In[1]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```
borra todo
```
$MaxExtraPrecision = 100;
```
máxima precisión extra
```
Potential[r_, l_, Q_, q_, m_] :=
  ((1 + Q^2 / r^2 - 2 / r) (l + l^2 + (- ((2 Q^2) / r^3) + 2 / r^2) r + m^2 r^2)) / r^2 -
   Q^2 q^2 / r^2;
FindRmax[l_?NumericQ, Q_?NumericQ, q_?NumericQ, m_?NumericQ, prec_ : 50] :=
```
¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión numérica?
```
  Module[{rMax}, rMax =
```
módulo
```
    r /. FindRoot[D[Potential[r, l, Q, q, m], r] == 0, {r, 3}, WorkingPrecision → prec];
```
encuentra·· deriva precisión operativa
```
   rMax];
horizons[Q_?NumericQ, prec_ : 50] :=
```
¿expresión numérica?
```
 Module[{f, roots, realRoots, rp, rm}, f[r_] := 1 - 2 / r + Q^2 / r^2;
```
módulo
```
  roots = r /. NSolve[f[r] == 0, r, WorkingPrecision → prec];
```
resuelve numéricamente precisión operativa
```
  realRoots = roots // Chop[#, 10^(-prec / 2)] & // Select[# > 0 &] // Sort;
```
cambia números pequeños por 0 selecciona ordena
```
  Which[Length[realRoots] ≥ 2, {rp, rm} = realRoots[[-{1, 2}]], Length[realRoots] == 1,
```
cuál longitud longitud
```
   {rp, rm} = {realRoots[[1]], 0}, True, Message[horizons::nohorizon, Q];
```
verd··· mensaje
```
   Abort[]];
```
aborta
```
  SetPrecision[{rp, rm}, prec]]
```
asigna precisión
```
lambda0[u_, l_, m_, Q_, q_, ω_, rp_, rm_] := Module[{w}, w = Sqrt[-m^2 + ω^2];
```
módulo raíz cuadrada
$$
\begin{aligned}
&\left(2\,i\,\left(q\,Q\,rp\,\left(Q^2\,(-1+u)^4+rp\,(-1+u)^2\,(-2+rp+2\,u)\right)+Q^2\,(-1+u)^2\right.\right.\\
&\quad\left(i\,rm\,u\,(-2+2\,u+i\,rp\,w)-rp\,\left(rp\,\omega-2\,u\,(i+rp\,(w+\omega))+u^2\,(2\,i+rp\,(w+\omega))\right)\right)-\\
&\quad rp\,\left(rm\,u\,\left(-3\,i\,(-1+u)^2+rp^2\,w+rp\,(-1+u)\,(-i+2\,w)\right)+rp\,\left((-2+rp)\,rp\,\omega+(-6+rp)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.\left.u^2\,(i+rp\,(w+\omega))+u^3\,(3\,i+2\,rp\,(w+\omega))+u\,\left(3\,i-2\,rp^2\,(w+\omega)+rp\,(-i+4\,w+\right.\right.\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.\left.\left.6\,\omega)\right)\right)\right)\right)\Big/\left((rm-rp)\,(-1+u)^2\,u\,\left(Q^2\,(-1+u)^2+rp\,(-2+rp+2\,u)\right)\right)\Big];
\end{aligned}
$$
```
s0[u_, l_, m_, Q_, q_, ω_, rp_, rm_] := Module[{w}, w = Sqrt[-m^2 + ω^2];
```
módulo raíz cuadrada
$$
\begin{aligned}
&\left(q^2\,Q^2\,rp^2\,\left(Q^4\,(-1+u)^8+2\,Q^2\,rp\,(-1+u)^6\,(-2+rp+2\,u)+rp^2\,(-1+u)^2\,\left(4+rp^2\,(1-2\,u)-\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.16\,u-\left(-24+rm^2\right)\,u^2-16\,u^3+4\,u^4+2\,rp\,\left(-2+6\,u+(-6+rm)\,u^2+2\,u^3\right)\right)\right)-\\
&\quad Q^4\,(-1+u)^4\,\left(rm^2\,u^2\,\left(2+2\,u^2-2\,i\,rp\,w-rp^2\,w^2+u\,(-4+2\,i\,rp\,w)\right)+\right.\\
&\quad rm\,rp\,\left(-i\,rp\,\omega-2\,rp^2\,u\,w\,\omega-2\,u^3\,(4\,i+rp\,w)\,(i+rp\,(w+\omega))+i\,u^4\,(4\,i+3\,rp\,(w+\omega))+\right.\\
&\quad u^2\,\left(-4+4\,rp^2\,w\,(w+\omega)+i\,rp\,(7\,w+6\,\omega)\right)\Big)-rp^2\,\left(-4\,rp^2\,u\,\omega\,(w+\omega)+\right.\\
