

ESPACIOS VECTORIALES

En este capítulo estudiaremos en forma general las combinaciones lineales sobre conjuntos abstractos. En el primer capítulo desarrollamos el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En el método de Gauss se usan sistemáticamente las combinaciones lineales de las filas de una matriz. Podemos ver estas filas como elementos de \mathbb{K}^n y nuestro primer impulso para el estudio de las combinaciones lineales sería trabajar en este contexto, es decir en \mathbb{K}^n . Sin embargo, muchos de los resultados sobre combinaciones lineales en \mathbb{K}^n son aplicables también a conjuntos más generales y de gran utilidad en la matemática. Por lo tanto, en este capítulo nuestros “espacios vectoriales” (espacios donde pueden hacerse combinaciones lineales de vectores) serán espacios abstractos, pero usualmente haremos referencia a los espacios vectoriales “concretos” (los \mathbb{K}^n) que ya conocemos.

4.1 DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Definición 4.1.1. Sea \mathbb{K} cuerpo. Un *espacio vectorial* sobre \mathbb{K} o un \mathbb{K} -*espacio vectorial*, consiste de un conjunto V no vacío, cuyos elementos son llamados *vectores*, junto a $+$ y \cdot tal que

- a) $+: V \times V \rightarrow V$ es una operación, llamada *adición* o *suma de vectores*, tal que a dos vectores $v, w \in V$ les asigna otro vector $v + w \in V$,
- b) $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ es una operación tal que a $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ le asigna el vector $\lambda \cdot v$ (o simplemente λv). La operación \cdot es llamada el *producto por escalares*.

Además, estas operaciones deben satisfacer

- S1.** $v + w = w + v$, para $v, w \in V$ (*conmutatividad de la suma*),
- S2.** $(v + w) + u = v + (w + u)$, para $v, w, u \in V$ (*asociatividad de la suma*),
- S3.** existe un único vector 0 , llamado *vector cero*, tal que $0 + v = v + 0 = v$, para todo $v \in V$ (*existencia de elemento neutro de la suma*).
- S4.** Para cada $v \in V$, existe un único vector $-v$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (*existencia de opuesto o inverso aditivo*).
- P1.** $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$.
- P2.** $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2)v$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$.

D1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $v, w \in V$ (*propiedad distributiva*).

D2. $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$ (*propiedad distributiva*).

Debido a la ley de asociatividad para la suma $(v + w) + u$ es igual a $v + (w + u)$ y por lo tanto podemos eliminar los paréntesis sin ambigüedad. Es decir, $\forall v, w, u \in V$ denotamos

$$v + w + u := (v + w) + u = v + (w + u).$$

De forma análoga, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$ usaremos la notación

$$\lambda_1 \lambda_2 v = (\lambda_1 \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v).$$

Otra notación importante, e intuitiva, es la siguiente $\forall v, w \in V$

$$v - w := v + (-w),$$

y a menudo diremos que $v - w$ es la *resta* de v menos w .

Ejemplo. \mathbb{K}^n . Este ejemplo es una generalización de las definiciones 1.1.2 y 1.1.3. Sea \mathbb{K} cuerpo, y sea

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\} = \mathbb{K}^n.$$

Entonces V es espacio vectorial con las operaciones siguientes.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$

$$a) (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$b) \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Observar que las sumas y productos son coordenada a coordenada y, por lo tanto, en cada coordenada son sumas y productos en \mathbb{K} .

Comprobemos las propiedades necesarias para que V sea un espacio vectorial. Como la suma de vectores y el producto por escalares es coordenada a coordenada, las propiedades se deducirán fácilmente de los axiomas para la suma y el producto en los cuerpos. Sean $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n)$ en V y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

S1. $x + y = y + x$, pues $x_i + y_i = y_i + x_i, 1 \leq i \leq n$.

S2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, pues $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i), 1 \leq i \leq n$.

S3. Sea $0 = (0, \dots, 0)$, entonces $0 + x = (0 + x_1, \dots, 0 + x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x$.

