(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

a) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Para determinar si un conjunto es LI debemos plantear la ecuación $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ y resolverla.
Si la única solución es $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, entonces el conjunto es LI. En caso contrario, el conjunto es LD.

a) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(0,-3,2) &= (\lambda_1, 0, -\lambda_1) + (\lambda_2, 2\lambda_2, \lambda_2) + (0, -3\lambda_3, 2\lambda_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2,\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3,\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 + f_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 \cdot 1/2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1 - f_3 \\ f_2 - 2f_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \cdot -1/5 \\ f_1 + f_2 \\ f_3 - f_2 \\ f_2 \leftrightarrow f_3}]{} Id_3$$

La única solución es la trivial, por lo tanto los vectores son LI.

b) Debemos resolver la ecuación

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 2\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_1 & 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ -2\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_3 & 2\lambda_3 & 3\lambda_3 \\ 3\lambda_3 & 2\lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_2 + 3\lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & 3\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo resaltado tenemos que $\lambda_3 = 0$, luego $-2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ y finalmente $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.
Concluimos que la única solución es trivial y por lo tanto las matrices son LI.