(9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Lo primero que podemos observar es que si a, b, c y d son todos no nulos entonces podemos aplicar las operaciones elementales por fila de multiplicar cada fila por a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} y d^{-1}. Luego de esto nos quedaría una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, usando esos 1's principales podemos eliminar las entradas por encima de ellos obteniendo la matriz identidad.

En conclusión, si a, b, c y d son todos no nulos podemos llegar mediante operaciones elementales por filas a la identidad y por lo tanto la única solución del sistema es la trivial (0, 0, 0).

En cambio, si alguno de los escalares a, b, c o d es nulo, entonces no podremos obtener un 1 principal en su lugar. Más aún, la MERF a la que llegaremos tendrá una fila nula y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones.

Por ejemplo, si d=0 esto es claro pues la matriz sería:

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si c=0 y d es distinto a 0, la matriz es:

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Luego, podemos multiplicar por d^{-1} la última fila y luego anular la entrada por arriba del 1 que nos quede y así obtener la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un razonamiento similar podríamos hacer con las demás posibilidades.

Finalmente, para saber si un sistema homogéneo tiene una o infinitas soluciones no es necesario reducir la matriz hasta llegar a una MERF, basta con llegar a una triangular superior. Pero para calcular de forma paramétrica el conjunto de soluciones SI es necesario llegar a una MERF.