EVOLUCIÓN DEL CALOR EN UNA HABITACIÓN

Ignacio Garach Vélez | Análisis numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales 06/06/2023

Descripción del problema

Consideramos una habitación rectangular con una ventana en una de las paredes, que representamos como una región $2\mathcal{D}$. Suponemos que el exterior está siempre a temperatura $T = 10$ y que la habitación está inicialmente a temperatura $T = 20$. Suponemos que las paredes están perfectamente aisladas, y que la ventana tiene un coeficiente de transmisión de $C = 0.5$ (de forma que la condición de frontera en la ventana es $\nabla u \cdot N = \frac{1}{2}(u - T)$, siendo N el normal exterior).
Calcula y representa gráficamente la evolución en tiempo de la temperatura en la habitación. Representa la evolución de la temperatura media de la habitación según el tiempo. ¿Cuánto tiempo tarda en bajar la temperatura media de la habiación a 15 grados?

Para resolverlo vamos a utilizar una estrategia mixta, en el sentido que para cada instante de tiempo vamos a resolver un problema estacionario mediante un método de elementos finitos y para la evolución en tiempo, un esquema de diferencias finitas.

Mallado del dominio espacial

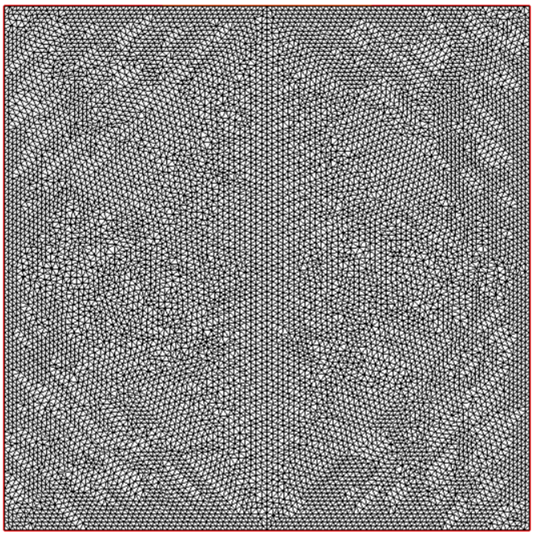
La región $2\mathcal{D}$ del espacio será el cuadrado $\Omega = [0, 5] \times [0, 5]$ en la que consideraremos una ventana en la parte superior de 2 unidades de distancia $\mathcal{V} = [1.5, 3.5] \times \{5\}$. El siguiente código de FreeFem construye el mallado:

```
border p1(t=0.,5.){x=t; y=0;label=1;};
border p2(t=0.,5.){x=5; y=t;label=1;};
border p3(t=0.,1.){x=5-1.5*t; y=5;label=1;};
border vent(t=0.,1.){x=3.5-2*t; y=5;label=2;}; //Ventana
border p4(t=0.,1.){x=1.5-1.5*t; y=5;label=1;};
border p5(t=0.,5.){x=0; y=5-t;label=1;};

mesh Th = buildmesh(p1(90) + p2(90) + p3(27) + vent(36) + p4(27) + p5(90));

```

Listing 1: Definición del mallado



Ecuación del calor con condiciones de Robin

Conviene plantear el problema de esta forma para poder imponer fácilmente las condiciones pedidas. Queremos resolver la siguiente ecuación en $\Omega \times [0,T]$

$$\partial_t u = \Delta u \text{ en } \Omega \times [0,T] \tag{1}$$

$$u(x,y,0) = 20 \tag{2}$$

$$N \cdot \nabla u + C(u - u_{ext}) = 0 \text{ en } \mathcal{V} \times [0,T] \tag{3}$$

Esquema numérico

Vamos a utilizar un esquema de diferencias finitas a primer orden (hacia atrás) en tiempo para aproximar la derivada es decir,

$$u'(t_0 + h) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t)}{h} \tag{4}$$

para ello tomamos un número de nodos N y calculamos $h = \frac{T}{N}$, sustituyendo en la ecuación 1, tenemos la siguiente formulación implícita del problema:

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \Delta u_n \text{ en } \Omega \times [0,T] \tag{5}$$

El espacio natural donde buscar soluciones para está ecuación es $H^1(\Omega)$. Ahora necesitamos escribir una formulación débil del problema que incluya la condición de Robin, para ello multiplicamos por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos por partes (Fórmula de Green):

$$\int_\Omega v \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \int_\Omega v \Delta u_n = -\int_\Omega \nabla u_n \nabla v + \int_{\partial\Omega} v N \cdot \nabla u_n = -\int_\Omega \nabla u_n \nabla v - C \int_{\partial\Omega} v(u_n - u_{ext}) \tag{6}$$