S4. Sea $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$, entonces $x + (-x) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0)$.

$$\mathbf{P1.} \quad 1.x = (1.x_1, \dots, 1.x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x.$$

$$\mathbf{P2.} \quad \lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2)x \text{ pues } \lambda_1(\lambda_2 x_i) = (\lambda_1 \lambda_2)x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\mathbf{D1.} \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \text{ pues } \lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\mathbf{D2.} \quad (\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x, \text{ pues } (\lambda_1 + \lambda_2)x_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ejemplo. MATRICES $m \times n$. Sea \mathbb{K} cuerpo, definimos en $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la suma y el producto por escalares de la siguiente forma. Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrices $m \times n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $A + B$, λA son matrices en $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ con coeficientes:

$$\begin{aligned} [A + B]_{ij} &= [a_{ij} + b_{ij}], \\ [\lambda A]_{ij} &= [\lambda a_{ij}]. \end{aligned}$$

Es decir, la suma es coordenada a coordenada y el producto es multiplicar el escalar en cada coordenada. Este caso no es más que \mathbb{K}^{mn} presentado de otra manera.

Ejemplifiquemos, con casos sencillos, la suma de matrices y el producto por escalares

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. POLINOMIOS. Sea

$$\mathbb{K}[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{K}, \text{ para } 0 \leq i \leq n\}$$

el conjunto de polinomios sobre \mathbb{K} . Entonces si $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, definimos la suma de polinomios de la siguiente manera: sea $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + a_0$ (completamos coeficientes con 0 hasta que ambos tengan el mismo n), entonces

$$(p + q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda p)(x) = \lambda a_n x^n + \dots + \lambda a_1 x + \lambda a_0.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (3x^2 + 1) + (x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x) &= x^4 + 2x^3 + 8x^2 - x + 1, & y \\ 3(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x) &= 3x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 3x. \end{aligned}$$

Ejemplo. ESPACIOS DE FUNCIONES. Sean

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{tal que } f \text{ es una función}\}, \\ C(\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{tal que } f \text{ es una función continua}\}. \end{aligned}$$

Recordemos que si f, g son funciones, entonces la función suma de f y g está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la función multiplicar f por λ está definida por

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Es sencillo ver que con estas dos operaciones, $F(\mathbb{R})$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Con respecto a $C(\mathbb{R})$, hemos visto en el primer curso de análisis matemático que la suma de funciones continuas es una función continua y, por lo tanto, $f + g$ es continua si f y g lo son.

El producto de un escalar λ por una función continua f , puede ser visto como el producto de una función que es constante y vale λ (y es continua) y la función f . Por lo tanto, λf es producto de funciones continuas y, en consecuencia, es una función continua. Resumiendo,

$$f, g \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in C(\mathbb{R}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda f \in C(\mathbb{R}).$$

No es difícil ver que con estas definiciones $C(\mathbb{R})$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Ejemplo. REALES POSITIVOS. Consideremos el conjunto de los números reales positivos:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Entonces $V = \mathbb{R}_{>0}$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma $\oplus : V \times V \rightarrow V$ y el producto $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ dados por

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad c \odot x = x^c,$$

para cada $c \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Es fácil ver que los axiomas **S1.** y **S2.** sobre la conmutatividad y asociatividad, respectivamente, de la suma \oplus se siguen de las propiedades de conmutatividad y asociatividad del producto \cdot en \mathbb{R} .

La existencia del vector **0** del axioma **S3.**, neutro para la suma \oplus , requiere de cierto cuidado. Notar que este vector debe ser un elemento **0** en V (un real positivo) que cumpla $x \oplus \mathbf{0} = x$ para todo x . Ahora, $x \oplus \mathbf{0} = x \cdot \mathbf{0}$ por definición, de donde se desprende que debemos tomar $\mathbf{0} = 1$. Es decir, *el vector cero es el número 1*. De manera similar, se sigue que el opuesto indicado en el axioma **S4.** debe estar dado por $-x = x^{-1}$.

Finalmente, las propiedades de los axiomas **P1.**, **P2.**, **D1.** y **D2.** se siguen de las propiedades conocidas de la exponenciación en \mathbb{R} y quedan a cargo del lector como un interesante desafío para terminar de comprender este ejemplo.

