École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

Session : Principale | Documents et Internet **NON** autorisés | Semestre : 2

Classes : $3^{\text{ème}}$ A & B

**Techniques d'Estimation pour l'Ingénieur**

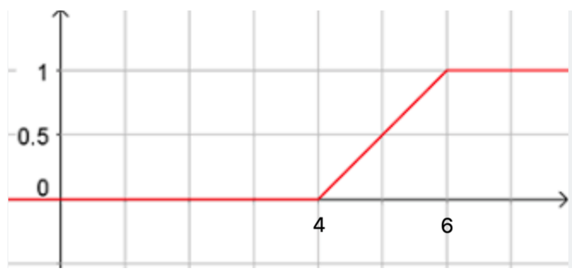
Nombre de pages : 6

Date : 29/05/2023 | Heure : 15h | Durée : 1h.30

**Les calculatrices sont autorisées.*
**La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

## Exercice 1 : (4 points)

Soit $X$ une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ est représentée ci-dessous :




1. **(1pt)** Expliciter l'expression de la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$.
   Il s'agit de la loi uniforme sur $[a, b]$ où $a = 4$ et $b = 6$.

$$\mathbb{F}_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 4 \\ \dfrac{x-4}{6-4} & \text{si} \quad 4 \leqslant x \leqslant 6 \\ 1 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

2. **(1pt)** Déterminer la fonction de densité $f_X$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6-4} & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. **(1pt)** Donner l'espérance et la variance de $X$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$
$$\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(6-4)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

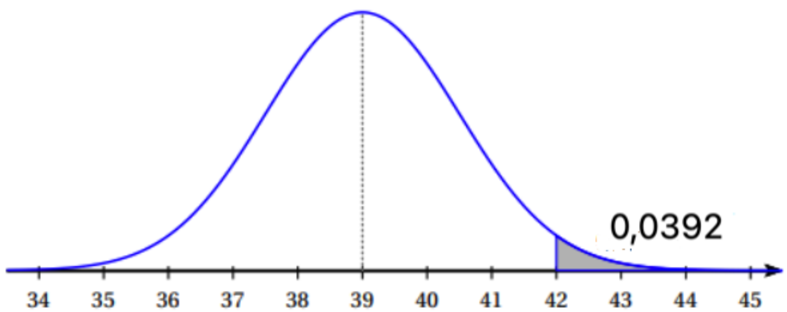
4. **(1pt)** Sans faire le calcul, donner en justifiant les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X < 3) \quad , \quad \mathbb{P}(X = 5) \quad , \quad \mathbb{P}(X < 7) \quad , \quad \mathbb{P}(X > 7)$$

$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{F}_X(3) = 0$,
$\mathbb{P}(X = 5) = 0$, car pour une variable aléatoire réelle à densité $X$ on sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
$\mathbb{P}(X < 7) = \mathbb{P}(X \leq 7) = \mathbb{F}_X(7) = 1$.
$\mathbb{P}(X > 7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 7) = 0$.

## Exercice 2 : (4 points)

Une étude statistique a montré que le temps passé dans l'un des rayons d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire $T$ qui suit une loi normale. La courbe de la fonction de densité de cette loi normale est représentée ci-dessous et la probabilité représentée par la partie grisée est égale à 0.0392 :




1. **(1pt)** Déterminer en justifiant, l'espérance $m$ de cette variable aléatoire.
   La courbe est symétrique par rapport à 39, donc m=39
2. **(1pt)** Vérifier que $\sigma = 1,7$.
   Comme
   $$\mathbb{P}\left(T > 42\right) = 0,0392,$$
   on a
   $$\mathbb{P}(Z > \frac{42 - 39}{\sigma}) = 0,0392.$$
   Par lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduite on obtient :
   $$\frac{3}{\sigma} = 1,76 \text{ et donc } \sigma = 1,704.$$
3. En utilisant le graphe, déterminer les probabilités suivantes, avec $F$ la fonction de répartition de la variable $T$ :
   a. **(1pt)** $1 - F(42)$.
   On a
   $$F(42) = 1 - 0,0392 = 0,9608$$
   Alors
   $$1 - F(42) = 0,0392$$
   b. **(1pt)** $F(42) - F(36)$.
   On a
   $$F(36) = P(X < 36) = 0,0392.$$
   Ainsi
   $$F(39) - F(42) = 1 - 2 \times 0,0392.$$

## Exercice 3 : (12 points)

Au second tour de la présidentielle, les électeurs de la Turquie doivent choisir entre deux candidats $C_1$ et $C_2$ (on suppose que tous les électeurs se prononcent). On désigne par $N_1$ (resp. $N_2$) le nombre d'électeurs se prononçant en faveur de $C_1$ (resp. $C_2$), et $p$ la proportion d'électeurs en faveur de $C_1$ dans la population totale.
L'O.S.T (Organisme de Sondage Turque) désire évaluer $p$ par sondage quelques jours avant l'élection.

