存量の導出

エネルギー保存

$$\frac{d}{dt} L(q,\dot{q}) = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

運動量保存

$$0 = \delta L = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

角運動量保存

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{x}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{x}}) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\boldsymbol{x} \times \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{x} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right)$$