Primitivas y estructuras de datos

Primitivas 0D y 1D

Primitivas 2D

Primitivas 3D

Estructuras de datos

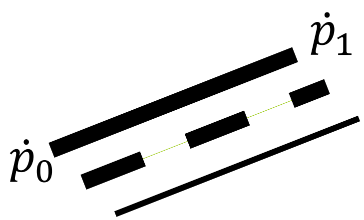
Primitvas 0D y 1D

Puntos, líneas y curvas

Puntos y líneas

- Puntos
  - 0D
  - Es la primitiva básica
  - Características
    - coordenadas en un sistema de referencia
    - color
    - grosor
    - forma

- Líneas
  - 1D
  - Delimitada por dos puntos
  - Características
    - Puntos inicial y final
    - color
    - grosor
    - estilo
    - forma terminal



$$\dot{p}(t) = \dot{p}_0 + (\dot{p}_1 - \dot{p}_0)t \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Curvas implícitas

- Conjunto de puntos que en algún sistema de referencia cumplen

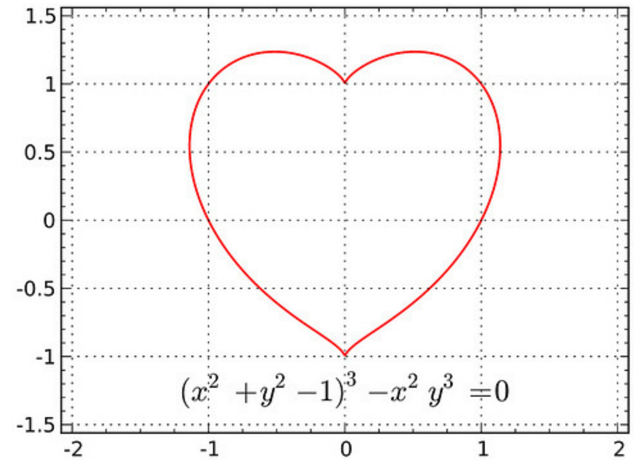
$$\dot{p}\ tal\ que\ f(p_x, p_y) = 0$$

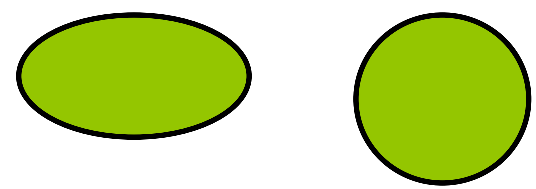
- Cónicas: polinomios de grado 2

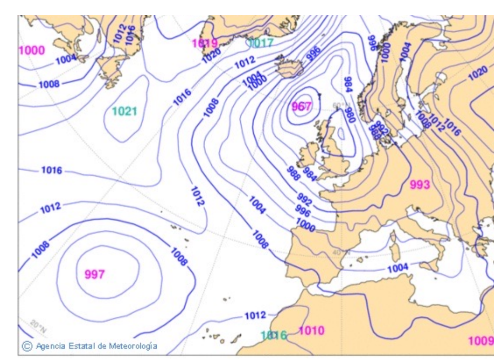
$$a{p_x}^2 + b{p_y}^2 + cp_x + dp_y + e = 0$$

- Isocontornos

$$\dot{p}\ tal\ que\ f(p_x, p_y) = cte$$







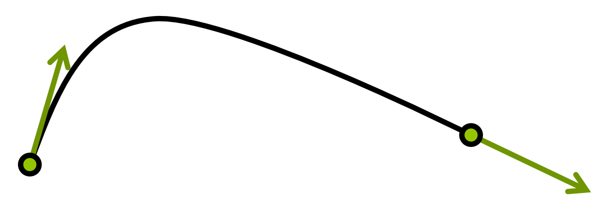
Curvas paramétricas
Conceptos generales

- Curva 3D paramétrica
  - vector posición
  - matriz de coeficientes
  - vector tangente Q'(u)
  - grado de la curva
- Condiciones de contorno
  - tantas como coeficientes
  - matriz de geometría G
    - puntos de control
      - interpolación o aproximación
    - tangentes en extremos
  - matriz característica M

$$\boxed{Q(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)] \qquad 0 \le u \le 1}$$

$$\boxed{Q = U \cdot C}$$

$$\boxed{Q' = U' \cdot C}$$



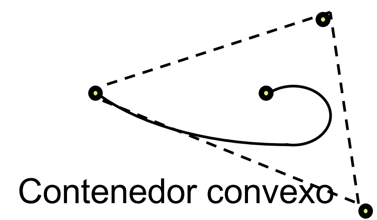
$$\boxed{G = M^{-1} \cdot C}$$

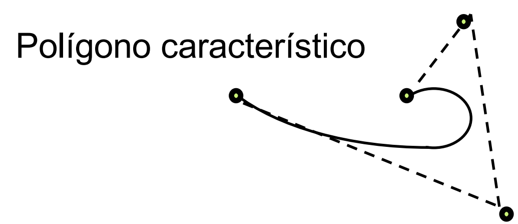
$$\boxed{Q = U \cdot M \cdot G}$$

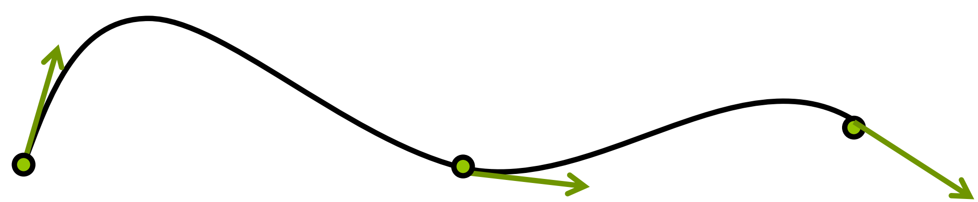
Curvas paramétricas
Conceptos generales

- Funciones base
  - funciones de u
  - tantas como coeficientes (grado+1)
  - interpretación física
    - vectores g_k y pesos B_k
- Otros elementos
  - polígono característico
  - contenedor convexo
- Curva compuesta
  - concepto de tramo
  - continuidad
    - paramétrica
    - geométrica
  - control local

$$Q(u) = U \cdot C = (U \cdot M) \cdot G = \sum_{k=0}^{n} B_k(u) g_k$$

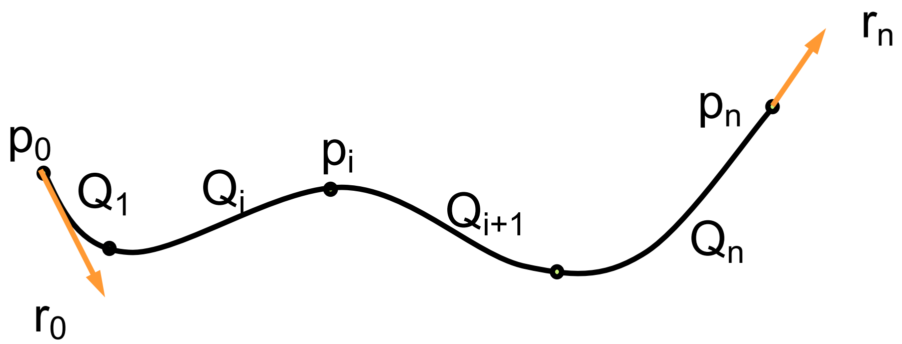






Curvas paramétricas
Curvas *spline* naturales cúbicas

- Polinomios de grado 3 interpolantes
- 2 puntos de control por tramo de curva + 2 tangentes
- No hay control local
- Continuidad C^2



