UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS - Matemática 2 (Administración- Contador- Negocios Digitales)

Ejercitación 2: Planos y rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Dibujar los vectores $v+w$, $-2v$, $v-w$, $3v+2w$ y $-v+2w-3(v+2w)$ en cada caso.

   (a) $v=(1,2)$, $w=(3,2)$.

   (b) $v=(1,2,1)$, $w=(3,2,0)$.

2. Dibujar en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos de vectores:

   (a) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha=0$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ y $\alpha=1$.

   (b) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha\in[0,1]$.

   (c) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

3.(a) Sean los vectores $u=(3,2)$, $v=(-6,8)$ y $w=(-2,3)$.
Hallar $<u,v>$, $<u,w>$ y $||v||$.

   (b) Considerar los vectores $u=(-1,0,2), v=(3,-2,-1), w=(4,-3,0)$.
Hallar $<u,v>$, $<v,w>$, $||w||$ y $\dfrac{<u,w>}{||w||^2}w$.

4.(a) Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ perpendiculares a $(3,1)$.

   (b) De los vectores hallados en (a) exhibir aquellos de igual norma que $(3,1)$.

   (c) Sea $u=(1,2,2)$. Hallar todos los $v\in\mathbb{R}^3$, perpendiculares a u, de igual norma que u y tales que $<v,(0,1,0)>=-1$.

5. Encontrar las ecuaciones de:

   (a) Todas la rectas $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$, que son paralelas a la recta que contiene a los puntos $(1,2)$ y $(-1,3)$. ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la recta que pasa por $(7,4)$?

   (b) La recta $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $(5,1)$ y es perpendicular a la recta $\mathbb{L}'$: $[(1,-1)]+(2,-3)$.

   (c) La recta $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^3$ que pasa por $(3,-1,0)$ y tiene la dirección del vector $(1,1,2)$.

   (d) La recta $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1,2,3)$ y $(0,2,2)$.

6.(a) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $(-1,3,0)$, $(1,0,1)$ y $(1,0,2)$.

   (b) Dar una ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,2,3)$, $(0,2,2)$ y $(3,2,5)$.

   (c) Encontrar una ecuación del plano generado por $(-1,0,4)$ y $(1,6,2)$ y que pasa por el origen.

7. Calcular $(1,-1,-2)\times(3,-4,1)$ y $(1,1,1)\times(2,2,2)$.

8. Hallar un plano Π cuya normal es $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(4, 1, 0)$.

9. Pasar a forma paramétrica el plano $\Pi: \; 2x + 3y - z = 1$.

10. Pasar de forma paramétrica a implícita los siguientes planos

    (a) $\Pi: \; [(-2, 0, 3), (1, 1, 1)] + (3, 2, 0)$
    (b) $\Pi: \; [(1, 0, 1), (2, -2, 5)]$

    y calcular la intersección.

11. Decidir en cada caso qué representa el conjunto A en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ según corresponda: ¿es una recta? ¿es un plano?

    (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 3\}$
    (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; \; 2y + x - z + 2 = 0\}$
    (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 3\}$
    (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3 = -3x + y\}$
    (e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = z + 1; \; 2z = -2 + 2x + 4y\}$

    Describir los conjuntos anteriores de forma paramétrica.

12. Pasar de forma paramétrica a implícita las siguientes rectas:

    (a) $\mathbb{L}: \; [(2, -1)] + (3, -1)$
    (b) $\mathbb{L}: \; [(-2, 1, 3)] + (0, -1, -1)$
    (c) $\mathbb{L}: \; [(4, 2, 1)]$

    Calcular la intersección entre (b) y (c), ¿son paralelas las rectas?

13. Se tienen los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$:

    - $\Pi_1 : [(3, 2, 0), (0, 7, -3)] + (-1, 1, -1)$
    - $\Pi_2 : [(1, 1, 1), (0, 3, 2)] + (0, -1, 1)$
    - $\Pi_3 = \{(x, y, z) \; / \; 2x - y + z = 1\}$
    - $\mathbb{L}_1 : [(0, 3, 2)] + (0, -1, 1)$
    - $\mathbb{L}_2 = \{(x, y, z) : \; 2x - y + z = 1; \; x - y + 2z = 2\}$

    Hallar $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_1$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_2 \cap \Pi_3$.

14. Encontrar las ecuaciones de:

    (a) Hallar el plano Π que pasa por los puntos $(1, -2, 0)$, $(2, 1, 1)$ y $(0, 3, 4)$.
    (b) El plano Π_1 de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 0, 1)$ y $(2, -1, -1)$ y el plano $\Pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(4, -1, 1)$.
    (c) El plano Π_3 de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y que sea paralelo al plano $[(1, 1, -1), (1, 0, 1)]$.

15. Sea Π el plano de ecuación $-3x + z = 2$.
    (a) Dar dos vectores que generen el plano Π' paralelo a Π que pasa por el origen.
    (b) Dar la ecuación del plano paralelo a Π que pasa por $(1, 1, 1)$.

16. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^3$ la recta dada por las ecuaciones $2x - 3y - 4z = -9$, $x + y + 3z = 3$. Hallar un plano Π tal que $\mathbb{L} \subset \Pi$ y $(0, 3, 1) \in \Pi$.

17. Sea Π el plano que pasa por los puntos $(5, -1, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(3, 0, 0)$. Calcular la ecuación de Π y de una recta $\mathbb{L}$ paralela a Π que pase por el origen. ¿Es única?

18.(a) Dar una recta perpendicular a $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y - z = 0\}$.
    (b) Encontrar una recta perpendicular a $A : [(1, 2, 1), (2, 0, 2)] + (1, 1, 0)$.
    (c) Hallar un plano perpendicular a $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 3x + y + z = 1\}$.

19.(a) Hallar la recta perpendicular al plano de ecuación $x + y - z = 2$ que pasa por $(-2, 1, 4)$.
    (b) Hallar el plano perpendicular a la recta $[(-1, 2, 1)] + (3, 0, 2)$ que pasa por $(2, 1, 8)$.

20. Se consideran los planos $\Pi : \ 4x - y + 3z = 2$ y $\Pi' : \ 2x + 2y - z = 6$. Hallar la ecuación de un plano que sea perpendicular a $\Pi \cap \Pi'$ y que pase por $(4, 2, -1)$.

21. Hallar todos los puntos que están a igual distancia de $(1, 2, 3)$ y de $(0, 1, 2)$.

22. Hallar la distancia del punto $(-3, 2)$ a la recta $\mathbb{L} : \ [(2, -1)] + (6, -1)$.

23. Se consideran el plano $\Pi : \ 3x - y + 2z = 4$ y la recta $\mathbb{L}$, perpendicular a Π que pasa por $(7, -3, 5)$. Hallar la distancia del punto $(3, 2, 1)$ a $\Pi \cap \mathbb{L}$.

24. Para el plano $\Pi : \ [(1, 1, -1), (0, 1, 2)] + (2, 0, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 1)$. Hallar:
    (a) La ecuación de la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P.
    (b) La intersección entre $\mathbb{L}$ y Π.
    (c) La distancia de P al plano Π.