Algoritem za izračun razdalje do nedominiranega območja

Nace Sever

Mentor: prof. dr. Sergio Cabello Justo
Somentorica: doc. dr. Tea Tušar

Ljubljana, 2025

Večkriterijska optimizacija

Optimiramo funkcijo $f = (f_1, \ldots, f_D)$,

$$f : X \to Z,$$
$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_D(\mathbf{x})),$$

kjer so

- f_i funkcije ene ali več spremenljivk
- X prostor spremenljivk
- $Z \subseteq \mathbb{R}^D$ prostor kriterijev

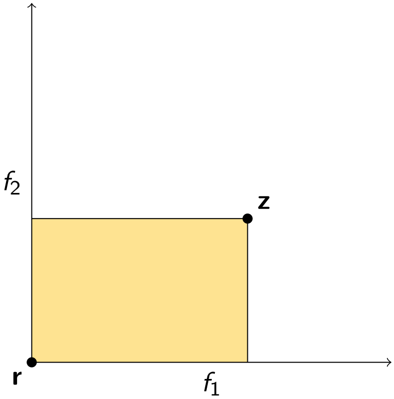
Osredotočimo se na prostor kriterijev.

Dominiranost

Točka $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_D)$ *šibko dominira* točko $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_D)$, če velja

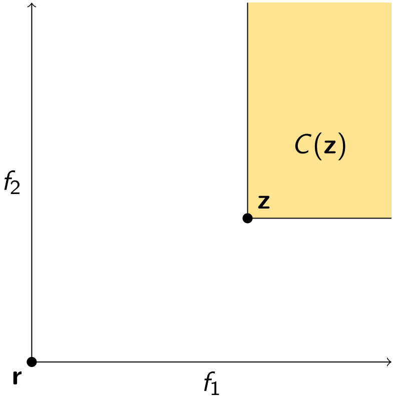
$$\forall i \in \{1, \ldots, D\} : \quad z_i \geq y_i .$$

Podobno vpeljemo tudi *dominiranost* in *strogo dominiranost*.



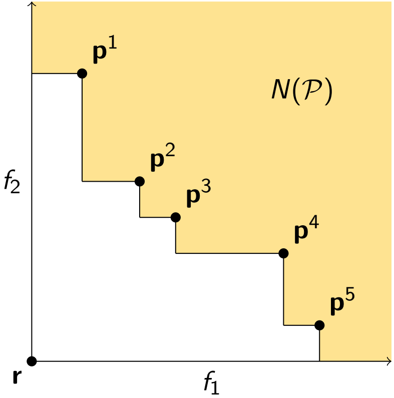
Dominiranost

Množici točk, ki $\mathbf{z}$ dominirajo rečemo stožec in označimo s $C(\mathbf{z})$

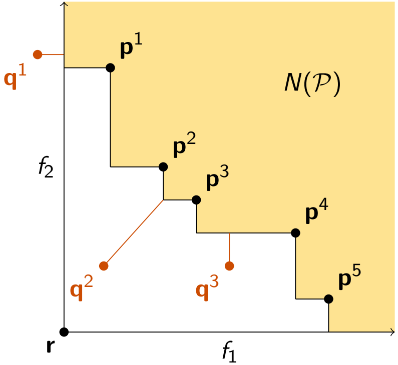


Nedominirano območje

Množica točk, ki jih nobena izmed točk v $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^5\}$ ne dominira



