(7) Sean $p(x) = (x-1)(x+2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2-1)$ en $\mathbb{R}[x]$.

a) Describir en forma implícita todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.

b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

a) La versión expandida de las ecuaciones es: $\begin{cases} p(x) = x^2 + x - 2 \\ q(x) = x^2 - 1 \\ r(x) = x^3 - 1 \end{cases}$

Planteo la ecuación:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \lambda p + \mu q + v r \\ &= \lambda(x^2+x-2) + \mu(x^2-1) + v(x^3-x) \\ &= v x^3 + (\lambda+\mu)x^2 + (\lambda - v)x + (-2\lambda - \mu) \end{aligned}$$

Busco los $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tal que existe $\lambda, \mu, v \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación anterior, o bien el sistema:

$$\begin{cases} a = v \\ b = \lambda + \mu \\ c = \lambda - v \\ d = -2\lambda - \mu \end{cases}$$

Busco la MERF asociada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \\ -2 & -1 & 0 & d \end{array}\right] \xrightarrow[f_4+2f_2]{f_3-f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-b \\ 0 & 1 & 0 & d+2b \end{array}\right] \xrightarrow[f_3+f_4]{f_2-f_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -3b-d \\ 0 & 0 & -1 & b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & d+2b \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -3b-d \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & d+2b \end{array}\right]$$

El subespacio es $\{ax^3 + bx^2 + cx + d : a+b+c+d = 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

b) Debemos encontrar a tal que existan $\lambda, \mu, v \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} x &= \lambda p + \mu q + v(2x^2 + a) \\ &= \lambda(x^2+x-2) + \mu(x^2-1) + v(2x^2+a) \\ &= (\lambda - \mu + 2v)x^2 + \lambda x + (-2\lambda - \mu + av) \end{aligned}$$

Dónde $\begin{cases} \lambda - \mu + 2v = 0 \\ -2\lambda - \mu + av = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \mu + 2v = 0 \\ -2 - \mu + av = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu - 2v = 1 \\ \mu - av = -2 \end{cases}$

Luego, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -a & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2-f_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2-a & -1 \end{array}\right]$

Si $a = 2$ el sistema no tiene solución pues quedaría $\mu . 0 + v . 0 = 1$.
Cuando $a \neq 2$, dividimos por $2-a$ y obtenemos $v = \frac{1}{2-a}$ y $\mu = -1 - 2v = -1 - 2\frac{1}{2-a} = \frac{a}{2-a}$.
Por lo tanto, si $a \neq 2$, el polinomio x se puede escribir como combinación lineal de p, q y $x^2 + a$.