&\quad rp\,\omega\,(-i+rp\,\omega)-4\,u^3\,(i+rp\,(w+\omega))^2+u^4\,\left(-2+3\,i\,rp\,(w+\omega)+rp^2\,(w+\omega)^2\right)+\\
&\quad\left.\left.u^2\,\left(-2+i\,rp\,(5\,w+6\,\omega)+2\,rp^2\,\left(2\,w^2+5\,w\,\omega+3\,\omega^2\right)\right)\right)\right)-\\
&\quad q\,Q\,rp\,(-1+u)\,\left(Q^4\,(-1+u)^5\,\left(rm\,\left(i-3\,i\,u^2+2\,u\,(i+rp\,w)\right)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.rp\,\left(-i+2\,rp\,\omega-2\,u\,(i+2\,rp\,(w+\omega))+u^2\,(3\,i+2\,rp\,(w+\omega))\right)\right)+2\,Q^2\,rp\,(-1+u)^3\right.\\
&\quad\left.\left(rm\,\left(-i\,(-1+u)^2\,(2+5\,u)+2\,rp^2\,u\,w+rp\,(-1+u)\,(-i-2\,i\,u+4\,u\,w)\right)+\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rp}\left(\mathrm{i}\,(-1+u)^2\,(2+5u)+2\,\mathrm{rp}^2\left(\omega-2u\,(w+\omega)+u^2\,(w+\omega)\right)+\mathrm{rp}\right.\\
&\qquad\left.(-1+u)\left(\mathrm{i}+u\,(2\,\mathrm{i}-8w-8\omega)+4\omega+4u^2\,(w+\omega)\right)\right)+\\
&\mathrm{rp}^2\left(2\,\mathrm{rm}^2\,\mathrm{rp}^2\,u^2\,\omega+\mathrm{rm}\left(-4\,\mathrm{i}\,(-1+u)^4\,(1+2u)+2\,\mathrm{rp}\,(-1+u)^3\,(-2\,\mathrm{i}+u\,(-3\,\mathrm{i}+4w))+\right.\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{rp}^2\,(-1+u)^2\,(-\mathrm{i}+u\,(-\mathrm{i}+8w))+2\,\mathrm{rp}^3\,u\,((-1+u)\,w-2u\,\omega)\right)+\\
&\mathrm{rp}\left(4\,\mathrm{i}\,(-1+u)^4\,(1+2u)+2\,\mathrm{rp}\,(-1+u)^3\left(2\,\mathrm{i}+u\,(3\,\mathrm{i}-8w-8\omega)+4\omega+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.4u^2\,(w+\omega)\right)+\mathrm{rp}^2\,(-1+u)^2\left(\mathrm{i}+u\,(\mathrm{i}-16w-16\omega)+8\omega+8u^2\,(w+\omega)\right)+2\right.\\
&\qquad\left.\left.\mathrm{rp}^3\left(-\omega+u^3\,(w+\omega)-u^2\,(3w+2\omega)+u\,(2w+3\omega)\right)\right)\right)+\\
&Q^2\,\mathrm{rp}\,(-1+u)^2\left(\mathrm{rm}^2\,u^2\left(-6\,(-1+u)^3+\mathrm{rp}\,(-1+u)^2\left(-2+l+l^2-6\,\mathrm{i}\,w\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.2\,\mathrm{rp}^2\,(-1+u)\,w\,(-\mathrm{i}+2w)+\mathrm{rp}^3\left(m^2+2w^2\right)\right)+\\
&2\,\mathrm{rm}\,\mathrm{rp}\left(\mathrm{i}\,(-2+\mathrm{rp})\,\mathrm{rp}\,\omega+\mathrm{rp}\,u\left(3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{rp}^2\,w-\mathrm{rp}\,(\mathrm{i}+4w)\right)\omega+u^5\,(6-5\,\mathrm{i}\,\mathrm{rp}\,(w+\omega))+\right.\\
&\qquad u^4\left(-18-\mathrm{rp}\left(-2+l+l^2-21\,\mathrm{i}\,w-18\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^2\,(-\mathrm{i}+2w)\,(w+\omega)\right)+\\
&\qquad u^3\left(18+\mathrm{rp}\left(-4+2\,l+2\,l^2-27\,\mathrm{i}\,w-22\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^3\,w\,(w+\omega)+\mathrm{rp}^2\right.\\
&\qquad\left.\left(6\,\mathrm{i}\,w-12\,w^2+5\,\mathrm{i}\,\omega-12\,w\,\omega\right)\right)-u^2\left(6+\mathrm{rp}^2\left(-8\,w^2+w\,(4\,\mathrm{i}-12\omega)+3\,\mathrm{i}\,\omega\right)+\mathrm{rp}\right.\\
&\qquad\left.\left.\left(-2+l+l^2-11\,\mathrm{i}\,w-8\,\mathrm{i}\,\omega\right)+\mathrm{rp}^3\left(m^2+4w\,(w+\omega)\right)\right)\right)+\\
