

# The Whale Optimization Algorithm

## Metaheurísticas

Ignacio Aguilera Martos

DNI: 77448262V e-mail: nacheteam@correo.ugr.es

Curso 2017-2018

## Índice

<b>1. Introducción del problema</b>	<b>3</b>
1.1. Competición CEC2014 . . . . .	3
1.2. Módulo de funciones CEC2014 . . . . .	3
<b>2. Descripción del algoritmo inicial</b>	<b>4</b>
2.1. Inspiración en la ballena jorobada . . . . .	4
2.2. Modelo matemático . . . . .	4
2.3. Pseudocódigo del algoritmo . . . . .	5
<b>3. Desarrollo de mejoras</b>	<b>6</b>
3.1. Versión original . . . . .	6
3.2. Aproximación espiral a una solución aleatoria . . . . .	6
3.3. Solis Wets . . . . .	7
3.4. Differential Evolution . . . . .	7
3.5. CMAES . . . . .	8
3.6. Posición aleatoria . . . . .	8
<b>4. Versión final</b>	<b>8</b>
<b>5. Resultados</b>	<b>10</b>
5.1. Comparativa con el resto de algoritmos . . . . .	14
5.2. Comportamiento con respecto a Differential Evolution . . . . .	17
<b>6. Conclusiones</b>	<b>18</b>

## Índice de figuras

1.	a) Aproximación lineal. b) Aproximación en espiral. . . . .	5
2.	Resultados y errores de la primera versión . . . . .	10
3.	Resultados y errores de la segunda versión . . . . .	11
4.	Resultados y errores de la tercera versión . . . . .	12
5.	Resultados y errores de la cuarta versión . . . . .	13
6.	Resultados y errores de la quinta versión . . . . .	13
7.	Resultados y errores de la sexta versión . . . . .	14
8.	Progresión de las mejores ballenas en la versión final. . . . .	14

## Índice de cuadros

1.	Resultados comparados Tanabe dimensión 10 . . . . .	15
2.	Resultados comparados CEC2014 dimensión 10 . . . . .	15
3.	Resultados comparados Daniel Molina dimensión 10 . . . . .	15
4.	Resultados comparados Tanabe dimensión 30 . . . . .	16
5.	Resultados comparados CEC2014 dimensión 30 . . . . .	16
6.	Resultados comparados Daniel Molina dimensión 30 . . . . .	16
7.	Ranking en dimensiones 10 y 30. . . . .	17

# 1. Introducción del problema

Durante este trabajo he tenido como objetivo desarrollar un algoritmo mejorado a partir de un algoritmo bioinspirado de partida. Este algoritmo ha sido 'The Whale Optimization Algorithm' desarrollado y estudiado por los investigadores Seyedali Mirjalili y Andrew Lewis ambos de la universidad de Griffith.

Para la comparativa y estudio de los resultados he puesto el algoritmo a calcular los mínimos de 20 funciones. Estas funciones son las mismas que se utilizaron en la competición CEC2014, competición que pasaré a comentar brevemente en la siguiente sección.

## 1.1. Competición CEC2014

Esta competición es un referente a nivel mundial en cuanto a competiciones de algoritmos se refiere. La intención de la competición es poner todos los algoritmos a ejecutar con diferentes dimensiones: 10,30,50,100,... de forma que se puedan comparar a posteriori los resultados obtenidos por los mismos.

El problema consiste en minimizar 30 funciones que a priori no tienen un mínimo fácilmente localizable, como única garantía se tiene que el mínimo está localizado en el compacto  $[-100, 100]^n$  donde  $n$  es la dimensión considerada.

En esta competición del año 2014 se evaluaron las funciones en dimensión 10,30,50 y 100 pero en este trabajo sólo hemos abarcado el problema de dimensión 10 y 30. Además cabe destacar que el algoritmo ganador en la competición fue L-SHADE.

## 1.2. Módulo de funciones CEC2014

Para poder ejecutar el algoritmo diseñado sobre las funciones de la competición CEC2014 primero tenemos que tener una implementación de las mismas. Mi decisión fue utilizar Python para el desarrollo del algoritmo, por la rapidez y facilidad en la escritura y sintaxis y por disponer de bibliotecas muy potentes en las que poder apoyar mi código.

La implementación de las funciones nos fue dada en C++, por lo que tuve que hacer un módulo en Python primero que importase las funciones de C++ para poder utilizarlas en Python. Este trabajo lo hice de forma conjunta con mi compañero Pablo Baeyens utilizando la biblioteca Cython. Tras esto implementamos dos interfaces muy sencillas que permiten ejecutar las primeras 20 funciones de la competición a través de una clase Benchmark.

Cabe destacar que esta idea se me ocurrió tras ver que el profesor de la Universidad de Granada en Ceuta Daniel Molina había desarrollado un módulo parecido para la competición de 2013 [2]. Tras contactar con el y apoyarnos en su código terminamos de desarrollar el módulo de las funciones y lo subimos a GitHub dejándolo a disposición del resto de alumnos junto con el código de otro compañero que realizó el mismo trabajo para el lenguaje Julia [4].

## 2. Descripción del algoritmo inicial

En esta sección vamos a pasar a describir con detalle el algoritmo inicial propuesto por Mirjalili y Lewis en su artículo [5] desgranando cada elemento que pueda resultar interesante para el desarrollo de la explicación de las siguientes versiones.

### 2.1. Inspiración en la ballena jorobada

Este algoritmo basa su comportamiento en la naturaleza, por lo que es uno de los llamados algoritmos bioinspirados. En concreto en este caso el algoritmo toma como idea la forma en que las ballenas jorobadas se aproximan a su comida.

Estas ballenas tienen dos formas comunes de alimentarse: aletear sobre sus presas y después comérselas o realizar un camino ascendente hacia ellas en forma de espiral para así concentrar los peces en la parte superior de la misma mientras que expulsan burbujas para aturdir a sus presas.

Mediante estas dos formas de caza se están describiendo dos formas de aproximarse hacia las presas que en nuestro caso serán las soluciones, por lo que con esto tendremos una aproximación lineal hacia la solución lo que nos va a dar en teoría una buena convergencia y tendremos una aproximación en espiral que intentará que no nos quedemos encerrados en mínimos locales ya que estaremos explorando un entorno de la solución cada vez más pequeño.

### 2.2. Modelo matemático

Para la descripción del modelo vamos a definir  $a \in \mathbb{R}$  como un número que se decrementa de forma lineal desde 2 hasta 0 y  $r \in \mathbb{R}$  un valor aleatorio en el intervalo  $[0, 1]$ .

A partir de estos números reales podemos definir  $C \in \mathbb{R}$  como  $C = 2 \cdot r$  y  $A \in \mathbb{R}$  como  $A = 2 \cdot a \cdot r - a$ . Nótese que estas variables van dependiendo de los dos reales definidos previamente.

Para el movimiento lineal vamos a definir  $D \in \mathbb{R}^n$  como  $D = |C \cdot X^*(t) - X(t)|$  donde  $X^*(t)$  es la posición de la mejor solución hallada hasta el momento,  $X(t)$  es la posición actual de la ballena. y  $|\cdot|$  es el valor absoluto componente a componente.

Para el movimiento lineal con lo definido si estamos en la iteración  $t$  entonces obtenemos la posición de la siguiente iteración como:

$$X(t+1) = X^*(t) - A \cdot D$$

Donde el producto entre vectores se refiere al producto elemento por elemento y el producto de escalar por vector es el definido en un espacio vectorial cualquiera.

Esta aproximación hecha hasta el momento es la lineal, la cual es la más sencilla de las dos y nos da el comportamiento más simple. Ahora vamos a desarrollar el movimiento espiral.

Si nos fijamos en la variable  $A$  podemos ver que en realidad es un valor aleatorio en el intervalo  $[-a, a]$  lo que nos permite que en cada iteración podamos tomar como siguiente punto cualquiera de los que se encuentran en el segmento que une  $X(t)$  con  $X^*(t)$ .

Para la aproximación en espiral definimos la constante real  $b \in \mathbb{R}$  que nos da la forma concreta de la espiral, en el caso del algoritmo implementado para el paper  $b = 1$ . También definimos la variable  $l \in \mathbb{R}$  que es un valor aleatorio en el intervalo  $[-1, 1]$ .

En este caso definimos también una variable dependiente de la posición actual y la mejor hasta el momento  $D' \in \mathbb{R}^n$  como  $D' = |X^*(t) - X(t)|$ .

Con todo lo definido la expresión del movimiento en espiral para la siguiente iteración  $t+1$  viene dada por:

$$X(t+1) = D' \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + X^*(t)$$

Tras esto ya tenemos definidos los dos tipos de movimientos con las ecuaciones que los modelan. El comportamiento real del algoritmo va a depender de un valor aleatorio  $p \in [0, 1]$  de forma que:

$$X(t+1) = \begin{cases} X^*(t) - A \cdot D & \text{si } p < 0,5 \\ D' \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + X^*(t) & \text{si } p \geq 0,5 \end{cases}$$

A esto le sumamos el hecho de que en un estado inicial del algoritmo, o lo que es lo mismo si  $|A| > 1$ , tenemos que en vez de dirigirnos hacia la mejor ballena hasta el momento nos vamos a dirigir a una posición aleatoria, de forma que vamos a ensalzar la exploración sobre la convergencia. Todas las fórmulas permanecen igual salvo que  $X^*$  en este caso es un  $X_{rand}$  aleatorio.

