

(7) Calcular $\langle v, w \rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2), w = (1, 0),$

(b) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7).$

El producto escalar no sólo es útil para definir la longitud de un vector, sino que también nos dice cual es el ángulo entre dos vectores no nulos: sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores no nulos en \mathbb{R}^2 ; veremos a continuación que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\theta),$$

o equivalentemente

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|}, \quad (1.3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle v, w \rangle &= \langle (2, 2), (1, 0) \rangle \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{8} \sqrt{1}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle v, w \rangle &= \langle (-5, 3, 1), (2, -4, -7) \rangle \\ &= (-5)2 + 3(-4) + 1(-7) \\ &= -10 + (-12) + (-7) \\ &= -39 \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-39}{\sqrt{35} \sqrt{69}}\right) \approx 2.49$$