Condiciones de contorno

$$\begin{array}{l} Q_i(1) = p_i \\ Q_{i+1}(0) = p_i \\ Q_i'(1) = Q_{i+1}'(0) \\ Q_i''(1) = Q_{i+1}''(0) \end{array} \longrightarrow \boxed{4n-2}$$

$$\begin{array}{l} Q_1'(0) = r_0 \\ Q_n'(1) = r_n \end{array} \longrightarrow \boxed{2}$$

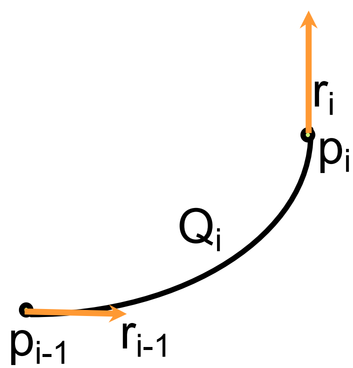
sistema 4n x 4n x 3

Curvas paramétricas
Curvas cúbicas de Hermite

- Polinomios cúbicos interpolantes
- 2 puntos de control + 2 tangentes
- Discusión continuidad en curvas compuestas

condiciones de contorno

$$\boxed{\begin{aligned} Q_i(0) &= p_{i-1} \\ Q_i(1) &= p_i \\ Q_i'(0) &= r_{i-1} \\ Q_i'(1) &= r_i \end{aligned}}$$



matriz característica

$$U \cdot M_H \cdot G_H = U \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ r_{i-1} \\ r_i \end{bmatrix}$$

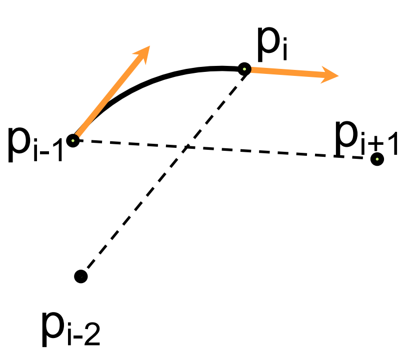
Curvas paramétricas

Curvas *spline* cardinales

- Polinomios cúbicos interpolantes
- 4 puntos de control por curva
- t: tensión, magnitud de la tangente
- Splines de Catmull-Rom (t=0)
- Hay control local en curvas compuestas

condiciones de contorno

$$
\begin{aligned}
Q_i(0) &= p_{i-1} \\
Q_i(1) &= p_i \\
Q_i'(0) &= \tfrac{1}{2}(1-t)(p_i - p_{i-2}) \\
Q_i'(1) &= \tfrac{1}{2}(1-t)(p_{i+1} - p_{i-1})
\end{aligned}
$$



$$
M_{car} \cdot G_{car} = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{i-2} \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix};
$$

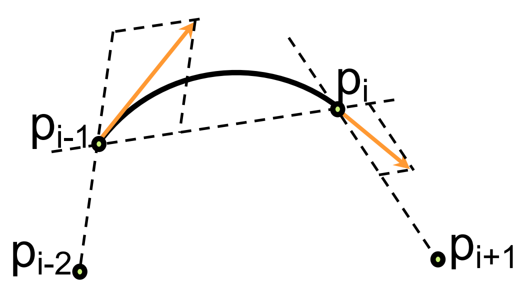
$$
s = \tfrac{1}{2}(1-t)
$$

Curvas paramétricas
Curvas de Kochanek-Bartels

- Polinomio cúbico interpolante
- 4 puntos de control por curva
- t: tensión, b: bias, c: continuidad
- Hay control local en curvas compuestas

condiciones de contorno

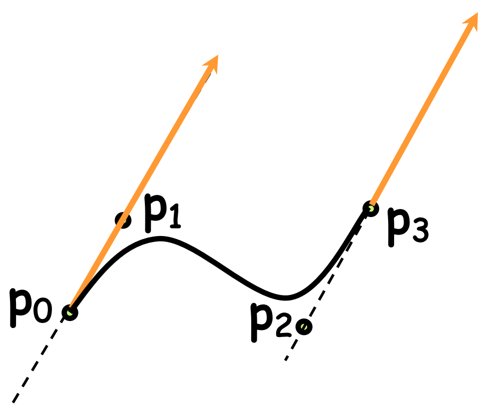
$$
\boxed{
\begin{aligned}
&Q_i(0) = p_{i-1}\\
&Q_i(1) = p_i\\
&Q_i'(0) = \tfrac{1}{2}(1-t)[(1+b)(1-c)(p_{i-1}-p_{i-2})\\
&\qquad\qquad + (1-b)(1+c)(p_i - p_{i-1})]\\
&Q_i'(1) = \tfrac{1}{2}(1-t)[(1+b)(1+c)(p_i - p_{i-1})\\
&\qquad\qquad + (1-b)(1-c)(p_{i+1} - p_i)]
\end{aligned}
}
$$



Curvas paramétricas

Curvas de Bezier

- Polinomio de grado n aproximado
- n+1 puntos de control por curva
- Pasa por los extremos
- Discusión continuidad C^1 : colinealidad



condiciones de contorno (n=3)

$$Q(0) = p_0$$
$$Q(1) = p_3$$
$$Q'(0) = 3(p_1 - p_0)$$
$$Q'(1) = 3(p_3 - p_2)$$

matriz característica

$$M_{BEZ} \cdot G_{BEZ} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

funciones base: polinomios de Bernstein

$$Bez_{k,n}(u) = C(n,k) \cdot u^k \cdot (1-u)^{n-k}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Curvas paramétricas
Curvas B-spline cúbicas

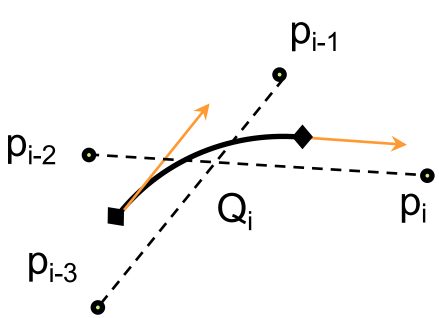
- Polinomios de grado *3* aproximados
- Continuidad C^2
- Puntos de control $(p_0,\ldots,p_n)$
- *4* puntos de control por tramo de curva
- *nº tramos = nº puntos - 3*
- *nº nudos = nº puntos + 4*

