Sección de Informática Gráfica | Computer Graphics Group
VALENCIA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Conceptos fundamentales en informática gráfica

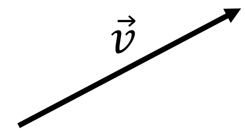
Espacios y transformaciones

Tipos de datos básicos

- Puntos
  - Un punto es una entidad geométrica que indica una posición

$\dot{p}$

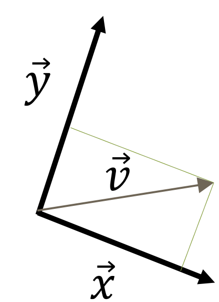
- Vectores
  - Un vector es una entidad geométrica que indica una dirección y magnitud de un desplazamiento



- Vector de coordenadas
  - Es una matriz columna de números reales que refieren un punto o un vector a un sistema de referencia

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

- Sistemas de referencia
  - **Base vectorial**: Matriz columna de vectores linealmente independientes
  - **Base vectorial ortonormal**: Base vectorial de vectores con norma 1 y perpendiculares entre sí
  - **Sistema de coordenadas**: Un punto origen y una base vectorial ortonormal



$$\vec{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = x\vec{x} + y\vec{y} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{c}$$

Transformaciones lineales en 3D

- Matrices 3x3
  - Representan trasformaciones lineales $\mathcal{L}\big(k(\vec{a}+\vec{b})\big) = k\big(\mathcal{L}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{b})\big)$de un vector en otro
- Cambio de base
  - Si se aplica la trasformación a una base vectorial se obtiene otra base vectorial
  - Podemos expresar un vector en diferentes bases

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}' = \mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{\boldsymbol{f}}^{T}\boldsymbol{Lc}$$

$$\vec{\boldsymbol{f}}'^{T} = \vec{\boldsymbol{f}}^{T}\boldsymbol{L}$$

$$\vec{v} = \vec{\boldsymbol{f}}^{T}\boldsymbol{c} = \vec{\boldsymbol{f}}'^{T}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{c}$$

Trasformaciones lineales

- Rotaciones
  - Una rotación de un ángulo θ respecto a un eje de giro $\vec{a}$ preserva los productos escalares (preserva ángulos)
  - La inversa es la traspuesta

$$\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}(\vec{v}) \cdot \boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1}_{(\theta,\vec{a})} = \boldsymbol{R}^{T}_{(\theta,\vec{a})}$$

Ejercicio: *Demostrar que* $\boldsymbol{R}^{-1}_{(\theta,\vec{a})} = \boldsymbol{R}^{T}_{(\theta,\vec{a})}$

- Escalados
  - No se preservan los ángulos
  - Factores de escala en diagonal principal
  - Inversa: invertir diagonal principal

$$\boldsymbol{S}_{(\boldsymbol{s}=[sx\ sy\ sz]^T)} = \boldsymbol{Is} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sz \end{bmatrix}$$

Rotaciones 3D

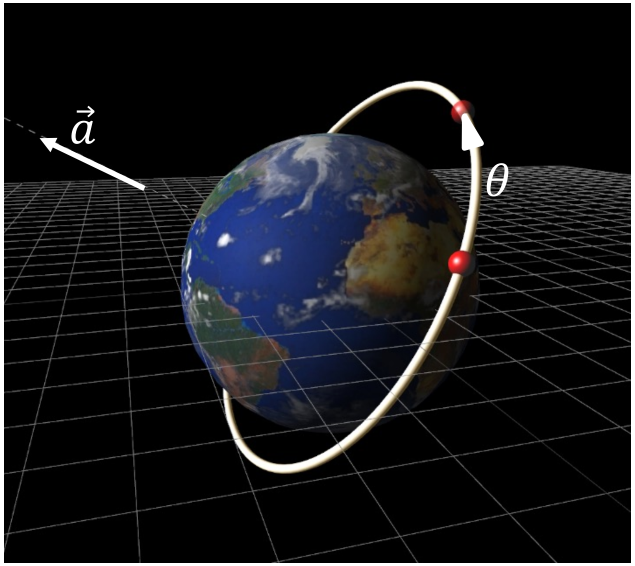
- Una matriz 3x3 **ortogonal** de *det()=1* representa una rotación en 3D
- Cualquier rotación se puede representar como un giro $\boldsymbol{\theta}$ alrededor de un eje con vector **unitario** $\vec{\boldsymbol{a}}$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & wz \end{bmatrix}$$

