(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, *d)* $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, *e)* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, *f)* $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi.$

a) $\chi_A(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 4-x \end{bmatrix}\right) = (2-x)(4-x) - 1(-1) = 8-2x-4x+x^2+1 = x^2-6x+9$
$= (x-3)^2$

El único autovalor asociado a la matriz es $\lambda = 3$, busco el autovector asociado:

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ -1 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El sistema asociado a la matriz es $-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Finalmente, el autoespacio asociado al autovalor 3 es $V = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$

b) $\chi_B(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 1 & -2-x \end{bmatrix}\right) = (1-x)(-2-x)$

Los autovalores asociados a la matriz son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, busco los autovectores asociados:

$$(A - \lambda_1 Id)x = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & -2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

$$(A - \lambda_2 Id)x = \begin{bmatrix} 1-(-2) & 0 \\ 1 & -2-(-2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0$$

Finalmente, los autoespacios asociados son: $V_1 = \{(3t,t) : t \in \mathbb{R}\}$
$V_2 = \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$

c) $\chi_C(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{bmatrix}\right) = (2-x)^2(1-x)$

Los autovalores asociados son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_1 Id)x = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_3 = 0$$

$$(A - \lambda_2 Id)x = \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

Finalmente, los autoespacios asociados son $V_1 = \{(0,t,0) : t \in \mathbb{R}\}$
$V_2 = \{(-t-s, t, s) : t,s \in \mathbb{R}\}$

d) $\chi_D(x) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & -5 \\ 0 & 1 & -1-x \end{bmatrix}\right) = (-1-x)^2(3-x) - (-1-x)(-5) = -x^3+x^2-2$
$= (x+1)(-x^2+2x-2)$

El polinomio $(-x^2+2x-2)$ no tiene raíces reales, busco el autoespacio asociado al autovalor $\lambda = -1$:

$$(A - (-1)Id)x = \begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+1 & -5 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el autoespacio correspondiente a $\lambda = (-1)$ es $V = \{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$

e) $\chi_E(x) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-x & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-x & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-x \end{bmatrix}\right) = (\lambda-x)^3$

El único autovalor asociado a la matriz es λ, busco el autovector asociado:

$$(A - \lambda Id)x = \begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ es $V = \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$

f) $\chi_F(x) = \det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta - x & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta - x \end{bmatrix}\right) = (\cos\theta - x)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$
$= x^2 - 2x\cos\theta + 1$

Las raíces del polinomio $x^2 - 2x\cos\theta + 1$ son: $\dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \underbrace{\cos\theta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}}_{(*)}$.

Dividimos en 3 casos, dependiendo de θ:

i) Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. En ese caso, F es la matriz identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$.

ii) Cuando $\theta = \pi$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. En éste caso la matriz es $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Luego $F = -Id$, hay un sólo autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.

iii) Cuándo $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$, en éste caso tenemos que $-\operatorname{sen}^2\theta < 0$ y por lo tanto, por (*), no hay raíces reales.