(4) ⓐ Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{Id}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{Id}_2$.

a) $A^2=0$ si A es de la forma $\begin{bmatrix} k & k \\ -k & -k \end{bmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} k & k \\ -k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & k \\ -k & -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k.k+k(-k) & k.k+k(-k) \\ (-k)k+(-k)(-k) & (-k)k+(-k)(-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2-k^2 & k^2-k^2 \\ -k^2+k^2 & -k^2+k^2 \end{bmatrix} = 0$$

b) $AB \neq BA$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $A^2 = -\mathrm{Id}_2$ si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathrm{Id}_2$$

d) $A^2 = A \neq \mathrm{Id}_2$

Sea $A = \begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix}$, entonces $A^2 = \begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

Queremos encontrar $A \in M_{2\times 2}$, $A \neq 0$ tal que $\begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Planteo el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \mathrm{I} \quad k^2 + yz = k \\ \mathrm{II} \quad y(k+w) = y \\ \mathrm{III} \quad z(k+w) = z \\ \mathrm{IV} \quad zy + w^2 = w \end{cases}$$

Por II y III tenemos que $k+w=1 \Rightarrow k = 1-w$, para este caso elijo $k=-1$, $w=2$.

Reemplazo los valores en I: $(-1)^2 + yz = -1 \Rightarrow 1+yz=-1 \Rightarrow yz = -2 \Rightarrow y = {}^{-2}/z$, elijo $z=-2$, $y=1$

Finalmente $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$