(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Proposición 1.2.2. *Sean* v, w, u *tres vectores en* $\mathbb{R}^n$, *entonces*

P1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

P2.

$$\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle = \langle w+u, v\rangle.$$

P3. *Si* λ *es un número, entonces*

$$\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \quad y \quad \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle.$$

a) $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \overset{P2}{=} \langle \lambda_1 v, u\rangle + \langle \lambda_2 w, u\rangle \overset{P3}{=} \lambda_1\langle v,u\rangle + \lambda_2\langle w,u\rangle$$

b) $$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle &\overset{P2}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \\
&\overset{P2}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \\
&\overset{P3}{=} \lambda_1\langle v, \lambda_1 v\rangle + \lambda_2\langle w, \lambda_1 v\rangle + \lambda_1\langle v, \lambda_2 w\rangle + \lambda_2\langle w, \lambda_2 w\rangle \\
&\overset{P3}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \\
&\overset{P1}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle v, w\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \\
&\overset{\substack{\text{enunciado}\\ \langle v,w\rangle=0}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2\lambda_1 . 0 + \lambda_1\lambda_2 . 0 + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \\
&= \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle
\end{aligned}$$