(11) ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Sean $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Como $|\langle v,w\rangle| \geq 0$ y $\|v\|\|w\| \geqslant 0$, probar la desigualdad es equivalente a probar $|\langle v,w\rangle|^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2$

$$
\begin{aligned}
|\langle v,w\rangle|^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 \quad & \overset{\substack{\forall x\in\mathbb{R} \\ x^2=|x|^2}}{\iff} \quad \langle v,w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 \\
& \iff \quad \sqrt{(v_1w_1+v_2w_2)^2}^{\,2} \leqslant \sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2}\sqrt{w_1^2+w_2^2}^{\,2} \\
& \iff \quad (v_1w_1+v_2w_2)^2 \leqslant (v_1^2+v_2^2)(w_1^2+w_2^2) \\
& \iff \quad (v_1w_1)^2 + 2v_1v_2w_1w_2 + (v_2w_2)^2 \leqslant v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 \\
& \iff \quad \cancel{(v_1w_1)^2} + 2v_1v_2w_1w_2 + \cancel{(v_2w_2)^2} \leqslant \cancel{(v_1w_1)^2} + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + \cancel{(v_2w_2)^2} \\
& \iff \quad 0 \leqslant (v_1w_1)^2 - 2v_1v_2w_1w_2 + (v_2w_2)^2 \\
& \iff \quad 0 \leqslant (v_1w_1 - v_2w_2)^2
\end{aligned}
$$

Vale pues $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$