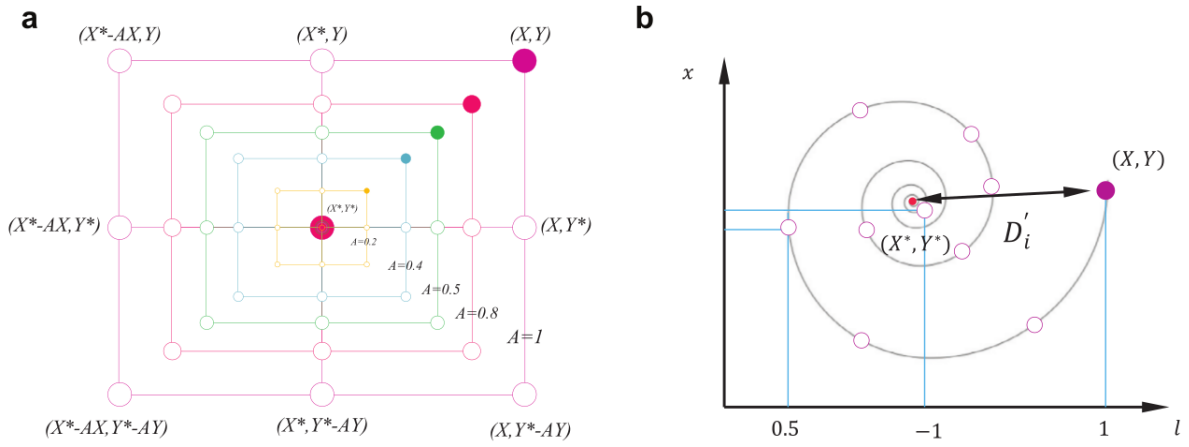


Figura 1: a) Aproximación lineal. b) Aproximación en espiral.

### 2.3. Pseudocódigo del algoritmo

---

```

Inicialización de la población de ballenas  $X_i : i = 1, 2, \dots, n$ 
Se calcula el fitness de cada ballena.
 $X^*$  = la mejor de las ballenas.
t=0
while t<máximo de iteraciones do
  for  $X_i$  con  $i=1,2,\dots,n$  do
    Actualiza a,A,C,l y p (b=1).
    if  $p < 0,5$  then
      if  $|A| < 1$  then
        Actualiza la posición de la ballena  $X_i$  utilizando la aproximación lineal con  $X^*$ 
      else
        Escogemos una ballena aleatoria  $X_{rand}$ 
        Actualiza la posición de la ballena  $X_i$  utilizando la aproximación lineal con  $X_{rand}$ 
      end if
    else
      Actualiza la posición de la ballena de forma espiral con  $X^*$ 
    end if
  end for
  Comprobar si alguna ballena se ha salido del espacio de búsqueda.
  Calcular el fitness de las ballenas de nuevo.
  Actualizar  $X^*$ 
  t=t+1
end while
return  $X^*$ 

```

---

### 3. Desarrollo de mejoras

#### 3.1. Versión original

La primera aproximación al algoritmo implementado vino dada por la propia de los autores, realizada en el lenguaje Matlab y que yo tuve que adaptar a Python. Esta adaptación fue instrucción a instrucción para que el algoritmo se viera reflejado fielmente.

La primera versión contiene el mismo esquema que el pseudocódigo mencionado con anterioridad pero si lo analizamos un poco mejor podemos ver que la población inicial no se genera de forma aleatoria como cabría esperar, si no que se inicializa con el vector  $(0, \dots, 0)$ . Este hecho me resultó curioso cuando me di cuenta de que las funciones que se analizaban para el algoritmo tenían casi todas su mínimo en el 0. Por seguir unos propósitos más generales he decidido inicializar toda la población de forma aleatoria. En cuanto al resto del código no cambié nada puesto que quería mantener en un principio la esencia del algoritmo.

#### 3.2. Aproximación espiral a una solución aleatoria

Para la segunda versión hice el primer cambio que comenté en la exposición de la metaheurística y que es evidente al mirar el algoritmo. Decidí meter también una búsqueda hacia una solución aleatoria si  $|A| \geq 1$  en la espiral, de forma que en el primera fase del algoritmo se maximizara la búsqueda en el espacio de soluciones. Este cambio no resultó ser a mejor debido a que aunque en un principio pueda parecer lógico que el algoritmo así va a explorar más, con el tiempo y desarrollando versiones me di cuenta de que lo que le faltaba al algoritmo no era más exploración o diversidad, si no convergencia como luego veremos.

### 3.3. Solis Wets

Para introducir la búsqueda local dentro del algoritmo y aportarle así un poco más de convergencia comencé implementado mi propia versión de la búsqueda local de forma parecida a cómo lo hemos hecho en las prácticas de la asignatura. Tomamos un vector de entrada y le realizamos una mutación en una de sus posiciones sumándole un valor generado por una distribución normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 0,3$ . Esto resultó ser una búsqueda local pésima que incluso era capaz de empeorar el algoritmo inicial por lo que la descarté.

Tras esto acudí a los ficheros que se nos daban de ayuda, los cuales contenían una búsqueda local mucho mejor implementada en C++ pero de nuevo no me servían puesto que he realizado la implementación en Python. Acudí a la cuenta de GitHub de Daniel Molina y tras obtener su consentimiento he usado una implementación de la búsqueda local Solis Wets realizada en Python por él mismo [3].

Esta búsqueda local se diferencia con respecto a la mía en tres aspectos. El primero de ellos es que añadido a sumar un incremento generado con una distribución normal tenemos el hecho de que se mantiene una inercia, es decir, si mejoramos el vector solución hacia una dirección concreta y nos estuvo dando éxito entonces continuaremos con una cierta inercia dirigiendo hacia allí la solución. El segundo aspecto es que si en una dirección de modificación del vector no estamos obteniendo mejoras entonces vamos a coger en la iteración siguiente justo la dirección opuesta. Por último el valor  $\sigma$  de la distribución normal  $\mathcal{N}(0, \sigma)$  se va incrementando o decrementando en función del número de éxitos al realizar la mejora, es decir, si superamos un umbral de éxitos incrementaremos el valor de  $\sigma$  y si superamos un umbral de fallos entonces decrementaremos el valor de  $\sigma$ .

Con esta nueva búsqueda local realicé la tercera versión del algoritmo. La idea es que cada mil iteraciones introducimos una búsqueda local que nos va a favorecer la convergencia del algoritmo. Además para intentar mejorar lo máximo posible la solución reservo al final 1000 evaluaciones para que la búsqueda local pueda intentar mejorar el resultado del algoritmo.

Tras hacer esto de nuevo vi que la convergencia era demasiada, es decir, el algoritmo mejoraba muy rápido cuando se empleaba la búsqueda local pero en el resto del proceso no se mejoraba demasiado puesto que las ballenas acababan estando demasiado próximas entre sí. Por ello decidí meterle un esquema muy pequeño de mutación para que diversificara el proceso. En vez de realizar un movimiento en espiral decidí cambiarlo por una mutación del 20% de la población volviendo a generarlos de forma aleatoria. Lo que conseguimos con esto es que la población vaya mejorando en términos generales, pero si entramos en la parte del algoritmo asociada a la espiral entonces mutamos para dar mas diversidad. Haciendo estos cambios como veremos posteriormente obtuve una mejora muy notoria en los resultados.

### 3.4. Differential Evolution

En la cuarta versión quise meter un esquema de diversidad un poco más elaborado que el de la tercera versión. Lo primero que hice fue cambiar el condicional sobre el valor aleatorio  $p$ . Ahora solo entraremos en la parte del condicional correspondiente a la espiral si  $p \geq 0,9$  lo cual reduce las posibilidades de entrar en la mutación.

Para suplir este cambio le metí un esquema de Differential Evolution cada 10.000 iteraciones. Este esquema de Differential Evolution lo que hace es ejecutar un algoritmo de Differential Evolution durante un número de iteraciones concretas. La elección de este algoritmo vino influenciada por los buenos resultados que obtenía en todos los rankings de competiciones de algoritmos, además disponía de él de forma fácil pues lo habíamos implementado en las prácticas y por tanto sólo tenía que adaptar mi código a es de este problema. Como esquema de mutación tomé el operador Rand1 que es el que mejores resultados me dio en la práctica comparado con Current to Best 1. Cabe recordar que el esquema de mutación toma para cada

individuo a mutar tres individuos aleatorios de la población y mediante un factor  $F$  obtiene el vector mutado como:

$$mutado = poblacion[rand_1] + F \cdot (poblacion[rand_2] - poblacion[rand_3])$$

Donde la constante  $F$  es la recomendada en las diapositivas de teoría  $F = 0,5$ .