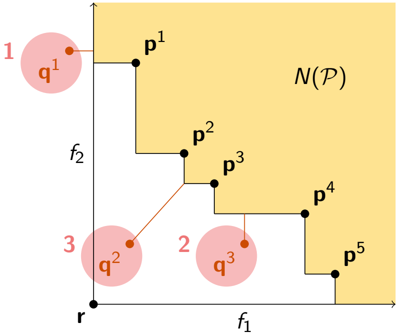
Razdalja do nedominiranega območja



Motivacija

Urejanje dominiranih rešitev pri algoritmu COMO-CMA-ES

- Obstaja samo implementacija za dvodimenzionalni problem

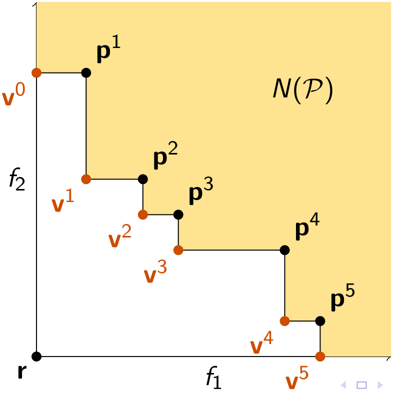


Vpete točke

Vpeta točka je točka $\mathbf{v} \in N(\mathcal{P})$, za katero velja

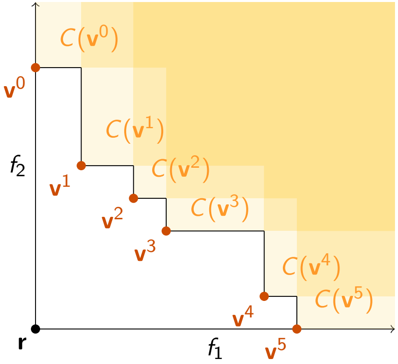
$$\nexists \mathbf{z} \in N(\mathcal{P}) : \quad \mathbf{v} \succ \mathbf{z}$$

Množico vseh vpetih točk $\mathbf{v}$ za množico paroma nedominiranih točk $\mathcal{P}$ označimo z $\mathcal{V}(\mathcal{P})$.



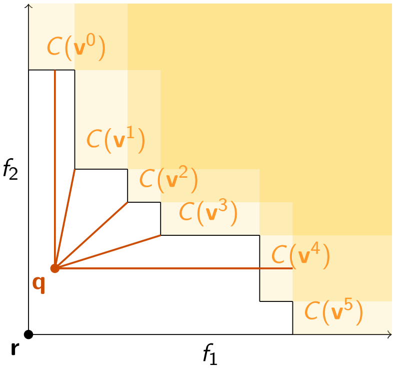
Vpete točke

Množico $N(\mathcal{P})$ lahko zapišemo kot unijo stožcev, ki jih razpenja množica vpetih točk $\mathcal{V}(\mathcal{P})$.



Razdalja do nedominiranega območja je enaka razdalji do najbližjega izmed stožcev z izhodiščem v vpetih točkah

$$d(\mathbf{q}, C(\mathbf{v})) = \sqrt{\max\{0, v_x - q_x\}^2 + \max\{0, v_y - q_y\}^2}$$



Algoritem ARRNO

function $\mathrm{ARRNO}(\mathcal{P}, \mathbf{q})$
  $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \leftarrow \textsc{Vpete točke}(\mathcal{P})$
  $d_{\mathrm{min}} \leftarrow \infty$
  for all $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$ **do**
    $d \leftarrow \textsc{Razdalja do stožca}(\mathbf{q}, \mathbf{v})$
    if $d < d_{\mathrm{min}}$ **then**
      $d_{\mathrm{min}} \leftarrow d$
  return d_{min}

Algoritem za višje dimenzije

Algoritem $\mathrm{ARRNO}(\mathcal{P}, \mathbf{q})$ posplošimo v višje dimenzije

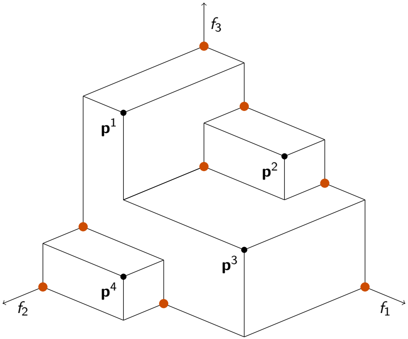
- $\textsc{Razdalja do stožca}(\mathbf{q}, \mathbf{v})$

$$d(\mathbf{q}, C(\mathbf{v})) = \sqrt{\sum_{i=1}^{D} \max\{0, v_i - q_i\}^2}$$

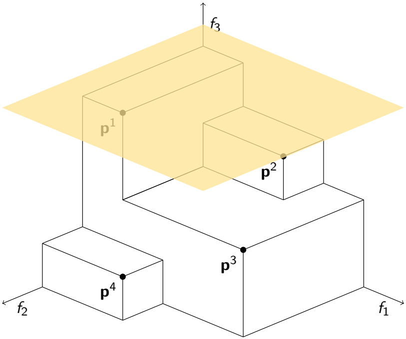
- Kaj pa $\textsc{Vpete točke}(\mathcal{P})$?
  - Glavni prispevek te naloge
  - Rešujemo z algoritmom pometanja

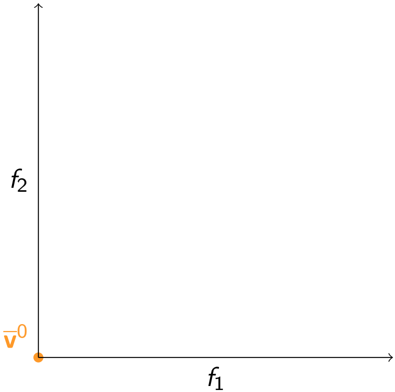
Algoritem pometanja za tridimenzionalne probleme