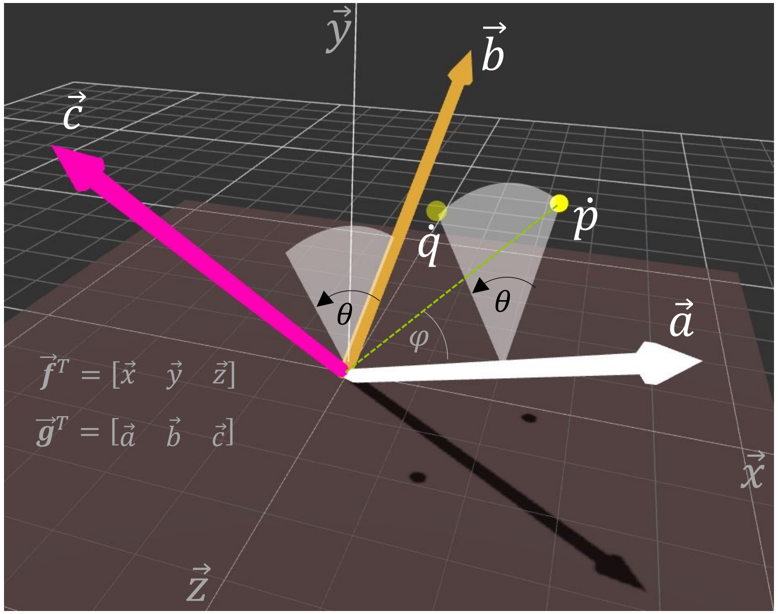
$$\det(\boldsymbol{R}) = 1$$

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})} = (1-\cos\theta)\begin{bmatrix} a_xa_x & a_xa_y & a_xa_z \\ a_ya_x & a_ya_y & a_ya_z \\ a_za_x & a_za_y & a_za_z \end{bmatrix} + \\ + \cos\theta\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$



Rotaciones 3D: Fórmula de Rodrigues



Se quiere girar $\dot{p}$ un ángulo θ alrededor del eje de vector unitario $\vec{a}$ tal que:

$$\vec{q} = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{q}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{q} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}\, \boldsymbol{p} = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{R}'_{(\theta,\vec{a})} \boldsymbol{p}'$$

donde

$$q_a = p_a = \vec{p}\cdot\vec{a} \qquad q_b = p_b \cos\theta \qquad q_c = p_b \sin\theta$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\times\vec{p}}{\|\vec{a}\times\vec{p}\|} = \frac{\vec{a}\times\vec{p}}{\|\vec{p}\|\sin\varphi} = \frac{\vec{a}\times\vec{p}}{p_b}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{p} - \|\vec{p}\|\cos\varphi\,\vec{a}}{p_b} = \frac{\vec{p} - (\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a}}{p_b}$$

por tanto

$$\vec{q} = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]\begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} = (\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a} + p_b\cos\theta\,\frac{\vec{p}-(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a}}{p_b} + p_b\sin\theta\,\frac{\vec{a}\times\vec{p}}{p_b} = \cos\theta\,\vec{p} + (1-\cos\theta)(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a} + \sin\theta\,(\vec{a}\times\vec{p})$$

que es cierto para cualquier sistema de referencia, en concreto para $\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}}$

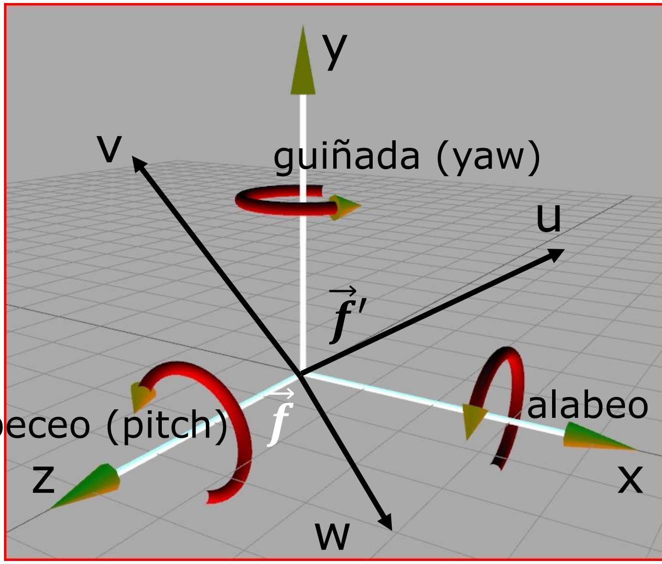
$$\vec{q} = \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}\boldsymbol{p} = \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} \cos\boldsymbol{\theta}\, \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} (\boldsymbol{1} - \cos\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} \sin\boldsymbol{\theta}\, \boldsymbol{a}^*\, \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{a}^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})} = (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \cos\theta\,\boldsymbol{I} + \sin\theta\,\boldsymbol{a}^*}$$

