3

ÁLGEBRA DE MATRICES

En este capítulo estudiaremos las operaciones que pueden en las matrices y veremos propiedades algebraicas de las matrices, en particular probaremos que dado $n \in \mathbb{N}$, podemos definir una suma y un producto en el conjunto de matrices $n \times n$ con la propiedad de que estas operaciones satisfacen muchos de los axiomas que satisface $\mathbb{Z}$ (sección 3.2).

Las operaciones entre matrices permiten explicar desde un punto algebraico la solución de sistemas de ecuaciones lineales (sección 3.3).

3.1 ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Matriz cuadrada. Es aquella que tiene igual número de filas que de columnas, es decir si es una matriz $n \times n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En ese caso, se dice que la matriz es de orden n. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es cuadrada de orden 3.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n con entradas en $\mathbb{K}$ por $M_n(\mathbb{K})$ o simplemente M_n si $\mathbb{K}$ está sobreentendido. Así, en el ejemplo anterior $A \in M_3$.

Los elementos de la *diagonal principal* de una matriz cuadrada son aquellos que están situados en la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha. En otras palabras, la diagonal principal de una matriz $A = [a_{ij}]$ está formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. En el ejemplo anterior la diagonal principal está compuesta por los elementos: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 1$.

Matriz diagonal y matriz escalar. Una matriz cuadrada, $A = [a_{ij}]$ de orden n, es *diagonal* si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es diagonal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.1.1}$$

Un matriz $n \times n$ es *escalar* si es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales, por ejemplo, en el caso 4×4 las matrices escalares son

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \tag{3.1.2}$$

con $c \in \mathbb{K}$.

Matriz unidad o identidad. Esta matriz ya la hemos definido anteriormente. Recordemos que es una matriz diagonal cuya diagonal principal está compuesta de 1's.

Más adelante veremos que la matriz identidad, respecto a la multiplicación de matrices cuadradas, juega un papel similar al número 1 respecto a la multiplicación de números reales o enteros (elemento neutro del producto).

Matriz nula. La *matriz nula* de orden $m \times n$, denotada $0_{m \times n}$ o simplemente 0 si m y n están sobreentendidos, es la matriz $m \times n$ cuyas entradas son todas nulas ($= 0$).

Por ejemplo, la matriz nula 2×3 es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veremos luego que la matriz nula juega un papel similar al número 0 en el álgebra de matrices cuadradas (elemento neutro de la suma).

Matriz triangular. Una matriz cuadrada es *triangular superior* o *escalón* si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Análogamente, una matriz cuadrada es *triangular inferior* si todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son cero. Un matriz triangular (superior o inferior) se dice *estricta* si la diagonal principal es 0.

En forma más precisa, sea $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, entonces

- A es *triangular superior* (*triangular superior estricta*) si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ (respectivamente $i \leqslant j$),
- A es *triangular inferior* (*triangular inferior estricta*) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (respectivamente $i \geqslant j$).

Por ejemplo, cualquier matriz diagonal es triangular superior y también triangular inferior.

No es difícil comprobar que si R es una matriz cuadrada $n \times n$ que es una MERF, entonces R es triangular superior.

3.2 OPERACIONES CON MATRICES

Definición 3.2.1. Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrices $m \times n$. La matriz $C = [a_{ij} + b_{ij}]$ de orden $m \times n$, es decir la matriz cuyo valor en la posición ij es $a_{ij} + b_{ij}$, es llamada *la suma de las matrices* A *y* B y se denota $A + B$.

En otras palabras, la suma de dos matrices es la matriz que resulta de sumar "coordenada a coordenada" ambas matrices.

Veamos un ejemplo, consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B son de orden 2×3, mientras la matriz M es cuadrada de orden 3. Por tanto, no podemos calcular la suma de A y M y tampoco la suma de B y M, en cambio, sí podemos sumar A y B ya que tienen el mismo orden. Esto es,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+5 & 3+2 & 5-3 \\ 2+0 & 0-1 & -1+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dadas A, B y C matrices $m \times n$, podemos deducir fácilmente las siguientes propiedades de la suma de matrices de matrices:

- Conmutativa: $A + B = B + A$,
- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- Elemento neutro (la matriz nula): $A + 0 = 0 + A = A$,
- Elemento opuesto: existe una matriz $-A$ de orden $m \times n$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

Debemos explicitar la matriz opuesta: si $A = [a_{ij}]$, entonces $-A = [-a_{ij}]$. Usualmente denotaremos $A + (-B)$ como $A - B$ y $(-A) + B$ como $-A + B$.

La demostración de las propiedades anteriores se deduce de que las mismas propiedades valen coordenada a coordenada y se dejan a cargo del lector.

Definición 3.2.2. Sean $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ matriz $n \times p$, entonces $C = [c_{ij}]$ matriz $m \times p$ es el *producto* de A y B, si

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{3.2.1}$$

Es decir, los elementos que ocupan la posición ij en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila i en la primera matriz por los elementos de la columna j de la segunda matriz. Al producto de A por B lo denotamos AB.

Es muy importante recalcar que por la definición, se puede multiplicar una matriz $m \times n$ por una matriz $r \times p$, sólo si $n = r$ y en ese caso, la multiplicación resulta ser una matriz $m \times p$.

Podemos visualizar la multiplicación así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Observación 3.2.3. Sean $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ matriz $n \times p$, entonces si multiplicamos la matriz que se forma con la fila i de A por la matriz que determina la columna j de B, obtenemos el coeficiente ij de AB. Esquemáticamente

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_{ij}.$$

Por lo tanto diremos a veces, que el coeficiente ij de la matriz AB es la fila i de A por la columna j de B.

El lector recordará el producto escalar definido en el capítulo 1 y notará que el coeficiente ij de AB es el producto escalar de la fila i de A por la columna j de B, ambos pensados como vectores.

Ejemplo. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

como A es 2×2 y B es 2×3, la matriz AB será 2×3 y aplicando la regla (3.2.1), obtenemos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times 15 & 1 \times (-1) + 0 \times 4 & 1 \times 2 + 0 \times 8 \\ -3 \times 5 + 1 \times 15 & -3 \times (-1) + 1 \times 4 & -3 \times 2 + 1 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observemos que, debido a nuestra definición, no es posible multiplicar B por A, pues no está definido multiplicar una matriz 2×3 por una 2×2.

Como veremos en el siguiente ejemplo, en el caso de matrices cuadradas se pueden calcular ambos productos, aunque muchas veces se obtienen resultados diferentes. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por un lado,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix},$$

y por otro lado,

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Según se pudo comprobar a través del ejemplo anterior, la multiplicación de matrices no cumple la propiedad conmutativa. Veamos algunas propiedades que sí cumple esta operación:

- Asociativa:

$$A(BC) = (AB)C, \quad \forall\, A \in M_{m\times n},\ B \in M_{n\times p},\ C \in M_{p\times q},$$

- Elemento neutro: si A es matriz $m \times n$, entonces

$$A\,\mathrm{Id}_n = A = \mathrm{Id}_m\, A,$$

- Distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad \forall\, A \in M_{m\times n},\ B, C \in M_{n\times p},$$

  y

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad \forall\, A, B \in M_{m\times n},\ C \in M_{n\times p}.$$

Como en el caso de la suma, la demostración las propiedades anteriores se deja a cargo del lector.

En virtud de estas propiedades y de las anteriores de la suma de matrices, resulta que el conjunto $(M_n, +, .)$ de las matrices cuadradas de orden n, respecto a las dos leyes de composición interna, "+" y "·", tiene estructura de anillo unitario no conmutativo. En Wikipedia se puede encontrar un artículo al respecto:

https://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_(matemática).

Cuando las matrices son cuadradas podemos multiplicarlas por si mismas y definimos, de forma análoga a lo que ocurre en los productos de números, la potencia de una matriz: sea A matriz $n \times n$, y sea $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$A^0 = \mathrm{Id}_n, \quad A^m = A^{m-1}A,$$

es decir A^m es multiplicar A consigo mismo m-veces.

Observación 3.2.4. Un caso especial de multiplicación es la multiplicación por matrices diagonales. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) := \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

matriz $n \times n$ diagonal con valor d_i en la posición ii, entonces si A es matriz $n \times p$, con la multiplicación a izquierda de la matriz diagonal por A se obtiene la matriz que en la fila i tiene a la fila i de A multiplicada por d_i. Es decir,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1p} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \cdots & d_n a_{np} \end{bmatrix}.$$

Esto es claro, pues si denotamos $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, el coeficiente ij de DA es la fila i de D por la columna j de A, es decir

$$[DA]_{ij} = 0.a_{1j} + \cdots + 0.a_{i-1,j} + d_i.a_{ij} + 0.a_{i+1,j} + \cdots + 0.a_{nj} = d_i a_{ij}.$$

Observar que en el caso de que D sea una matriz escalar (es decir $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$), DA es multiplicar por el mismo número todos los coeficientes de A. En particular, en este caso, si A es $n \times n$, $DA = AD$.