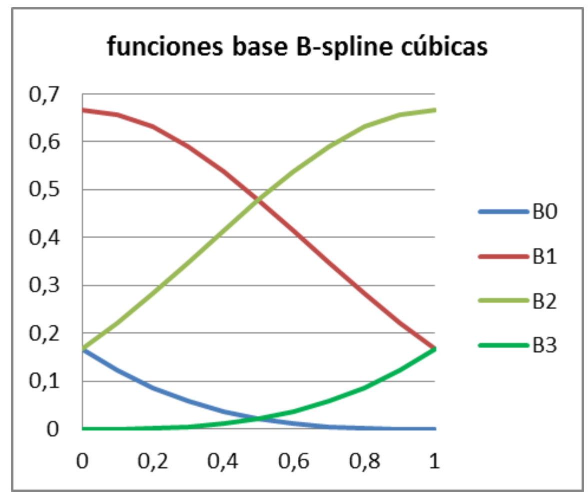
condiciones de contorno (d=3, caso cúbico)

$$
\begin{aligned}
Q_i(u_i) &= \tfrac{1}{6}(p_{i-3}+4p_{i-2}+p_{i-1})\\
Q_i(u_{i+1}) &= \tfrac{1}{6}(p_{i-2}+4p_{i-1}+p_i)\\
Q_i'(u_i) &= \tfrac{1}{2}(p_{i-1}-p_{i-3})\\
Q_i'(u_{i+1}) &= \tfrac{1}{2}(p_i-p_{i-2})
\end{aligned}
\longrightarrow
M_{BS} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$u_i \le u \le u_{i+1}$

$i \in [3,n]$

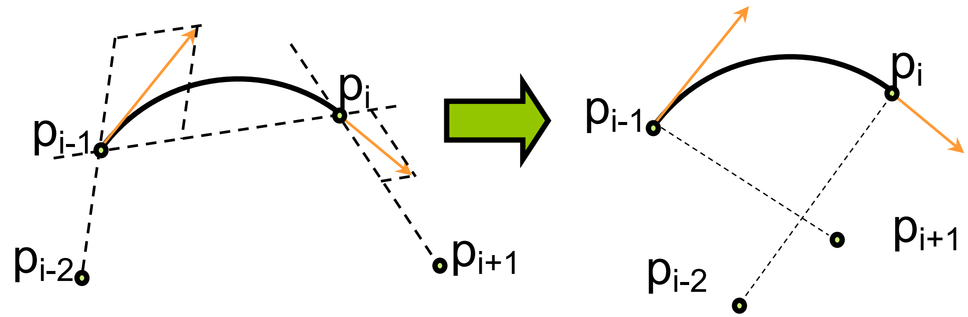




nudos={0,1,2,3,4,5,6,7}

Curvas paramétricas
Conversión entre familias

- ¿Qué puntos de control en la nueva familia generan la misma curva que en la actual familia?



- Es necesaria la matriz característica

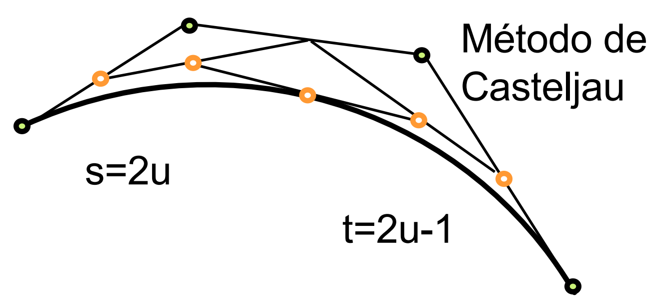
$$Q(u) = U \cdot M_A \cdot G_A = U \cdot M_B \cdot G_B$$
$$\Downarrow$$
$$G_B = M_B^{-1} \cdot M_A \cdot G_A = M_{B \to A} \cdot G_A$$

Curvas paramétricas
Subdivisión de curvas

- Aumento del número de puntos de control sin modificar Q(u)
- Bezier cúbicas
  - Dos mitades en u=0.5
  - Mantenimiento de las condiciones de contorno
  - Uso de método gráfico de Casteljau: sumas y divisiones por 2
- Otras familias, usar conversión

$$G_{BEZ}^{iz} = D_{BEZ}^{iz} \cdot G_{BEZ} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot G_{BEZ}$$

$$G_{BEZ}^{de} = D_{BEZ}^{de} \cdot G_{BEZ} = \ldots$$

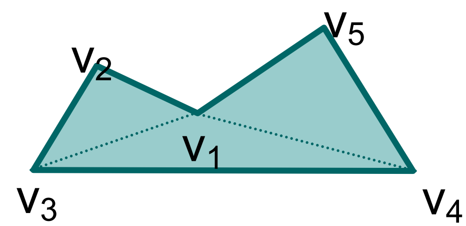


Primitivas 2D

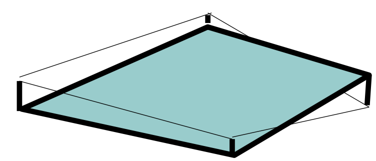
Superficies

Polígonos

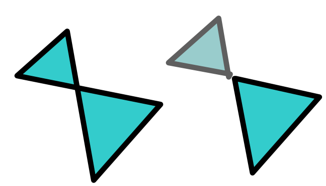
- Vértices y aristas
- Normales
- Ecuación implícita del plano: polinomio de grado 1
- Criterio de ordenación
  - para qué se usa
  - cómo se sabe
- Polígonos cóncavos y convexos
  - criterio de convexidad
  - teselación
- Polígonos degenerados
  - frontera múltiple
  - no planos
  - aristas secantes



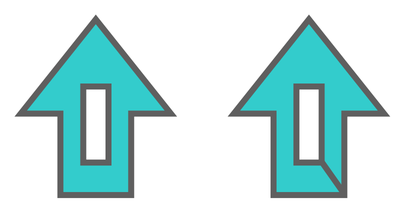
Teselación



Aplanamiento



División



Unificación de frontera

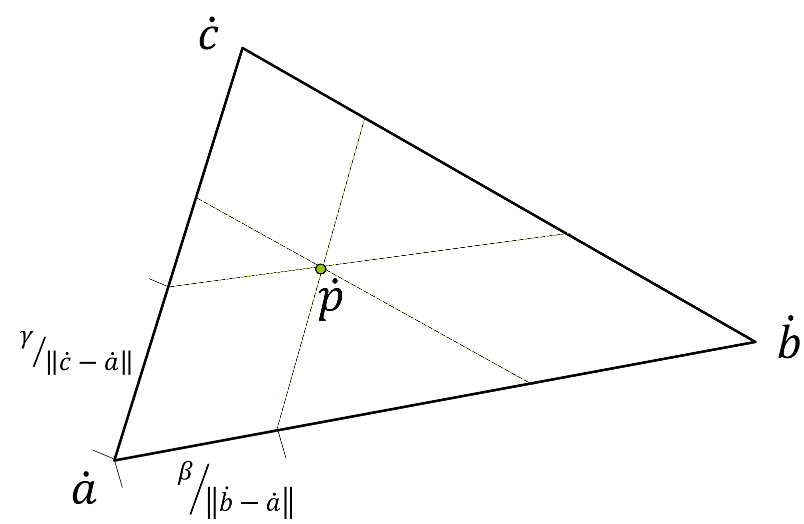
Triángulos

- Primitiva 2D básica en GPU
- Coordenadas baricéntricas α,β,γ
- Interpolación lineal de atributos
- Clasificación de puntos: interioridad

$$\dot{p} = \dot{a} + \beta(\dot{b} - \dot{a}) + \gamma(\dot{c} - \dot{a})$$

$$\downarrow$$

$$\dot{p} = \alpha\dot{a} + \beta\dot{b} + \gamma\dot{c}$$
$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$



