(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

d) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

$$\chi_D(\kappa) = \det\left(\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&3&-5\\0&1&-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\kappa&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&\kappa\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}-1-\kappa&0&0\\0&3-\kappa&-5\\0&1&-1-\kappa\end{bmatrix}\right) = (-1-\kappa)^2(3-\kappa) - (-1-\kappa)(-5) = -\kappa^3+\kappa^2-2$$

$$= (\kappa+1)(-\kappa^2+2\kappa-2)$$

$$-\kappa^2+2\kappa-2 = 0 \Rightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{-2} = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{-2} = \frac{-2\pm 2i}{-2} = 1\pm i$$

Luego los autovalores asociados a la matriz son $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$, busco los autovectores:

$$A-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix}3-1-i & -5\\ 1 & -1-1-i\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-(2-i)f_2]{} \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -2-i\end{bmatrix}$$

A(1|1) no va porque ya calculamos un autoespacio asociado en ej①

$(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \kappa_1 + (-2-i)\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -(-2-i)\kappa_2 = (2+i)\kappa_2$

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1+i$ es $V_1 = \{((2+i)t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

$$A-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix}3-1+i & -5\\ 1 & -1-1+i\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-(2+i)f_2]{} \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -2+i\end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_2 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \kappa_1 + (-2+i)\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -(-2+i)\kappa_2 \Rightarrow \kappa_1 = (2-i)\kappa_2$

El autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1-i$ es $V_2 = \{((2-i)t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

f) $\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $0\le\theta<2\pi$.

$$f)\ \chi_F(\kappa) = \det\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\kappa & 0\\ 0 & \kappa\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\cos\theta-\kappa & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\kappa\end{bmatrix}\right) = (\cos\theta-\kappa)^2+\operatorname{sen}^2\theta = \kappa^2-2\kappa\cos\theta+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \kappa^2-2\kappa\cos\theta+1$$

Las raíces del polinomio $\kappa^2-2\kappa\cos\theta+1$ son: $\dfrac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2} = \cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1} = \cos\theta\pm\sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}$.

Dividimos en 3 casos, dependiendo de θ:

i) Cuando $\theta=0$ tenemos que $\lambda_1=\lambda_2=1$. En ese caso, F es la matriz identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$.

ii) Cuando $\theta=\pi$ tenemos que $\lambda_1=\lambda_2=-1$. En éste caso la matriz es $F=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Luego $F=-Id$, hay un sólo autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.

iii) Cuándo $\theta\neq 0$ y $\theta\neq\pi$, en éste caso tenemos que $-\operatorname{sen}^2\theta<0$ y por lo tanto, por , no hay raíces reales.

$\lambda_1,\lambda_2 = \cos\theta\pm i\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \lambda_1 = \cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$, $\lambda_2 = \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$

Busco los autoespacios asociados cuando $\theta\neq 0$:

$$F-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1.i]{} \begin{bmatrix}\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1.1/\operatorname{sen}\theta]{} \begin{bmatrix}1 & i\\ -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_2+f_1\operatorname{sen}\theta]{} \begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$(F-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \kappa_1+i\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -i\kappa_2$

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = \cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$ es $V_1 = \{(-it, t) : \mathbb{R}\}$

$$F-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1.i]{} \begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_1.1/\operatorname{sen}]{} \begin{bmatrix}-1 & i\\ -\operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-f_1\operatorname{sen}\theta]{} \begin{bmatrix}-1 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$(F-\lambda_2 Id)\kappa = 0 \Rightarrow -\kappa_1+i\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = i\kappa_2$

El autoespacio asociado a $\lambda_2 = \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$ es $V_2 = \{(it, t) : \mathbb{R}\}$