Si B es $m \times n$, el lector podrá comprobar que

$$B \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 C_1 & d_2 C_2 & \cdots & d_n C_n \end{bmatrix},$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las columnas de B.

Finalmente, de lo visto más arriba respecto a la multiplicación por una matriz diagonal obtenemos:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix},$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Otras observaciones importantes:

- multiplicar cualquier matriz por la matriz nula resulta la matriz nula,

- existen divisores de cero: en general, $AB = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$ o, lo que es lo mismo, el producto de matrices no nulas puede resultar en una matriz nula. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- En general no se cumple la propiedad cancelativa: si $A \neq 0$ y $AB = AC$ no necesariamente se cumple que $B = C$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- No se cumple la fórmula del binomio: sean A, B matrices $n \times n$, entonces

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) \\ &= AA + AB + BA + BB \\ &= A^2 + AB + BA + B^2,\end{aligned}$$

  y esta última expresión puede no ser igual a $A^2 + 2AB + B^2$ ya que el producto de matrices no es conmutativo (en general).

3.2.1 *Multiplicación de una matriz por un escalar*

Otra operación importante es la multiplicación de una matriz por un elemento de $\mathbb{K}$: sea $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ y $c \in \mathbb{K}$, entonces el producto de c por A es la matriz

$$cA = [ca_{ij}].$$

Por ejemplo,

$$2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & 8 \\ 10 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Observar que multiplicar por c una matriz $m \times n$, es lo mismo que multiplicar por la matriz escalar $m \times m$ con los coeficientes de la diagonal iguales a c, es decir

$$
\begin{aligned}
cA &= \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Debido a esta observación y a las propiedades del producto de matrices, se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
c(AB) = (cA)B, &\qquad \forall\, c \in \mathbb{K}, A \in M_{m\times n},\ B \in M_{n\times p}, \\
(cd)A = c(dA), &\qquad \forall\, c, d \in \mathbb{K}, A \in M_{m\times n}, , \\
1.A = A, &\qquad \forall\, c \in \mathbb{K}, A \in M_{m\times n} \\
c(A+B) = cA + cB, &\qquad \forall\, c \in \mathbb{K}, A, B \in M_{m\times n}, \\
(c+d)A = cA + dA, &\qquad \forall\, c, d \in \mathbb{K},\ A \in M_{m\times n}.
\end{aligned}
$$

Si A es $n \times n$, entonces $DA = AD$ cuando D es una matriz escalar. Por lo tanto

$$
c(AB) = (cA)B = A(cB), \qquad \forall\, c \in \mathbb{K}, A \in M_{n\times n},\ B \in M_{n\times n}.
$$

§ *Ejercicios*

1) Calcule las siguientes operaciones de matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, *b)* $3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, *d)* $4 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2) Calcule las siguientes operaciones de matrices o diga “no está definida”.

a) $4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, *d)* $3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

3) Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$
Calcular

a) AB, *b)* $(AB)C$, *c)* BC, *d)* $A(BC)$.

4) De lel tamaño del producto AB o diga "no está definido" para:

a) A una matriz 2×2 y B una matriz 2×4,

b) A una matriz 3×3 y B una matriz 3×3,

c) A una matriz 3×10 y B una matriz 10×2,

d) A una matriz 3×2 y B una matriz 3×2.

5) (Matrices de bloques) Si $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ y $A_{ij} \in \mathbb{K}^{k_i \times k_j}$, para $i, j = 1, 2$, entonces podemos combinar esas matrices en la matriz cuadrada
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(k_1+k_2)\times(k_1+k_2)}.$$
Diremos entonces que A *es una matriz de bloques* k_1, k_2.

Probar las siguientes fórmula para matrices de bloques:

a)
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}.$$

b)
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

c) Si $c \in \mathbb{K}$,
$$c \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cA_{11} & cA_{12} \\ cA_{21} & cA_{22} \end{bmatrix}$$

3.3 MATRICES ELEMENTALES

Veremos ahora la relación entre el álgebra de matrices y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Primero recordemos que dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{3.3.1}$$

donde $y_1, \ldots, y_m$ y $a_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) son números en $\mathbb{K}$. Si denotamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Y \end{aligned}$$

(producto de matrices). Es decir, la notación antes utilizada es consistente con el, ahora definido, producto de matrices.

Es decir $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es solución del sistema (3.3.1) si y sólo si $A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = Y$, donde $A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ es un producto de matrices. Muchas veces, por comodidad, denotaremos al vector columna $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ como $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$.

En lo que resta de la sección veremos que las operaciones elementales pueden ser vistas como multiplicaciones por matrices y por lo tanto la matriz que se obtiene por el métodos de eliminación de Gauss puede ser obtenida por multiplicación a izquierda de matrices que llamaremos elementales y la matriz original.

Definición 3.3.1. Una matriz $m \times m$ se dice *elemental* si fue obtenida por medio de una única operación elemental a partir de la matriz identidad Id_m. Sea E una matriz elemental tal que $E = e(\mathrm{Id})$ con e una operación elemental. Diremos que E *es de tipo E1* si e es de tipo *E1*, *de tipo E2* si e es de tipo *E2* y *de tipo E3* si e es de tipo *E3*.

Ejemplo. Veamos cuales son las matrices elementales 2×2:

(1) Si $c \neq 0$, multiplicar por c la primera fila y multiplicar c por la segunda fila son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

(2) si $c \in \mathbb{K}$, sumar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por c o sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Finalmente, intercambiando la fila 1 por la fila 2 obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el caso de matrices $m \times m$ tampoco es difícil encontrar las matrices elementales:

(1) Si $c \neq 0$, multiplicar por c la fila k de la matriz identidad, resulta en la matriz elemental que tiene todos 1's en la diagonal, excepto en la posición k, k donde vale c, es decir si $e(\mathrm{Id}_m) = [a_{ij}]$, entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \neq k, \\ c & \text{si } i = j = k, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \overset{k}{\downarrow} & & \end{array} \\ \overset{k}{\rightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) si $c \in \mathbb{K}$, sumar a la fila r la fila s multiplicada por c, resulta en la matriz elemental que tiene todos 1's en la diagonal, y todos los demás coeficientes son 0, excepto en la fila r y columna s donde vale c, es decir si $e(\mathrm{Id}_m) = [a_{ij}]$, entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ c & \text{si } i = r, j = s, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & r & & s & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{r} \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

(3) Finalmente, intercambiar la fila r por la fila s resulta ser

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j, i \neq r, i \neq s) \text{ o } (i = r, j = s) \text{ o } (i = s, j = r) \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & r & & s & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{r} \\ \\ \xrightarrow{s} \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Veamos ahora que, dada una matriz A, hacer una operación elemental en A es igual a multiplicar A a izquierda por una matriz elemental. Más precisamente:

Teorema 3.3.2. *Sea* e *una operación elemental por fila y sea* E *la matriz elemental* $E = e(\mathrm{Id})$. *Entonces* $e(A) = EA$.

Demostración. Hagamos la prueba para matrices 2×2. La prueba en general es similar, pero requiere de un complicado manejo de índices.

E1. Sea $c \in \mathbb{K}$, y sea e la operación elemental de a la fila 2 le sumarle la fila 1 multiplicada por c. Entonces. $E := e(\mathrm{Id}_2)$ resulta en la matriz elemental:

$$E = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} EA &= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\,.\,a_{11} + 0\,.\,a_{21} & c\,.\,a_{12} + 0\,.\,a_{22} \\ 0\,.\,a_{11} + 1\,.\,a_{21} & 0\,.\,a_{12} + 1\,.\,a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,.\,a_{11} & c\,.\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = e(A). \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra en el caso que la operación elemental sea multiplicar la segunda fila por c.

E2. Sea $c \in \mathbb{K}$, y sea e la operación elemental de a la fila 2 le sumarle la fila 1 multiplicada por c. Entonces. $E := e(\mathrm{Id}_2)$ resulta en la matriz elemental:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c \,.\, a_{11} + a_{21} & c \,.\, a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = e(A).$$

La demostración es análoga si la operación elemental es sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c.

