(6) Sean $u = (1,1)$, $v = (1,0)$, $w = (0,1)$ y $z = (3,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.

b) Escribir z como combinación lineal de u y v.

c) Escribir z como combinación lineal de u y w.

d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

a) $z = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \Rightarrow (3,4) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,0) + \lambda_3(0,1)$
$= (\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0) + (0, \lambda_3)$
$= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$

Luego, $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 = 4 - \lambda_3 \end{cases}$, si elijo $\lambda_1 = 1$, obtengo $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Por lo tanto, $z = u + 2v + 3w$.

b) $z = \lambda_1 u + \lambda_2 v \Rightarrow (3,4) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,0)$
$= (\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0)$
$= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = (-1) \end{cases}$

Por lo tanto, $z = 4u - v$

c) $z = \lambda_1 u + \lambda_2 w \Rightarrow (3,4) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,1)$
$= (\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2)$
$= (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Por lo tanto $z = 3u + w$

d) $z = \lambda_1 v + \lambda_2 w \Rightarrow (3,4) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$

Por lo tanto $z = 3v + 4w$