(3) ⓐ Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial si y sólo si pasa por el origen.
La ecuación general de la recta en el plano es $ax+by=c$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a,b \neq 0$.

$\Rightarrow$) Si L es un subespacio vectorial, entonces $(0,0) \in L$.
Además, cómo $0 = a.0+b.0 = c$, la ecuación de la recta es $ax+by=0$.

$\Leftarrow$) Si la recta pasa por el origen, entonces $0=a.0+b.0=c$, es decir, la ecuación de la recta es $ax+by=0$.
Luego, si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) pertenecen a la recta y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} a(\lambda x_1+\mu x_2)+b(\lambda y_1+\mu y_2) &= \lambda(ax_1+by_1)+\mu(ax_2+by_2) \\ &= \lambda.0+\mu.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$ pertenece a la recta y por lo tanto la recta es un subespacio vectorial.