E3. Finalmente, sea e la operación elemental que intercambia la fila 1 por la fila 2. Entonces, $E := e(\mathrm{Id}_2)$ es la matriz

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = e(A).$$

□

Corolario 3.3.3. *Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces B equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$ donde P es producto de matrices elementales. Más aún, si $B = e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots))$ con $e_1, e_2, \ldots, e_k$ operaciones elementales de fila y $E_i = e_i(\mathrm{Id})$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Si B equivalente por filas a A existen operaciones elementales $e_1, \ldots, e_k$ tal que $B = e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots))$, más formalmente

$$\text{si } A_1 = e_1(A) \text{ y } A_i = e_i(A_{i-1}) \text{ para } i = 2, \ldots, k, \text{ entonces } e_k(A_{k-1}) = B.$$

Sea $E_i = e_i(\mathrm{Id}_m)$, entonces, por el teorema anterior $A_1 = E_1 A$ y $A_i = E_i A_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, k)$. Por lo tanto $B = E_k A_{k-1}$, en otras palabras $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$, luego $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$.

($\Leftarrow$) Si $B = PA$, con $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ donde $E_i = e_i(\mathrm{Id}_m)$ es una matriz elemental, entonces

$$B = PA = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A \overset{\text{Teor. 3.3.2}}{=} e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots)).$$

Por lo tanto, B es equivalente por filas a A. □

§ *Ejercicios*

1) Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$
Multiplicar por matrices elementales la matriz A hasta obtener la matriz identidad.

2) Expresar
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$
como producto de dos matrices elementales.

3) Expresar
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
como producto de matrices elementales.

4) Una *matriz de permutación* es una matriz cuadrada donde cada fila y cada columna tiene un 1 y todas las demás entradas son 0.

   a) Calcular
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$
   (observar que, justamente, las matrices de permutación permutan las coordenadas de un vector).

   b) Escribir todas la matrices de permutación 3×3. Mostrar que si A es una matriz 3×3 y P una matriz de permutación 3×3, entonces PA es una matriz que tiene las filas de A permutadas.

   c) Probar que toda matriz de permutación es producto de matrices elementales de tipo E3.

3.4 MATRICES INVERTIBLES

Definición 3.4.1. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Una matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es *inversa de* A si $BA = AB = \mathrm{Id}_n$. En ese caso, diremos que A es *invertible*.

Ejemplo. La matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene inversa $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pues es fácil comprobar que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposición 3.4.2. *Sea* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

(1) *sean* $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tales que* $BA = \mathrm{Id}_n$ *y* $AC = \mathrm{Id}_n$, *entonces* $B = C$*;*

(2) *si* A *invertible la inversa es única.*

Demostración. (1)

$$B = B\,\mathrm{Id}_n = B(AC) = (BA)C = \mathrm{Id}_n\, C = C.$$

(2) Sean B y C inversas de A, es decir $BA = AB = \mathrm{Id}_n$ y $CA = AC = \mathrm{Id}_n$. En particular, $BA = \mathrm{Id}_n$ y $AC = \mathrm{Id}_n$, luego, por (1), $B = C$. □

Definición 3.4.3. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible. A la única matriz inversa de A la llamamos *la matriz inversa de* A y la denotamos A^{-1}.

Veremos más adelante que si una matriz $n \times n$ admite una inversa a izquierda, es decir si existe B tal que $BA = \mathrm{Id}_n$, entonces la matriz es invertible. Lo mismo vale si A admite inversa a derecha.

Ejemplo. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto se resuelve comprobando que $AA^{-1} = \mathrm{Id}_3$ (por lo dicho más arriba es innecesario comprobar que $A^{-1}A = \mathrm{Id}_3$).

Observación. No toda matriz tiene inversa, por ejemplo la matriz nula (cuyos coeficientes son todos iguales a 0) no tiene inversa pues $0 \,.\, A = 0 \neq \mathrm{Id}$. También existen matrices no nulas no invertibles, por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa. Si multiplicamos a A por una cualquier matriz $B = [b_{ij}]$ obtenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego AB, al tener una fila idénticamente nula, no puede ser nunca la identidad.

Teorema 3.4.4. *Sean A y B matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces*

(1) si A invertible, entonces A^{-1} es invertible y su inversa es A, es decir $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración. (1) La inversa a izquierda de A^{-1} es A, pues $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$. Análogamente, la inversa a derecha de A^{-1} es A, pues $A^{-1}A = \mathrm{Id}_n$. Concluyendo: A es la inversa de A^{-1}.

(2) Simplemente debemos comprobar que $B^{-1}A^{-1}$ es inversa a izquierda y derecha de AB:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,\mathrm{Id}_n\,B = B^{-1}B = \mathrm{Id}_n,$$

y, análogamente, comprobemos que es inversa a derecha,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,\mathrm{Id}_n\,A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{Id}_n\,.$$

□

Observación. Si $A_1, \ldots, A_k$ son invertibles, entonces $A_1 \ldots A_k$ es invertible y su inversa es

$$(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}.$$

El resultado es una generalización del punto (2) del teorema anterior y su demostración se hace por inducción en k (usando (2) del teorema anterior). Se deja como ejercicio al lector.

Observación. La suma de matrices invertibles no necesariamente es invertible, por ejemplo $A + (-A) = 0$ que no es invertible.

Teorema 3.4.5. *Una matriz elemental es invertible.*

Demostración. Sea E la matriz elemental que se obtiene a partir de Id_n por la operación elemental e. Se e_1 la operación elemental inversa (teorema 2.3.3) y $E_1 = e_1(\mathrm{Id}_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} EE_1 &= e(e_1(\mathrm{Id}_n)) = \mathrm{Id}_n \\ E_1E &= e_1(e(\mathrm{Id}_n)) = \mathrm{Id}_n\,. \end{aligned}$$

Luego $E_1 = E^{-1}$. □

Ejemplo. Es fácil encontrar explícitamente la matriz inversa de una matríz elemental, por ejemplo, en el caso 2×2 tenemos:

(1) Si $c \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\text{y}\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix},$$

(2) si $c \in \mathbb{K}$, ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Finalmente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el caso general tenemos:

(1)

$$\text{La inversa de} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & \overset{k}{\downarrow} & & \end{matrix} \\ \overset{k}{\rightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{es} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\text{La inversa de} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & \overset{r}{\downarrow} & & \overset{s}{\downarrow} & & \end{matrix} \\ \overset{r}{\rightarrow} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{es} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\text{La inversa de} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & \overset{r}{\downarrow} & & \overset{s}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \overset{r}{\rightarrow} \\ \\ \overset{s}{\rightarrow} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{es la misma matriz.}$$

Teorema 3.4.6. *Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es invertible,*

(2) *A es equivalente por filas a Id_n,*

(3) *A es producto de matrices elementales.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea R la matriz escalón reducida por fila equivalente por filas a A. Entonces, existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tal que $E_1, \ldots, E_k A = R$. Como las matrices elementales son invertibles, el producto de matrices elementales es invertible, luego $E_1, \ldots, E_k$ es invertible y por lo tanto $R = E_1, \ldots, E_k A$ es invertible.

Recordemos que las matrices escalón reducidas por fila si tienen filas nulas, ellas se encuentran al final. Ahora bien, si la última fila de R es nula entonces, RB tiene la última fila nula también y por lo tanto no puede ser igual a la identidad, es decir, en ese caso R no es invertible, lo cual produce un absurdo. Concluyendo: la última fila (la fila n) de R no es nula y como es MERF, R no tiene filas nulas. Por lo tanto $R = \mathrm{Id}_n$ (lema 2.4.8) y, entonces, A es equivalente por filas a Id_n.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como A es equivalente por filas a Id_n, al ser la equivalencia por filas una relación de equivalencia, tenemos que Id_n es equivalente por filas a A, es decir existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales, tales que $E_1 E_2, \ldots, E_k \mathrm{Id}_n = A$. Por lo tanto, $A = E_1 E_2, \ldots, E_k$ producto de matrices elementales.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $A = E_1 E_2, \ldots, E_k$ donde E_i es una matriz elemental ($i = 1, \ldots, k$). Como cada E_i es invertible, el producto de ellos es invertible, por lo tanto A es invertible. □

Corolario 3.4.7. *Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces, B es equivalente por filas a A si y sólo si existe matriz invertible P de orden $m \times m$ tal que $B = PA$.*

