(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definición 3.2.2. Sean $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ matriz $n \times p$, entonces $C = [c_{ij}]$ matriz $m \times p$ es el *producto* de A y B, si

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{3.2.1}$$

Es muy importante recalcar que por la definición, se puede multiplicar una matriz $m \times n$ por una matriz $r \times p$, sólo si $n = r$ y en ese caso, la multiplicación resulta ser una matriz $m \times p$.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz 2×3, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es 3×1 y $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ es 1×2,

entonces para que la ecuación ABC tenga sentido debe ser

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

Verifico que $A(BC) = (AB)C$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.1 & 3(-1) \\ 1.1 & 1(-1) \\ (-1)1 & (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3+(-1)1+1(-1) \\ 1.3+2.1+1(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.3+(-1)1+1(-1) & 2(-3)+(-1)(-1)+1.1 \\ 1.3+2.1+1(-1) & 1(-3)+2(-1)+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1 & 4(-1) \\ 4.1 & 4(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$