力学　予習ノート9

学生番号 05502211

1　一般化座標

1 質点の運動は、一般には 3 次元空間に展開され、自由度が 3 である。N 個の質点系では $3N$ 個の運動の自由度を持つことになる。よって N 個の質点系の運動を記述するには、$3N$ 個の座標成分が登場することになるが、このとき座標系の選び方 (デカルト、極座標、円柱座標...) にはよらない $3N$ 個の座標変数で運動が記述できれば、一般性があり有用性が増す。このように導入されたのが一般化座標である。
運動が時間に直接依存する場合や、座標系が時間とともに動く場合、座標の間の関係は時間 t も含むから

$$\{q_i\}\,;\ (q_1, q_2, q_3), (q_4, q_5, q_6), \cdots, (q_{3N-2}, q_{3N-1}, q_{3N}), t \tag{1}$$

となる。上記の $\{q_i\}$ で表示される $3N$ 次元空間 (代表空間) を想定すると、運動状態はその中の 1 点 (代表点) と $3N$ 個の速度によって決定されることになる。例えば、1 質点の一般化座標として極座標を選べば、$q_1 = r_1, q_2 = \theta_1, q_3 = \phi_1$ である。
この一般化座標を用いたラグランジュ方程式を導いていく。
まず、一般化座標 $\{q_i\}$ を用いた場合の運動エネルギー K を用いて運動量を (2) のように定義する。

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{m_i}{p_i}^2$$

$$p_i \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{q}_i \tag{2}$$

これをq_i に共役な一般化された運動量と呼び、(q_i, p_i) の組を正準共役変数と呼ぶ。この正準共役変数を座標とする $3N$ 次元の空間、すなわち位相空間を想定すると、その中で代表点が描く軌道が、力学系の運動状態の時間変化を表すことになる。例えば、1 個の質点の運動に一般化座標として極座標を選ぶと

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\phi}\sin\theta)^2\right\}$$

であるので、それぞれの一般座標に共役な一般化運動量は

$$p_r = \frac{\partial K}{\partial \dot{r}}, \qquad p_\theta = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\phi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

である。次に一般化座標によって定義される一般化力について考える。N 体の自由度 f の系において、ダランベールの原理は

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{r}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

と書かれるので、仮想変位について (1) より

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \qquad \delta x_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \qquad \cdots \tag{3}$$

を用いると、第一項目は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \end{aligned}$$

と表せられる。今外力とは関係のない第二項目を無視すると

$$\delta W \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \tag{4}$$

であり、力の定義として括弧内 () がふさわしいように思える。そうして座標 k に対する一般化力を次のように定義する。

$$Q_k \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{5}$$

一方第二項目について

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{f} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k \end{aligned} \tag{6}$$

と書ける。ただし最終行については積の微分法 $f''g = (f'g)' - f'g'$ を用いた。

ここで $\dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$ の両辺を $\dot{q}_k (1 \leq k \leq f)$ で微分して

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}, \qquad (\text{右辺}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} + 0$$

つまり

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{7}$$

である。これを (6) の [ ] 内の第一項目に適用し、第二項目について t と q_k の微分の順序交換を行うと

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_k \\
&= \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_k \\
&= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} \right) \delta q_k
\end{aligned}
$$

以上で導いたダランベールの原理の第一項と第二項を用いて

$$
\begin{aligned}
\delta W = \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0 \\
\Longrightarrow \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0 \\
\Longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k = 0
\end{aligned}
$$

一般化力 Q_k について、保存力を考えると

$$
Q_k \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\boldsymbol{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}
$$

であるから

$$
\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0
$$

これにより一般化座標によるラグランジュ方程式が得られた。