Demostración.
($\Rightarrow$) B es equivalente por filas a A, luego existe P matriz producto de matrices elementales tal que $B = PA$. Como cada matriz elemental es invertible (teorema 3.4.5) y el producto de matrices invertibles es invertible (teorema 3.4.4 (2)), se deduce que P es invertible.
($\Leftarrow$) Sea P matriz invertible tal que $B = PA$. Como P es invertible, por el teorema anterior, P es producto de matrices elementales, luego $B = PA$ es equivalente por filas a A. □

Corolario 3.4.8. *Sea A matriz $n \times n$. Sean $e_1, \ldots, e_k$ las operaciones elementales por filas que reducen a A a una MERF y esta MERF es la identidad, es decir $e_1(e_2(\cdots(e_k(A))\cdots)) = \mathrm{Id}_n$. Entonces, A invertible y las mismas operaciones elementales aplicadas a Id_n nos llevan a A^{-1}, es decir $e_1(e_2(\cdots(e_k(\mathrm{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, al ser A equivalente por filas a la identidad, A es invertible. Sean las matrices elementales $E_i = e_i(\mathrm{Id}_n)$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces (ver corolario 3.3.3) $E_1 E_2 \ldots E_k A = \mathrm{Id}_n$, por lo tanto, multiplicando por A^{-1} a derecha en ambos miembros,

$$\begin{aligned} E_1 E_2 \ldots E_k A A^{-1} = \mathrm{Id}_n A^{-1} \quad &\Leftrightarrow \\ E_1 E_2 \ldots E_k \mathrm{Id}_n = A^{-1} \quad &\Leftrightarrow \\ e_1(e_2(\cdots(e_k(\mathrm{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}. \end{aligned}$$

□

Este último corolario nos provee un método sencillo para calcular la inversa de una matriz A (invertible). Primero, encontramos $R = \mathrm{Id}_n$ la MERF equivalente por filas a A, luego, aplicando la mismas operaciones elementales a Id_n, obtenemos la inversa de A. Para facilitar el cálculo es conveniente comenzar con A e Id_n e ir aplicando paralelamente las operaciones elementales por fila. Veamos un ejemplo.
Ejemplo. Calculemos la inversa (si tiene) de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución. Por lo que ya hemos demostrado, si A tiene inversa es reducible por filas a la identidad y las operaciones que llevan a A a la identidad, llevan también la identidad a A^{-1}. Luego trataremos de reducir por filas a A y todas las operaciones elementales las haremos en paralelo partiendo de la matriz identidad:

$$[A|\,\mathrm{Id}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 2F_1}$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/(-7)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right].$$

Luego, como A se reduce por filas a la identidad, A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

El lector desconfiado podrá comprobar, haciendo el producto de matrices, que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{Id}_2$. $\square$

Teorema 3.4.9. *Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) *A es invertible.*

ii) *El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*

iii) *El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.*

Demostración.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea X_0 solución del sistema $AX = Y$, luego

$$AX_0 = Y \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX_0 = A^{-1}Y \quad \Rightarrow \quad X_0 = A^{-1}Y.$$

Es decir, X_0 es único (siempre igual a $A^{-1}Y$).
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Es trivial, tomando $Y = 0$.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Sea R la matriz escalón reducida por filas equivalente a A, es decir $R = PA$ con P invertible y R es MERF. Si R tiene una fila nula, entonces por corolario 2.4.6, el sistema $AX = 0$ tiene más de una solución, lo cual es absurdo. Por lo tanto, R no tiene filas nulas. Como es una matriz cuadrada y es MERF, tenemos que $R = \mathrm{Id}_n$. Luego A es equivalente por filas a Id_n y por teorema 3.4.6 se deduce que A es invertible.

$\square$

Corolario 3.4.10. *Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Si A tiene inversa a izquierda, es decir si existe B matriz $n \times n$ tal que $BA = \mathrm{Id}_n$, entonces A es invertible. Lo mismo vale si A tiene inversa a derecha.*

Demostración. Supongamos que A tiene inversa a izquierda y que B sea la inversa a izquierda, es decir $BA = \mathrm{Id}_n$. El sistema $AX = 0$ tiene una única solución, pues $AX_0 = 0 \Rightarrow BAX_0 = B0 \Rightarrow X_0 = 0$. Luego, A es invertible (y su inversa es B).

Supongamos que A tiene inversa a derecha y que C sea la inversa a derecha, es decir $AC = \mathrm{Id}$. Por lo demostrado más arriba, C es invertible y su inversa es A, es decir $AC = \mathrm{Id}$ y $CA = \mathrm{Id}$, luego A es invertible. $\square$

Terminaremos la sección calculando algunas matrices inversas usando el corolario 3.4.8.

Ejemplo. Calcular la inversa (si tiene) de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 5F_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3/8} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 + 2F_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right].$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

□

Ejemplo. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, determinar cuando la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible y en ese caso, cual es su inversa.

Solución. Para poder aplicar el método de Gauss, debemos ir haciendo casos.
1) Supongamos que $a \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & d - c\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{ad - bc}{a} \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces la matriz se encuentra reducida por filas y la última fila es 0, luego en ese caso no es invertible. Si $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{ad - bc}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{a/(ad-bc)\, F_2} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1 - b/a\, F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, en el caso $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ hemos reducido por filas la matriz A a la identidad y por lo tanto A es invertible. Además, podemos encontrar

A^{-1} aplicando a Id las mismas operaciones elementales que reducían A a la identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{a/(ad-bc)\,F_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1 - b/a\,F_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Concluyendo, en el caso $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{3.4.1}$$

2) Estudiemos el caso $a = 0$. Primero observemos que si $c = 0$ o $b = 0$, entonces la matriz no es invertible, pues en ambos casos nos quedan matrices que no pueden ser reducidas por fila a la identidad. Luego la matriz puede ser invertible si $bc \neq 0$ y en este caso la reducción por filas es:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/cF_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego A es invertible y aplicando estas mismas operaciones elementales a la identidad obtenemos la inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/cF_2} \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, en el caso que $a = 0$, entonces A invertible si $bc \neq 0$ y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, la expresión de la inversa es igual a (3.4.1) (considerando que $a = 0$).

Reuniendo los dos casos: A es invertible si $a \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$ o si $a = 0$ y $bc \neq 0$, pero esto es lógicamente equivalente a pedir solamente $ad - bc \neq 0$, es decir

$$(a \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0) \vee (a = 0 \wedge bc \neq 0) \;\Leftrightarrow\; ad - bc \neq 0$$

(ejercicio).

Resumiendo, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ y en ese caso, su inversa viene dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

Veremos en la próxima sección que el uso de determinantes permitirá establecer la generalización de este resultado para matrices $n \times n$ con $n \geqslant 1$.

□

§ *Ejercicios*

1) Encontrar la inversa de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, *d)* $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$.

2) Sean A, B dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Decimos que A es *semejante* a B si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Suponga que A es semejante a B, probar:

   a) B es semejante a A.

   b) Sea C otra matriz cuadrada del mismo tamaño que A. Si B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

   c) A es invertible si y solo si B es invertible.

   d) Suponga que $A^n = 0$. Probar que $B^n = 0$.

3) Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ con a y c no nulos. Probar que esta matriz es invertible y que su inversa es

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

4) Sea la matriz de bloques $k, r \in \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Es decir $A \in \mathbb{K}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{K}^{k\times r}$ y $C \in \mathbb{K}^{r\times r}$ (ver el capítulo **??** ejercicio 5). Si A y C son invertibles probar que la matriz de bloques es invertible y su inversa es

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

3.5 DETERMINANTE

El determinante puede ser pensado como una función que a cada matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, le asocia un elemento de $\mathbb{K}$. En esta sección veremos como se define esta función y algunas propiedades de la misma. Algunas demostraciones se omitirán, pues se pondrá énfasis en los usos del determinante y no tanto en sus propiedades teóricas. Las demostraciones faltantes se pueden ver en el Apéndice D.

El determinante, permite, entre otras cosas,

- determinar si una matriz cuadrada es invertible,
- dar una fórmula cerrada para la inversa de una matriz invertible.

Como consecuencia de lo anterior, el determinante permite determinar si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas admite una única solución o no, y en el caso de que exista una única solución, dar una fórmula cerrada de esa solución.

Una forma de definir determinante es con una fórmula cerrada que usa el *grupo de permutaciones.* Esta forma de definir determinante está fuera del alcance de este curso. La forma que usaremos nosotros para definir determinante es mediante una definición recursiva: para calcular el determinante de una matriz $n \times n$, usaremos el cálculo del determinante para matrices $n-1 \times n-1$, que a su vez se calcula usando el determinante de matrices $n-2 \times n-2$ y así sucesivamente hasta llegar al caso base, que es el caso de matrices 1×1.

