(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

a) $\langle (1,0,3),(0,1,-2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\langle (1,2,0,1),(0,-1,-1,0),(2,3,-1,4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Sea $W = \langle (1,0,3),(0,1,-2)\rangle$, entonces $(k_1,k_2,k_3)\in W$ si existen $s,t\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}(k_1,k_2,k_3) &= s(1,0,3)+t(0,1,-2)\\ &= (s,0,3s)+(0,t,-2t)\\ &= (s,t,3s-2t)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}W &= \{(s,t,3s-2t) : s,t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3 : k_3 = 3k_1-2k_2\}\end{aligned}$$

b) Sea $W = \langle (1,2,0,1),(0,-1,-1,0),(2,3,-1,4)\rangle$, si formamos la matriz cuyas filas son los vectores, la MERF equivalente nos dará generadores más sencillos:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&-1&0\\2&3&-1&4\end{bmatrix} \xrightarrow[f_2(-1)]{f_3-2f_1} \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&-1&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[f_3+f_2]{f_1-2f_2} \begin{bmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-f_3]{f_3\cdot 1/2} \begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Luego, $(k_1,k_2,k_3,k_4)\in W$ si existen $r,s,t\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}(k_1,k_2,k_3,k_4) &= r(1,0,-2,0)+s(0,1,1,0)+t(0,0,0,1)\\ &= (r,0,-2r,0)+(0,s,s,0)+(0,0,0,t)\\ &= (r,s,-2r+s,t)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}W &= \{(r,s,-2r+s,t) : r,s,t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in\mathbb{R}^4 : k_3 = -2k_1+k_2\}\end{aligned}$$