Rotaciones 3D: Ejes principales



- En GPC se usan $\boldsymbol{R}_{(\alpha,\vec{x})}\boldsymbol{R}_{(\beta,\vec{y})}\boldsymbol{R}_{(\gamma,\vec{z})}$
- El **orden** es importante
- La matriz compuesta representa un giro $\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}$ $tal\ que\ \vec{\boldsymbol{f}'}^{T} = \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}}\ \boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}$

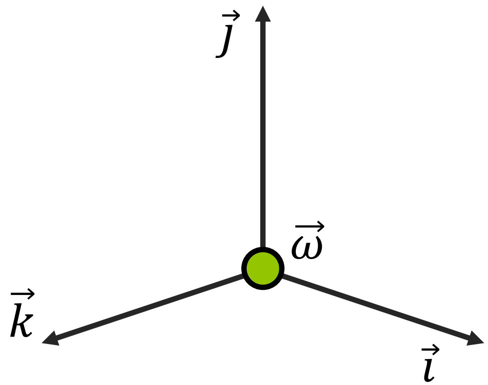
Ejercicio: Rotación general a principales. Comprobar que

$$\sin\beta = \boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}[0,2];\ \tan\gamma = -\frac{\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}[0,1]}{\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}[0,0]};\ \tan\alpha = -\frac{\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}[1,2]}{\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})}[2,2]};$$

Ejercicio: Rotación sobre ejes principales a general. Comprobar que $si\ \boldsymbol{R} =$

$$\boldsymbol{R}_{(\alpha,\vec{x})}\boldsymbol{R}_{(\beta,\vec{y})}\boldsymbol{R}_{(\gamma,\vec{z})} \rightarrow\ \cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_D \boldsymbol{R} - 1\right);\ a^* = \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^T}{2\sin\theta};$$

Rotaciones 3D: Cuaterniones



- Un cuaternión es un vector con 3 componentes imaginarias y 1 real
- Un cuaternión de la *hiperesfera* unidad representa un giro general
- Las rotaciones son rápidas y estables usando cuaterniones

$$\hat{q} = \omega + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \begin{bmatrix} \omega \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\bar{q}} = \omega - a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$$
$$\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = \vec{i}\vec{j}\vec{k} = -1$$
$$\vec{i}\vec{j} = \overrightarrow{k} \quad \vec{j}\vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k}\vec{i} = \vec{j}$$

$$\boldsymbol{R}_{(\theta,\vec{a})} \equiv \hat{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)$$
$$\|\hat{q}\| = 1$$

Ejercicio: Demostrar que $\begin{bmatrix} \omega \\ \vec{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\rho - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \omega\vec{b} + \rho\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \end{bmatrix}$

Ejercicio: Demostrar que si $\boldsymbol{p}' = R_{(\theta,\vec{a})}\boldsymbol{p}$ *entonces* $\begin{bmatrix} * \\ \boldsymbol{p}' \end{bmatrix} = \hat{q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \hat{\bar{q}}$

Trasformaciones afines

- Sistema de coordenadas para puntos (afín)
  - Debemos fijar un origen $\dot{o}$
  - Cualquier punto se alcanza sumando un vector al punto origen
- Matrices 4x4
  - Si la última fila es [*0,0,0,1*] la matriz trasforma un punto en otro
  - Si la matriz se aplica al sistema de referencia hay un cambio de sistema
  - Si la última columna es $[0,0,0,1]^T$ la trasformación es lineal

$$\dot{p} = \dot{o} + \vec{v} = [\vec{x} \quad \vec{y} \quad \vec{z} \quad \dot{o}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{c}$$

$$\dot{p}' = A(\dot{p}) = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{A c}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{f}}'^T = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformaciones afines

- Traslaciones
  - Los desplazamientos se indican en la última columna

$$\boldsymbol{T}_{(tx,ty,tz)} = \begin{bmatrix} & tx \\ \boldsymbol{I} & ty \\ & tz \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