&\mathrm{rp}^2\left(2\,(-2+\mathrm{rp})\,\mathrm{rp}\,\omega\,(-\mathrm{i}+\mathrm{rp}\,\omega)+2\,u^5\left(-3+5\,\mathrm{i}\,\mathrm{rp}\,(w+\omega)+2\,\mathrm{rp}^2\,(w+\omega)^2\right)+\right.\\
&\qquad 2\,\mathrm{rp}\,u\,\omega\left(-3\,\mathrm{i}-4\,\mathrm{rp}^2\,(w+\omega)+\mathrm{rp}\,(\mathrm{i}+8w+10\omega)\right)-\\
&\qquad 2\,u^3\left(9+\mathrm{rp}\left(-2+l+l^2-21\,\mathrm{i}\,w-22\,\mathrm{i}\,\omega\right)+4\,\mathrm{rp}^3\,(w+\omega)^2+\mathrm{rp}^2\right.\\
&\qquad\left.\left(-16\,w^2+w\,(5\,\mathrm{i}-36\omega)+5\,(\mathrm{i}-4\omega)\,\omega\right)\right)+u^4\left(18+\mathrm{rp}\left(-2+l+l^2-36\,\mathrm{i}\,w-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.36\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^3\,(w+\omega)^2-4\,\mathrm{rp}^2\left(5\,w^2+\omega\,(-\mathrm{i}+5\omega)+w\,(-\mathrm{i}+10\omega)\right)\right)+\\
&\qquad u^2\left(6+\mathrm{rp}^3\left(m^2+8w^2+20w\,\omega+12\,\omega^2\right)+\mathrm{rp}\left(l+l^2-2\,\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}+8w+8\omega)\right)-\right.\\
&\qquad\left.\left.2\,\mathrm{rp}^2\left(8w^2+\omega\,(-3\,\mathrm{i}+20\omega)+w\,(-3\,\mathrm{i}+28\omega)\right)\right)\right)+\\
&\mathrm{rp}^2\left(\mathrm{rm}^2\,u^2\left(-4\,(-1+u)^4+2\,\mathrm{rp}\,(-1+u)^3\left(-1+l+l^2-2\,\mathrm{i}\,w\right)+2\,\mathrm{rp}^3\,(-1+u)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left(m^2+2w^2\right)+\mathrm{rp}^2\,(-1+u)^2\left(l+l^2+2w\,(-\mathrm{i}+2w)\right)+\mathrm{rp}^4\left(m^2+w^2-\omega^2\right)\right)+\\
&\mathrm{rm}\,\mathrm{rp}\left(\mathrm{i}\,(-2+\mathrm{rp})^2\,\mathrm{rp}\,\omega+2\,(-2+\mathrm{rp})\,\mathrm{rp}\,u\left(3\,\mathrm{i}+\mathrm{rp}^2\,w-\mathrm{rp}\,(\mathrm{i}+2w)\right)\omega+\right.\\
&\qquad u^6\,(8-8\,\mathrm{i}\,\mathrm{rp}\,(w+\omega))+u^5\left(-32-4\,\mathrm{rp}\left(-1+l+l^2-10\,\mathrm{i}\,w-9\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^2\right.\\
&\qquad\left.(-3\,\mathrm{i}+4w)\,(w+\omega)\right)+u^4\left(48+12\,\mathrm{rp}\left(-1+l+l^2-6\,\mathrm{i}\,w-5\,\mathrm{i}\,\omega\right)+\mathrm{rp}^3\right.\\
&\qquad\left.(-\mathrm{i}+8w)\,(w+\omega)-2\,\mathrm{rp}^2\left(l+l^2-11\,\mathrm{i}\,w+16w^2-10\,\mathrm{i}\,\omega+16w\,\omega\right)\right)+\\
&\qquad 2\,u^3\left(-16+\mathrm{rp}\left(6-6\,l-6\,l^2+28\,\mathrm{i}\,w+20\,\mathrm{i}\,\omega\right)+\mathrm{rp}^4\,w\,(w+\omega)+\mathrm{rp}^2\right.\\
&\qquad\left.\left(2\,l+2\,l^2-13\,\mathrm{i}\,w+20w^2-10\,\mathrm{i}\,\omega+24w\,\omega\right)+\mathrm{rp}^3\left(-2\,m^2-(-\mathrm{i}+12w)\,(w+\omega)\right)\right)-\\
&\qquad u^2\left(-8-4\,\mathrm{rp}\left(-1+l+l^2-4\,\mathrm{i}\,w\right)+2\,\mathrm{rp}^4\left(m^2+2w^2+2w\,\omega-\omega^2\right)+2\,\mathrm{rp}^2\right.\\
&\qquad\left.\left.\left(l+l^2+w\,(-5\,\mathrm{i}+8w+16\omega)\right)-\mathrm{rp}^3\left(4\,m^2+w\,(-\mathrm{i}+16w+24\omega)\right)\right)\right)+\\
