Introducción a la Programación

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2023

Recursión sobre listas

Motivación

Algunas operaciones

- `maximo :: Int -> Int -> Int`
- `maximo3 :: Int -> Int -> Int -> Int`
- `maximo4 :: Int -> Int -> Int -> Int -> Int`

  ⋮
- `maximoN :: Int -> Int -> ··· -> Int`

Pregunta

¿Hay alguna manera de definir funciones que nos permitan trabajar con cantidades arbitrarias de elementos?

Más concretamente, ¿podemos definir una función máximo que funcione por igual para 2, 10 o una cantidad N de elementos?

Respuesta: ¡Sí!, usando **listas**.

Un nuevo tipo: Listas

Expresiones

- `[1, 2, 1]`
- `[True, False, False, True]`
- `[]` (símbolo distinguido para denotar una lista vacía, es decir, una lista sin elementos)

Las listas en Haskell son listas o secuencias de elementos de un mismo tipo, cuyos elementos se pueden repetir.

El tipo de una lista se escribe como: `[tipo]`

- `[True, False, False] :: [Bool]`

Un nuevo tipo: Listas

Expresiones

- `[1, 2, 1]`
- `[True, False, False, True]`
- `[]` (símbolo distinguido para denotar una lista vacía, es decir, una lista sin elementos)

Las listas en Haskell son listas o secuencias de elementos de un mismo tipo, cuyos elementos se pueden repetir.

El tipo de una lista se escribe como: `[tipo]`

- `[True, False, False] :: [Bool]`
- `[1, 2, 3, 4] :: [Int]`
- `[div 10 5, div 2 2] :: [Int]`
- `[[1], [2,3], [], [1,1000,2,0]] :: [     ]`

Un nuevo tipo: Listas

Expresiones

- `[1, 2, 1]`
- `[True, False, False, True]`
- `[]` (símbolo distinguido para denotar una lista vacía, es decir, una lista sin elementos)

Las listas en Haskell son listas o secuencias de elementos de un mismo tipo, cuyos elementos se pueden repetir.

El tipo de una lista se escribe como: `[tipo]`

- `[True, False, False] :: [Bool]`
- `[1, 2, 3, 4] :: [Int]`
- `[div 10 5, div 2 2] :: [Int]`
- `[[1], [2,3], [], [1,1000,2,0]] :: [[Int]]`
- [1, True]
- `[(1,2), (3,4), (5,2)]` ¿Cuál es el tipo de esta lista?

Operaciones

Algunas operaciones que nos brinda el Preludio de Haskell

- `head :: [a] -> a`
- `tail :: [a] -> [a]`
- `(:) :: a -> [a] -> [a]`

Tipar y evaluar las siguientes expresiones

- `head [(1,2), (3,4), (5,2)]`
- `tail [1,2,3,4,4,3,2,1]`
- `[1,2] : []`
- `head []`
- `head [1,2,3] : [4,5]`
- `head ([1,2,3] : [4,5])`
- `head ([1,2,3] : [4,5] : [])`

Creando listas

Formas rápidas para crear listas

Prueben las siguientes expresiones en GHCI

- `[1..100]`
- `[1,3..100]`
- `[100..1]`
- `[1..]`

Ejercicio

- Escribir una expresión que denote la lista estrictamente decreciente de enteros que comienza con el número 1 y termina con el número -100.
- Escribir una expresión que denote la lista estrictamente creciente de enteros entre -20 y 20 que son congruentes a 1 módulo 4.

Recursión sobre listas

¿Se puede pensar recursivamente en listas? ¿Cómo?

Implementar las siguientes funciones (en el pizarrón)

1. `longitud :: [Int] -> Int`
   que indica cuántos elementos tiene una lista.
2. `sumatoria :: [Int] -> Int`
   que indica la suma de los elementos de una lista.
3. `pertenece :: Int -> [Int] -> Bool`
   que indica si un elemento aparece en la lista. Por ejemplo:
   `pertenece 9 []` $\rightsquigarrow$ `False`
   `pertenece 9 [1,2,3]` $\rightsquigarrow$ `False`
   `pertenece 9 [1,2,9,9,-1,0]` $\rightsquigarrow$ `True`

Idea: Pensar cómo combinar el resultado de la función sobre la cola de la lista con el primer elemento. Recordar:

- `head [1, 2, 3]` $\rightsquigarrow$ `1`
- `tail [1, 2, 3]` $\rightsquigarrow$ `[2, 3]`

Pattern matching en listas

Ya vimos cómo hacer *pattern matching* sobre distintos tipos (`Bool`, `Int`, tuplas). ¿Se puede hacer *pattern matching* en listas?

¿Cuál es la verdadera forma de las listas?