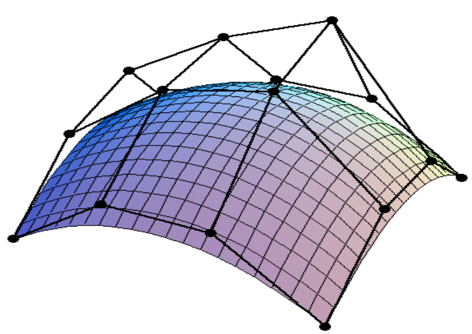
Superficies cuádricas

- Ecuación implícita de una cuádrica: polinomio de grado 2
- Cálculo sencillo de intersección con recta

$$
\begin{aligned}
&a{p_x}^2 + b{p_y}^2 + c{p_z}^2 + \\
&dp_xp_y + ep_xp_z + fp_yp_z + \\
&gp_x + hp_y + ip_z + j = 0
\end{aligned}
$$

Superficies paramétricas
Conceptos generales

- Superficie paramétrica
  - vector posición
  - matriz de coeficientes
  - vectores tangentes
  - vector normal
  - grados de la superficie
- Condiciones de contorno
- Funciones base



$$S(u,v)=\left[x(u,v) \quad y(u,v) \quad z(u,v)\right] \qquad u,v\in[0,1]$$

$$S=U\cdot C\cdot V^T$$

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial u},\frac{\partial S(u,v)}{\partial v}$$ tangentes

$$N(u,v)=\frac{\partial S(u,v)}{\partial u}\times\frac{\partial S(u,v)}{\partial v}$$ normal

$$\boxed{S(u,v)=U\cdot C\cdot V^T=U\cdot M\cdot G\cdot M^T\cdot V^T}$$

$$S(u,v)=(U\cdot M)\cdot G\cdot(M^T\cdot V^T)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i(u)B_j(v)g_{ij}$$

Superficies paramétricas
Superficies de Hermite

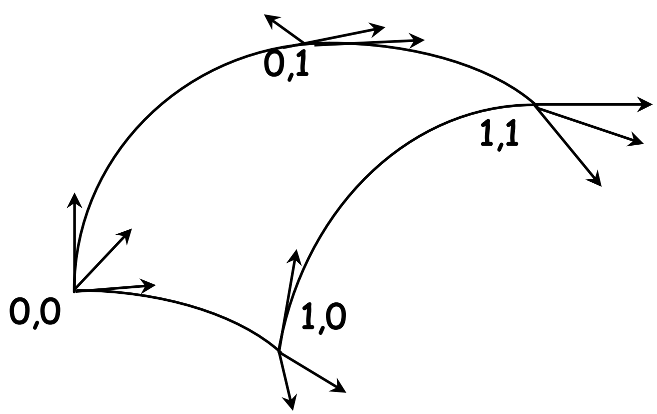
- Polinomios bicúbicos interpolantes
- 4 puntos de control + 8 tangentes + 4 vectores de *twist* por superficie
- 16 condiciones de contorno
- Discusión sobre continuidad

$$\boxed{S(u,v) = U \cdot M_H \cdot G_H \cdot M_H^T \cdot V^T}$$

Matriz característica

$$\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \\ u=0 \\ u=1 \end{array} \begin{bmatrix} S(0,0) & S(0,1) & \partial/\partial v\, S(0,0) & \partial/\partial v\, S(0,1) \\ S(1,0) & S(1,1) & \partial/\partial v\, S(1,0) & \partial/\partial v\, S(1,1) \\ \partial/\partial u\, S(0,0) & \partial/\partial u\, S(0,1) & \partial^2/\partial u \partial v\, S(0,0) & \partial^2/\partial u \partial v\, S(0,1) \\ \partial/\partial u\, S(1,0) & \partial/\partial u\, S(1,1) & \partial^2/\partial u \partial v\, S(1,0) & \partial^2/\partial u \partial v\, S(1,1) \end{bmatrix}$$

vectores twist



Parches de Ferguson: vectores twist nulos

Superficies paramétricas

Superficies cúbicas de Bèzier

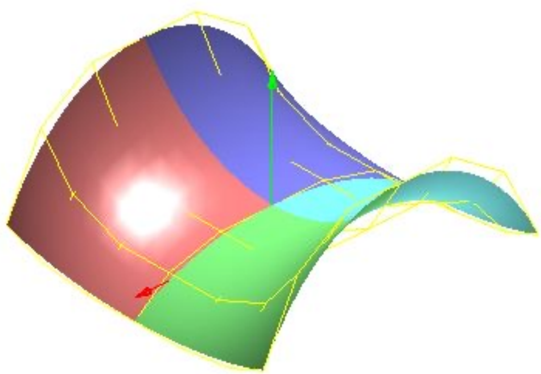
- 16 puntos de control
- la superficie pasa por 4 extremos
- discusión sobre continuidad
  - extremos compartidos: C^0
  - colinealidad: G^1

$$S(u,v) = U \cdot M_{BEZ} \cdot G_{BEZ} \cdot M_{BEZ}^{T} \cdot V^{T}$$

funciones base

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} Bez_{i,3}(u) \cdot Bez_{j,3}(v) \cdot g_{ij}$$

$$0 \le u \le 1 \qquad 0 \le v \le 1$$



polinomios de Bernstein

$$\mathrm{Bez}_{k,n}(u) = C(n,k) \cdot u^{k} \cdot (1-u)^{n-k}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Primitivas 3D

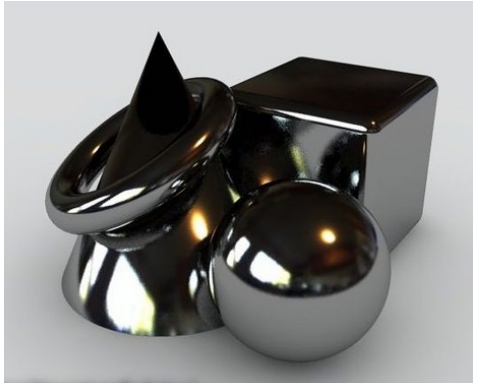
Sólidos y volúmenes

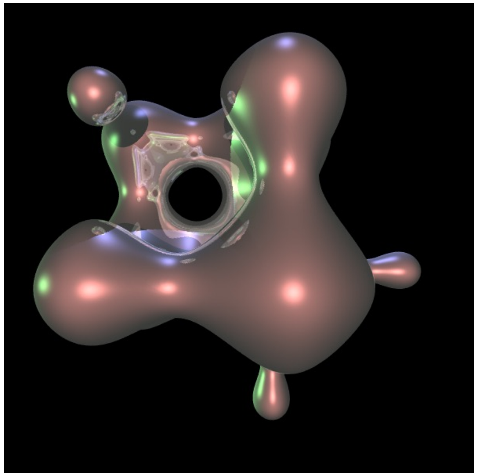
- Un modelo geométrico representa a un objeto sólido cuando es posible distinguir en él un *único* conjunto abierto conexo de R^3 al que llamamos *interior* del sólido
- Propiedades deseables del modelo de un sólido
  - Precisión: aproximación a la descripción exacta del sólido
  - Dominio extenso: posibilidad de construcción de un conjunto amplio de sólidos
  - Unicidad: dos sólidos son iguales si y sólo si tienen la misma representación
  - Validez: es imposible obtener un objeto no válido mediante operaciones con el modelo
  - Compacidad: simplicidad y ahorro de memoria
  - Eficiencia: recorrido, interrogación y operación
- Formas de representar un sólido
  - Describiendo su frontera con el exterior mediante superficies (B-rep)
    - poliedros
    - superficies paramétricas
  - Describiendo su interior