&\qquad \mathrm{rp}^2\left((-2+\mathrm{rp})^2\,\mathrm{rp}\,\omega\,(-\mathrm{i}+\mathrm{rp}\,\omega)+(-2+\mathrm{rp})\,u^2\left(2+l\,\mathrm{rp}+l^2\,\mathrm{rp}+m^2\,\mathrm{rp}^3-6\,\mathrm{i}\right.\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{rp}\,w+\mathrm{i}\,\mathrm{rp}^2\,w-8\,\mathrm{rp}^2\,w^2+4\,\mathrm{rp}^3\,w^2-36\,\mathrm{rp}^2\,w\,\omega+10\,\mathrm{rp}^3\,w\,\omega-30\,\mathrm{rp}^2\,\omega^2+5\,\mathrm{rp}^3\,\omega^2\right)+\\
&\qquad 4\,u^6\,(\mathrm{i}+\mathrm{rp}\,(w+\omega))^2-2\,(-2+\mathrm{rp})\,\mathrm{rp}\,u\,\omega\left(3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{rp}^2\,(w+\omega)-\mathrm{rp}\,(\mathrm{i}+4w+6\omega)\right)+\\
&\qquad 2\,u^5\left(8+\mathrm{rp}\left(-1+l+l^2-18\,\mathrm{i}\,w-18\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^3\,(w+\omega)^2-3\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{rp}^2\left(4w^2+\omega\,(-\mathrm{i}+4\omega)+w\,(-\mathrm{i}+8\omega)\right)\right)+u^4\\
&\qquad\left(-24-6\,\mathrm{rp}\left(-1+l+l^2-10\,\mathrm{i}\,w-10\,\mathrm{i}\,\omega\right)+\mathrm{rp}^4\,(w+\omega)^2+\mathrm{rp}^3\left(-20w^2+w\,(\mathrm{i}-40\omega)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.(\mathrm{i}-20\omega)\,\omega\right)+\mathrm{rp}^2\left(l+l^2+52w^2+20\omega\,(-\mathrm{i}+3\omega)+4w\,(-5\,\mathrm{i}+28\omega)\right)\right)-\\
&\qquad 2\,u^3\left(-8+\mathrm{rp}\left(3-3\,l-3\,l^2+22\,\mathrm{i}\,w+20\,\mathrm{i}\,\omega\right)+2\,\mathrm{rp}^4\,(w+\omega)^2-\mathrm{rp}^3\right.\\
&\qquad\left(m^2+16w^2+\omega\,(-\mathrm{i}+20\omega)+w\,(-\mathrm{i}+36\omega)\right)+\mathrm{rp}^2\\
&\qquad\left.\left.\left(l+l^2+24w^2+10\omega\,(-\mathrm{i}+4\omega)+w\,(-11\,\mathrm{i}+64\omega)\right)\right)\right)\Big/\\
&\left.\left((\mathrm{rm}-\mathrm{rp})^2\,(-1+u)^4\,u^2\left(Q^2\,(-1+u)^2+\mathrm{rp}\,(-2+\mathrm{rp}+2u)\right)^2\right)\right];
\end{aligned}
$$

```
AIMIterateNumeric[c0_List, d0_List, Imax_Integer, Nmax_Integer] :=
                  lista    lista     entero       entero
  Module[{cMat, dMat, n, i, delta}, cMat = ConstantArray[0, {Nmax + 1, Imax + 2}];
  módulo                            arreglo constante
    dMat = ConstantArray[0, {Nmax + 1, Imax + 2}];
           arreglo constante
    cMat[[1, 1 ;; Imax + 1]] = c0;
    dMat[[1, 1 ;; Imax + 1]] = d0;
    For[n = 1, n ≤ Nmax, n++, For[i = 0, i ≤ Imax, i++, cMat[[n + 1, i + 1]] =
    para cada                  para cada
        (i + 1) cMat[[n, i + 2]] + dMat[[n, i + 1]] + Sum[c0[[k + 1]] × cMat[[n, i - k + 1]], {k, 0, i}];
                                                      suma
       dMat[[n + 1, i + 1]] = (i + 1) dMat[[n, i + 2]] +
         Sum[d0[[k + 1]] × cMat[[n, i - k + 1]], {k, 0, i}];];];
         suma
    delta = dMat[[Nmax + 1, 1]] × cMat[[Nmax, 1]] - dMat[[Nmax, 1]] × cMat[[Nmax + 1, 1]]; delta];
DeltaNumeric[ω_?NumericQ, l_?NumericQ, m_?NumericQ, Q_?NumericQ, q_?NumericQ,
             ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión numérica?
