(5) ⓐ Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de Id_2.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y sean $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces $AE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$

$E_{11}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como $AB=BA$, $AE_{11} = E_{11}A$, entonces $a_{21} = a_{12} = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Probemos ahora con E_{12}:

$AE_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}$

$E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como $AB=BA$, $AE_{12} = E_{12}A$, entonces $a_{21}=0$ y $a_{11}=a_{22} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las demostraciones con E_{21} y E_{22} son análogas.

Obs: el resultado también es cierto con matrices $n\times n$, $n \in \mathbb{N}$.