(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

Para encontrar la matriz debemos resolver los sistemas $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

o equivalentemente $\begin{cases} x+y=2 \\ z+w=2 \end{cases}$ y $\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -2z+w=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ z+w=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=2-w \end{cases} \overset{\text{reemplazo}}{\Rightarrow} \begin{cases} -2(2-y)+y=-2 \\ -2(2-w)+w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+3y=-2 \\ -4+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2/3 \\ w=5/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4/3 \\ z=1/3 \end{cases}$$

Finalmente, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sí y sólo si $A = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$