Tras esto me di cuenta de que los resultados del algoritmo no habían mejorado todo lo que esperaba. Esta mejora está claro que desarrolla más diversidad que convergencia con respecto al esquema de la búsqueda local, por lo que decidí que, además de cambiar el umbral de  $p$  a partir del cual entramos en la mutación del 20 % de la población, iba a realizar la mutación sobre el 20 % peor y no sobre un 20 % aleatorio. Tras este cambio mejoró un poco el algoritmo.

### 3.5. CMAES

Llegados a este punto el algoritmo mantenía un equilibrio entre convergencia y diversidad bastante ajustado, ya que añadiendo más evaluaciones a la búsqueda local o quitándole no conseguía una mejora sustancial. Por ello se me ocurrió que más que quitar o sumar evaluaciones a la búsqueda local lo que tenía que hacer era aprovechar mejor las evaluaciones que le estaba cediendo con respecto al resto del algoritmo.

Por ello decidí utilizar un algoritmo más potente como CMAES. El problema que tuve con este algoritmo fue parecido al que he relatado previamente con la búsqueda local. En primer lugar intenté acudir de nuevo a Daniel Molina para ver si tenía una versión en Python de CMAES. Esta consulta resultó satisfactoria pues sí la tenía pero al comprobar con más detalle me di cuenta de que estaba escrita en Python2 mientras que yo estaba empleando Python3 que no tiene retrocompatibilidad. Por ello volví a preguntarle y me sugirió que usase la implementación de los propios autores que tienen disponible en su GitHub [1].

Esta implementación tiene su propia sintaxis para las funciones, por lo que tuve que modificar ligeramente los ficheros de CMAES hasta que pude hacer que funcionara con mi algoritmo. El cambio realizado por tanto fue reemplazar todas las búsquedas locales por llamadas a CMAES de forma que mejorase mucho más la solución en el mismo número de evaluaciones. Este cambio le dio una mejora sustancial a los resultados aunque ya estaba acercándome a los mínimos de las funciones.

### 3.6. Posición aleatoria

Por último, tras revisar el algoritmo en busca de posibles mejoras empecé a prestarle atención a la fase inicial del mismo. En la fase inicial el algoritmo en vez de aproximarse hacia la mejor ballena se aproxima a una de ellas escogida de forma aleatoria. Este comportamiento puede llevar a que las ballenas se acaben agrupando entorno a ellas mismas y por tanto arruinaría la exploración. Por ello el último cambio que he realizado al algoritmo ha consistido en hacer una aproximación a un vector aleatorio en vez de a una ballena aleatoria.

Esta mejora que a priori pudiera parecer un tanto trivial mejoró la exploración del algoritmo tanto que en algunos casos mejoré 1000 unidades respecto a la versión anterior.

## 4. Versión final

La versión final del algoritmo es la consecuencia de haber seguido la secuencia de mejoras y pruebas que he definido en la sección anterior. A continuación describiré el algoritmo en pseudocódigo:



---

**Algorithm 1** Ballena(f\_obj,inf,sup,dimension,nBallenas)

---

max\_evals = 10000 · dimension

evaluaciones = 0

Inicializo lider\_pos a un vector aleatorio con valores entre inf y sup.

lider\_score =  $\infty$

Genero una población inicial llamada posiciones con vectores aleatorios con valores entre inf y sup.

t = 0

max\_iter = (0.9\*max\_evals)/nBallenas

a = 2

Coloco en un principio el fitness de cada ballena como infinito en el vector fitness.

**while** evaluaciones < max\_evals **do**

**if** t%100 == 0 and t! = 0 **then**

    Tomamos un 25 % de las ballenas de forma aleatoria.

    Ejecutamos CMAES sobre el 25 % elegido

    Actualizamos el vector de posiciones con las soluciones de CMAES.

    Actualizamos el vector fitness con el fitness de las soluciones.

    Sumamos a evaluaciones las evaluaciones consumidas por CMAES.

**end if**

**if** t%50 == 0 and t! = 0 **then**

    Aplico el esquema de Differential Evolution sobre el vector posiciones.

    Actualizo el vector posiciones, el vector fitness y sumo las evaluaciones consumidas por Differential Evolution.

**end if**

Comprobamos si las ballenas se han salido de los límites, actualizamos sus fitness y actualizamos lider\_pos y lider\_score si es necesario.

Sumamos nBallenas a evaluaciones.

$a = 2 - t \cdot \frac{2}{max\_iter}$

**for** i=0,...,nBallenas-1 **do**

  Tomamos dos números aleatorios entre 0 y 1 r1 y r2.

$A = 2 \cdot a \cdot r1 - a$

$C = 2 \cdot r2$

  Se toma p un número aleatorio entre 0 y 1.

**if** p < 0,9 **then**

**if** |A| ≥ 1 **then**

      Tomamos X\_rand un vector aleatorio con valores en el intervalo [inf, sup]

$D\_X\_rand = |C \cdot X\_rand - posiciones[i]|$

$posiciones[i] = X\_rand - A \cdot D\_X\_rand$

**else**

$D\_lider = |C \cdot lider\_pos - posiciones[i]|$

$posiciones[i] = lider\_pos - A \cdot D\_lider$

**end if**

**else**

    Tomamos la mitad peor de las ballenas y las reemplazamos por vectores aleatorios.

**end if**

**end for**

**end while**

Comprobamos si las ballenas se han salido de los límites, actualizamos sus fitness y actualizamos lider\_pos y lider\_score si es necesario.

Aplicamos CMAES sobre lider\_pos.

**return** lider\_pos, lider\_score

---

He tomado como máximo de evaluaciones 10.000 por la dimensión, al igual que venía especificado para la competición CEC2014.

El algoritmo recibe como parámetros la función objetivo, el extremo inferior del espacio de búsqueda, el extremo superior, la dimensión del problema y el número de ballenas que se quiere que tenga la población, por defecto 50.

Para definir el máximo de iteraciones tomo el 90 % de las mismas para reservar un 10 % para que cuando llegue al final del algoritmo pueda ejecutar CMAES sobre la mejor de las ballenas con dicho 10 % de las iteraciones máximas.

## 5. Resultados

En primer lugar vamos a estudiar cómo ha evolucionado el esquema de soluciones en cuanto a resultados para comprobar que en términos generales el algoritmo ha mejorado de forma muy notable. En un principio el algoritmo obtuvo unos resultados muy lejanos de los óptimos. El valor óptimo de la función en cada caso es  $i \cdot 100$  donde  $i$  corresponde al número de la función. Teniendo en cuenta esto los errores y resultados obtenidos para las 20 funciones con la implementación inicial fueron:

