(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

$\Rightarrow$) Si $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$ no hay nada que demostrar.

Supongamos entonces que $W_1 \nsubseteq W_2$ y $W_2 \nsubseteq W_1$.

Entonces existen $w_1 \in W_1$ tal que $w_1 \notin W_2$ y $w_2 \in W_2$ tal que $w_2 \notin W_1$.

Como $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$.

Como $W_1 \cup W_2$ es subespacio de V, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $w_1 + w_2 \in W_1$ ó $w_1 + w_2 \in W_2$.

Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1$, entonces $w_2 = w_1 + w_2 - w_1 \in W_1$, lo cuál es absurdo.

Análogamente, si $w_1 + w_2 \in W_2$, entonces $w_1 \in W_2$, lo cuál es absurdo.

El absurdo vino de suponer que $W_1 \nsubseteq W_2$ y $W_2 \nsubseteq W_1$, luego, $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$.

Entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

Análogamente se demuestra que si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.