(8) ⓐ Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

Sea $C_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ para $1 \leq j \leq n$.

Av es una matriz $m\times 1$ cuya coordenada $i,1$ es $[Av]_{i1} = F_i C.(v)$ (dónde . es el producto escalar). Es decir,

$$[Av]_{i1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j, \quad (1 \leq j \leq n)$$

Por lo tanto, $Av = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{nj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ c_{ij} v_j \\ \vdots \\ c_{nj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j . \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$