- Trasformación afín
  - Es una composición de una trasformación lineal y un desplazamiento

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{TL}$$

  - Llamamos trasformación rígida cuando la parte lineal es una rotación

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{TR}$$

  - Siempre están referidas a un sistema de referencia. Trasformación respecto a …

$$A\left(\dot{p}, \vec{\boldsymbol{f}}\right) \neq A(\dot{p}, \vec{\boldsymbol{g}})$$

Trasformación afín

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

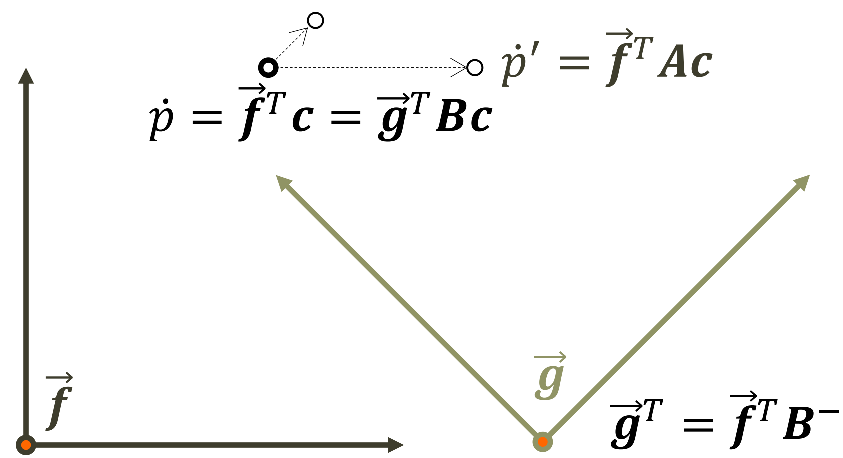
escalado en x

$$\dot{p}' \neq \dot{p}'' \ !$$

$$\dot{p}'' = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{ABc} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{ABc}$$

$$\dot{p}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{Ac}$$

$$\dot{p} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{c} = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{Bc}$$



$$\vec{\boldsymbol{g}}^T = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{B}^{-1}$$

Composición de trasformaciones

- Trasformación sobre otro sistema

$$A(\dot{p}, \vec{\boldsymbol{g}}^T) \rightarrow \dot{p}' = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{g}}$$

$$¿M(\dot{p}, \vec{\boldsymbol{f}}^T)? \rightarrow \dot{p}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}} \; siendo \; \vec{\boldsymbol{g}}^T = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{B}$$

$$\dot{p}' = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{g}} = \vec{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}}$$

1. Llevar $\vec{\boldsymbol{g}}$ a $\vec{\boldsymbol{f}}$
2. Realizar la transformación $\boldsymbol{A}$
3. Devolver $\vec{\boldsymbol{g}}$ adonde estaba

- Composición de trasformaciones
  - De derecha a izquierda: sistema fijo
  - De izquierda a derecha: sistema local

$$\vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{c}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{c}$$

- Jerarquía de sistemas de referencia
  - La trasformación afecta a los descendientes (por la izquierda)

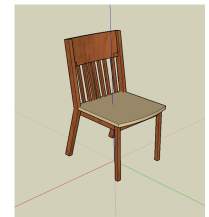
$$\vec{\boldsymbol{f}}_2^T = \vec{\boldsymbol{f}}_1^T \boldsymbol{B}_{12} \qquad \vec{\boldsymbol{f}}_3^T = \vec{\boldsymbol{f}}_2^T \boldsymbol{B}_{23}$$

$$si \; \vec{\boldsymbol{f}}_1'^T = \vec{\boldsymbol{f}}_1^T \boldsymbol{A} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{f}}_3'^T = \vec{\boldsymbol{f}}_1^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{B}_{23}$$

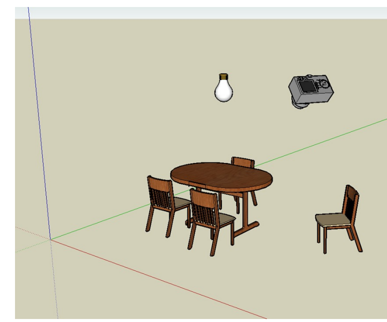
Sistemas de referencia

- Modelo
  - Sistema donde es fácil dar coordenadas o direcciones
  - Es compuesto cuando el objeto se compone de partes
- Escena o Mundo
  - Sistema “fijo” en el que sitúan los objetos y el observador
- Observador
  - Solidario a la cámara virtual