Las listas tienen dos "pintas":

- `[]` (lista vacía)
- `algo : lista` (lista no vacía)

Escribir la función `longitud :: [Int] -> Int` usando *pattern matching*

```
longitud [] = 0
longitud (_:xs)  = 1 + longitud xs
```

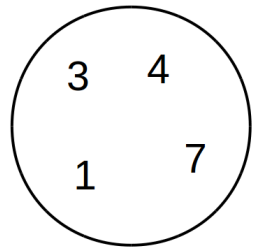
Escribir la función `sumatoria :: [Int] -> Int` usando *pattern matching*

```
sumatoria [] = 0
sumatoria (x:xs) = sumatoria xs + x
```

Ejercicio: volver a implementar la función `pertenece` utilizando *pattern matching*.

Un nuevo tipo: Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.



¿Es buena idea usar una lista `[Int]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.
  - También con `[4,1,3,7]`, `[3,7,4,1]`, `[7,3,1,4]`, ...
  - Todas estas listas son **distintas**, pero representan al **mismo** conjunto.
  - El orden de los elementos es relevante para las listas, pero no para conjuntos.
- ¿Y la lista `[1,3,4,7,7,7,1,4,7]`? ¿Sirve para representar a nuestro conjunto?
  - Las listas pueden tener elementos repetidos, pero eso no tiene sentido con conjuntos.

Vamos a usar `[Int]` para representar conjuntos de números, pero dejando claro que hablamos de conjuntos (sin orden ni repetidos). Para eso podemos hacer un renombre de tipos.

Conjuntos

Definición de tipo usando `type`

Definamos un renombre de tipos para conjuntos: `type Set a = [a]`

- Otra forma de escribir lo mismo, pero más descriptivo.
- `type` es la palabra reservada del lenguaje, `Set` es el nombre que le pusimos nosotros (podríamos haberlo llamado con otro nombre).
- Si bien internamente es una lista, la idea es tratar a `Set a` como si fuera conjunto (es un contrato entre programadores).
- Si nuestra función recibe un conjunto, vamos a requerir que no contenga elementos repetidos. (Haskell no hace nada para verificarlo.)
- Si nuestra función devuelve un conjunto, debemos asegurar que no contenga elementos repetidos. (Haskell tampoco hace nada automático.)
- Además, no hace falta preocuparse por el orden de los elementos. (Haskell no lo sabe.)

Conjuntos

Ejercicios entre todos

- Definir `vacio :: Set Int` que devuelve el conjunto vacío

  Primero pensemos la especificación del problema:

  problema $vacio() : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ {
  requiere: $\{True\}$
  asegura: $\{res = \langle\rangle\}$
  }

  Ahora escribamos la función en Haskell:

```
type Set a = [a]

vacio :: Set Int
vacio = []
```

Conjuntos

- Definir la función `agregar :: Int -> Set Int -> Set Int` que dado un número y un conjunto agrega el primero al segundo.

  Primero pensemos la especificación del problema:

  problema $agregar(e : \mathbb{Z}, s : seq\langle\mathbb{Z}\rangle) : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ {
  requiere: $\{sinRepetidos(s)\}$
  asegura: $\{(\forall n : \mathbb{Z})(n \in s \rightarrow n \in res) \wedge (e \in res)\}$
  asegura: $\{(\forall n : \mathbb{Z})(n \in res \rightarrow ((n \in s) \vee (n = e)))\}$
  asegura: $\{sinRepetidos(res)\}$
  }
  pred sinRepetidos($s : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge 0 \leq j < |s| \wedge i \neq j \rightarrow s[i] \neq s[j])$
  }

  Ahora escribamos la función en Haskell:

```
agregar x []= [x]
agregar x c | pertenece x c = c
            | otherwise = (x:c)
```

  ¿Podríamos haber hecho otra implementación donde agreguemos el número al final de la lista? ¿Respeta la especificación?

Conjuntos

- Definir la función `incluido :: Set Int -> Set Int -> Bool` que determina si el primer conjunto está incluido en el segundo.

  Primero pensemos la especificación del problema:
  problema $incluido(s1 : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, s2 : seq\langle\mathbb{Z}\rangle) : Bool$ {
  requiere: $\{sinRepetidos(s1) \land sinRepetidos(s2)\}$
  asegura: $\{res = true \leftrightarrow (\forall n : \mathbb{Z})(n \in s1 \rightarrow n \in s2)\}$
  }

  Ahora escribamos la función en Haskell:

```
incluido [] _  = True
incluido (x:xs) c = pertenece x c && incluido xs c
```

Conjuntos

- Definir la función `iguales :: Set Int -> Set Int -> Bool` que determina dos conjuntos son iguales.

  Primero pensemos la especificación del problema:
  problema $iguales(s1 : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, s2 : seq\langle\mathbb{Z}\rangle) : Bool$ {
  requiere: $\{sinRepetidos(s1) \land sinRepetidos(s2)\}$
  asegura: $\{res = true \leftrightarrow ((incluido(s1, s2) = True \land$
  $incluido(s2, s1) = True)\}$
  }

  Ahora escribamos la función en Haskell:

```
iguales c1 c2  = incluido c1 c2 && incluido c2 c1
```