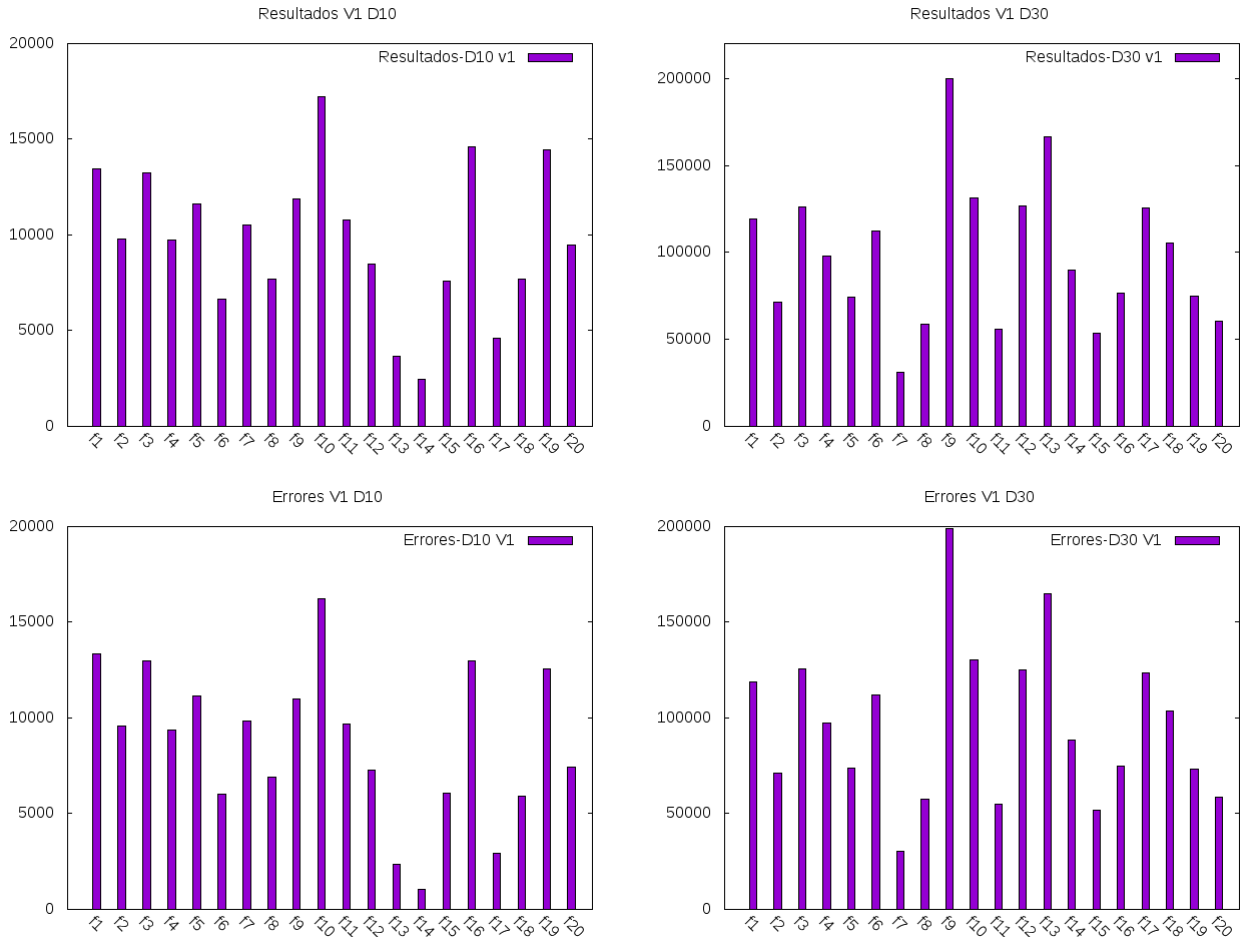


Figura 2: Resultados y errores de la primera versión

Si nos damos cuenta para dimensión 10 los resultados obtenidos llegan a estar incluso cerca de 17.500 y para dimensión 30 cerca de los 200.000 lo que está muy alejado de los valores óptimos de las funciones.

Este comportamiento me resultó raro ya que en el paper se comparaba este algoritmo en problemas de minimización de funciones con otros muchos algoritmos y ganaba en casi todos los casos. Tras comprobar bien la implementación y las funciones vi que los mínimos de las funciones estaban casi todos en el punto 0 del espacio o muy cercano a el y que las ballenas iniciales se inicializaban todas en la posición 0. Este hecho puede llevar a pensar que los resultados estén condicionados por la localización del óptimo en las funciones ya que con la misma implementación pero cambiando el óptimo de posición en las funciones que se quieren minimizar ya no obtenemos unos resultados tan buenos.

Si seguimos comparando podemos ver que en la versión tres mejoramos los resultados un poco con respecto a la primera:

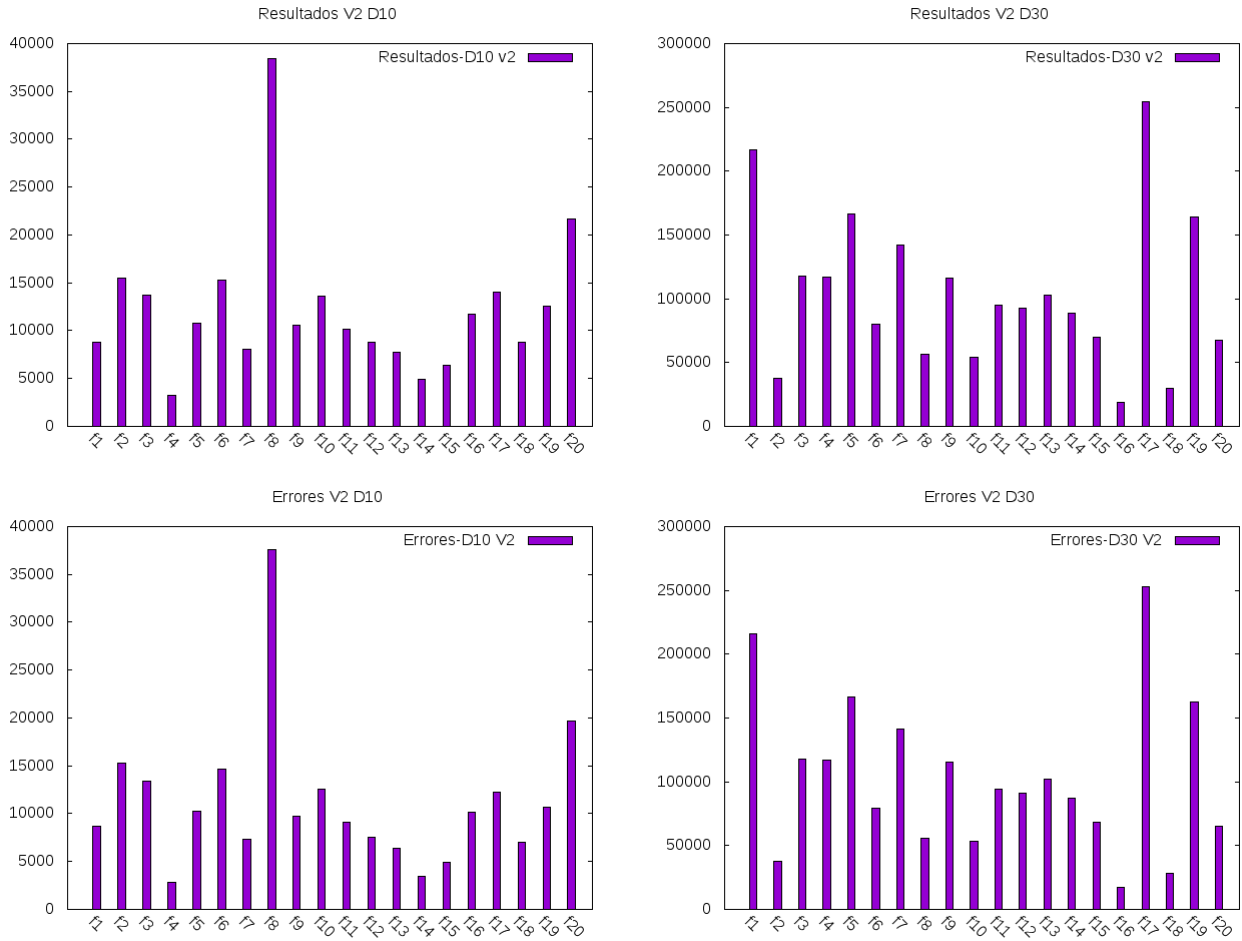


Figura 3: Resultados y errores de la segunda versión

Podemos observar que la mejora ha sido en términos generales buena, pero aún así seguimos encontrando funciones que destacan por dar unos valores mucho peores que el resto. Cabe destacar que en esta versión encontramos más diversidad y menor convergencia, cosa que se invertirá en la próxima versión:

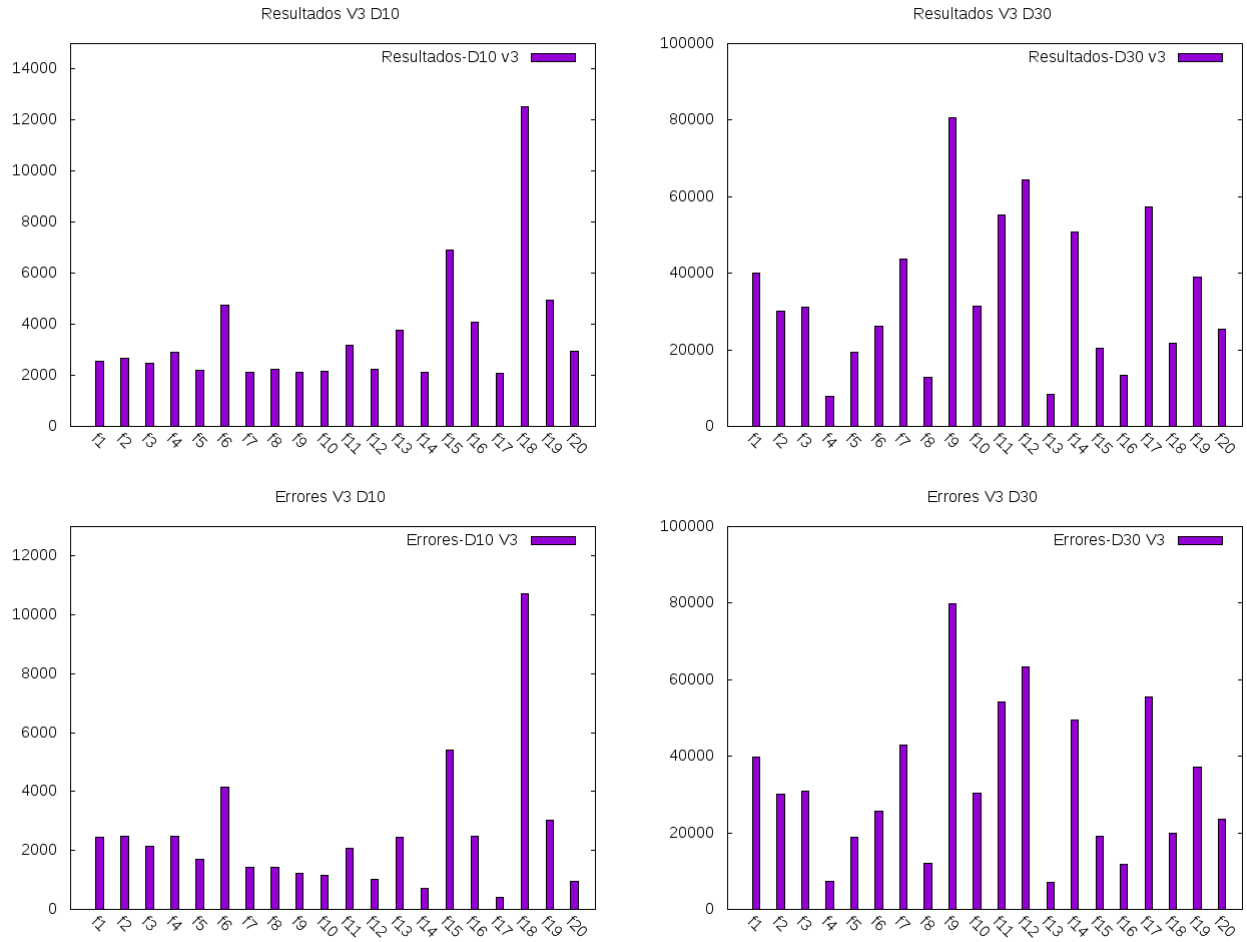


Figura 4: Resultados y errores de la tercera versión

En esta versión sí notamos una escalada realmente buena en los resultados que nos han mejorado enormemente en la versión de dimensión 10 pero aún más en dimensión 30 donde se han llegado a reducir a la mitad. Tras este cambio como comenté en la explicación de las versiones introduje más diversidad con un esquema de Differential Evolution lo cual condujo al algoritmo a la primera mejora realmente sustancial:

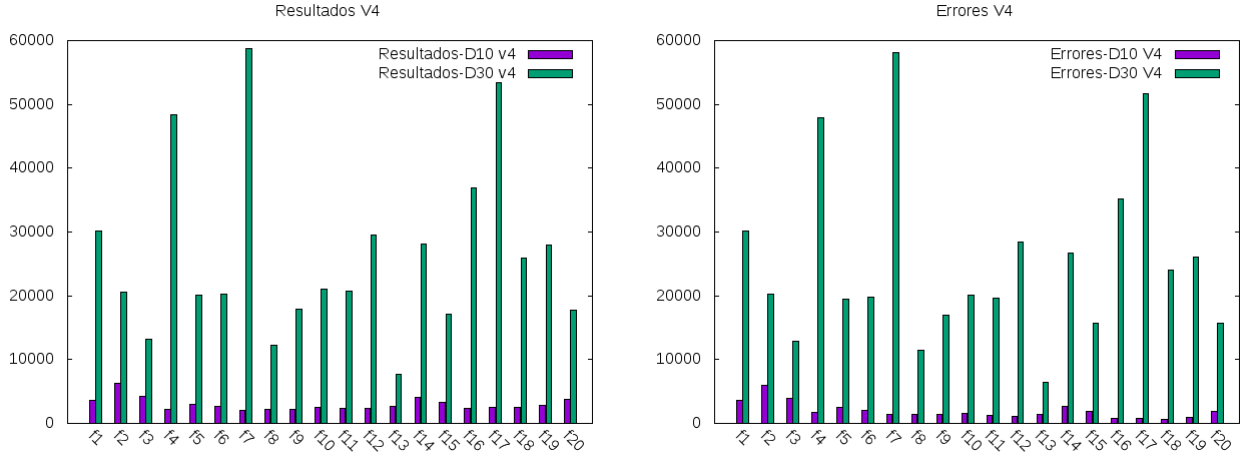


Figura 5: Resultados y errores de la cuarta versión

En esta versión es la primera en la que los resultados generales de ambas dimensiones bajan lo suficiente como para poder representarlas las dos juntas. Esta mejora nos indica que en el algoritmo previo habíamos excedido los esfuerzos en convergencia y estábamos equilibrando mal la diversidad.

La cuarta versión tuvo como cambio importante la introducción de CMAES:

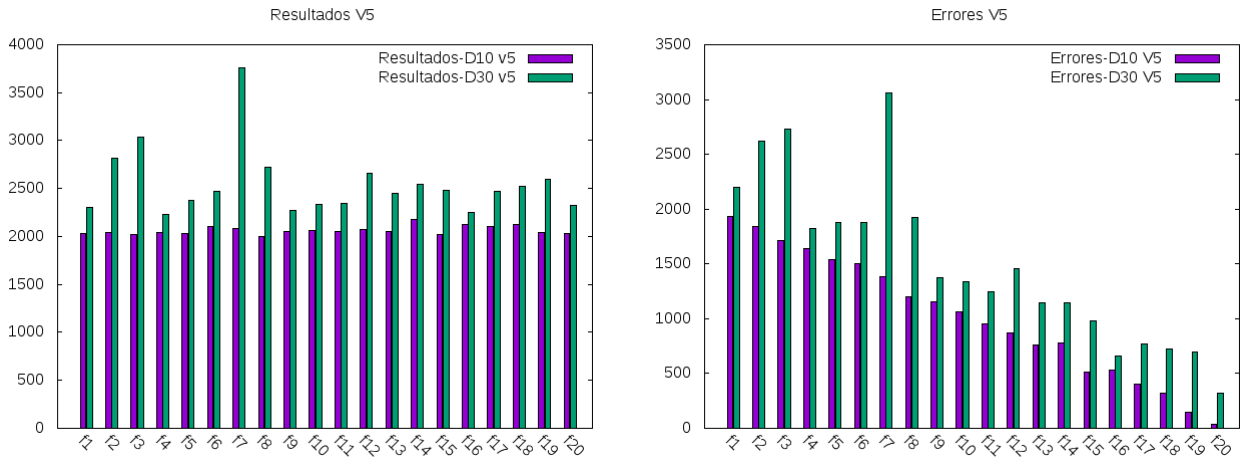


Figura 6: Resultados y errores de la quinta versión

Aquí observamos la gran potencia de CMAES que nos ha conseguido bajar los resultados de los dos algoritmos por debajo de 4.000 lo cual es un resultado muy diferente al obtenido en la primera versión. Por último los resultados y errores cometidos tras incorporar la última mejora finales han sido:

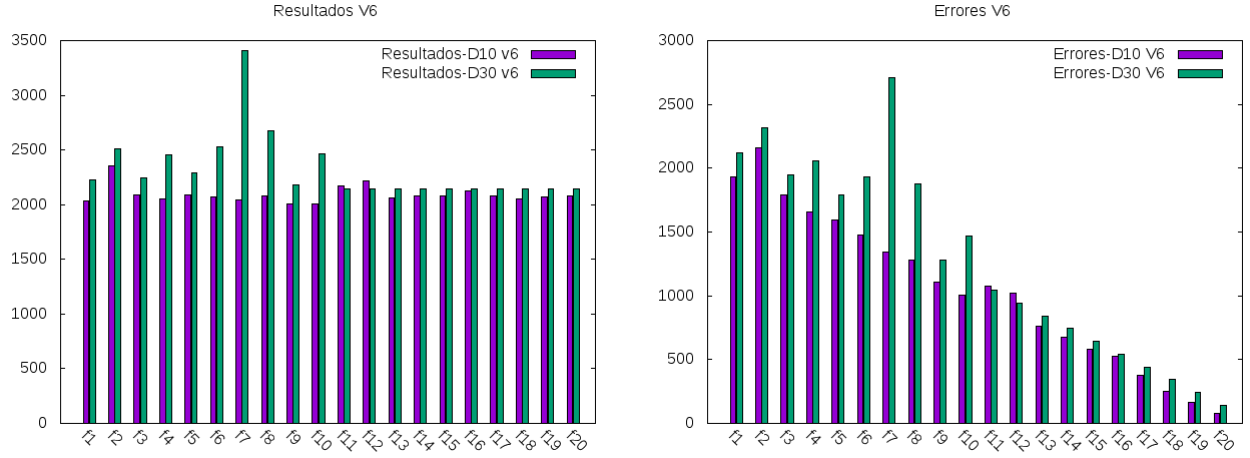


Figura 7: Resultados y errores de la sexta versión

Así mismo podemos ver la progresión del algoritmo, esto es, vamos a ver cómo evolucionan las mejores ballenas en cada iteración del algoritmo y vamos a analizarlo:

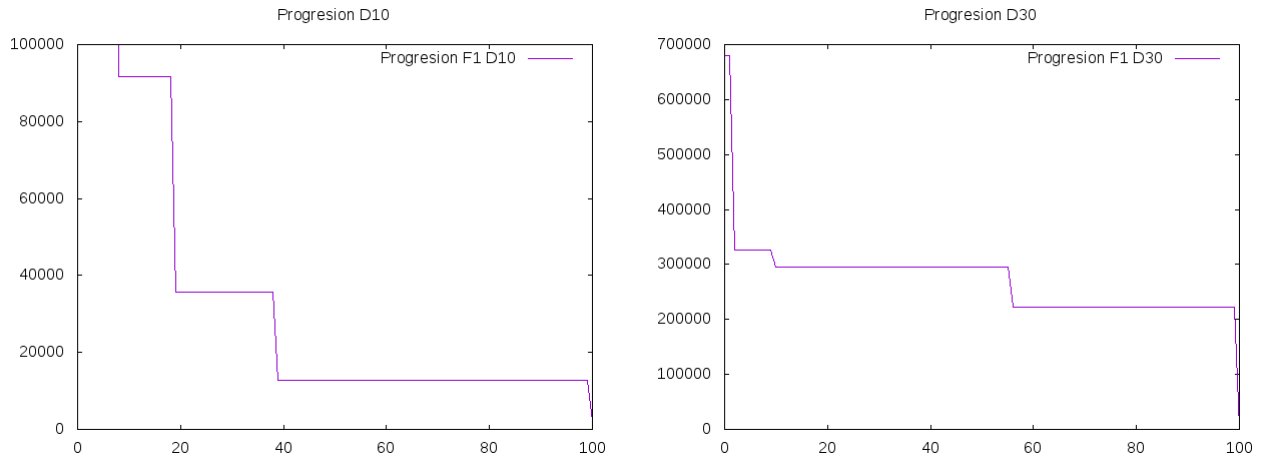


Figura 8: Progresión de las mejores ballenas en la versión final.

En estas progresiones se puede observar cómo las mejores ballenas cambian sólo en los múltiplos de 10. Es en este momento cuando aplicamos CMAES y el esquema de Differential Evolution, es decir, realmente sólo mejoran las ballenas sustancialmente cuando aplicamos los dos algoritmos auxiliares. Esto nos deja como conclusión obvia que el esquema de movimiento dado por el algoritmo inicial no es realmente eficaz, ya que no consigue mejoras notables sobre las ballenas ni obtiene buenos resultados por sí solo.

Este esquema de progresión fue muy parecido sobre todas las funciones, por lo que sólo he decidido poner el de la primera función en ambas dimensiones como ejemplo concreto.

## 5.1. Comparativa con el resto de algoritmos

Para la comparativa vamos a hacer 3 tablas diferentes: una tabla con los algoritmos de la competición CEC2014, otra con la tabla de Tanabe y por último una comparando con los dos algoritmos de Differential Evolution implementados por Daniel Molina. Estas tablas representan el error cometido en cada una de las funciones y el error acumulado de las mismas.

Funciones	CoDE	D-SHADE	EPSDE	JADE	L-SHADE	NBIPOP-aCMA-ES	SHADE11	SaDE	dynNP-jDE	iCMAES-ILS	WOA
F1	0	0	0	0	0	0	0	2.5523	2.1693E-7	0	1932.1809
F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2155.8268
F3	0	0	0	6.1659E-3	0	0	0	0	0	0	1790.9763
F4	10.4826	30.7734	0	27.6186	29.4095	2.8198	29.4945	18.0850	3.3229	14.3852	1655.7516
F5	18.4489	17.7268	20.0499	17.2676	14.1455	18.0702	18.0061	15.7840	15.9500	14.6543	1591.2193
F6	1.6525E-6	0	3.0415	0.1755	1.7540E-2	0.3305	0	0	0	0	1474.9728
F7	3.7590E-2	5.3139E-3	1.7573E-2	1.1861E-2	3.04292E-3	0	9.7818E-3	7.2428E-3	4.9691E-3	0	1342.4297
F8	0	0	0	0	0	3.6972	0	0	0	0.2536	1277.5693
F9	3.8822	3.0826	3.6887	3.5070	2.3445	0.3262	3.1407	3.5837	3.8578	9.7548E-2	1106.6753
F10	3.5513E-2	4.8983E-2	4.4085E-2	6.1229E-3	8.5721E-3	91.6179	1.2245E-2	1.9593E-2	2.4491E-3	122.0401	1007.0534
F11	75.9702	54.9344	323.1316	83.6964	32.0558	116.8327	63.1801	196.4226	136.2141	8.5850	1073.7122
F12	4.3383E-2	5.2908E-2	0.3210	0.2501	6.8167E-2	1.0083E-2	0.1364	0.4350	0.3111	6.5009E-2	1020.3847
F13	7.9798E-2	4.8919E-2	0.1223	8.3967E-2	5.1561E-2	1.0894E-2	7.3996E-2	0.1252	0.1189	9.1148E-3	761.6723
F14	0.1071	9.0096E-2	0.1363	0.1105	8.1361E-2	0.2824	0.1055	0.1857	0.1352	0.1545	675.8475
F15	0.6523	0.4027	0.7538	0.5782	0.3660	0.5467	0.5051	0.7903	0.7815	0.7233	580.7508
F16	1.1291	1.3390	2.5412	1.6508	1.2407	2.5295	1.5571	1.9669	1.5944	1.9070	524.9302
F17	2.6621	3.3813	53.2895	30.9109	0.9766	38.8964	1.5576	28.3335	2.6228	21.0348	378.5809
F18	0.4305	0.4749	1.1971	0.2387	0.2440	3.5766	0.2369	1.6451	0.4409	0.5259	250.5374
F19	7.4471E-2	0.2050	1.4319	0.2549	7.7300E-2	0.8276	0.1916	6.6889E-2	0.1218	0.7076	166.1558
F20	2.3911E-2	0.2733	0.1650	0.3240	0.1848	1.3167	0.2433	0.1076	4.1478E-2	0.8040	78.7133
Suma	114.0602	112.8402	409.9321	166.6920	81.2756	281.6920	118.4516	270.1111	165.5208	185.9477	20845.9416

Cuadro 1: Resultados comparados Tanabe dimensión 10

Funciones	CMLSP	ECDE	FERDE	FWA-DM	GaAPADE	MVMO	NRGA	OptBoes	POBL-ADe	RSDE	SOO	SOO+BOBYQA	UMOEAS	b3c3pbest	rnalschcma	WOA
F1	1.7687E-7	1150612.9411	5234091.4243	5013.0489	0	4.9540E-4	27904.5013	784.1906	16226.5696	0	8810740	4569.72	0	2626511.6879	0	1932.1809
F2	1.1145E-15	16034575.5021	138042857.4263	1.3418E-4	0	7.0984E-9	914.6605	9.8826E-3	2273.0552	0	6.3429	3.6000E-2	0	224053205.9407	0	2155.8268
F3	1.0555E-4	1234.9883	4545.6467	1.8773E-9	0	9.8596E-11	1516.8063	0.9213	5.7445E-4	0	6643.6700	5842.9200	0	4305.3999	1.0254E-7	1790.9763
F4	3.3437E-15	41.9776	48.4558	1.4132	30.6882	9.5456	15.4355	2.6908	25.5082	2.8109	0.6779	0	0	52.5332	8.5007E-2	1655.7516
F5	16.8630	20.3811	20.0914	20.0272	19.6767	16.5805	19.6068	19.9099	19.0870	19.2163	20	20	16.8309	20.2129	13.6519	1591.2193
F6	6.2010E-2	5.3279	3.4732	0.7063	0.1483	3.4445E-3	2.4498	3.0166	1.0394	5.2908E-2	1.9999E-3	1.9999E-3	0	2.7907	1.4786E-4	1474.9728
F7	0	0.8226	2.1930	9.4799E-2	3.1634E-3	1.8583E-2	0.2030	0.1561	0.1626	3.5496E-2	4.8999E-2	4.8999E-2	0	3.3068	0	1342.4297
F8	2.0706	14.2271	9.7698	0.2536	0	6.6874E-15	5.5847	1.1591E-13	7.8088	0.6608	18.904	18.904	0	13.2486	0	1277.5693
F9	1.5585	35.7932	18.7457	6.0084	3.3790	3.4921	8.6936	20.8355	7.6307	8.3224	8.9550	8.9550	2.7254	21.0368	3.3165	1106.6753
F10	196.1156	488.5916	151.5188	1.5926	0.1517	2.1369	119.4390	219.2256	153.4006	68.4415	130.3900	130.3900	0.3738	330.8470	7.6779	1007.0534
F11	152.9957	976.2717	537.6226	372.2404	183.1153	96.2760	575.9476	392.7479	208.2013	290.6418	349.0499	349.0499	144.0443	782.9861	20.1349	1073.7122
F12	3.0265E-2	1.1285	0.6297	4.2494E-2	0.1402	4.2227E-2	0.1241	0.1303	0.2694	0.2206	0	0	0	0.8030	1.6464E-2	1020.3847
F13	2.7249E-2	0.3054	0.3352	0.1206	6.0087E-2	3.5533E-2	0.1576	0.4161	0.1311	0.1276	2.9999E-2	2.9999E-2	9.4357E-3	0.3124	3.2923E-2	761.6723
F14	0.1891	0.3380	1.0070	0.2139	9.4239E-2	8.9059E-2	0.2537	0.3686	0.2602	0.1359	0.13	0.13	0.11	0.6884	0.1264	675.8475
F15	0.8966	5.7665	19.1365	0.7748	0.6056	0.4346	1.0218	2.4388	0.7118	0.9830	0.44	0.42	0.6666	47.0112	0.4714	580.7508
F16	1.5545	3.5059	2.9222	1.7570	1.9771	1.4485	2.7469	2.6395	1.4090	2.2333	2.5199	2.5199	1.5302	2.8261	1.0541	524.9302
F17	312.7451	1765.6175	314731.7368	294.5371	9.9143	9.3566	16074.9090	684.3998	257.2398	47.7016	3122910	422.5699	8.4768	101237.2321	78.3384	378.5809
F18	30.8529	309.4347	234239.5987	25.1581	0.2229	0.7825	7419.7540	33.5042	33.1615	1.9961	12632.0999	3651.6199	0.7840	225413.4875	5.2207	250.5374
F19	1.2511	1.6141	2.0320	1.2991	0.2565	0.1583	2.0933	0.9330	2.0878	1.0302	0.5499	0.5499	0.1999	2.3744	7.6607E-2	166.1558
F20	19.9406	235.2391	407578.2439	13.3705	0.4315	0.3125	1719.1836	8.9575	12.5894	0.7214	0.93612	6925.0099	0.3705	5688.9166	8.0566	78.7133
Suma	737.2535	17190329.7749	144238862.0105	5712.6597	250.8654	140.7138	56303.5640	2177.5830	19230.3250	445.5327	11963128.011	22242.9659	176.1225	227017643.6434	138.2605	20845.9416