- Z navidezno ravnino se premikamo po koordinati z
- Obravnavamo dogodke ko se ravnina dotakne kakšne točke
- Hranimo stanje preseka med ravnino in dominiranim območjem
  - Projekcijo točke $\mathbf{x}$ na ravnino označimo z $\bar{\mathbf{x}}$

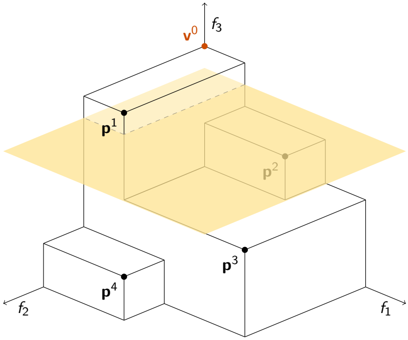


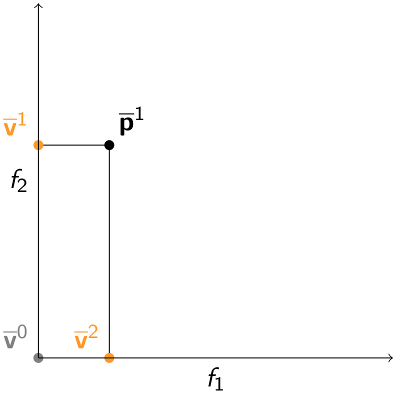
Primer delovanja



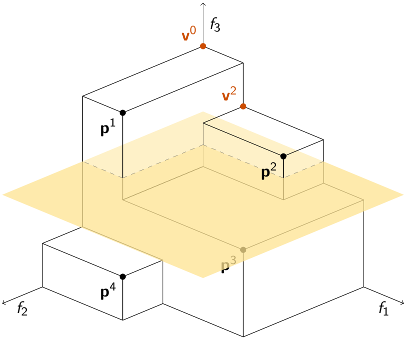


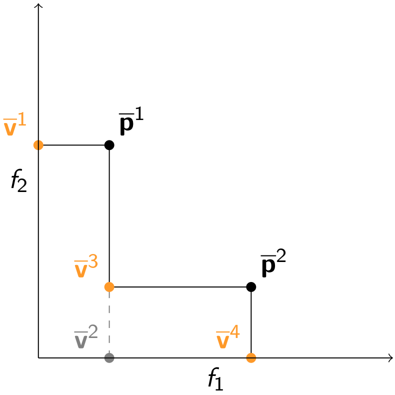
Primer delovanja



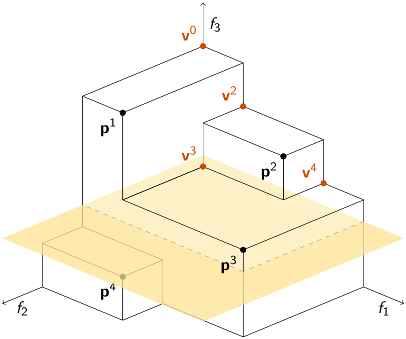


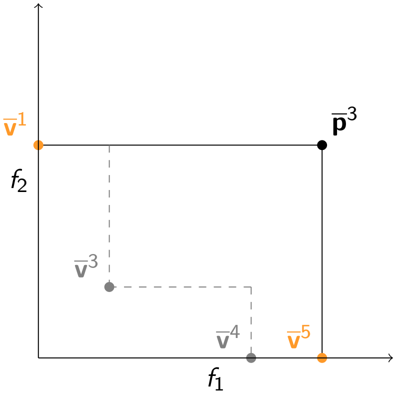
Primer delovanja



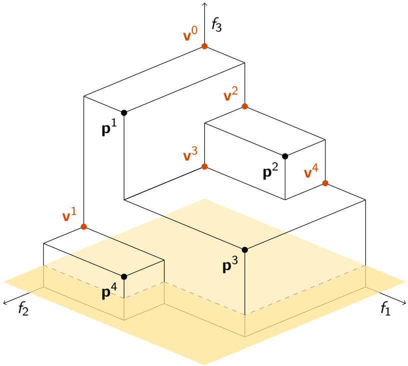


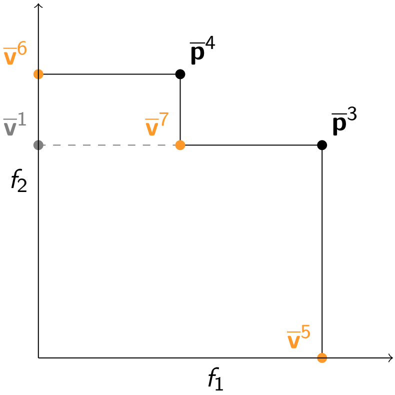
Primer delovanja



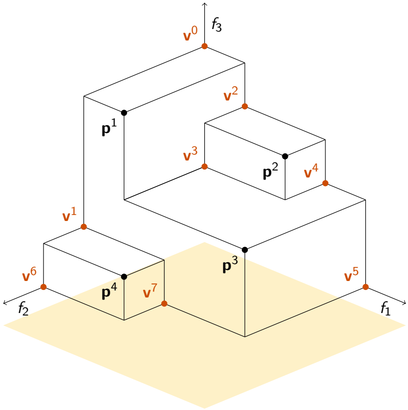


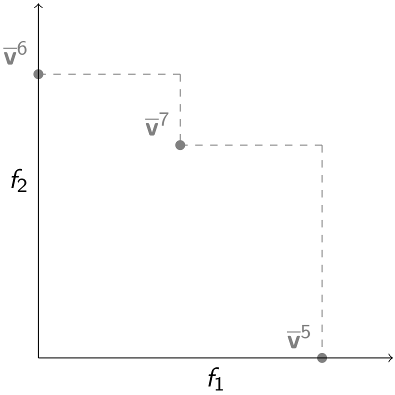
Primer delovanja





Primer delovanja



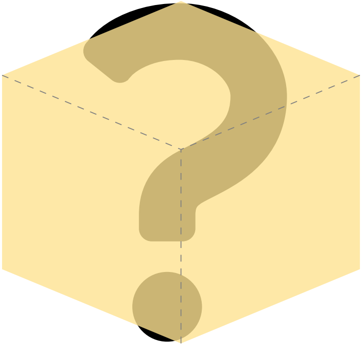


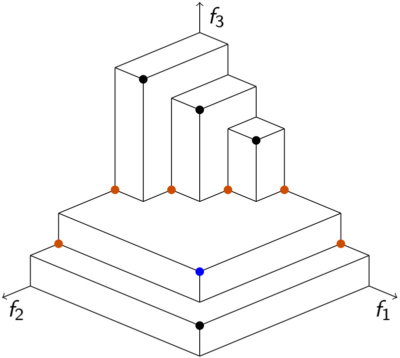