Con esta formulación ya podemos separar las formas bilineal y lineal que cumplen las hipótesis para aplicar el teorema de Lax-Milgram que garantiza la existencia de solución. Calculada esta formulación basta con implementarla en FreeFem:

```
fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v, uold, u0=20;

problem CalorMixtas(u, v, init=1)
    = int2d(Th)((dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
    + int2d(Th)(dt*v*u)
    - int2d(Th)(dt*v*uold)
    + int1d(Th, 2)(0.5*u*v) - int1d(Th, 2)(0.5*10*v); //Condiciones de Robin de ventanas

// Iteraciones en tiempo
u = u0;
for (int i = 0; i < nodos; ++i){
  uold = u;
  CalorMixtas;
  plot(u, fill = true, dim = 2, wait = 1, value=true);
}
```

Listing 2: Definición del problema estacionario e iteración en tiempo

A continuación mostramos 3 momentos de la simulación, comienzo y las dos fases más claras:

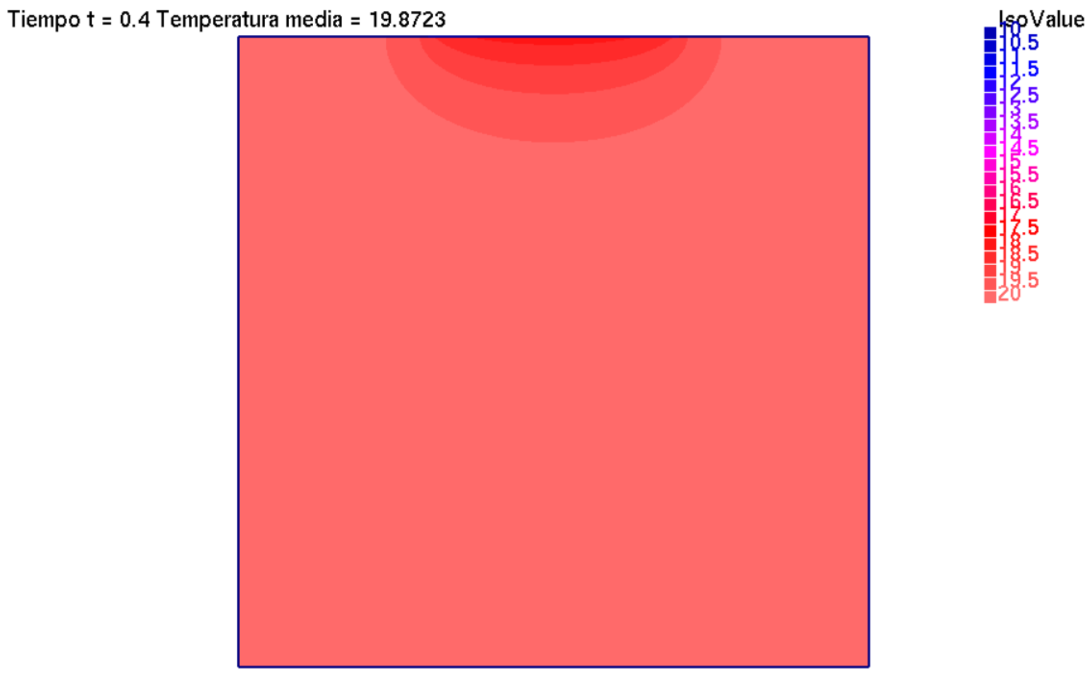


Figure 1: Estado de la simulación en el primer instante t=0.4

Trás estos primeros instantes la difusión ha sido muy rápida y ha bajado bastante la temperatura media, la mínima se situa adyacente a la ventana y ya está bastante cercana a la del exterior.