Volúmenes implícitos

- Definidos por superficies implícitas cerradas o infinitas
  - Cuádricas
  - Plano
  - Isosuperficies de campos escalares
- Combinación de superficies para cerrar un volumen finito
  - Poliedros convexos, cilindro, cono, etc

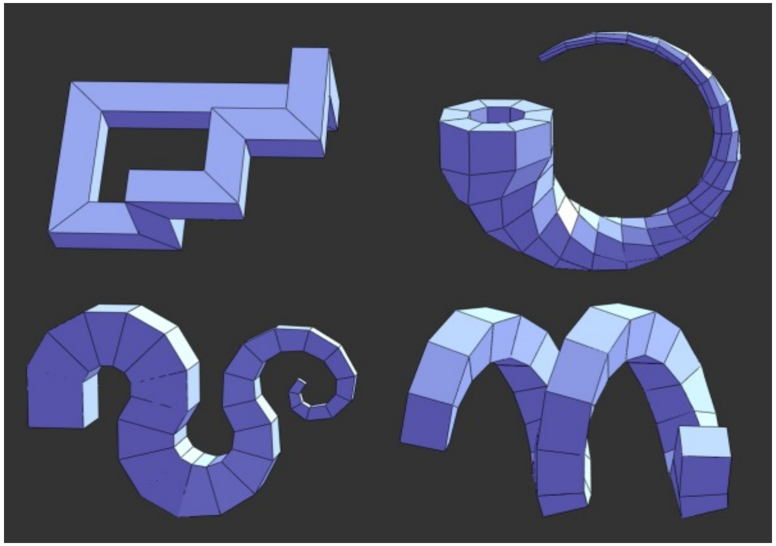
$$\dot{p}\ tal\ que\ f(\dot{p}) \leq 0$$





Volúmenes por barrido

- Definición geométrica
  - sección (región 2D)
  - trayectoria de barrido
- Variantes
  - Traslacional
  - Rotacional
  - Cilindro generalizado
  - Sección variante
    - en tamaño
    - en ángulo



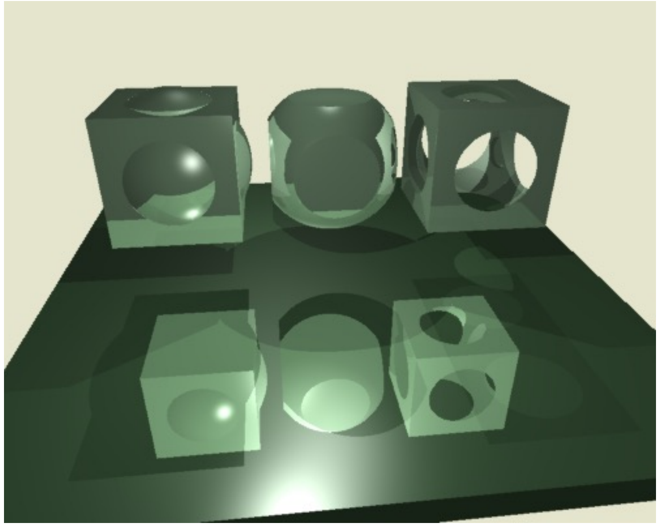
fuente: nendowingsmirai.yuku.com

Vóxel

- Elemento de volumen, usualmente cúbico
- Características
  - Posición
  - Tamaño
  - Atributos

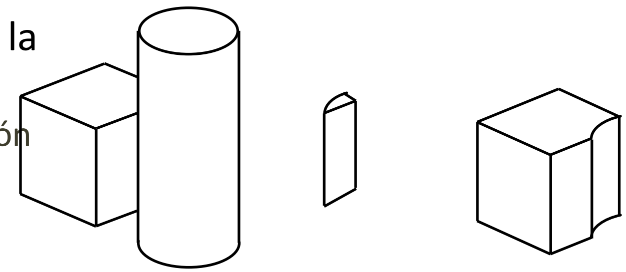
Operaciones con volúmenes

- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Regularización de operaciones



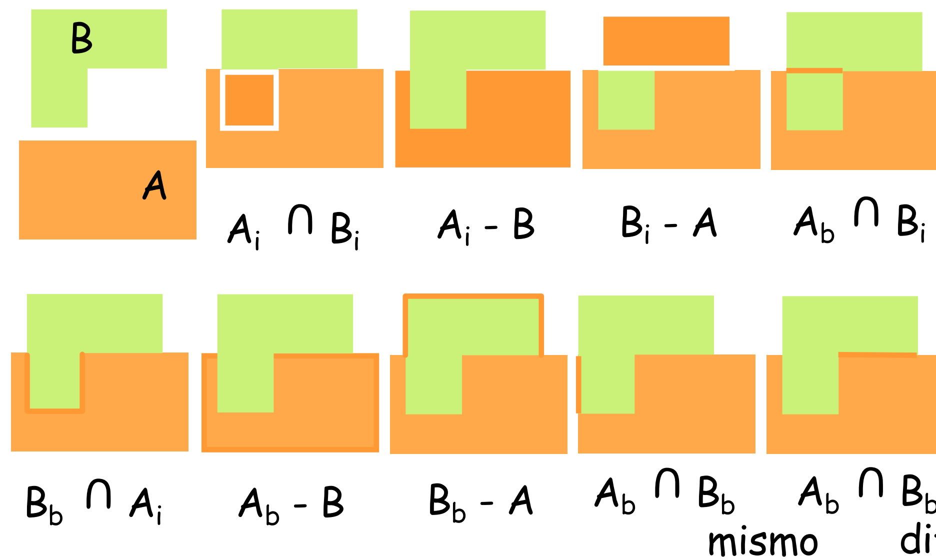
Sólidos y volúmenes
Regularización

- Operaciones booleanas regularizadas: Mantenimiento de la validez del modelo
  - Posibilidad de combinación de sólidos por unión, intersección y diferencia
  - Regularización del operador
    - A op* B = clausura(interior(A op B))
    - mantiene la integridad si A,B están regularizados



Operaciones regularizadas

	A U* B	A ∩* B	A -* B
$A_i \cap B_i$	●	●	
$A_i - B$	●		●
$B_i - A$	●		
$A_b \cap B_i$		●	
$B_b \cap A_i$		●	●
$A_b - B$	●		●
$B_b - A$	●		
$A_b \cap B_b$ mismo	●	●	
$A_b \cap B_b$ diff			●



