(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

Por hipótesis, sabemos que $\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma=0$, debemos probar que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ también satisfacen $\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma)=0$.

Luego, $\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma) = (\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\lambda_1+\lambda_3)\beta+(\lambda_2+\lambda_3)\gamma=0$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-f_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1-f_3 \\ f_2+f_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2\cdot 1/2 \\ f_2\leftrightarrow f_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1+f_3 \\ f_2-f_3}]{} Id_3$$

Concluimos que $\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma)=0$ si y solo si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, por lo tanto los vectores son LI.