Proposición 4.1.2. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} . Entonces,

- (1) $\lambda \cdot 0 = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (2) $0 \cdot v = 0$, para todo $v \in V$;
- (3) si $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $v \neq 0$ y $\lambda \cdot v = 0$, entonces $\lambda = 0$;
- (4) $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.

Demostración. Tanto la prueba de (1), como la de (2) son similares a la demostración de que $0 \cdot a = 0$ en \mathbb{Z} (o en \mathbb{R}).

(1) Como 0 es el elemento neutro de la suma en V , entonces $0 = 0 + 0$, luego

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0 &= \lambda \cdot (0 + 0) && \text{(propiedad distributiva } \Rightarrow) \\ \lambda \cdot 0 &= \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 && \text{(sumando a la izquierda } -\lambda \cdot 0 \Rightarrow) \\ \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 &= \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 && \text{(opuesto } \Rightarrow) \\ 0 &= \lambda \cdot 0 + 0 && \text{(elemento neutro } \Rightarrow) \\ 0 &= \lambda \cdot 0. \end{aligned}$$

(2) Análoga a (1).

(3) Supongamos que $\lambda \cdot v = 0$ y $\lambda \neq 0$, entonces, por (1), $\lambda^{-1}(\lambda \cdot v) = 0$, pero $\lambda^{-1}(\lambda \cdot v) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Luego $0 = v$, que contradice la hipótesis. El absurdo vino de suponer que $\lambda \neq 0$.

(4) $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v$, esto último es por la propiedad distributiva. Ahora bien $(-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v \stackrel{(2)}{=} 0$. Es decir $(-1) \cdot v + v = 0$ y por lo tanto $(-1) \cdot v$ es el opuesto de v (que es $-v$). \square

§ Ejercicios

- 1) Sea V un espacio vectorial y v, w dos elementos en V . Probar que si $v + w = v$, entonces $w = 0$.
- 2) ¿Cuál de los siguientes conjuntos (con la suma y multiplicación por escalares usuales) es un \mathbb{R} -espacio vectorial?
 - a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$,
 - b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$,
 - c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2\}$,
 - d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0\}$.

3) Sea

$$\mathbb{K}[x, y] := \left\{ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j : m, n \in \mathbb{N}_0, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Definir en $\mathbb{K}[x, y]$ la suma y multiplicación por constantes, de tal forma que sea un espacio vectorial. Un elemento $p(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ se dice que es un *polinomio en dos variables con coeficientes en \mathbb{K}* .

- 4) Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *impar* si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea $C^{(i)}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas e impares de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Probar que $C^{(i)}(\mathbb{R})$ con la suma de funciones y el producto por escalares usuales es un espacio vectorial.

- 5) Sea

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(t_1, t_2, t_3, \dots) : t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$$

el conjunto de sucesiones de números reales. Probar que con la suma coordenada a coordenada y la multiplicación por escalares coordenada a coordenada $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial.

- 6) Sea

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{(t_1, t_2, t_3, \dots) : t_i \in \mathbb{R} \wedge |t_i| \neq 0 \text{ para } i < \infty\}$$

el conjunto de sucesiones de *finitas* de números reales. Probar que con la suma coordenada a coordenada y la multiplicación por escalares coordenada a coordenada $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es un espacio vectorial.

4.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 4.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . diremos que $W \subset V$ es *subespacio de V* si $W \neq \emptyset$ y

- a) si para cualesquiera $w_1, w_2 \in W$, se cumple que $w_1 + w_2 \in W$ y
- b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $\lambda w \in W$.

Observación 4.2.2. Sea W subespacio de V , como $W \neq \emptyset$, tomo cualquier $w \in W$ y por **b)** tenemos que $0 \cdot w \in W$. Ya vimos en la proposición 4.1.2 (2) que $0 \cdot w = 0$ y por lo tanto $0 \in W$.

Observación 4.2.3. Si W subespacio de V y $w \in W$, entonces $-w \in W$: hemos visto (proposición 4.1.2 (4)) que $(-1)w = -w$, luego por **b)** de la definición de subespacio $-w \in W$.

