力学　予習ノート 8

学生番号 05502211

1　円柱座標、極座標での L 方程式

[例 1]
円環上に重力を受けながら滑らかに運動する質量 m の物体を考える。ラグランジュ方程式を立て、角振動数を求めよ。

運動する平面上に xz 平面を考え、負の z 軸から質点がなす角を ϕ とする。運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2}mv_\phi^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2, \qquad V = -mga\cos\phi$$

よってラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2 + mga\cos\phi$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}mga\cos\phi = \frac{d}{dt}ma^2\dot{\phi} + mga\sin\phi = 0$$

$$\therefore a\ddot{\phi} + g\sin\phi \qquad \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{a}\sin\phi, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

[例 2]
長さ l のひもにつながれた質量 m の質点について、右方向を y 軸正とし、下方向を x 軸正とする。この質点が x 軸となす角が θ のとき、ラグランジュ方程式を立て、運動方程式を求めよ。

運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2}mv_\theta^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \qquad V = -mgl\cos\theta$$

よってラグランジュ方程式を解くと

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}(mgl\cos\theta) = ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\therefore l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

[例 3]
質量 m の質点が自然長 l_0, ばね定数 k のばねにつながれ天井からぶら下がっている。下向きに x 軸正をとり、質点となす角と θ とする。ラグランジュ方程式をたて、運動方程式を求めよ。

運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \qquad V = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

であるからラグランジアンは

$$L = K - V = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

であるから、まず θ についてラグランジュ方程式を立てると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}(mgl\cos\theta) \\ &= 2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad \therefore l\ddot{\theta} = -2\dot{l}\dot{\theta} - g\sin\theta\end{aligned}$$

l について

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{l}}\frac{1}{2}m\dot{l}^2\right) - \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k(l-l_0)^2\right) \\ &= m\ddot{l} - ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(l-l_0) = 0 \qquad \therefore m\ddot{l} = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(l-l_0)\end{aligned}$$

[例 4] 二重振り子
質量 m_1 の質点が原点から長さ l_1 のひもにつながれており、さらにその質点から長さ l_2 のひもで質量 m_2 の質点がつながれている。右向き、上向きにそれぞれ x, z 軸正をとり、ラグランジュ方程式を立てろ。負方向の z 軸と質点 m_1 とがなす角を ϕ_1、質点 m_2 となす角を ϕ_2 とする。

それぞれの質点の速度 v_1, v_2 は

$$v_1 = l_1\dot{\phi}_1, \qquad v_2 = l_1\dot{\phi}_1 + l_2\dot{\phi}_2$$

各質点の z 成分 z_1, z_2 は

$$z_1 = -l_1\cos\phi_1, \qquad z_2 = -l_1\cos\phi_1 - l_2\cos\phi_2$$

よって系全体での運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V は

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\phi}_1 + l_2\dot{\phi}_2)^2$$

$$V = m_1gz_1 + m_2gz_2 = -m_1gl_1\cos\phi_1 - m_2g(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2)$$

したがってラグランジアン $L = K - V$ は

$$L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\phi}_1 + l_2\dot{\phi}_2)^2 + m_1gl_1\cos\phi_1 + m_2g(l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2)$$

ϕ_1 についてラグランジュ方程式をたてると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_1}\left(\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2{l_1}^2\dot{\phi}_1^2 + m_2 l_1\dot{\phi}_1 l_2\dot{\phi}_2\right) - \frac{\partial}{\partial \phi_1}\left(m_1 g l_1 \cos\phi_1 + m_2 g l_1 \cos\phi_1\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(m_1{l_1}^2\dot{\phi}_1 + m_2{l_1}^2\dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_2\right) + m_1 g l_1 \sin\phi_1 + m_2 g l_1 \sin\phi_1 \\
&= \frac{d}{dt}\left\{(m_1+m_2){l_1}^2\dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_2\right\} + (m_1+m_2) g l_1 \sin\phi_1 \\
&\simeq (m_1+m_2){l_1}^2\ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1+m_2) g l_1 \phi_1 = 0 \\
&\Longrightarrow (m_1+m_2) l_1\ddot{\phi}_1 + m_2 l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1+m_2) g \phi_1 = 0
\end{aligned}
$$