Algoritem za probleme višje dimenzije

Podoben pristop kot pri algoritmu v treh dimenzijah

- Z navidezno hiperravnino se premikamo po zadnji koordinati
- Obravnavamo dogodke ko se hiperravnina dotakne kakšne točke
- Hranimo stanje preseka med hiperravnino in dominiranim območjem
- Računanje novih vpetih točk
  - Rekurziven klic algoritma za problem z manjšo dimenzijo

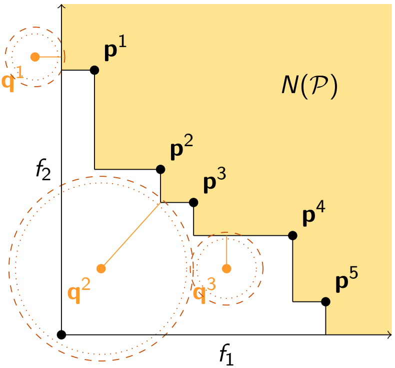
Intuicija v štirih dimenzijah



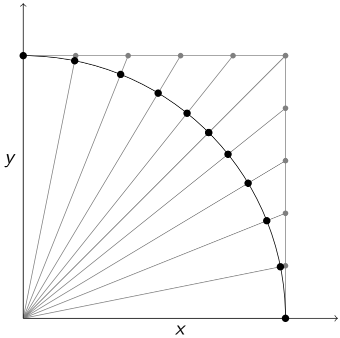


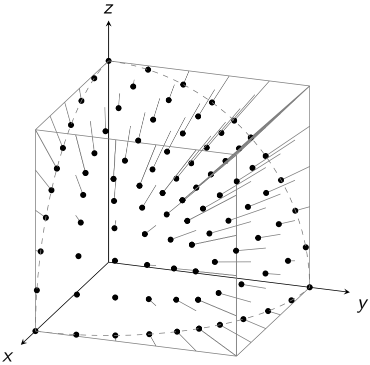
Testiranje implementacije

$$S(\mathbf{q}, r) \cap N(\mathcal{P}) \neq \varnothing \iff d(\mathbf{q}, N(\mathcal{P})) \leq r$$



Diskretizacija sfere





Rezultati testiranja

- 200 poskusov za vsako izmed dimenzij 3, 4, 5 in 6
- Na naključno izbranih množicah točk
- Različna natančnost glede na dimenzijo