Teorema 4.2.4. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y W subespacio de V . Entonces W con las operaciones suma y producto por escalares de V es un espacio vectorial.

Demostración. Para que W sea espacio vectorial sus operaciones deben satisfacer los axiomas de la definición de espacio vectorial (definición 4.1.1).

Por la observación 4.2.2, el 0 del espacio vectorial pertenece al subespacio.

Por la observación 4.2.3 concluimos que $-w \in W$. Es decir el opuesto de un vector en W también pertenece a W .

Teniendo en cuenta estos dos hechos y que las operaciones en V satisfacen los axiomas de la definición 4.1.1 (y por lo tanto en W también), queda demostrado que W , con las operaciones heredadas de V , es espacio vectorial.

□

Ejemplo. Veremos ahora una serie de ejemplos de subespacios vectoriales.

- (1) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, entonces 0 y V son subespacios vectoriales de V . Suelen ser llamados los *subespacios triviales* de V .
- (2) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $v \in V$, entonces

$$W = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial. En efecto

- a) si $\lambda_1 v, \lambda_2 v \in W$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v \in W$;
- b) $\lambda_1 v \in W$, con $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda(\lambda_1 v) = (\lambda\lambda_1)v \in W$.

El subespacio W suele ser denotado $\mathbb{K}v$.

- (3) Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $1 \leq j \leq n$. Definimos

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} (1 \leq i \leq n), x_j = 0\}.$$

Es decir W es el subconjunto de V de todas las n -tuplas con la coordenada j igual a 0. Por ejemplo si $j = 1$

$$W = \{(0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} (2 \leq i \leq n)\}.$$

Veamos que este último es un subespacio:

- a) si $(0, x_2, \dots, x_n), (0, y_2, \dots, y_n) \in W$, entonces $(0, x_2, \dots, x_n) + (0, y_2, \dots, y_n) = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, el cual pertenece a W .
- b) Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(0, x_2, \dots, x_n) = (0, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in W$.

La demostración para $j > 1$ es completamente análoga.

- (4) El conjunto $\mathbb{R}[x] = \{p(x) : p(x) \text{ es polinomio en } \mathbb{R}\}$, es subespacio de $F(\mathbb{R})$, pues $\mathbb{R}[x] \subset F(\mathbb{R})$ y las operaciones de suma y producto por un escalar son cerradas en $\mathbb{R}[x]$.
- (5) De forma análoga, el conjunto $\mathbb{R}[x]$ es subespacio de $C(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas de \mathbb{R} .
- (6) Sea $W = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A^t = A\}$. Es claro que $A \in W$ si y sólo si $[A]_{ij} = [A]_{ji}$. Veamos que W es subespacio de $M_n(\mathbb{K})$:
 - a) sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ tales que $A = A^t$ y $B = B^t$, entonces debemos verificar que $A + B \in W$, es decir que la transpuesta de $A + B$ es la misma matriz: ahora bien, $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, luego

$$[(A + B)^t]_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [A + B]_{ij},$$

por lo tanto $A + B \in W$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij}$, luego,

$$[\lambda A^t]_{ij} = \lambda a_{ji} = \lambda a_{ij} = [\lambda A]_{ij},$$

por lo tanto $\lambda A \in W$.

(7) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denotará la multiplicación de A por la matriz columna formada por x_1, \dots, x_n , es decir

$$Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, W es el subconjunto de \mathbb{K}^n de las soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, W es un subespacio de \mathbb{K}^n :

a) si $x, y \in W$, es decir si $Ax = 0$ y $Ay = 0$, entonces $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, luego $x + y \in W$;

b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in W$, entonces $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0$, luego $\lambda x \in W$.

Definición 4.2.5. Sea V espacio vectorial sobre \mathbb{K} y v_1, \dots, v_n vectores en V . Dado $v \in V$, diremos que v es *combinación lineal* de los v_1, \dots, v_n si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{K} , tal que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Ejemplo 4.2.6.