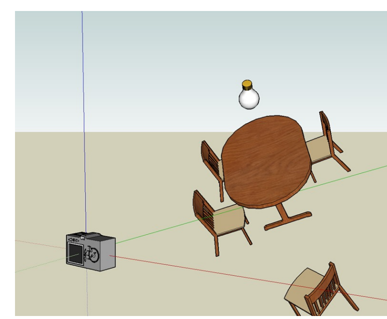
$\vec{\boldsymbol{m}}^T$



$\vec{\boldsymbol{w}}^T$



$\vec{\boldsymbol{e}}^T$



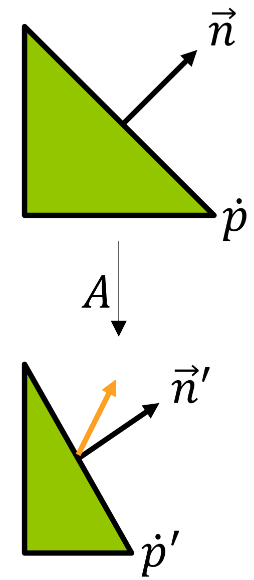
$$\dot{p} = \vec{\boldsymbol{m}}^T \boldsymbol{p} = \vec{\boldsymbol{w}}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{p} = \vec{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{V}\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}$$

trasformación de la vista

trasformación del modelo

Trasformación de normales

- Vectores normales
  - Perpendiculares a la superficie del objeto
  - Muy importantes en iluminación y textura
- Matriz de trasformación de la normal
  - Al trasformar el vector debe conservarse la perpendicularidad
  - La matriz de trasformación del objeto no conserva, en general, la perpendicularidad (escalados)
  - Usar la inversa traspuesta



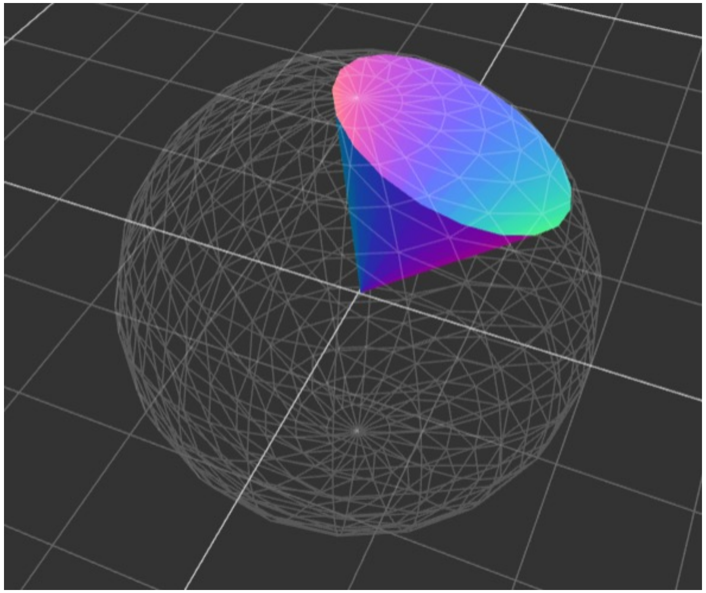
$$\dot{p}' = A(\dot{p}) = \vec{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

$$\vec{n}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T (\boldsymbol{A}^{-1})^T \boldsymbol{n}$$

Ejercicio: Demostrar que si $\vec{n}$ es perpendicular a $\vec{t} = (\dot{p} - \dot{q})$ entonces $\vec{n}' = \vec{\boldsymbol{f}}^T (\boldsymbol{A}^{-1})^T \boldsymbol{n}$ es perpendicular a $\vec{t}' = (A(\dot{p}) - A(\dot{q}))$

Ángulo sólido

- En iluminación es necesario saber la energía que llega a una superficie desde una determinada dirección
- Para indicar regiones direccionales en el espacio (piénsese en conos) usamos **ángulos sólidos**. El ángulo sólido es la generalización del ángulo plano: $\omega = \Delta A/r^2$, donde ΔA es el área de una superficie en la esfera de radio *r*. Se mide en **estereorradianes**



$\omega = \Delta A/r^2$

Ejercicio: Comparar el ángulo sólido de la Luna y el del Sol vistos desde la Tierra. $d_L = 384400km; d_S = 149598x10^3km; D_L = 3476km; D_S = 1392x10^3km$