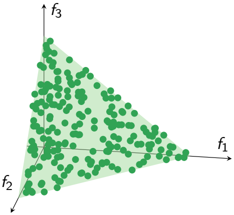
dimenzija	natančnost	št. točk diskretizacije
3	0.1%	$\sim 4.5 \cdot 10^6$
4	1%	$\sim 21.6 \cdot 10^6$
5	5%	$\sim 25.5 \cdot 10^6$
6	20%	$\sim 9.9 \cdot 10^6$

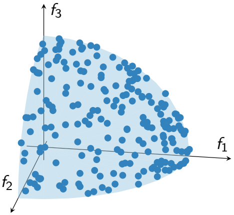
Teoretična analiza računske zahtevnosti

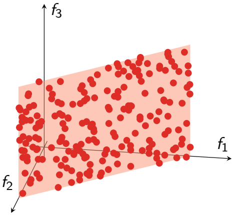
Algoritem ARRNO za računanje razdalje med nedominiranim območjem $N(\mathcal{P})$ in točko poizvedbe $\mathbf{q}$, ima časovno zahtevnost $O(n \log n)$ za $D = 3$ in $O(n^{D-1})$ za $D \geq 4$, kjer je $n = |\mathcal{P}|$ in D dimenzija prostora.

Eksperimentalna analiza računske zahtevnosti

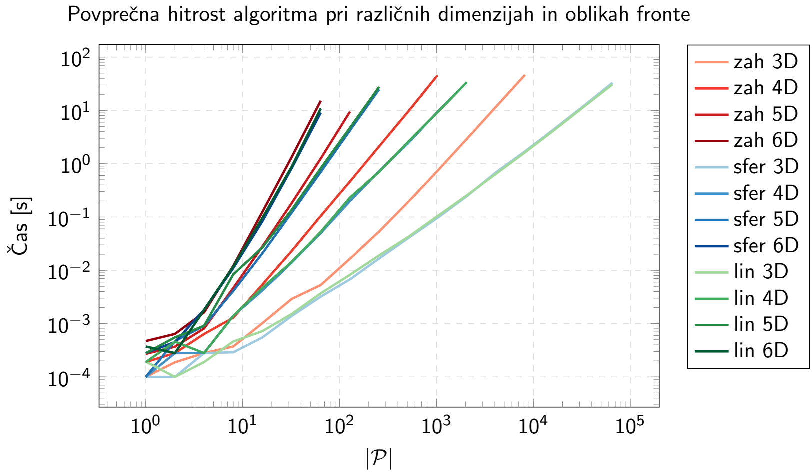
Časovno zahtevnost testiramo na linearni, sferični in algoritmično zahtevni fronti



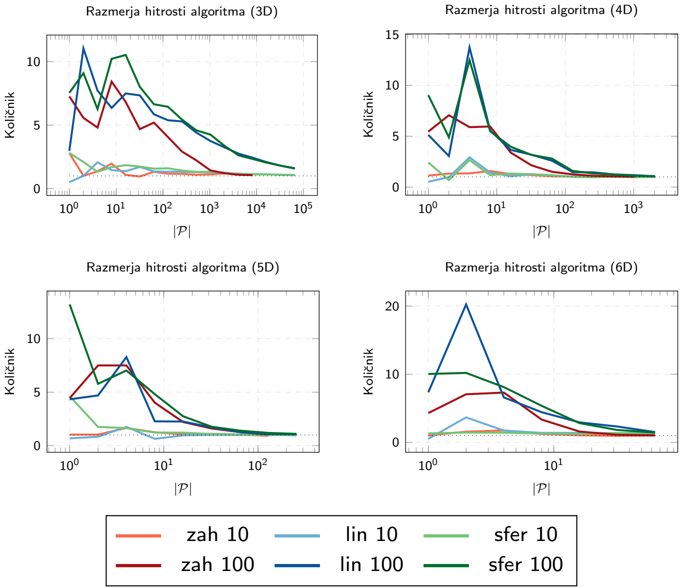




Eksperimentalna analiza računske zahtevnosti



Eksperimentalna analiza računske zahtevnosti



Zaključek

- ARRNO omogoča razširitev algoritma COMO-CMA-ES za probleme z več kot dvema dimenzijama
- Vključen v odprtokodno knjižnico `moarchiving`
- Časovna zahtevnost
  - $O(n \log n)$ za $D = 3$
  - $O(n^{D-1})$ za $D \geq 4$
- Možne izboljšave
  - Računanje samo novih vpetih točk
  - Pristop, ki ne temelji na računanju vpetih točk