(1) Sean $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ en \mathbb{C}^2 ¿es $v = (i, 2)$ combinación lineal de v_1, v_2 ? La respuesta es sí, pues

$$v = iv_1 + 2v_2.$$

Observar además que es la única combinación lineal posible, pues si

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

entonces

$$(i, 2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2),$$

luego $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 2$.

Puede ocurrir que un vector sea combinación lineal de otros vectores de varias formas diferentes. Por ejemplo, si $v = (i, 2)$ y $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, tenemos que

$$v = iv_1 + 2v_2 + 0v_3, \quad \text{y también}$$

$$v = (i - 1)v_1 + v_2 + v_3.$$

- (2) Sean $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ en \mathbb{C}^3 ¿es $(1, 1, 0)$ combinación lineal de $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$? La respuesta es no, pues si $(1, 1, 0) = \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1)$, entonces

$$\begin{aligned}(1, 1, 0) &= \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, \lambda_2) \\ &= (0, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2),\end{aligned}$$

luego, la primera coordenada nos dice que $1 = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no existe un par $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tal que $(1, 1, 0) = \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1)$.

- (3) Demostrar que $(7, 5, 4)$ es combinación lineal de los vectores $(1, -5, 2)$, $(1, -1, 1)$ y escribir la combinación lineal explícita. Planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned}(7, 5, 4) &= \lambda_1(1, -5, 2) + \lambda_2(1, -1, 1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, -5\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2).\end{aligned}$$

Por consiguiente, esta ecuación se resuelve con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 7 \\ -5\lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4.\end{aligned}$$

Ahora bien, usando el método de Gauss

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_2+5F_1 \\ F_3-2F_1}]{F_2/4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_3+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 10$, es decir,

$$(7, 5, 4) = -3(1, -5, 2) + 10(1, -1, 1).$$

Teorema 4.2.7. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Entonces

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial. Es decir, el conjunto de las combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k es un subespacio vectorial.

Demostración. Sean $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ y $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$ dos combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k , entonces

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k) &= \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_k v_k \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k) v_k, \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de v_1, \dots, v_k y por lo tanto pertenece a W .

Ahora, si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ es una combinación lineal de v_1, \dots, v_k , entonces

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) &= \lambda(\lambda_1 v_1) + \cdots + \lambda(\lambda_k v_k) \\ &= (\lambda\lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_k) v_k, \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de v_1, \dots, v_k y por lo tanto pertenece a W . \square

Definición 4.2.8. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Al subespacio vectorial $W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$ de las combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k se lo denomina *subespacio generado por* v_1, \dots, v_k y se lo denota

$$\begin{aligned} W &= \langle v_1, \dots, v_k \rangle, & \text{o} \\ W &= \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\} & \text{o} \\ W &= \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}. \end{aligned}$$

Además, en este caso, diremos que el conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ genera al subespacio W o que los vectores v_1, \dots, v_k generan W .

4.2.1 Determinación implícita de un subespacio de \mathbb{K}^n a partir de generadores

En general, si queremos averiguar si un vector concreto $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ es combinación lineal de vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$, debemos plantear la ecuación

$$(b_1, b_2, \dots, b_m) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

y resolver el sistema correspondiente, así como lo hicimos en (3) del ejemplo 4.2.6.

Ahora consideremos $W \subset \mathbb{K}^m$ un subespacio vectorial generado por v_1, \dots, v_k , nos interesa tener una manera de decidir rápidamente si un vector está en el subespacio o no, es decir si un vector (b_1, b_2, \dots, b_m) pertenece a W o no. Para ello, debemos analizar que vectores (b_1, b_2, \dots, b_m) pueden ser solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m, \end{array}$$

donde a_{ij} son las coordenadas de los v_j . Como vimos en la sección 2.4, donde estudiamos el método de eliminación de Gauss, de la matriz ampliada original $[A \mid b]$ podemos obtener una MERF equivalente $[A' \mid b']$. Explícitamente, el sistema de ecuaciones lineales asociados a la MERF es

$$\begin{array}{rcl} x_{k_1} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{1j} x_j & = & b'_1 \\ x_{k_2} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{2j} x_j & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{rj} x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_m \end{array}$$

donde $k_1 < k_2 < \dots < k_r$. Por lo tanto, el sistema tiene solución si y solo si $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$. Luego,

$$W = \{(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m : b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0\}.$$

Las ecuaciones $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ son las ecuaciones implícitas que definen a W y nos permiten decidir rápidamente si un vector pertenece o no a W , simplemente viendo si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones.

