(12) ⓐ Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n-1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n?

a)
En el ejercicio 2) hicimos n = 3 para un caso concreto. En este caso, una forma de resolver el problema es plantear un sistema de ecuaciones donde los coeficientes del polinomio sean las incógnitas.
Sea

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

entonces, $p_n(\lambda_i) = b_i$ se traduce en la ecuación $a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} = b_i$

Las matrices ampliadas de los sistemas de ecuaciones para n = 4 y n = 5 son:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & b_4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 & b_4 \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 & b_5 \end{array}\right]$$

respectivamente. Para n = 1,2,3 es claro como son los sistemas.

b) Si sobreentendemos que todos los λ_i son distintos entre sí, la respuesta es no.
Obviamente, si $\lambda_i = \lambda_j$ y $b_i \neq b_j$, entonces $p(\lambda_i) = b_i \neq b_j = p(\lambda_j) = p(\lambda_i)$, es decir, llegamos a la conclusión de que $p(\lambda_i) \neq p(\lambda_i)$, lo cuál es absurdo.

c) $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \cdots & \lambda_n^{n-1} & b_n \end{array}\right]$$