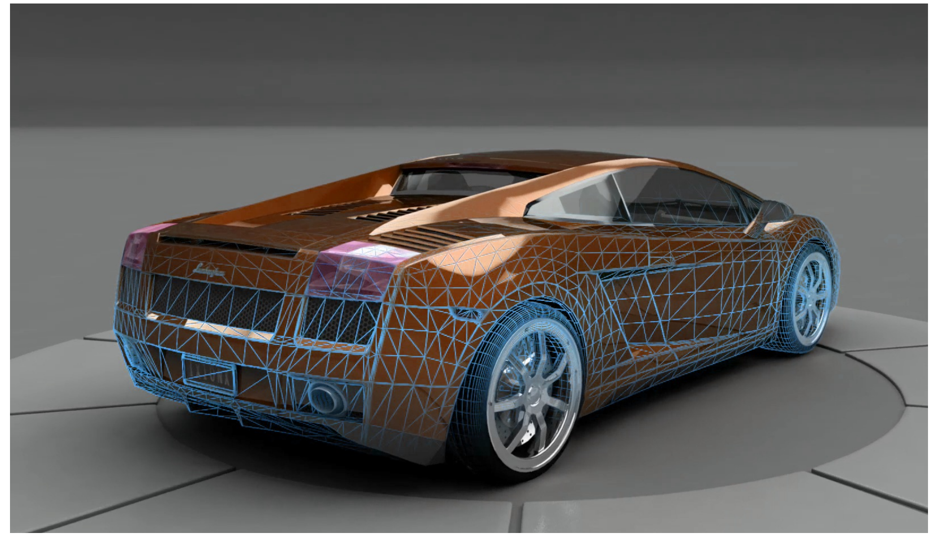
Sección de Informática Gráfica | Computer Graphics Group VALENCIA

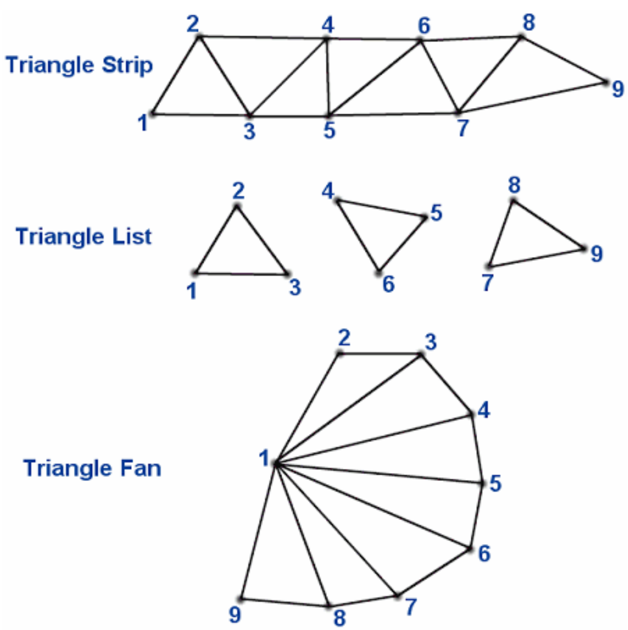
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