### -Partie I-

1. a. **(0.5 pt)** Déterminer la taille de la population.

$$N = N_1 + N_2$$

   b. **(0.5 pt)** Identifier le caractère étudié et préciser sa nature.

   C'est un caractère qualitatif. Il présente l'intention de vote des électeurs.

   c. **(1 pt)** Exprimer $p$ en fonction de $N_1$ et $N_2$.

$$p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

2. Par la suite, on note par $Z$ la variable aléatoire qui vaut 1 si un électeur choisi au hasard est partisan de $C_1$ et 0 sinon.
   a. **(1 pt)** Quelle est la loi de $Z$.

$$Z \sim \mathrm{Ber}(p)$$

   b. **(1 pt)** Donner l'espérance et la variance de $Z$.
   $E(Z) = p$
   $\mathrm{Var}(Z) = p(1-p)$

### -Partie II-

L'organisme commence par interroger $2n$ individus choisis au hasard de la popultaion, ce que l'on modélise par un $2n-$échantillon $(Z_1 ... Z_{2n})$.

3. a. **(0.5 pt)** Rappeler les propriétés de cet $2n-$échantillon.
   Un échantillon de taille $2n$ (ou $2n$-échantillon) est une famille $(X_1, \ldots, X_{2n}\ )$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de même loi.
   b. **(1 pt)** Soit $A_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} Z_i$, un estimateur de $p$. Calculer soigneusement son espérance et sa variance.

$$\begin{aligned} E\left(A_n\right) = E\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{2n} Z_i\right) &= \frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{2n} E\left(Z_i\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{2n} E(Z) \\ &= \frac{1}{2n}\cdot 2n \cdot p \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(A_n\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{2n} Z_i\right) &= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=2}^{2n}\mathrm{Var}\left(Z_i\right)\\ &= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=2}^{2n}\mathrm{Var}(Z)\\ &= \frac{1}{4n^2}\cdot 2n\cdot p(1-p)\\ &= \frac{1}{2n}\cdot p(1-p).\end{aligned}$$

c. **(1 pt)** Déduire que cet estimateur est sans biais et convergent de $p$.
On a $E\left(A_n\right) = p$, il s'agit donc d'un estimateur sans biais de $p$.
Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Var}\left(A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{p(1-p)}{2n} = 0$$

Il est donc un estimateur convergent.

d. **(1 pt)** En pratique, comment choisir la taille d'échantillon $2n$ pour justifier l'approximation de la loi de $A_n$ par la loi normale.
On doit choisir $2n \geq 30$ c'est à dire $n \geq 15$.

L'OST interroge 500 électeurs, dont 284 se prononcent pour le candidat $C_1$.

4. a. **(1.5 pts)** Donner un intervalle de confiance de $p$ au niveau de confiance 98%.

$$\mathrm{IC}(p) = \left[A_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{A_n\left(1-A_n\right)}{2n}}\right]$$

$$A_n = \frac{284}{500} = 0,568;\ 1-\alpha = 0,98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01$$

Ainsi

$$P\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,01.$$

Par lecture inverse de la table on a

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,32.$$

Ainsi

$$\mathrm{IC}(p) = \left[0,568 \pm 2,32\sqrt{\frac{0,568(1-0,568)}{500}}\right].$$

b. **(0.5 pt)** A l'issue de ce calcul, peut-on dire que le candidat $C_1$ est majoritaire ?
On a $0,5 \in IC(p)$ ainsi $C_1$ est majoritaire.

## -Partie III-

Pour valider le jugement de la question précédente, l'OST a fait recours à un test d'hypothèses statistique sur un autre échantillon de taille 1000 d'une autre région du pays, dont 622 électeurs se prononcent pour le candidat $C_1$.

5. a. **(1.5 pts)** Au seuil de risque de 2%, peut-on conclure que la proportion des électeurs qui comptent voter pour le candidat $C_1$ est supérieure à 50% pour pouvoir confirmer que $C_1$ est majoritaire ?