Ejemplo 4.2.9. Ejemplificaremos con los siguientes vectores en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} v_1 &= (3, 1, 2, -1), & v_2 &= (6, 2, 4, -2), \\ v_3 &= (3, 0, 1, 1), & v_4 &= (15, 3, 8, -1) \end{aligned}$$

y el subespacio $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

En otras palabras, queremos describir implícitamente el conjunto de los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $b \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

O sea, los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \quad (*)$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. La ecuación (*), explícitamente, es el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 15\lambda_4 = b_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = b_2 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4 = b_3 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = b_4 \end{cases} \quad (**)$$

Para resolver este sistema, usaremos el método de Gauss, partiendo de la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & 15 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_1-3F_2 \\ F_3-2F_2 \\ F_4+F_2}]{F_1-3F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 6 & b_1-3b_2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_2+b_4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow[\substack{F_1-3F_3 \\ F_4-F_3}]{F_1-3F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+3b_2-3b_3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b_2-b_3+b_4 \end{array} \right] \end{array}$$

Obtenemos así un sistema de ecuaciones equivalente al original:

$$\begin{cases} 0 = b_1 + 3b_2 - 3b_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = b_2 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = -2b_2 + b_3 \\ 0 = 3b_2 - b_3 + b_4. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución si y solo si $0 = b_1 + 3b_2 - 3b_3$ y $0 = 3b_2 - b_3 + b_4$. Por lo tanto, la respuesta a nuestro problema es

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 \mid b_1 + 3b_2 - 3b_3 = 0, 3b_2 - b_3 + b_4 = 0\}.$$

Apliquemos este resultado a vectores concretos ¿el vector $(21, 5, 12, -3)$ pertenece al subespacio generado por v_1, v_2, v_3, v_4 ? La respuesta es sí, pues

$$\begin{aligned} b_1 + 3b_2 - 3b_3 &= 21 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 12 = 21 + 15 - 36 = 0 \\ 3b_2 - b_3 + b_4 &= 3 \cdot 5 - 12 + (-3) = 15 - 12 - 3 = 0. \end{aligned}$$

¿Y el vector $(-3, 1, 0, 1)$? La respuesta es no, pues

$$\begin{aligned} b_1 + 3b_2 - 3b_3 &= -3 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -3 + 3 = 0 \\ 3b_2 - b_3 + b_4 &= 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4 \neq 0. \end{aligned}$$

Si alguna de las ecuaciones no se satisface, el vector no puede pertenecer al subespacio. En este caso, la segunda ecuación no se satisface y por lo tanto el vector no pertenece al subespacio.

4.2.2 Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema 4.2.10. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Entonces la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demostración. Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios vectoriales y sea

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i.$$

Primero debemos notar que dado $i \in I$, como W_i es un subespacio, entonces $0 \in W_i$ (observación 4.2.2) y por lo tanto $0 \in \bigcap_{i \in I} W_i = W$. Esto nos dice que $W \neq \emptyset$.

Probemos ahora las condiciones de suma y producto por escalares:

- (a) si $w_1, w_2 \in W$, tenemos que $w_1, w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, luego, como W_i es subespacio vectorial, $w_1 + w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto $w_1 + w_2 \in W$;
- (b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $w \in W_i$ para todo $i \in I$ y, por lo tanto, $\lambda w \in W_i$ para todo $i \in I$. En consecuencia $\lambda w \in W$.

□

Observación. Si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial, S y T subespacios de V , entonces $S \cup T$ no es necesariamente un subespacio de V . En efecto, consideremos en \mathbb{R}^2 los subespacios $S = \mathbb{R}(1, 0)$ y $T = \mathbb{R}(0, 1)$. Observamos que $(1, 0) \in S$ y $(0, 1) \in T$; luego, ambos pertenecen a $S \cup T$. Pero $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S \cup T$, puesto que $(1, 1) \notin S$ y $(1, 1) \notin T$.