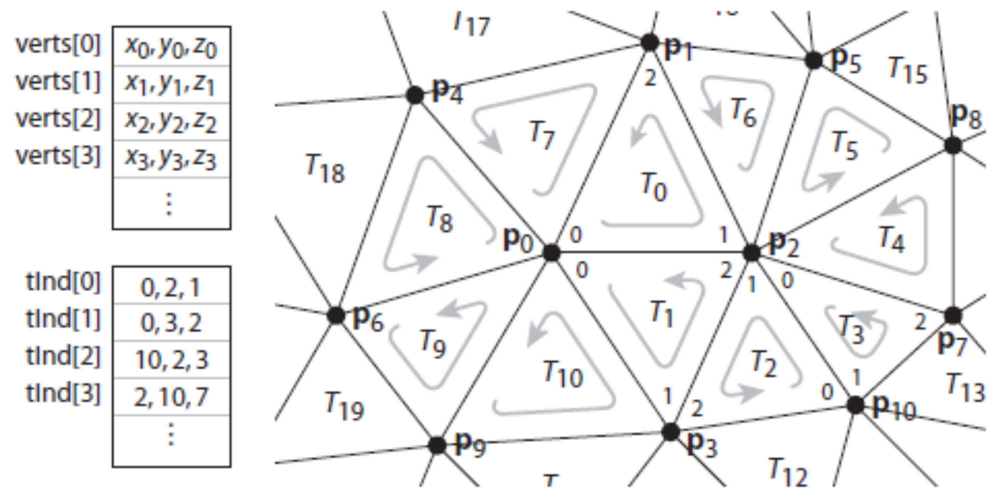
Estructuras de datos

Mallas poligonales

- Listas
  - Extensas
  - Indexadas
- Tiras
- Abanicos

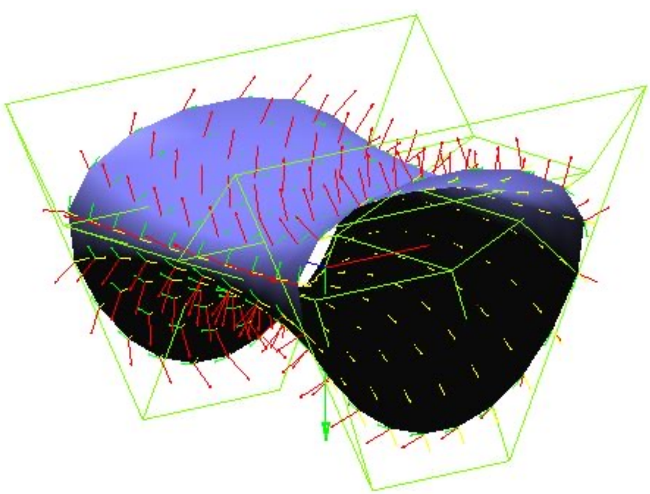






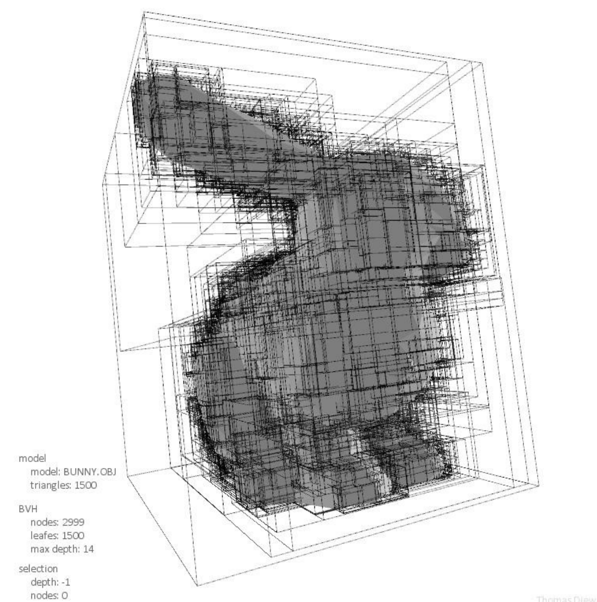
Mallas paramétricas

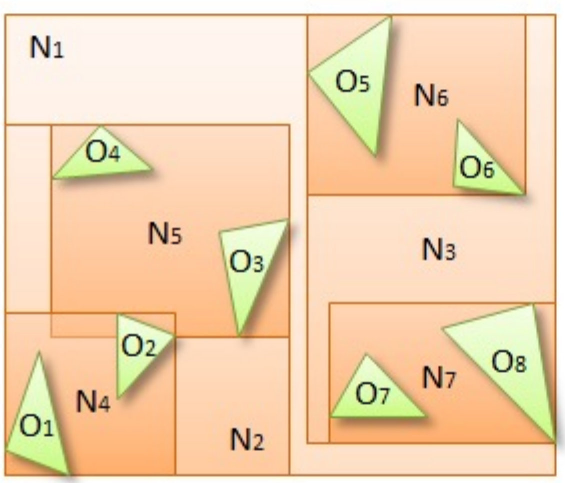
- Se forman con parches paramétricos
- Continuidad en las uniones
- Puntos de control
  - Muestreo de vértices a malla poligonal
  - Cálculo de normales y tangentes reales

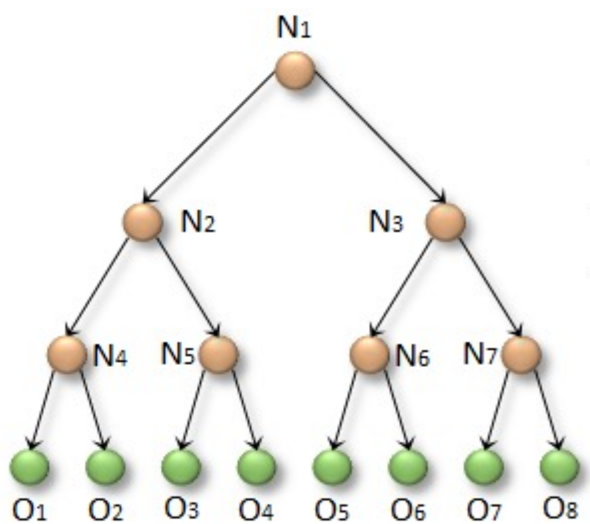


Contenedores

- Agrupan geometría dentro de otra más simple: planos, cajas o esferas
- Aceleran el cálculo cuando el test da negativo para la intersección
  - Colisiones
  - Visibilidad
  - Área de iluminación
- Suelen organizarse de forma jerárquica (BVH)





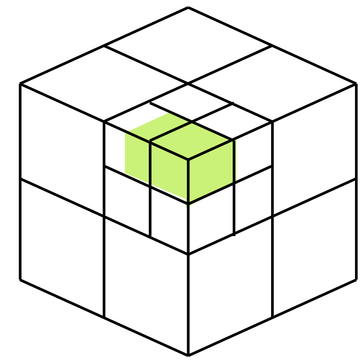


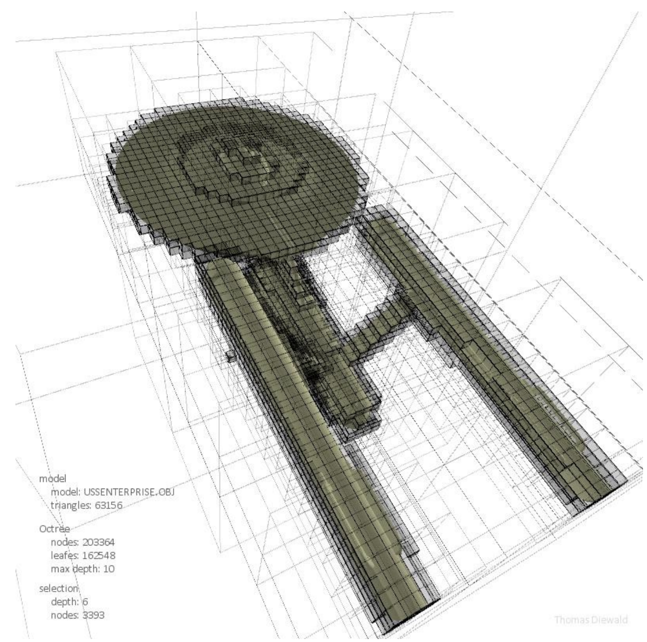
Partición espacial

Octrees

- Por simple enumeración
  - Estructura matricial de voxels ocupado/desocupado
  - Operaciones booleanas
  - Alto coste de almacenamiento
- Árboles octales
  - Subdivisión binaria dimensional en árbol octal
    - Nodos: Información de ocupación B,N,G
    - Ramas: intervalo y dimensión
  - Alivian el coste de almacenamiento: lineal con la frontera
  - Criterios de parada
    - Alcance de homogeneidad B,N
    - Nivel máximo de profundidad = dimensión mínima de voxel
  - Cálculo de propiedades físicas
  - Operaciones booleanas

unión	A OR B
intersección	A AND B
diferencia	A XOR (A AND B)