Etape 1 : Choix d'hypothèses

$$\begin{cases}\mathbf{H}_0: & p_0 = 0,5\\ \mathbf{H}_1: & p_0 > 0,5.\end{cases}$$

Etape 2 : Variable de décision et écart réduit.
On a

$$p_n = \frac{622}{100} = 0,622,\ \ \alpha = 0,02$$

et

$$n \geqslant 30,\ np > 5,\ n(1-p) > 5.$$

Ainsi

$$\hat{p}_n \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}\right)$$

Par la suite, l'écart réduit est :

$$Z = \frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1).$$

Etape 3 : Régions critiques. On calcule la valeur $z_0$ prise par Z

$$z_0 = \frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,122}{\sqrt{0,00025}} = 7,721$$

On détermine $z_\alpha$ à partir du tableau de la loi normale centrée réduite,

$$\alpha = 0.02 \quad \Rightarrow z_\alpha = 2,05$$

Étape 4 : Décision

$$z_0 = 7,716 > z_\alpha = 2,05$$

On est dans la zone d'acceptation de $\mathbf{H}_1$ et de rejet de $\mathbf{H}_0$, et on peut ainsi conclure que $C_1$ est majoritaire.

b. **(1 pt)** Au seuil de risque de 2%, au dessous de quelle proportion échantillonnale, le candidat $C_1$ n'est plus majoritaire dans cette région.
$C_1$ n'est plus majoritaire, on va effectuer un test unilatéral à gauche et accepter $H_1$.

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 : & p_0 = 0,5 \\ \mathbf{H}_1 : & p_0 < 0,5 \end{cases}$$

Pour accepter $H_1$ ; il faut que

$$z_0 < -z_\alpha \text{ où } \alpha = 0,02$$

On a

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{n}} < -2,0.5.$$

Ainsi

$$\hat{p} < -2,05\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{1000}} + 0,5.$$