Definición 3.5.1. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Sean i, j tal que $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Entonces $A(i|j)$ es la matriz $n-1 \times n-1$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

Ejemplo. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, entonces

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A(2|3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Definición 3.5.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, entonces el *determinante de* A, denotado $\det(A)$ se define como:

(1) si $n = 1$, $\det([a]) = a$;

(n) si $n > 1$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1). \end{aligned}$$

Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, al número $\det A(i|j)$ se lo llama el *menor* i, j *de* A y a $C^A_{ij} := (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ se lo denomina el *cofactor* i, j *de* A. Si la matriz A está sobreentendida se denota, a veces, $C_{ij} := C^A_{ij}$.

Observemos, que con las definiciones introducidas tenemos

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} C^A_{i1}. \tag{3.5.1}$$

A este cálculo se lo denomina *calculo del determinante por desarrollo por la primera columna*, debido a que usamos los coeficientes de la primera columna, multiplicados por los cofactores correspondientes. A veces, para simplificar, denotaremos

$$|A| := \det A.$$

Observación (DETERMINANTES $\mathbf{2 \times 2}$). Calculemos el determinante de las matrices 2×2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det A = a \det[d] - c \det[b] = ad - bc.$$

Cuando estudiamos la matrices invertibles 2×2 (ejemplo de p. 83), vimos que A es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$, es decir

$$A \textit{ es invertible si y solo si } \det A \neq 0. \tag{3.5.2}$$

Este resultado se generaliza para matrices $n \times n$. Más aún, la fórmula (3.4.1), que aquí reescribimos como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

se generaliza también para matrices cuadradas de cualquier dimensión (ver el corolario D.2.4).

Observación (DETERMINANTES $\mathbf{3 \times 3}$). Calculemos el determinante de las matrices 3×3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\qquad a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Observar que el determinante de una matriz 3×3 es una sumatoria de seis términos cada uno de los cuales es de la forma $\pm a_{1\,i_1} a_{2\,i_2} a_{3\,i_3}$ e $i_1 i_2 i_3$ puede ser cualquier permutación de 123. La fórmula

$$\begin{multline} \det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{3.5.3} \end{multline}$$

no es fácil de recordar, pero existe un procedimiento sencillo que nos permite obtenerla y es el siguiente:

(1) a la matriz original le agregamos las dos primeras filas al final,

(2) "sumamos" cada producto de las diagonales descendentes y "restamos" cada producto de las diagonales ascendentes.

$$\begin{array}{cccc} + & & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ + & & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ + & & & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ - & & & \end{array} \tag{3.5.4}$$

Es decir,

(a) se suman $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$, y

(b) se restan $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{11}a_{32}a_{23}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$.

Ejemplo. Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

La forma más sencilla es ampliando la matriz y calculando:

$$\begin{array}{cccc} + & & & \\ & 1 & -2 & 2 \\ + & & & \\ & 3 & -1 & 1 \\ + & & & \\ & 2 & 5 & 4 \\ - & & & \\ & 1 & -2 & 2 \\ - & & & \\ & 3 & -1 & 1 \\ - & & & \end{array} .$$

Luego

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \times (-1) \times 4 \quad + 3 \times 5 \times 2 \quad + 2 \times (-2) \times 1 \\ &\quad -2 \times (-1) \times 2 \quad - 1 \times 5 \times 1 \quad - 3 \times (-2) \times 4 \\ &= -4 + 30 - 4 + 4 - 5 + 24 \\ &= 35. \end{aligned}$$

Observación. La regla para calcular el determinante de matrices 3×3 **no** se aplica a matrices $n \times n$ con $n \neq 3$.

Observación. Observemos que para calcular el determinante usando la definición, en el primer paso recursivo hacemos una sumatoria de n términos, donde cada uno es $\pm a_{i1}$ por un un determinante de orden $n-1$, lo cual implicará, en cada término calcular una sumatoria con $n-1$ términos, donde cada uno es $\pm a_{i2}$ por un un determinante de orden $n-2$. Es decir después del segundo paso tenemos $n(n-1)$ sumandos y cada uno es de la forma $\pm a_{i1}a_{k2}$ por un determinante de orden $n-2$. Siguiendo con este razonamiento, concluimos que para calcular el determinante debemos hacer una sumatoria de $n!$ términos (y cada uno de ellos es $\pm$ un producto de n a_{ij}'s). Teniendo esto en cuenta concluimos que para calcular el determinante por definición hacen falta, al menos, hacer $n!$ operaciones. Para n grandes (por ejemplo $n > 200$) esto es y será imposible para cualquier computadora. Como veremos en el corolario 3.5.5 hay maneras mucho más eficientes de calcular el determinante.

Proposición 3.5.3. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *matriz triangular superior cuyos elementos en la diagonal son* $d_1, \ldots, d_n$. *Entonces* $\det A = d_1.d_2.\ldots.d_n$.

Demostración. Podemos demostrar el resultado por inducción sobre n: es claro que si $n = 1$, es decir si $A = [d_1]$, el determinante vale d_1. Por otro lado, si $n > 1$, observemos que $A(1|1)$ es también triangular superior con valores $d_2, \ldots, d_n$ en la diagonal principal. Entonces, usamos la definición de la fórmula (3.5.1) y observamos que el desarrollo por la primera columna solo tiene un término, pues esta columna solo tiene un coeficiente no nulo, el d_1 en la primera posición. Por lo tanto,

$$\det(A) = d_1 \det(A(1|1)) \overset{\text{(HI)}}{=} d_1.(d_2.\dots.d_n).$$

□

Corolario 3.5.4. $\det \mathrm{Id}_n = 1$.

Demostración. Se deduce del hecho que Id_n es triangular superior y todo coeficiente de la diagonal principal vale 1. □

Corolario 3.5.5. *Si* R *es una MERF, entonces*

$$\det R = \begin{cases} 1 & \textit{si } R \textit{ no tiene filas nulas,} \\ 0 & \textit{si } R \textit{ tiene filas nulas.} \end{cases}$$

Demostración. Si R no tiene filas nulas es igual a Id_n (lema 2.4.8), luego $\det R = 1$. En general, R es una matriz triangular superior y si tiene alguna fila nula r, entonces el coeficiente en la diagonal de la fila r es igual a 0 y por lo tanto $\det R = 0$. □

Ejemplo. Veamos, en el caso de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 2×2 que ocurre con el determinante cuando hacemos una operación elemental.

(1) Si $c \neq 0$, sean e y e' las operaciones elementales multiplicar por c la primera fila y multiplicar c por la segunda fila, respectivamente. Entonces,

$$e(A) = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } e'(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix},$$

luego

$$\det e = \det \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21}$$

y

$$\det e' = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21}.$$

Por lo tanto, $\det e(A) = \det e'(A) = c \det A$.

(2) Sea $c \in \mathbb{K}$, si sumamos a la fila 2 la fila 1 multiplicada por c o sumamos a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c obtenemos, respectivamente,

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{bmatrix} \text{ y } e'(A) = \begin{bmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11})$$
$$= a_{11}a_{22} + ca_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - ca_{12}a_{11}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$= \det A.$$

Luego, $\det e(A) = \det A$. Análogamente, $\det e'(A) = \det A$.

(3) Finalmente, intercambiando la fila 1 por la fila 2 obtenemos la matriz

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\det e(A) = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\det A.$$

Todos los resultado del ejemplo anterior se pueden generalizar.

Teorema 3.5.6. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y sean* $1 \leqslant r, s \leqslant n$.

(1) *Sea* $c \in \mathbb{K}$ *y* B *la matriz que se obtiene de* A *multiplicando la fila* r *por* c, *es decir* $A \xrightarrow{cF_r} B$, *entonces* $\det B = c \det A$.

(2) *Sea* $c \in \mathbb{K}$, $r \neq s$ *y* B *la matriz que se obtiene de* A *sumando a la fila* r *la fila* s *multiplicada por* c, *es decir* $A \xrightarrow{F_r + cF_s} B$, *entonces* $\det B = \det A$.

(3) *Sea* $r \neq s$ *y sea* B *la matriz que se obtiene de* A *permutando la fila* r *con la fila* s, *es decir* $A \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} B$, *entonces* $\det B = -\det A$.

Demostración. Ver los teoremas D.1.1, D.1.4, D.1.3 y sus demostraciones. □

Este resultado nos permite calcular el determinante de matrices elementales.

Corolario 3.5.7. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $c \in \mathbb{K}$. *Sean* $1 \leqslant r, s \leqslant n$, *con* $r \neq s$.

