(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A. Usar esto para deducir que la matriz $\mathrm{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

Recordemos que A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Si A es nilpotente y v autovector con autovalor λ, entonces $Av = \lambda v$ y por lo tanto $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda^2 v$. Iterando éste argumento, obtenemos que $A^k v = \lambda^k v$.
Pero $A^k = 0$ y por lo tanto $\lambda^k = 0$ y en consecuencia $\lambda = 0$. Luego 0 es el único autovalor de A.
Ahora bien, si 0 es el único autovalor de A, entonces $\chi_A(x) = x^n$ y por lo tanto $1 = \chi_A(1) = \det(\mathrm{Id}_n - A)$.
Como el determinante de $\mathrm{Id}_n - A$ es no nulo, esa matriz es invertible.