(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Proposición 1.2.2. *Sean v, w, u tres vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

P1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

P2.

$$\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle = \langle w+u, v\rangle.$$

P3. *Si λ es un número, entonces*

$$\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \quad y \quad \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle.$$

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \sqrt{\langle v+w, v+w\rangle}^2 \\
&= \langle v+w, v+w\rangle \\
&\overset{P2}{=} \langle v+w, v\rangle + \langle v+w, w\rangle \\
&\overset{P2}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\
&\overset{P1}{=} \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\
&\overset{\substack{\text{enunciado} \\ \langle v,w\rangle = 0}}{=} \langle v, v\rangle + 0 + 0 + \langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= \sqrt{\langle v, v\rangle}^2 + \sqrt{\langle w, w\rangle}^2 \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2
\end{aligned}$$