Et donc

$$\hat{p} < 0,4652.$$

# Loi normale réduite : probabilités unilatérales

Cette table donne p tel que $P(Z > a) = p$, où Z est la loi normale réduite

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,50000 | 0,49601 | 0,49202 | 0,48803 | 0,48405 | 0,48006 | 0,47608 | 0,47210 | 0,46812 | 0,46414 |
| 0,10 | 0,46017 | 0,45620 | 0,45224 | 0,44828 | 0,44433 | 0,44038 | 0,43644 | 0,43251 | 0,42858 | 0,42465 |
| 0,20 | 0,42074 | 0,41683 | 0,41294 | 0,40905 | 0,40517 | 0,40129 | 0,39743 | 0,39358 | 0,38974 | 0,38591 |
| 0,30 | 0,38209 | 0,37828 | 0,37448 | 0,37070 | 0,36693 | 0,36317 | 0,35942 | 0,35569 | 0,35197 | 0,34827 |
| 0,40 | 0,34458 | 0,34090 | 0,33724 | 0,33360 | 0,32997 | 0,32636 | 0,32276 | 0,31918 | 0,31561 | 0,31207 |
| 0,50 | 0,30854 | 0,30503 | 0,30153 | 0,29806 | 0,29460 | 0,29116 | 0,28774 | 0,28434 | 0,28096 | 0,27760 |
| 0,60 | 0,27425 | 0,27093 | 0,26763 | 0,26435 | 0,26109 | 0,25785 | 0,25463 | 0,25143 | 0,24825 | 0,24510 |
| 0,70 | 0,24196 | 0,23885 | 0,23576 | 0,23270 | 0,22965 | 0,22663 | 0,22363 | 0,22065 | 0,21770 | 0,21476 |
| 0,80 | 0,21186 | 0,20897 | 0,20611 | 0,20327 | 0,20045 | 0,19766 | 0,19489 | 0,19215 | 0,18943 | 0,18673 |
| 0,90 | 0,18406 | 0,18141 | 0,17879 | 0,17619 | 0,17361 | 0,17106 | 0,16853 | 0,16602 | 0,16354 | 0,16109 |
| 1,00 | 0,15866 | 0,15625 | 0,15386 | 0,15151 | 0,14917 | 0,14686 | 0,14457 | 0,14231 | 0,14007 | 0,13786 |
| 1,10 | 0,13567 | 0,13350 | 0,13136 | 0,12924 | 0,12714 | 0,12507 | 0,12302 | 0,12100 | 0,11900 | 0,11702 |
| 1,20 | 0,11507 | 0,11314 | 0,11123 | 0,10935 | 0,10749 | 0,10565 | 0,10383 | 0,10204 | 0,10027 | 0,09853 |
| 1,30 | 0,09680 | 0,09510 | 0,09342 | 0,09176 | 0,09012 | 0,08851 | 0,08691 | 0,08534 | 0,08379 | 0,08226 |
| 1,40 | 0,08076 | 0,07927 | 0,07780 | 0,07636 | 0,07493 | 0,07353 | 0,07215 | 0,07078 | 0,06944 | 0,06811 |
| 1,50 | 0,06681 | 0,06552 | 0,06426 | 0,06301 | 0,06178 | 0,06057 | 0,05938 | 0,05821 | 0,05705 | 0,05592 |
| 1,60 | 0,05480 | 0,05370 | 0,05262 | 0,05155 | 0,05050 | 0,04947 | 0,04846 | 0,04746 | 0,04648 | 0,04551 |
| 1,70 | 0,04457 | 0,04363 | 0,04272 | 0,04182 | 0,04093 | 0,04006 | 0,03920 | 0,03836 | 0,03754 | 0,03673 |
| 1,80 | 0,03593 | 0,03515 | 0,03438 | 0,03362 | 0,03288 | 0,03216 | 0,03144 | 0,03074 | 0,03005 | 0,02938 |
| 1,90 | 0,02872 | 0,02807 | 0,02743 | 0,02680 | 0,02619 | 0,02559 | 0,02500 | 0,02442 | 0,02385 | 0,02330 |
| 2,00 | 0,02275 | 0,02222 | 0,02169 | 0,02118 | 0,02068 | 0,02018 | 0,01970 | 0,01923 | 0,01876 | 0,01831 |
| 2,10 | 0,01786 | 0,01743 | 0,01700 | 0,01659 | 0,01618 | 0,01578 | 0,01539 | 0,01500 | 0,01463 | 0,01426 |
| 2,20 | 0,01390 | 0,01355 | 0,01321 | 0,01287 | 0,01255 | 0,01222 | 0,01191 | 0,01160 | 0,01130 | 0,01101 |
| 2,30 | 0,01072 | 0,01044 | 0,01017 | 0,00990 | 0,00964 | 0,00939 | 0,00914 | 0,00889 | 0,00866 | 0,00842 |
| 2,40 | 0,00820 | 0,00798 | 0,00776 | 0,00755 | 0,00734 | 0,00714 | 0,00695 | 0,00676 | 0,00657 | 0,00639 |
| 2,50 | 0,00621 | 0,00604 | 0,00587 | 0,00570 | 0,00554 | 0,00539 | 0,00523 | 0,00508 | 0,00494 | 0,00480 |
| 2,60 | 0,00466 | 0,00453 | 0,00440 | 0,00427 | 0,00415 | 0,00402 | 0,00391 | 0,00379 | 0,00368 | 0,00357 |
| 2,70 | 0,00347 | 0,00336 | 0,00326 | 0,00317 | 0,00307 | 0,00298 | 0,00289 | 0,00280 | 0,00272 | 0,00264 |
| 2,80 | 0,00256 | 0,00248 | 0,00240 | 0,00233 | 0,00226 | 0,00219 | 0,00212 | 0,00205 | 0,00199 | 0,00193 |
| 2,90 | 0,00187 | 0,00181 | 0,00175 | 0,00169 | 0,00164 | 0,00159 | 0,00154 | 0,00149 | 0,00144 | 0,00139 |
| 3,00 | 0,00135 | 0,00131 | 0,00126 | 0,00122 | 0,00118 | 0,00114 | 0,00111 | 0,00107 | 0,00104 | 0,00100 |
| 3,10 | 0,00097 | 0,00094 | 0,00090 | 0,00087 | 0,00084 | 0,00082 | 0,00079 | 0,00076 | 0,00074 | 0,00071 |
| 3,20 | 0,00069 | 0,00066 | 0,00064 | 0,00062 | 0,00060 | 0,00058 | 0,00056 | 0,00054 | 0,00052 | 0,00050 |
| 3,30 | 0,00048 | 0,00047 | 0,00045 | 0,00043 | 0,00042 | 0,00040 | 0,00039 | 0,00038 | 0,00036 | 0,00035 |
| 3,40 | 0,00034 | 0,00032 | 0,00031 | 0,00030 | 0,00029 | 0,00028 | 0,00027 | 0,00026 | 0,00025 | 0,00024 |
| 3,50 | 0,00023 | 0,00022 | 0,00022 | 0,00021 | 0,00020 | 0,00019 | 0,00019 | 0,00018 | 0,00017 | 0,00017 |
| 3,60 | 0,00016 | 0,00015 | 0,00015 | 0,00014 | 0,00014 | 0,00013 | 0,00013 | 0,00012 | 0,00012 | 0,00011 |
| 3,70 | 0,00011 | 0,00010 | 0,00010 | 0,00010 | 0,00009 | 0,00009 | 0,00008 | 0,00008 | 0,00008 | 0,00008 |
| 3,80 | 0,00007 | 0,00007 | 0,00007 | 0,00006 | 0,00006 | 0,00006 | 0,00006 | 0,00005 | 0,00005 | 0,00005 |
| 3,90 | 0,00005 | 0,00005 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00003 | 0,00003 |
| 4,00 | 0,00003 | 0,00003 | 0,00003 | 0,00003 | 0,00003 | 0,00003 | 0,00002 | 0,00002 | 0,00002 | 0,00002 |