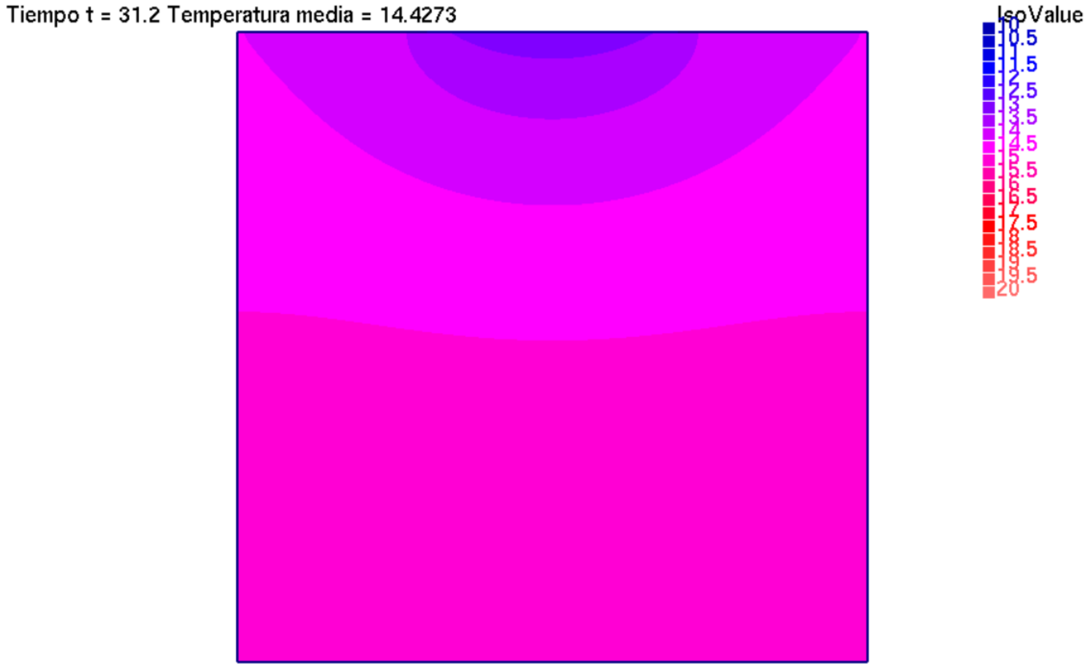


Figure 2: Estado de la simulación en el instante t=31.2

Avanzando más, vemos que la difusión es más lenta quedando zonas más cálidas en el extremo opuesto de la ventana.

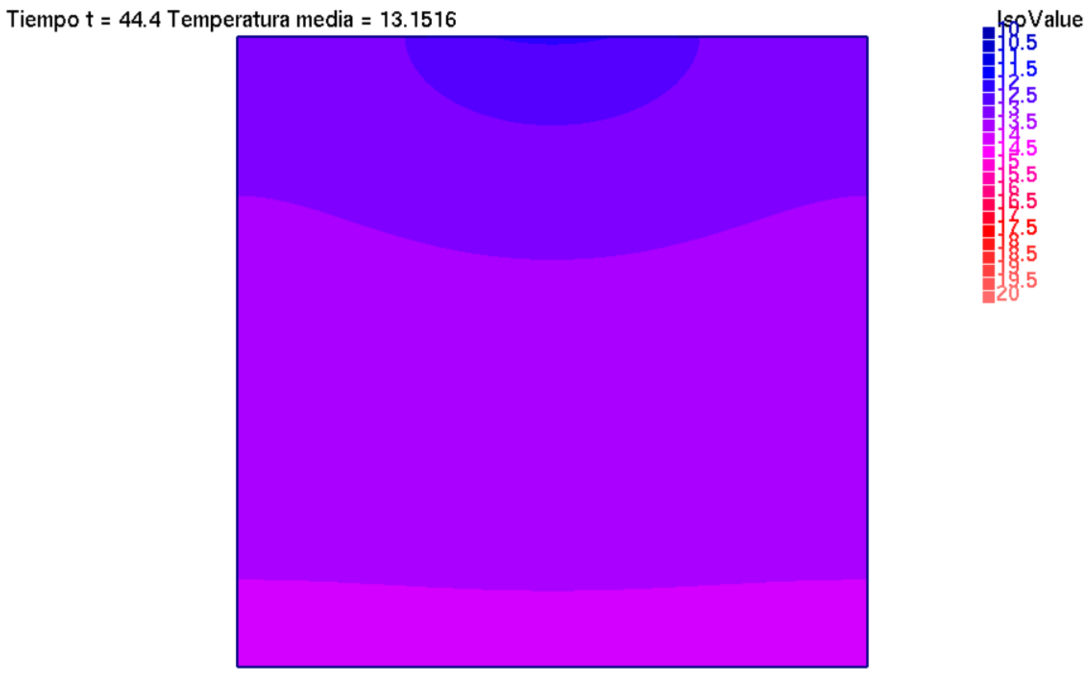


Figure 3: Estado de la simulación en el instante t=44.4

Evolución de la temperatura media

Para calcular la temperatura media de la habitación en un momento determinado, debemos integrar la función u resultante en el dominio Ω y dividir entre el área del dominio, es decir:

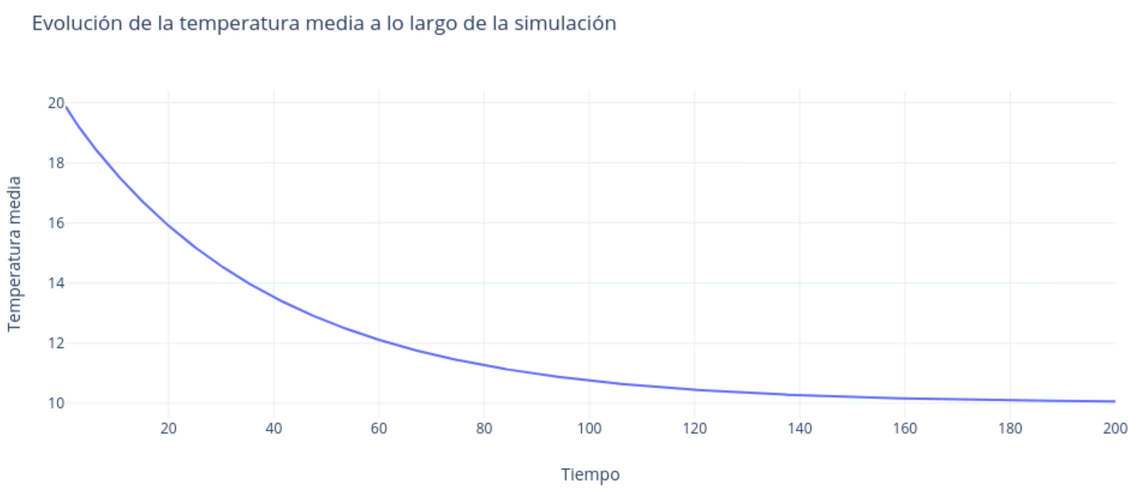
$$\text{T}^{\text{a}}\ \text{Media} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u d\Omega \tag{7}$$

En FreeFem, es tan sencillo como calcular la integral y almacenarla en una variable:

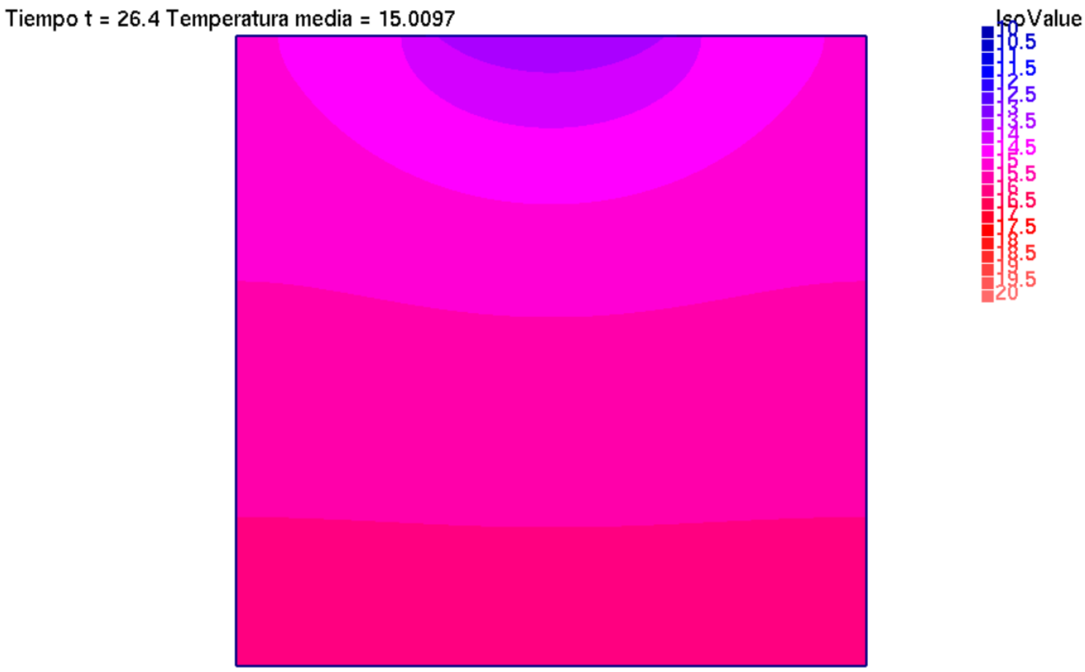
```
real tmedia = (1/area)*int2d(Th)(u);
```

Listing 3: Cálculo de la Temperatura media

Como las capacidades de visualización de FreeFem no son muy avanzadas, para representar la variación de la temperatura media respecto al tiempo, se han obtenido los valores en un fichero y representado con Plotly:



Comprobamos que el comportamiento es el esperable, al comenzar la simulación la diferencia de temperaturas entre el exterior y el interior es mayor y por tanto el intercambio de calor es más rápido a través de la ventana, como podemos ver la pendiente es más abrupta hasta en torno al tiempo $t = 40$ en el que ya la media es de casi 14 grados, donde como la diferencia de temperatura es menor la transmisión es más lenta. Como no hay ninguna fuente de calor, al final la temperatura en la habitación converge a la temperatura del exterior. Concretamente, la temperatura media de 15 grados se alcanza cuando t=26.4, podemos comprobarlo tanto en la gráfica como en los resultados de la simulación.


Tiempo t = 26.4 Temperatura media = 15.0097
IsoValue
10.5
11.5
12.5
13.5
14.5
15.5
16.5
17.5
18.5
19.5
20