CONCOURS D'ENTRÉE DANS LES GRANDES ÉCOLES MILITAIRES ÉTRANGÈRES.

Session 2017
Durée : 4 heures
Niveau BAC S1-S2

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

Un parachutiste saute d'un avion et atterrit nécessairement sur un terrain déboisé d'un hectare d'une forêt. Dans ce terrain il y a :

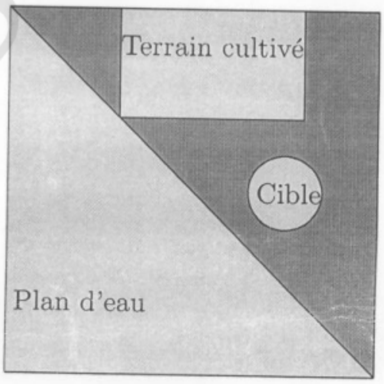
— Un espace cultivé rectangulaire ayant 50 m de longueur et 30 m de largeur.

— Un plan d'eau formant un triangle rectangle isocèle dont les cotés de l'angle droit mesurent 100 m.

— Une cible circulaire d'aire 314 m^2 qui représente son objectif.

Voir figure.

On suppose que la probabilité qu'il tombe sur une partie du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.



1. Quelle est la probabilité pour qu'il n'atterrisse ni sur la cible, ni sur l'espace cultivé ni sur le plan d'eau ? 2pts

2. Quelle est la probabilité pour qu'il atterrisse sur l'espace cultivé ou sur le plan d'eau ? 1.5pt

3. Quelle est la probabilité pour qu'il atterrisse sur la cible ? 1.5pt

Exercice 2 (5 *points*). Les parties **A.** et **B.** sont indépendantes.

Partie A

Soit n un entier naturel et $a = 4^n + 1$.

1. Montrer que si n est impair, alors a est divisible par 5. 1pt

2. Montrer que si n est pair, alors le reste de la division euclidienne de a par 5 est 2. 1pt

3. Déduire des questions précédentes le reste de la division euclidienne de 16^n par 5. 1pt

Partie B

1. Calculer le plus grand commun diviseur des nombres 5145, 4410 et 3675. 1pt

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $3675x - 5145y = 4410$. 1pt

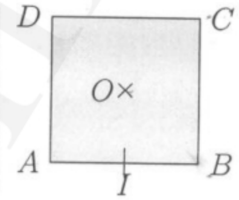
Exercice 3 (5 points = 1.25 pt × 4).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Le candidat justifiera la réponse choisie. Une réponse non justifiée même exacte ne rapporte aucun point.

$ABCD$ un carré de centre O tel que

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } I \text{ est le milieu de } [AB]$$

S_{BC}, S_{BD} et S_{OI} sont les symétries orthogonales d'axes respectifs $(BC), (BD)$ et (OI).
$t_{\overrightarrow{BD}}, t_{\overrightarrow{CD}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$ sont les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OI}$.



1. L'isométrie $S_{BC} \circ S_{BD} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est :
a. une rotation.
b. une translation.
c. une symétrie glissée.

2. $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{BC}$ est égale à :
a. $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{OI}$.
b. $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{OI}$.
c. $t_{\overrightarrow{BC}}$.

3. Soit r_O la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. $r_O \circ r_C$ est égale à :
a. La symétrie centrale de centre A.
b. La translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
c. La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4. Soit s la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors
a. $s(A) = O$.
b. $s(I) = O$.
c. $s(C) = O$.

Exercice 4 (5 *points*).

Soit F la fonction numérique définie sur $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{\tan x}} \frac{t}{1+t^4}\, dt$.

1. a. Montrer que la fonction F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$. 0.25 + 0.5**pt**
b. Calculer $F(0)$ et pour tout $x \in D$ exprimer $F(x)$ en fonction de x. 0.25 + 0.5**pt**
c. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\, dt$. 0.75**pt**

2. a. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{t}{1+t^4} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{4k+1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+5}}{1+t^4}.$$

0.5**pt**

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, I = u_n + v_n$ avec :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{4k+2} \text{ et } v_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4}\, dt.$$

0.5**pt**

3. a. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{t^{4n+5}}{1+t^4} \leq t^{4n+5}$.
En déduire que $|v_n| \leq \frac{1}{4n+6}$.
0.5 + 0.5**pt**
b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer la limite de (u_n). 0.25 + 0.5**pt**