(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

a) El conjunto de matrices invertibles.

b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.

c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

a) En general la suma de matrices invertibles no es invertible. Un contraejemplo sencillo es sumar a una matriz identidad su opuesto, por ejemplo $Id - Id = 0$.

b) El conjunto es $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : AB = BA\}$

Veamos que si $A_1, A_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $A_1 + \lambda A_2 \in W$:

$$\begin{aligned}(A_1+\lambda A_2)B &= A_1B + \lambda A_2 B\\ &= BA_1 + \lambda BA_2\\ &= BA_1 + B(\lambda A_2)\\ &= B(A_1+\lambda A_2)\end{aligned}$$

Luego, $A_1+\lambda A_2 \in W$. Por lo tanto, W es subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

c) Las matrices triangulares superiores son el conjunto $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : [A]_{ij} = 0 \text{ si } i>j\}$

Dados $A, B \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, debemos probar que $A + \lambda B \in W$:

La suma de matrices y el producto por escalares es coordenada a coordenada, entonces se cumple $[A+\lambda B]_{ij} = [A]_{ij} + \lambda [B]_{ij}$.

Luego $A, B \in W \Rightarrow [A]_{ij} = [B]_{ij} = 0$ si $i>j$

$\Rightarrow [A]_{ij} + \lambda [B]_{ij} = 0$ si $i>j$

$\Rightarrow [A+\lambda B]_{ij} = 0$ si $i>0$

$\Rightarrow A + \lambda B \in W$, por lo tanto W es subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.