    uMax_?NumericQ, Imax_Integer, Nmax_Integer, rp_?NumericQ, rm_?NumericQ,
            ¿expresió··· entero       entero      ¿expresión numé·· ¿expresión numérica?
    prec_ : 50] := Module[{seriesLambda, seriesS, c0, d0}, seriesLambda =
                   módulo
     Collect[Normal@Series[lambda0[u, l, m, Q, q, ω, rp, rm], {u, uMax, Imax}], u - uMax];
     agrupa ··· normal  serie
    seriesS =
     Collect[Normal@Series[s0[u, l, m, Q, q, ω, rp, rm], {u, uMax, Imax}], u - uMax];
     agrupa ··· normal  serie
    c0 = Table[Coefficient[seriesLambda, u - uMax, i], {i, 0, Imax}];
         tabla coefficiente
    d0 = Table[Coefficient[seriesS, u - uMax, i], {i, 0, Imax}];
         tabla coefficiente
    SetPrecision[AIMIterateNumeric[
    asigna precisión
      SetPrecision[c0, prec], SetPrecision[d0, prec], Imax, Nmax], prec]];
      asigna precisión              asigna precisión

FindQNM0[l_?NumericQ, m_?NumericQ, Q_?NumericQ, q_?NumericQ, ωGuess_?NumericQ,
         ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión nu··· ¿expresión numérica? ¿expresión numérica?
  Imax_ : 25, Nmax_ : 25, prec_ : 80] := Module[{rMax, horizonsList, rp, rm, uMax},
                                         módulo
  horizonsList = horizons[Q, prec];
  rp = horizonsList[[1]];
  rm = horizonsList[[2]];
  rMax = FindRmax[l, Q, q, m, prec];
  uMax = SetPrecision[1 - rp / rMax, prec];
         asigna precisión
  FindRoot[DeltaNumeric[ω, l, m, Q, q, uMax, Imax, Nmax, rp, rm, prec] == 0,
  encuentra raíz
    {ω, ωGuess}, WorkingPrecision → prec, AccuracyGoal → Floor[prec / 2],
                 precisión operativa      objetivo de exacti··· entero inferior
    PrecisionGoal → Floor[prec / 2], MaxIterations → 200]]
    objetivo de precisión entero inferior máximo de iteraciones
```

```
(*l=0,l,m,Q,q,guess,Imax,Nmax,prec*)
{time, sol} = AbsoluteTiming[FindQNM0[0, 0, 5 / 10, 0, 11 / 100 - 10 / 100 I, 50, 50, 60]]
              duración absoluta                                                  número i
```

Out[•]= {10.9128, {ω → 0.11576715577340363988976590194593224917035477316671736558404 0 − 0.10575019364172589299300927481311191159318602781404079489546 7 i}}

```
(*https://arxiv.org/pdf/1409.7440 Comparar valores*)
```

In[11]:=
```
lvals = {0, 1, 2, 3};
Manipulate[Plot[Evaluate[Table[Potential[r, l, Q, q, m], {l, lvals}]],
 manipula      repr···  evalúa      tabla
  {r, 0.5, 10}, PlotRange → {{0.5, 10}, {-1, 1}}, PlotStyle → Thick,
                rango de representación              estilo de repr··· grueso
  AxesLabel → {"r", "V(r)"}, PlotLegends → ("l = " <> ToString[#] & /@ lvals)],
  etiqueta de ejes           leyendas de representación              convierte a cadena de caracteres
 {{Q, 0.5, "Q"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}, {{m, 0.1, "m"}, 0, 1,
                       apariencia    etiquetado
  Appearance → "Labeled"}, {{q, 0, "q"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"}]
  apariencia    etiquetado                      apariencia    etiquetado
```

Out[11]=