Cuadro 2: Resultados comparados CEC2014 dimensión 10

Funciones	DEBin	DEexp	WOA
F1	0	0	1932.1809
F2	0	0	2155.8268
F3	0	0	1790.9763
F4	21.5699	21.9087	1655.7516
F5	20.2184	20.1419	1591.2193
F6	0.58381	0.1843	1474.9728
F7	3.6599E-2	3.5799E-2	1342.4297
F8	4.3523	3.9800E-2	1277.5693
F9	11.9865	8.7932	1106.6753
F10	51.9530	11.4780	1007.0534
F11	444.452	555.4320	1073.7122
F12	0.4259	0.4390	1020.3847
F13	0.1140	0.1119	761.6723
F14	0.1760	0.1630	675.8475
F15	1.7739	1.2409	580.7508
F16	2.3389	2.3529	524.9302
F17	16.4060	8.4899	378.5809
F18	0.5399	0.5540	250.5374
F19	0.3109	0.4529	166.1558
F20	0.2040	6.5999E-2	78.7133
Suma	577.4427	631.8847	20845.9416

Cuadro 3: Resultados comparados Daniel Molina dimensión 10

Funciones	CoDE	D-SHADE	EPSDE	JADE	L-SHADE	NBIPOP-aCMA-ES	SHADE11	SaDE	dynNP-jDE	iCMAES-ILS	WOA
F1	26331.8869	5.0418E-3	24161.6368	447.8196	0	0	481.3446	298971.3391	46510.1940	0	2122.5485
F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2312.8342
F3	0	0	0	5.62918E-4	0	0	0	14.2579	0	0	1946.9675
F4	2.5174	5.0271E-9	3.2126	0	0	0	0	37.1840	2.0351	0	2059.1074
F5	20.0638	20.0141	20.3465	20.2871	20.1146	20.5171	20.1010	20.5356	20.2912	19.9999	1790.3438
F6	1.9890	5.9243E-2	18.8932	9.4228	1.3843E-7	0.7135	0.5289	5.4599	1.1962	3.9953E-3	1931.7902
F7	1.4502E-4	0	2.0760E-3	0	0	0	4.8332E-4	1.2333E-2	0	0	2705.6641
F8	0	0	0	0	0	9.9779	0	7.8036E-2	0	2.4170	1874.7347
F9	40.3709	8.7033	44.3622	26.1659	6.7848	3.2411	15.8317	38.1205	33.9322	2.5650	1281.2102
F10	0.5001	3.5106E-2	0.2013	5.3068E-3	1.6328E-2	636.0031	1.2658E-2	0.2691	4.0822E-3	145.0062	1466.8371
F11	1951.2929	1303.9673	3564.6341	1639.9441	1229.4790	731.4947	1396.9447	3147.4624	1953.7416	73.8476	1042.3630
F12	5.9988E-2	9.6652E-2	0.5251	0.2711	0.1605	1.3220E-2	0.1622	0.7941	0.3620	2.8288E-2	942.3630
F13	0.2312	0.1343	0.2429	0.2202	0.1241	3.8913E-2	0.2040	0.2515	0.2531	2.9511E-2	842.3630
F14	0.2388	0.2317	0.2781	0.2339	0.2417	0.3278	0.2246	0.2285	0.2656	0.1698	742.3630
F15	3.1752	1.8918	5.6692	3.0979	2.1463	2.1358	2.5641	4.1410	4.7558	2.5110	642.3630
F16	9.2624	8.5185	11.1464	9.3698	8.4990	10.6241	9.1477	10.9108	9.2242	10.8701	542.3630
F17	1452.9858	210.3202	46053.1842	9673.3938	187.5081	852.2059	1058.9064	11530.6982	957.7013	1046.7457	442.3630
F18	13.4426	10.3642	331.8819	358.0523	5.9100	115.3533	49.8746	443.8338	21.0203	96.0895	342.3630
F19	2.7041	3.5275	13.3001	4.4373	3.6817	5.6999	4.3057	4.0013	3.9067	6.4564	242.3630
F20	10.9130	4.2016	50.0424	2885.3663	3.0818	24.03930	12.6424	124.5428	8.5281	33.5459	142.3630
Suma	29841.6352	1572.0709	74279.5599	15078.0887	1467.7486	2412.3861	3052.7963	314354.1218	49527.4122	1440.2863	25415.6688

Cuadro 4: Resultados comparados Tanabe dimensión 30

Funciones	CMLSP	FCDE	FERDE	FWA-DM	GaAPADE	MVMO	NRGA	OptBees	POBLADE	RSDE	SOO	SOO+BOBYQA	UMOEAS	b3c3pbest	rmalschema	WOA
F1	3.9810E-10	39737210.0987	74247962.7037	276356.8617	1.0031E-14	1.0661E-3	574302.4960	85081.0783	15954.8321	1500.2888	215525000	2674850	0	13225062.5080	0	2122.5485
F2	0	1759112643.3250	3467117007.8945	1.0754E-16	1.6718E-15	2.3800E-5	9276.2813	3.3175E-12	313.6770	1.1914E-9	31387	99.6109	0	517280687.2460	0	2312.8342
F3	1.2335E-8	9119.3176	13921.8438	4.4236E-16	2.2291E-15	1.1057E-3	4581.8338	8.4136E-3	6.4296E-10	4.7433E-2	10810.2	7840.39	0	5609.1629	26.1949	1946.9675
F4	2.1734E-6	196.6229	489.4935	20.3624	2.8276E-12	4.3802E-13	80.5810	12.5634	63.4483	3.0517	109.3459	36.755	0	63.4242	0	2059.1074
F5	19.9989	20.9567	20.1969	20.5059	20.0022	19.9995	20.0001	19.9999	20.6376	20.3341	20	20	20.1613	20.5193	19.9997	1790.3438
F6	0	23.2915	24.0327	12.8636	0.6134	3.6292	17.8233	16.3762	5.1911	5.1606	1.897	1.907	0	21.9869	1.1358	1931.7902
F7	0	25.5676	31.1065	8.5458E-3	2.2292E-15	2.90E-3	1.5893E-2	3.1453E-2	2.3729E-2	8.4646E-4	0.9959	0.4089	0	4.0912	1.9328E-4	2705.6641
F8	9.8374	119.9244	46.4036	1.1347E-13	1.7462	0.8584	26.5898	3.6335E-13	53.8655	20.4134	92.5309	92.5309	1.9509	51.0652	1.9534E-2	1874.7347
F9	2.1852	201.6079	122.0642	56.6179	16.9961	25.1275	45.6901	137.1473	84.6310	57.9504	59.706	59.697	8.4476	104.3559	17.9287	1281.2102
F10	1469.4791	3548.6698	1339.7024	8.5258	8.1432	17.8636	1073.4727	1041.2984	2167.6751	329.1780	2312.38	2131.47	13.6439	1462.0605	81.2465	1466.8371
F11	1822.4765	5314.8504	3551.5099	2629.7529	1896.7666	1541.6900	3405.5531	2716.6351	3858.27	2737.2630	2151.25	2091.05	1575.3243	3877.6982	1549.5209	1042.3630
F12	1.4570E-4	1.9111	1.3521	0.3712	0.2033	7.2055E-2	0.1505	0.1812	0.9505	0.4439	2.9699E-2	2.9699E-2	2.1532E-3	0.9895	1.5974E-2	942.3630
F13	4.8135E-2	0.7415	0.8459	0.3886	0.1448	0.1572	0.2811	0.5608	0.2858	0.3053	0.3499	0.3399	5.6812E-2	0.3844	0.1376	842.3630
F14	0.3118	3.2129	12.3681	0.3685	0.2112	0.1988	0.1866	0.3995	0.2259	0.2362	0.2899	0.2799	0.211	1.0154	0.2216	742.3630
F15	3.0297	4496.4052	4716.5549	7.3732	3.0902	2.8532	13.7296	12.7403	7.7337	3.9220	22.5099	21.60	3.0882	182.0982	2.4507	642.3630
F16	12.7848	12.8603	12.1482	10.9782	9.8899	10.2094	11.4669	10.9081	10.4407	10.6021	9.8599	9.8099	10.5399	11.2143	9.6474	542.3630
F17	994.8204	705469.9573	7049903.8038	6285.7234	199.7495	900.8197	234648.0174	27401.7286	1103.6921	1239.1428	28114700	42148.6999	1009.2474	520178.7243	697.8607	442.363
F18	75.4492	2238461.5792	95603636.6797	76.6620	9.3240	28.9382	550.4613	195.5904	109.7573	95.4481	2854.99	41.5799	23.1735	3170488.2682	566.9142	342.3630
F19	3.8772	25.9933	47.7042	9.9472	3.6206	3.0799	13.7397	7.8983	8.8818	5.6529	183.62	16.2999	3.8111	10.0843	5.8225	242.3630
F20	9.7907	5091.0551	10330.3695	42.7793	5.5854	109.1571	11377.9503	852.6655	38.9071	37.3023	38149.6	34381.1999	11.6816	3225.9467	198.8779	142.3630
Suma	4364.0899	1801821988.0481	3644081178.7730	285539.9913	2176.0485	2664.6526	839446.3214	118107.7879	23805.1271	6068.7447	243728766.5559	2763843.75	2681.3401	534211062.9347	3177.9955	25415.6688