(1) *Si* $c \neq 0$, *la matriz elemental que se obtiene de multiplicar por* c *la fila* r *de* Id_n, *tiene determinante igual a* c.

(2) *Sea* $r \neq s$. *La matriz elemental que se obtiene de sumar a la fila* r *de* Id_n *la fila* s *multiplicada por* c, *tiene determinante* 1.

(3) *Finalmente, si* $r \neq s$, *la matriz elemental que se obtiene de intercambiar la fila* r *por la fila* s *de* Id_n *tiene determinante* -1.

Demostración. Se deduce fácilmente del teorema anterior y del hecho de que $\det \mathrm{Id}_n = 1$. □

Corolario 3.5.8. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) *Si* A *tiene dos filas iguales, entonces* $\det A = 0$.

(2) *Si* A *tiene una fila nula, entonces* $\det A = 0$.

Demostración. (1) Sea A matriz donde $F_r = F_s$ con $r \neq s$. Luego, intercambiando la fila r por la fila s obtenemos la misma matriz. Es decir $A \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} A$. Por el teorema 3.5.6 (3), tenemos entonces que $\det A = -\det A$, por lo tanto $\det A = 0$.

(2) Sea F_r una fila nula de A, por lo tanto multiplicar por 2 esa fila no cambia la matriz. Es decir $A \xrightarrow{2F_r} A$. Por el teorema 3.5.6 (1), tenemos entonces que $\det A = 2 \det A$, por lo tanto $\det A = 0$. □

Teorema 3.5.9. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces*

(1) A *invertible si y solo si* $\det(A) \neq 0$.

(2) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Demostración. Ver el teoremas D.1.8 y D.1.9 y . □

Corolario 3.5.10. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces*

(1) *si* A *invertible* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,

(2) $\det(AB) = \det(BA)$.

Demostración. (1) Por teorema 3.5.9, $\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$. Como $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$, entonces $1 = \det(\mathrm{Id}_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$. Por lo tanto $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(2) $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$. □

Observación. Del corolorario 3.5.10 (2) se deduce fácilmente, por inducción, que si $A_1, \ldots, A_k$ son matrices $n \times n$, y $A = A_1 \cdots A_k$, entonces

$$\det(A) = \det(A_1) \det(A_2) \ldots \det(A_k). \tag{3.5.5}$$

Corolario 3.5.11. *Sea* A *matriz* $n \times n$ *y* $E_1, E_2, \ldots, E_t$ *matrices elementales tal que* $E_t E_{t-1} \ldots E_1 A = B$. *Entonces,*

$$\det(A) = \det(E_1)^{-1} \det(E_2)^{-1} \ldots \det(E_t)^{-1} \det(B). \tag{3.5.6}$$

En particular, si B *tiene filas nulas,* $\det(A) = 0$ *y si* B *es MERF y no tiene filas nulas*

$$\det(A) = \det(E_1)^{-1} \det(E_2)^{-1} \ldots \det(E_t)^{-1}.$$

Demostración. Por (3.5.5), tenemos

$$\det(B) = \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_t)\det(A).$$

Por lo tanto,

$$\det(A) = \det(E_1)^{-1}\det(E_2)^{-1}\ldots\det(E_t)^{-1}\det(B).$$

Ahora bien, si B tiene una fila nula, entonces su determinante es 0 (corolario 3.5.8 (2)) y por lo tanto $\det(A) = 0$. Si B es MERF y no tiene filas nulas, entonces $B = \mathrm{Id}$, por lo tanto $\det(B) = 1$ y el resultado se deduce inmediatamente de (3.5.6). □

El resultado anterior nos permite calcular determinantes reduciendo la matriz original a una matriz donde es más sencillo calcular el determinate (por ejemplo, triangular). Esta reducción puede hacerse multiplicando por matrices elementales o, equivalentemente, realizando operaciones elementales de fila.

Ejemplo. Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Solución. Mediante operaciones elementales de fila encontremos una matriz B equivalente a A que sea triangular superior y apliquemos el corolario anterior, sabiendo que por proposición 3.5.3 el determinante de B es el producto de las entradas diagonales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-3F_1}]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = B.$$

Como las operaciones elementales utilizadas (de tipo *E2*) no cambian el determinante (teorema 3.5.6), tenemos que

$$\det(A) = \det(B) = 1 \cdot 1 \cdot (-8) = -8.$$

□

Definición 3.5.12. Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. La *transpuesta* de A, denotada A^t, es la matriz $n \times m$ que en la fila i y columna j tiene el coeficiente $[A]_{ji}$. Es decir

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Si A es una matriz $n \times n$, diremos que es *simétrica* si $A^t = A$.

Ejemplo. Si
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$
entonces
$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$
Ejemplo. Si
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$
entonces
$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$
En general A^t es la matriz cuyas filas son las columnas de A y viceversa.

Ejemplo. Si
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$
entonces $A^t = A$, es decir A es simétrica.

Proposición 3.5.13. *Sea* A *matriz* $m \times n$.

(1) $(A^t)^t = A$.

(2) Si B *matriz* $n \times k$, *entonces*
$$(AB)^t = B^tA^t.$$

(3) Sea A *matriz* $n \times n$, *entonces,* A *invertible si y sólo si* A^t *es invertible y en ese caso* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración. (1) $[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = [A]_{ij}$.

(2) Por definición de transpuesta $(AB)^t$ es una matriz $k \times m$. Ahora observemos que B^t es una matriz $k \times n$ y A^t es $n \times m$, luego tiene sentido multiplicar B^t por A^t y se obtiene también una matriz $k \times m$. La demostración de la proposición se hace comprobando que el coeficiente ij de $(AB)^t$ es igual al coeficiente ij de B^tA^t y se deja como ejercicio para el lector.

(3)
$$\begin{aligned} A \text{ invertible } &\Leftrightarrow \text{existe } B \text{ matriz } n \times n \text{ tal que } AB = \mathrm{Id}_n = BA \\ &\Leftrightarrow (AB)^t = \mathrm{Id}_n^t = (BA)^t \\ &\Leftrightarrow B^tA^t = \mathrm{Id}_n = A^tB^t \\ &\Leftrightarrow B^t \text{ es la inversa de } A^t. \end{aligned}$$

Es decir, A invertible si y sólo si A^t es invertible y si $B = A^{-1}$, entonces $(A^t)^{-1} = B^t$. □

Observar que por inducción no es complicado probar que si $A_1, \ldots, A_k$ son matrices, entonces

$$(A_1 \ldots A_k)^t = A_k^t \ldots A_1^t.$$

Ejemplo. Veamos las transpuesta de las matrices elementales 2×2.

(1) Si $c \neq 0$, multiplicar por c la primera fila y multiplicar c por la segunda fila son, respectivamente,

$$E = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

por lo tanto E^t es la misma matriz en ambos casos.

(2) si $c \in \mathbb{K}$, sumar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por c o sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c son, respectivamente,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \text{ y } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$E_1^t = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \text{ y } E_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = E_1,$$

(3) Finalmente, intercambiando la fila 1 por la fila 2 obtenemos la matriz

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto $E^t = E$

Observación. En el caso de matrices 2×2 podemos comprobar fácilmente que $\det A^t = \det A$:

$$\det A^t = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A.$$

También vale este resultado para matrices $n \times n$.

Teorema 3.5.14. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$, *entonces* $\det(A) = \det(A^t)$

Demostración. Ver el teorema D.1.11. □

El resultado anterior permite obtener resultados nuevos del cálculo de determinante a partir de resultados vistos anteriormente.

Proposición 3.5.15. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *matriz triangular inferior cuyos elementos en la diagonal son* $d_1, \ldots, d_n$. *Entonces* $\det A = d_1.d_2.\ldots.d_n$.

Demostración. Si A es triangular inferior con elementos en la diagonal $d_1, \ldots, d_n$, entonces A^t es triangular superior con elementos en la diagonal $d_1, \ldots, d_n$. Por la proposición 3.5.3, $\det A^t = d_1 \ldots d_n$. Por el teorema 3.5.14 obtenemos el resultado. □

Teorema 3.5.16. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y sean* $1 \leqslant r, s \leqslant n$.

(1) Sea $c \in \mathbb{K}$ *y* B *la matriz que se obtiene de* A *multiplicando la columna* r *por* c, *entonces* $\det B = c \det A$.

(2) Sea $c \in \mathbb{K}$ *y* B *la matriz que se obtiene de* A *sumando a la columna* r *la columna* s *multiplicada por* c, *entonces* $\det B = \det A$.

(3) Sea B *la matriz que se obtiene de* A *permutando la columna* r *con la fila* s, *entonces* $\det B = -\det A$.