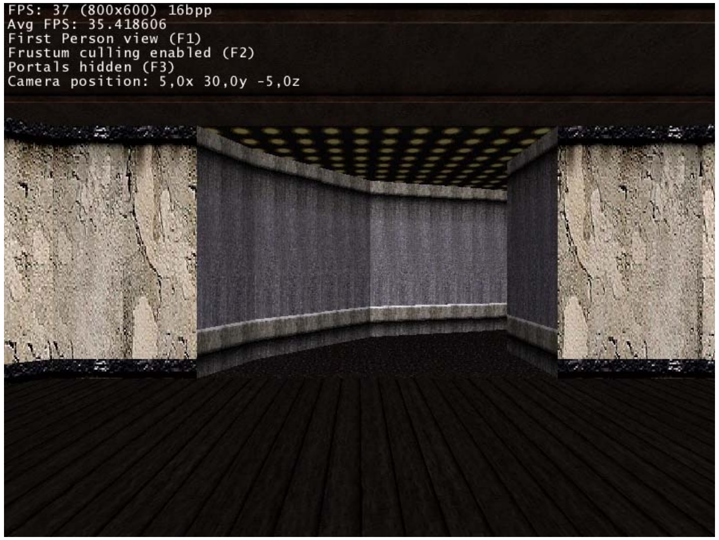


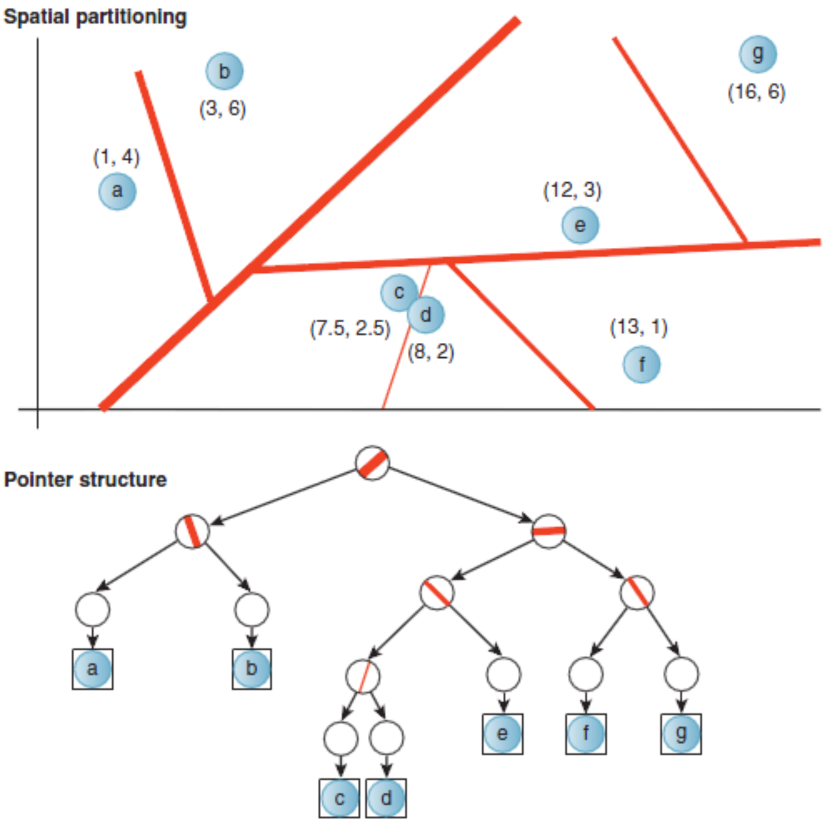


Algoritmo C:= A unión B	Algoritmo C:= A intersección B
para cada par de nodos a,b análogos	para cada par de nodos a,b análogos
si a=N ó b=N entonces c:=N sino	si a=N y b=N entonces c:=N sino
si a=B y b=B entonces c:=B sino	si a=B ó b=B entonces c:=B sino
si a=B y b=G entonces c:=b (y viceversa)	si a=N y b=G entonces c:=b (y viceversa)
sino, descender nivel	sino, descender nivel

Partición espacial
BSP

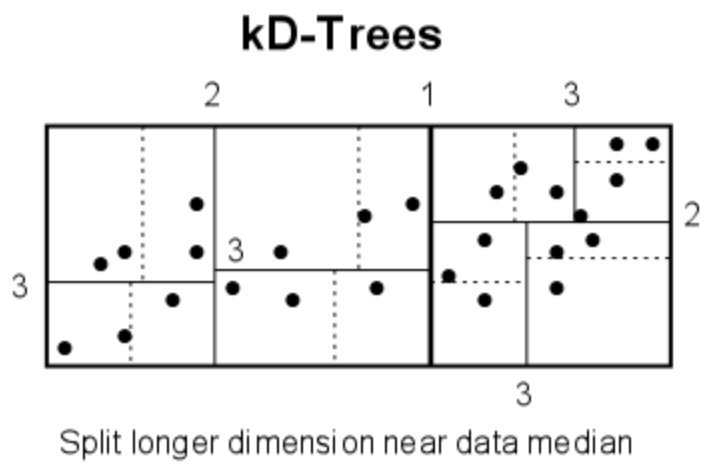
- Se usan en clasificación de visibilidad, clustering, selección, …

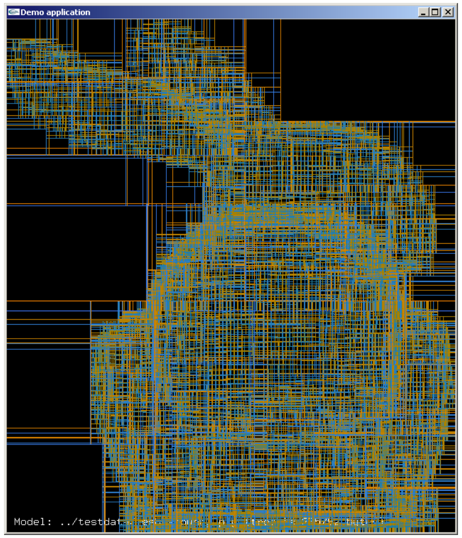




Partición espacial
KdTrees

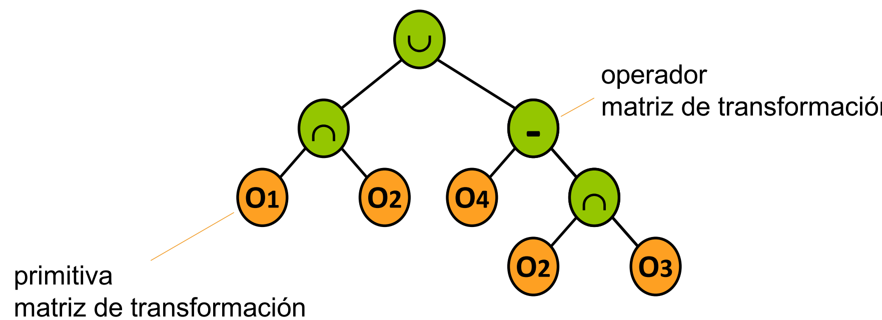
- Estructura: BSP de corte por planos en direcciones principales
- Construcción: Corte perpendicular a la dimensión mayor por la mediana
- Uso: *Clustering* rápido de vértices. Localización rápida de vecinos.

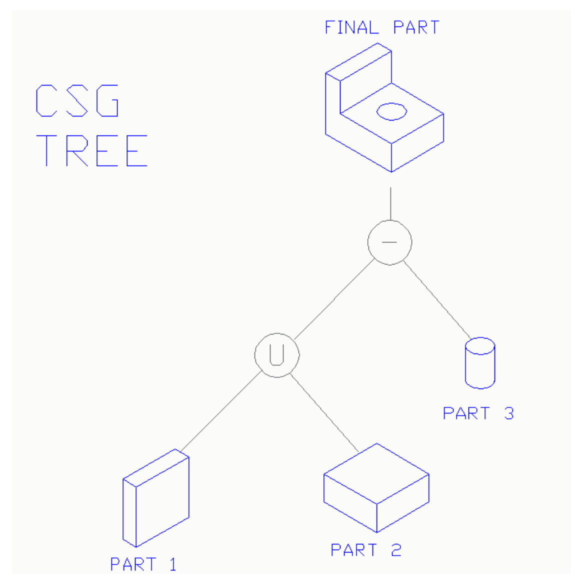




Geometría Sólido-Constructiva (CSG)

- Estructura de árbol binario ordenado
- Nodos internos
  - operadores booleanos
  - transformación
- Hojas: Instancias de primitivas
  - poliedros, cuádricas, semiespacios
  - transformación
- Posibilidad de clasificación de un punto respecto de una primitiva
- Modelo atractivo como método de construcción
- Almacenamiento compacto
- Cálculo de propiedades físicas mediante conversión a enumeración espacial





DAG

- Organización jerárquica de la escena
- Nodos internos
  - Agrupamiento
  - Trasformación
- Nodos hoja
  - Elementos representables
  - Atributos
    - Geometría
    - Aspecto