ϕ_2 についてラグランジュ方程式をたてると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_2}\left(m_2 l_1\dot{\phi}_1 l_2\dot{\phi}_2 + \frac{1}{2}m_2{l_2}^2\dot{\phi}_2^2\right) - \frac{\partial}{\partial \phi_2}\left(m_2 g l_2 \cos\phi_2\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_1 + m_2{l_2}^2\dot{\phi}_2\right) + m_2 g l_2 \sin\phi_2 \\
&\simeq m_2 l_1 l_2\ddot{\phi}_1 + m_2{l_2}^2\ddot{\phi}_2 + m_2 g l_2 \phi_2 = 0 \\
&\Longrightarrow l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0
\end{aligned}
$$

[例 5]
上記の二重振り子のラグランジュ方程式を条件 $m_1 = m_2$、$l_1 = l_2$ で解き、角振動数を求めよ。

$$
\begin{cases}
(m_1+m_2) l_1\ddot{\phi}_1 + m_2 l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1+m_2) g\phi_1 = 0 \\
l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0
\end{cases}
\qquad \longrightarrow \qquad
\begin{cases}
2ml\ddot{\phi}_1 + ml\ddot{\phi}_2 + 2mg\phi_1 = 0 \\
l\ddot{\phi}_1 + l\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0
\end{cases}
$$

解をそれぞれ $\phi_1 = Ae^{pt}, \phi_2 Be^{pt}$ と置いて演算子法を用いて解く。それぞれの方程式は

$$
\begin{cases}
2Amlp^2e^{pt} + Bmlp^2e^{pt} + 2Amge^{pt} = 0 \\
Alp^2e^{pt} + Blp^2e^{pt} + gBe^{pt} = 0
\end{cases}
\qquad \longrightarrow \qquad
\begin{cases}
2(lp^2+g)A + lp^2B = 0 \\
lp^2A + (lp^2+g)B = 0
\end{cases}
$$

となる。連立方程式を行列形式で表すと

$$
\begin{pmatrix} 2(lp^2+g) & lp^2 \\ lp^2 & lp^2+g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0
$$

A, B がともに 0 でない解をもつためには、一つ目の行列式が 0 にならなければならない。したがって

$$
\begin{aligned}
2(lp^2+g)^2 - l^2p^4 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{2}(lp^2+g) = \pm lp^2 \\
&\Longrightarrow \quad (\sqrt{2}l \mp l)p^2 = -\sqrt{2}g, \qquad p^2 = -\frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}\mp 1)l} \\
&\Longrightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}\mp 1)l}}i = \pm\sqrt{\frac{(2\pm\sqrt{2})g}{l}}i \\
&\therefore \omega = \pm\sqrt{\frac{(2\pm\sqrt{2})g}{l}}
\end{aligned}
$$

2 か所の $\pm$ は独立であるから、計 4 つのどれかの振動数を持つことが分かる。

[演習問題]

(109)*

角度 θ だけ斜めに置かれた半径 a の円環上をなめらかに質量 m の質点が運動する。ラグランジュ方程式と角振動数を求めよ。

(109-2)

重力があり、鉛直に置かれたばね定数 k 自然長 l_0 のばねにつながれた質量 m の質点を下向き正の x 軸から θ だけ傾けた。このときのラグランジュ方程式を求めよ。

(110)*

重力があり、鉛直に置かれた自然長 l_0 ばね定数 k のばねにつながれた質量 m の質点を下向き正の x 軸から θ 傾けたまま、その軸を中心に回転させる。このときのラグランジュ方程式を求めよ。

(111)

質量 m_1 の質点が原点から長さ l_1 のひもにつながれており、さらにその質点から長さ l_2 のひもで質量 m_2 の質点がつながれている。右向き、上向きにそれぞれ x, z 軸正をとり、ラグランジュ方程式を立てろ。負方向の z 軸と質点 m_1 とがなす角を ϕ_1、質点 m_2 となす角を ϕ_2 とする。

(111-2)

-111-で立てたラグランジュ方程式を条件 $m_1 = m_2$、$l_1 = l_2$ で解き、角振動数を求めよ。

(112)*

惑星運動のラグランジュ方程式を求め、それが角運動量保存則と動径の運動方程式になることを示せ。