Demostración. Las operaciones por columna del enunciado se traducen a operaciones por fila de la matriz A^t. Luego, aplicando los resultados del teorema 3.5.6 y usando el hecho de que $\det(A) = \det(A^t)$ y $\det(B) = \det(B^t)$ en cada caso, se deduce el corolario. □

Corolario 3.5.17. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) Si A *tiene dos columnas iguales, entonces* $\det A = 0$.

(2) Si A *tiene una columna nula, entonces* $\det A = 0$.

Demostración. (1) Si A tiene dos columnas iguales, entonces A^t tiene dos filas iguales, luego, por corolario 3.5.8 (1), $\det A^t = 0$ y por lo tanto $\det A = 0$.
(2) Si A tiene una columna nula, entonces A^t tiene una fila nula, luego, 3.5.8 (2), $\det A^t = 0$ y por lo tanto $\det A = 0$. □

El siguiente teorema nos dice que es posible calcular el determinante desarrollándolo por cualquier fila o cualquier columna.

Teorema 3.5.18. *El determinante de una matriz* A *de orden* $n \times n$ *puede ser calculado por la expansión de los cofactores en cualquier columna o cualquier fila. Más específicamente,*

(1) si usamos la expansión por la j*-ésima columna,* $1 \leqslant j \leqslant n$, *tenemos*

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \\ &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.\end{aligned}$$

(2) *si usamos la expansión por la* i*-ésima fila,* $1 \leqslant i \leqslant n$*, tenemos*

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \\ &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in};\end{aligned}$$

Demostración. Ver la demostración de el teorema D.1.12. □

§ *Ejercicios*

1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *d)* $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Probar que $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

b) Diremos que A es *antisimétrica* si $A^t = -A$. Probar que si n es impar y A antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que A es *ortogonal* si $A^t = A^{-1}$.

a) Probar que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.

b) Dar un ejemplo de una matriz ortogonal con $\det(A) = -1$.

c) Probar que A es ortogonal si y solo si existe una $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ BON de $\mathbb{R}^n$ tal que $A = [u_1 \cdots u_n]$. Ver la sección 1.7 para la definición de BON.

4) Sea P una matriz de permutación $n \times n$ (ver sección 3.3, ejercicio *4*). Probar que P es invertible y que $P^{-1} = P^t$.

5) En este ejercicio trabajaremos con matrices de bloques r, s es decir matrices del tipo

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

con $A \in \mathbb{K}^{r\times r}$, $B \in \mathbb{K}^{r\times s}$, $C \in \mathbb{K}^{s\times r}$ y $D \in \mathbb{K}^{s\times s}$ (ver capítulo **??**, ejercicio *5*). En este contexto, probaremos, paso a paso, que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C). \tag{3.5.7}$$

a) Probar que
$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B).$$

b) Sea $C \in \mathbb{K}^{s\times s}$ y sea R la MERF de C tal que $C = E_1 \ldots E_k R$ donde E_i es una matriz elemental. Probar que
$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & E_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

c) Usando la notación y el resultado del ítem anterior, probar que
$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(E_1)\ldots\det(E_k)\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

d) Si C invertible, probar que
$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(C)\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

e) Probar que
$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

[Ayuda: las operaciones elementales de fila de tipo E1 no cambian el determinanate.]

f) Probar (3.5.7).

6) Sean v, w dos elementos no nulos de $\mathbb{R}^2$ tal que uno no es múltiplo del otro. El conjunto de elementos de $\mathbb{R}^2$
$$\{t_1 v + t_2 w : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$$
se llama el *paralelogramo generado por v y w*.

Probaremos, paso a paso, que el área del paralelogramo generado por v y w es $\pm \det \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ y usaremos para ello una mezcla de argumentos geométricos y algebraicos.

a) Sea $v = (a, b)$ y $w = (c, 0)$ probar que el área del paralelogramo generado por v y w (un paralelogramo horizontal) es
$$|bc| = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, es base $\times$ altura.

b) Sea θ es el ángulo comprendido entre $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$. Usando la fórmula de $\cos(\theta)$ que se obtiene a partir del producto escalar (fórmula (1.3.1)), demostrar que

$$|\operatorname{sen}(\theta)| = \left|\frac{ad - bd}{||v||||w||}\right|.$$

c) Teniendo en cuenta la propiedad de que el área de un paralelogramo es la longitud de la base por la altura probar que el área del paralelogramo generado por (a, b), (c, d) es

$$A \quad = \quad \left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|.$$

Observación. El volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ determinado por 3 vectores $v_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $v_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $v_3 = (c_1, c_2, c_3)$ también está dado por la fórmula

$$V = \left|\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right|.$$

La fórmula se generaliza a todas las dimensiones $n \geqslant 2$.

3.6 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

En el capítulo 5 veremos la definición y propiedades de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Las transformaciones lineales juegan un rol muy importante en toda la matemática, pasando por el álgebra, el análisis, la geometría, etc.

Si A es una matriz $m \times n$ y v es una matriz $n \times 1$, es decir un vector, el producto Av es un vector $m \times 1$. Recordemos que, por comodidad, identificamos $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}^{n\times 1}$, es decir escribiremos indistintamente un vector columna o una n-upla. Esta multiplicación de matrices por vectores es una transformación lineal y veremos, también en el capítulo 5, que toda transformación lineal puede ser representada como la multiplicación de una matriz por un vector. En esta sección estudiaremos, dada una matriz A, los vectores que $v \in \mathbb{K}^n$ tales que $Av = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Motiva el estudio de estos vectores el hecho de que es sencillo multiplicar a izquierda por matrices diagonales:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1x_1 \\ d_2x_2 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{bmatrix}$$

(ver observación 3.2.4). En particular, si e_i es el vector columna que tiene un 1 en la fila i y todas las demás filas iguales a 0, entonces

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} e_i = d_i e_i$$

y esta propiedad caracteríza las matrices diagonales, es decir una matriz D es diagonal si y solo si $De_i = d_i e_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Dicho de otra forma una matriz es diagonal si y solo si al aplicarla sobre algún e_i obtenemos un múltiplo de e_i.

Definición 3.6.1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de A y si existe $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que v es un *autovector* asociado a λ

Aunque no siempre es posible caracterizar una matriz A por sus autovectores, el estudio de este tipo de vectores resulta importante para obtener información de la matriz y propiedades de la misma.

Observación. Nada impide, por definición, que un autovalor pueda valer 0, pero un autovector *nunca* puede ser 0.

Ejemplo. 1 es un autovalor de Id_n y todo $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a 1 pues

$$\mathrm{Id}_n v = v$$

Ejemplo. 0 es un autovalor de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a 0 pues

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.6.2. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tiene autovalores 1 y 5. El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ tiene autovalor 5, el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene también autovalor 5 y el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tiene autovalor 1.

Comprobemos esto, por ejemplo, para el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$:

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+2 \\ 2+0-2 \\ 0+0-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Es decir, 5 es autovalor de B y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a 5.

Análogamente,

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ 0+3+2 \\ 0+0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

y

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2+0 \\ 2-3+0 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo hicimos en este ejemplo para encontrar los autovalores y algunos autovectores? En lo que sigue de esta sección veremos un método general para encontrar los autovalores y autovectores de una matriz.

Observación. La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando. Por ejemplo sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A no tiene autovalores reales. Veamos por qué.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{3.6.1}$$

Si λ fuera un autovalor y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ fuera autovector, tendríamos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}. \tag{3.6.2}$$

Luego, por (3.6.1) y (3.6.2), $-x_2 = \lambda x_1$ y $x_1 = \lambda x_2$, entonces $-x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_2$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda^2 > 0$, y eso implica que $x_2 = 0$ y en consecuencia $x_1 = 0$. Si $\lambda = 0$, también $x_1 = x_2 = 0$. Es decir, en ambos casos $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y no es autovector.

Veremos más adelante que si permitimos autovalores complejos entonces esta matriz tiene autovalores.

Definición 3.6.3. Dado $i \in \{1, ..., n\}$, como ya vimos se denota e_i al vector columna de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo. En $\mathbb{K}^3$ la base canónica es $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo. Sea $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz diagonal con entradas λ_1, λ_2, ..., λ_n. Entonces e_i es un autovector con autovalor λ_i , $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Definición 3.6.4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

El conjunto de todos los autovectores con un mismo autovalor es *invariante por la suma y la multiplicación por escalares.* En particular los múltiplos de un autovector son autovectores con el mismo autovalor.