Teorema 4.2.11. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Entonces, la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a v_1, \dots, v_k es igual a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Demostración. Denotemos $W_1 = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ y W_2 la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a v_1, \dots, v_k . Probaremos que $W_1 = W_2$ con la doble inclusión, es decir probando que $W_1 \subseteq W_2$ y $W_2 \subseteq W_1$.

($W_1 \subseteq W_2$). Sea W subespacio vectorial que contiene v_1, \dots, v_k . Como W es subespacio, entonces W contiene a cualquier combinación lineal de los v_1, \dots, v_k , por lo tanto W contiene a W_1 . Es decir, cualquier subespacio que contiene a v_1, \dots, v_k , también contiene a W_1 , por lo tanto la intersección de todos los subespacios que contienen a v_1, \dots, v_k , contiene a W_1 . Luego $W_2 \supseteq W_1$.

($W_2 \subseteq W_1$). W_1 es un subespacio que contiene a v_1, \dots, v_k , por lo tanto la intersección de todos los subespacios que contienen a v_1, \dots, v_k está contenida en W_1 . Es decir, $W_2 \subseteq W_1$. □

Definición 4.2.12. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean S_1, \dots, S_k subconjuntos de V . definimos

$$S_1 + \dots + S_k := \{s_1 + \dots + s_k : s_i \in S_i, 1 \leq i \leq k\},$$

el conjunto *suma de los* S_1, \dots, S_k .

Teorema 4.2.13. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean W_1, \dots, W_k subespacios de V . Entonces $W = W_1 + \dots + W_k$ es un subespacio de V .

Demostración. Sean $v = v_1 + \dots + v_k$ y $w = w_1 + \dots + w_k$ en W y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces

- a) $v + w = (v_1 + w_1) + \dots + (v_k + w_k) \in W_1 + \dots + W_k$, pues como W_i es subespacio de V , tenemos que $v_i + w_i \in W_i$.
- b) $\lambda v = \lambda(v_1 + \dots + v_k) = \lambda v_1 + \dots + \lambda v_k \in W_1 + \dots + W_k$, pues como W_i es subespacio de V , tenemos que $\lambda v_i \in W_i$.

□

Proposición 4.2.14. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean v_1, \dots, v_r elementos de V . Entonces

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle.$$

Demostración. Probemos el resultado viendo que los dos conjuntos se incluyen mutuamente.

(\subseteq) Sea $w \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, luego $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. Como $\lambda_i v_i \in \langle v_i \rangle$, $1 \leq i \leq r$, tenemos que $w \in \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$.

(\supseteq) Si $w \in \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$, entonces $w = w_1 + \dots + w_r$ con $w_i \in \langle v_i \rangle$ para todo i . Por lo tanto, $w_i = \lambda_i v_i$ para algún $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. □

Ejemplo. Veremos una serie de ejemplos de subespacios, suma e intersección de subespacios.

(1) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{C}^5$. Consideremos los vectores

$$v_1 = (1, 2, 0, 3, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1, 4, 0), \quad v_3 = (0, 0, 0, 0, 1),$$

y sea $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Ahora bien, $w \in W$, si y sólo si $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Es decir

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1(1, 2, 0, 3, 0) + \lambda_2(0, 0, 1, 4, 0) + \lambda_3(0, 0, 0, 0, 1) \\ &= (\lambda_1, 2\lambda_1, 0, 3\lambda_1, 0) + (0, 0, \lambda_2, 4\lambda_2, 0) + (0, 0, 0, 0, \lambda_3) \\ &= (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2, 3\lambda_1 + 4\lambda_2, \lambda_3) \end{aligned}$$

Luego, también podríamos escribir

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 : x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_3 \right\}.$$

