(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.

e) $B \cup D$.

f) $B \cap D$.

g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 4.1.1. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo. Un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* , consiste de un conjunto V no vacío, cuyos elementos son llamados *vectores*, junto a '+' y '.' tal que

a) $+ \colon V \times V \to V$ es una operación, llamada *adición* o *suma de vectores,* tal que a dos vectores $v, w \in V$ les asigna otro vector $v + w \in V$,

b) $\cdot \colon \mathbb{K} \times V \to V$ es una operación tal que a $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ le asigna el vector $\lambda \cdot v$ (o simplemente λv). La operación '$\cdot$' es llamada el *producto por escalares*.

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

No es subespacio vectorial, pues $(1,0,0), (0,1,0) \in A$, pero $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin A$.

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, por hipótesis:

$v_1 + v_2 + v_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 0$

Ahora bien,
$$\begin{aligned} v + \lambda w &= (v_1, v_2, v_3) + \lambda(w_1, w_2, w_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) + (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3) \\ &= (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, v_3 + \lambda w_3) \end{aligned}$$

Para ver si $v + \lambda w \in B$ debemos sumar todas las componentes:
$$\begin{aligned} (v_1 + \lambda w_1) + (v_2 + \lambda w_2) + (v_3 + \lambda w_3) &= v_1 + \lambda w_1 + v_2 + \lambda w_2 + v_3 + \lambda w_3 \\ &= v_1 + v_2 + v_3 + \lambda w_1 + \lambda w_2 + \lambda w_3 \\ &= (v_1 + v_2 + v_3) + \lambda(w_1 + w_2 + w_3) \\ &\overset{\text{hip.}}{=} 0 + \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $v + \lambda w \in B$, por lo tanto B es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$

C no es subespacio vectorial pues $(1,0,0), (0,1,1) \in C$, pero $(1,0,0) + (-1)(0,1,1) = (1,-1,-1) \notin C$.

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$

Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, por hipótesis: $v_3 = w_3 = 0$

Ahora bien,
$$\begin{aligned} v + \lambda w &= (v_1, v_2, v_3) + \lambda(w_1, w_2, w_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) + (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3) \\ &= (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, v_3 + \lambda w_3) \\ &\overset{\text{hip.}}{=} (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, 0 + \lambda 0) \\ &= (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda_2 w_2, 0) \end{aligned}$$

Luego $v + \lambda w \in D$, por lo tanto D es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

e) $B \cup D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \lor x_3 = 0\}$

$B \cup D$ no es un subespacio vectorial pues $(1,0,-1) \in B \Rightarrow (1,0,-1) \in B \cup D$, $(1,1,0) \in D \Rightarrow (1,1,0) \in B \cup D$, pero $(1,0,-1) + (1,1,0) = (2,1,-1) \notin B \cup D$ pues $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$ y $x_3 \neq 0$.

f) $B \cap D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \land x_3 = 0\}$

Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in B \cap D$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, por hipótesis:

$v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = v_3 = w_3 = 0$

Ahora bien,
$$\begin{aligned} v + \lambda w &= (v_1, v_2, v_3) + \lambda(w_1, w_2, w_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) + (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3) \\ &= (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, v_3 + \lambda w_3) \\ &\overset{\text{hip.}}{=} (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, 0 + \lambda 0) \\ &= (v_1 + \lambda w_1, v_2 + \lambda w_2, 0) \end{aligned}$$

Sumamos las componentes:
$$\begin{aligned} v_1 + \lambda w_1 + v_2 + \lambda w_2 &= (v_1 + v_2) + (\lambda w_1 + \lambda w_2) \\ &= (v_1 + v_2) + \lambda(w_1 + w_2) \\ &\overset{\text{hip.}}{=} 0 + \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $v + \lambda w \in B \cap D$, por lo tanto $B \cap D$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$

G no es subespacio vectorial pues $(1,0,0) \in G$, pero $\sqrt{2}(1,0,0) \notin G$.