Teorema 3.6.5. *Sea A matriz $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Si v, w pertenecen a V_λ, el autoespacio de A asociado a λ, entonces $v + tw \in V_\lambda$ para cualquier $t \in \mathbb{K}$.*

Demostración.

$$A(v + tw) = Av + tAw = \lambda v + t\lambda w = \lambda(v + tw).$$

□

Proposición 3.6.6. *Sea A matriz $n \times n$ y $v, w \in \mathbb{K}^n$ autovectores con autovalores $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, respectivamente. Entonces. $\lambda \neq \mu$ implica que $v \neq w$. Es decir, autovectores con autovalores distintos son distintos.*

Demostración. Supongamos que $v = w$, entonces $Av = \lambda v$ y $Av = \mu v$. Luego, $\lambda v = \mu v$ y por lo tanto

$$(\lambda - \mu)v = \begin{bmatrix} (\lambda-\mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda-\mu)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $v \neq 0$ por ser autovector, alguna de sus coordenadas es no nula. Entonces $\lambda - \mu$ tiene que ser 0 o dicho de otro modo $\lambda = \mu$, lo cual es un absurdo. □

Problema. Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente el autoespacio asociado.

- En otras palabras nos preguntamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ y que $v \in \mathbb{K}^n$ satisfacen
$$Av = \lambda v \iff \lambda v - Av = 0 \iff (\lambda \operatorname{Id} - A)v = 0.$$
- La última igualdad es un sistema de ecuaciones lineales. Queremos ver entonces si existe un $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo que sea solución del sistema homogéneo
$$(\lambda \operatorname{Id} - A)X = 0. \qquad (*)$$
- Un sistema $BX = 0$ tiene solución no trivial sii $\det(B) = 0$. Por lo tanto (*) tiene solución no trivial si y sólo si
$$\det(\lambda \operatorname{Id} - A) = 0.$$

Estos sencillos pasos demuestran lo siguiente.

Proposición 3.6.7. $\lambda \in \mathbb{K}$ *es un autovalor de* A *y* $v \in \mathbb{K}^n$ *es un autovector asociado a* λ *si y sólo si*

- $\det(\lambda \operatorname{Id} - A) = 0$
- v *es solución del sistema homogéneo* $(\lambda \operatorname{Id} - A)X = 0$

Esta es casi la respuesta a nuestro problema. Para dar una respuesta más operativa introducimos el siguiente polinomio.

Definición 3.6.8. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$$

Ejemplo. El polinomio característico de Id_n es

$$\chi_{\operatorname{Id}_n}(x) = (x-1)^n$$

Demostración. $x\,\mathrm{Id} - \mathrm{Id} = (x-1)\,\mathrm{Id}$ es una matriz diagonal con $x-1$ en todas las entradas de la diagonal. Entonces el determinante es el producto de los valores de la diagonal. □

En general, si $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$, tenemos que

$$\chi_A(x) = \det(x\ \mathrm{Id} - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico de A es un polinomio de grado n, más precisamente

$$\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esto se puede demostrar por inducción.

Ejemplo. El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Ejemplo. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\chi_A(x) = (x-a)(x-d) - bc$.

Demostración. $A - x\,\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$ y usamos la fórmula del determinante de una matriz 2×2. □

Proposición 3.6.9. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor si y sólo si λ es raíz del polinomio característico de A.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es autovalor } &\Leftrightarrow \text{existe } v \neq 0 \text{ tal que } Av = \lambda v \\ &\Leftrightarrow 0 = \lambda v - A = \lambda\,\mathrm{Id}\,v - Av = (A - \lambda\,\mathrm{Id})v \\ &\Leftrightarrow (\lambda\,\mathrm{Id} - A)X = 0 \text{ tiene solución no trivial} \\ &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{Id} - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es raíz del polinomio característico.} \end{aligned}$$

□

Observación. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces podemos aplicar el siguiente método para encontrar autovalores y autovectores de A.

(1) Calcular $\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$,

(2) Encontrar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\chi_A(x)$.

No siempre es posible hacerlo, pues no hay una fórmula o método general para encontrar las raíces de polinomios de grado 5 o superior.

(3) Para cada i con $1 \leqslant i \leqslant k$ resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$(\lambda_i \operatorname{Id} - A)X = 0.$$

Las soluciones no triviales de este sistema son los autovectores con autovalor λ_i.

Ejemplo. Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución.

(1) $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$

(2) Los autovalores de A son las raíces de $\chi_A(x)$: 1 y 2.

(3) Debemos resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(\operatorname{Id} - A)X = 0, \qquad (2\operatorname{Id} - A)X = 0.$$

Es decir, debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S1)}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S2)}$$

(S1) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow (t, t)$ es solución.

(S2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow (2t, t)$ es solución.

De lo anterior concluimos:

- Los autovalores de A son 1 y 2.
- El auto espacio correspondiente al autovalor 1 es

$$V_1 = \{t(1,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- El auto espacio correspondiente al autovalor 2 es

$$V_2 = \{t(2,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Ejemplo. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Encontrar los autovalores *reales* de A.

Solución. $x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$, luego

$$\chi_A(x) = x^2 + 1.$$

El polinomio no tiene raíces reales, por lo tanto no existen autovalores reales (y obviamente no hay autovectores). □

Sin embargo si nos dicen

> *Encontrar autovalores y autovectores complejos de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

la respuesta va a ser diferente.

Lo que ocurre es que

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces complejas: i y $-i$, por lo tanto i y $-i$ son los autovalores de A.

Averigüemos los autovalores planteando los sistemas de ecuaciones correspondientes, es decir $\lambda \operatorname{Id} x - A = 0$ para $\lambda = i, -i$:

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{S1}$$

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{S2}$$

Resolvamos los sistemas:

(S1) $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - iF_1} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ix_1 + x_2 = 0 \Rightarrow (\omega, -i\omega)$ es solución ($\omega \in \mathbb{C}$).

(S2) $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - iF_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow (-i\omega, \omega)$ es solución ($\omega \in \mathbb{C}$).

Luego A tiene dos autovalores, i y $-i$, y

$$V_i = \{\omega(1, -i) : \omega \in \mathbb{C}\}, \qquad V_{-i} = \{\omega(-i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}.$$

Nunca está de más comprobar los resultados:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. En base a lo que sabemos ahora analicemos de nuevo la matriz del ejemplo 3.6.2. El polinomio característico es

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(x \operatorname{Id} - A) \\ &= \det \begin{bmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ -2 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-5 \end{bmatrix} \\ &= x^3 - 11x^2 + 35x - 25 \\ &= (x-5)^2(x-1). \end{aligned}$$

Por lo tanto los autovalores son 5 y 1. Averigüemos los autoespacios correspondientes a estos autovalores. Para $\lambda = 5$ debemos resolver el sistema $(5 \operatorname{Id} - B)X = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo reducción por filas obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es decir $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Luego $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$ y por lo tanto el autoespacio correspondiente a 5 es

$$V_5 = \{(t - \frac{1}{2}s, t, s) : t, s \in \mathbb{K}\}.$$

Para $t = 0$, $s = -2$ obtenemos el autovector $(1, 0, -2)$ y para $t = 1$, $s = 2$ obtenemos el autovector $(0, 1, 2)$. Es decir, los vectores con autovalor 5 del ejercicio 3.6.2.

Finalmente, averigüemos el autoespacio correspondiente al autovalor 1. En este caso debemos resolver el sistema $(\operatorname{Id} - B)X = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo reducción por filas obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es decir $x_1 = -x_2$ y $x_3 = 0$. Luego $x_1 = -x_2$ y por lo tanto el autoespacio correspondiente a 1 es

$$V_1 = \{(t, -t, 0) : t \in \mathbb{K}\}.$$

Para $t = 1$ obtenemos el autovector $(1, -1, 0)$. Es decir, el vector con autovalor 1 del ejercicio 3.6.2.

§ *Ejercicios*

1) Para cada una de las siguientes matrices calcule el polinomio característico, los autovalores y los autoespacios correspondientes.

   a) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$,

   d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Para cada una de las siguientes matrices calcule el polinomio característico, los autovalores y los autoespacios correspondientes.

   a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.

3) Sean A, B matrices $n \times n$. Probar que si A es semejante a B (ver sección 3.4, ejercicio 2), entonces A y B tienen los mismos autovalores.

4) Sea N una matriz compleja 2×2 tal que $N^2 = 0$. Probar que, o bien $N = 0$, o bien N es semejante a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5) Usar el resultado del ejercicio 4 para probar lo siguiente: si A es una matriz compleja 2×2, entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una de las dos matrices siguientes:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$