Cuadro 5: Resultados comparados CEC2014 dimensión 30

Funciones	DEBin	DEexp	WOA
F1	88768.35	294891	2122.5485
F2	200	200	2312.8342
F3	300	300	1946.9675
F4	384.5557	411.0745	2059.1074
F5	500.6691	500.2928	1790.3438
F6	603.1521	617.4160	1931.7902
F7	699.9652	699.9642	2705.6641
F8	809.5866	799.9601	1874.7347
F9	1022.2535	972.9139	1281.2102
F10	1434.848	993.4859	1466.8371
F11	6761.375	4306.7979	1042.3630
F12	1202.029	1200.221	942.3630
F13	1300.1859	1300.2660	842.3630
F14	1400.13	1400.1369	742.3630
F15	1512.712	1507.451	642.3630
F16	1609.9480	1608.5429	542.3630
F17	4949.2700	3933.3319	442.3630
F18	1817.3420	1841.54	342.3630
F19	1903.681	1905.776	242.3630
F20	2013.36	2026.486	142.3630
Suma	119193.4136	321416.6577	25415.6688

Cuadro 6: Resultados comparados Daniel Molina dimensión 30



En estas tablas de resultados podemos ver que el algoritmo Whale Optimization Algorithm (WOA) no obtiene unos buenos resultados comparados con el resto. Si sumamos todos los errores y ordenamos los algoritmos obtenemos:

<u>Posición</u>	<u>Clasificación D10</u>	<u>Error</u>	<u>Clasificación D30</u>	<u>Error</u>
1	L-SHADE	81.2756	iCMAES-ILS	1440
2	D-SHADE	112.8402	L-SHADE	1470
3	CoDE	114.0602	D-SHADE	1570
4	SHADE11	118.4516	GaAPADE	2180
5	rmalschcma	138.2605	NBIPOP-aCMA-ES	2410
6	MVMO	140.7138	MVMO	2660
7	dynNP-jDE	165.5208	UMOEAS	2680
8	JADE	166.6920	SHADE11	3050
9	UMOEAS	176.1225	rmalschcma	3180
10	iCMAES-ILS	185.9477	CMLSP	4360
11	GaAPADE	250.8654	RSDE	6070
12	SaDE	270.1111	JADE	15100
13	NBIPOP-aCMA-ES	281.6920	POBL_ADE	23800
14	EPSDE	409.9321	<b>WOA</b>	25400
15	RSDE	445.5327	CoDE	29800
16	DEBin	577	dynNP-jDE	49500
17	DEexp	632	EPSDE	74300
18	CMLSP	737.2535	OptBees	118000
19	OptBees	2177.5830	DEBin	119000
20	FWA-DM	5712.6597	FWA-DM	286000
21	POBL_ADE	19230.3251	SaDE	314000
22	<b>WOA</b>	20845.9416	DEexp	321000
23	SOO+BOBYQA	22242.966	NRGA	839000
24	NRGA	56303.5641	SOO+BOBYQA	2760000
25	SOO	11963128	SOO	244000000
26	FCDE	1719329.8	b3e3pbest	534000000
27	FERDE	144238862	FCDE	1800000000
28	b3e3pbest	227017644	FERDE	3640000000

Cuadro 7: Ranking en dimensiones 10 y 30.

Como podemos observar el algoritmo en dimensión 10 está en la parte baja de la tabla dando unos resultados malos comparados con el resto. En dimensión 30 observamos como la posición es mucho mejor (8 puestos menos) llegando hasta la mitad justa de la tabla.

## 5.2. Comportamiento con respecto a Differential Evolution

Si tenemos que comparar el comportamiento del algoritmo inicial con Differential Evolution podemos ver que los dos están en ligas completamente distintas. El algoritmo inicial comete un error acumulado del orden de más de 170.000 y en dimensión 30 aún más por lo que al compararlo con DE que comete un error acumulado de 577 o 632 en dimensión 10 según sea DEBin o DEexp y un error de 119.000 y 321.000 en dimensión 30 (DEBin y DEexp respectivamente) comparado con más de 500.000 de error acumulado en dimensión 30 por la versión inicial del algoritmo de las ballenas vemos que ésta pierde estrepitosamente. Esta diferencia hace que de primeras el esquema presentado no sea tan interesante como DE.

Tras haber realizado los cambios pertinentes anteriormente descritos podemos ver que los resultados han cambiado mucho. En dimensión 10 los algoritmos de Differential Evolution ocupan las posiciones 16 y 17 mientras que WOA ocupa la posición 22 con un error acumulado de

20.845. Sin embargo en dimensión 30 se invierten las posiciones ocupando ahora WOA la posición 14, DEBin la posición 19 y DEexp la posición 22 con un error acumulado por WOA de 25.400, cantidad mucho menor a la que cometen los dos algoritmos de DE (menos de la cuarta parte en el mejor de los casos).

Como conclusión de esta comparativa podemos decir que el esquema montado encima del algoritmo de la ballena apoyándose con CMAES y DE ha surtido efecto más en dimensión 30 que en dimensión 10, por lo que ha aportado un valor añadido sobre el algoritmo de Differential Evolution básico.

## 6. Conclusiones

Tras lo visto podemos ver que el esquema descrito resulta interesante a primera vista, ya que al estar bioinspirado y con una buena idea por detrás resulta interesante al menos para probarlo. El esquema descrito inicialmente tiene como objetivo claro definir dos tipos de exploraciones: una que intensifica y otra que diversifica.

Esta combinación es buena idea en el campo de lo teórico pero el modelo descrito para las dos aproximaciones (lineal y espiral) resulta no ser todo lo efectivo que teóricamente parecía.

Tras todas las mejoras el esquema inicial del algoritmo realmente ha sido suplido por un esquema CMAES-DE que utiliza únicamente un reinicio de la población de forma aleatoria y del que sólo queda del algoritmo inicial la aproximación lineal y la idea de mantener una población. Con estos cambios el algoritmo no ha llegado a entrar en el estado del arte quedándose como mucho en la posición 14 de 28 en dimensión 30 y en la posición 22 de 28 en dimensión 10. Estos resultados por tanto nos describen la eficacia real del algoritmo.

Como apunte final quiero recalcar el hecho de que no se demuestra con esto que el esquema de equilibrio entre intensificación y exploración no sea una buena idea, si no que al menos con estos mecanismos tomados en el algoritmo no se ha conseguido la eficacia deseada.

## Referencias

- [1] <https://github.com/CMA-ES/pycma>. CMAES implementado en Python.
- [2] <https://github.com/dmolina/cec2013lsgo>. Funciones CEC2013 de Daniel Molina.
- [3] <https://github.com/dmolina/pyreal/blob/master/localssearch.py>.
- [4] <https://github.com/nacheteam/cec2014>. Funciones CEC2014.
- [5] <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997816300163>. Paper original de WOA.