(2) Sea $V = M_2(\mathbb{C})$ y sean

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} : y_1, y_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Es claro que cada uno de estos conjuntos es un subespacio, pues,

$$W_1 = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{C} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{C} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $W_1 + W_2 = V$. En efecto, sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$, entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 \\ x_3 & y_2 \end{bmatrix},$$

y esto se cumple tomando $x_1 = a, y_1 = 0, x_2 = b, x_3 = c, y_2 = d$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{matrix} (a = x_1, b = x_2, c = x_3, d = 0) \wedge \\ (a = y_1, b = c = 0, d = y_2) \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

§ Ejercicios

- 1) Probar que los siguientes subconjunto de \mathbb{R}^2 son subespacios.
 - a) El conjunto de las (x, y) tales que $x = y$.
 - b) El conjunto de las (x, y) tales que $x - y = 0$.
 - c) El conjunto de las (x, y) tales que $x + 4y = 0$.
- 2) Probar que toda recta que pasa por el origen en \mathbb{R}^2 es un subespacio de \mathbb{R}^2 .
- 3) Probar que los siguientes subconjunto de \mathbb{R}^3 son subespacios.
 - a) El conjunto de las (x, y, z) tales que $x + y + z = 0$.
 - b) El conjunto de las (x, y, z) tales que $x = y$ y $2y = z$.
 - c) El conjunto de las (x, y, z) tales que $x + y = 3z$.
- 4) Probar que toda plano que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

5) Una *recta* en \mathbb{R}^3 esta definida por

$$L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d \wedge a'x + b'y + c'z = d'\}$$

para ciertos coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todos nulos, $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ no todos nulos y tal que (a', b', c') no sea múltiplo de (a, b, c) . Diremos que la recta L *pasa por el origen* si $d = d' = 0$.

Probar que toda recta que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

6) Sea X subconjunto de \mathbb{R}^n y considere el conjunto

$$X^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp x, \forall x \in X\}.$$

a) Probar que X^\perp es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

b) Probar que $(X^\perp)^\perp \supseteq X$.

7) Consideremos $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} . Sean $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$. Probar que

$$W = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(t_1) = 0, \dots, p(t_k) = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}[x]$.

8) Sea V un espacio vectorial y U, W subespacios de V . Diremos que V es *suma directa* de U y W , y denotaremos

$$V = U \oplus W,$$

si $V = U + W$ y $U \cap W = 0$.

a) Demostrar que $V = U \oplus W$ si y solo si para todo $v \in V$ existen únicos $u \in U, w \in W$ tal que $v = u + w$.

b) Demostrar que si $V = U \oplus W$, Entonces

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

9) Sea $V = \mathbb{K}^3$. Sea W el subespacio generado por $(1, 0, 0)$, y sea U el subespacio generado por $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Demuestre que $V = W \oplus U$.

4.3 BASES Y DIMENSIÓN

Definición 4.3.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Un subconjunto S de V se dice *linealmente dependiente* (o simplemente, *LD* o *dependiente*) si existen vectores distintos $v_1, \dots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de \mathbb{K} , no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice *linealmente independiente* (o simplemente, *LI* o *independiente*).

Si el conjunto S tiene solo un número finito de vectores v_1, \dots, v_n , diremos, para simplificar, que los v_1, \dots, v_n son LD (o LI), en vez de decir que S es LD (o LI, respectivamente).

Proposición 4.3.2. Sea V un espacio vectorial y $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces v_1, \dots, v_n son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que son LD. Entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ donde algún escalar es no nulo. Digamos que tal escalar es λ_i . Podemos entonces despejar v_i , es decir escribirlo como combinación lineal de los otros:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

(\Leftarrow) Supongamos que v_i es combinación lineal de los otros, es decir

$$\begin{aligned} v_i &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ \Rightarrow 0 &= \lambda_1 v_1 + \dots - v_i + \dots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

como $-1 \neq 0$ esta multiplicando a v_i , la última igualdad dice que los vectores son LD. \square

Por definición, un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ es independiente si se cumple cualquiera de las dos afirmaciones siguientes:

- (LI 1) $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{K} tal que $\lambda_i \neq 0$ para algún i , entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \neq 0$, o ,
- (LI 2) si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{K} tales que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, entonces $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$.

El enunciado (LI 1) se deduce intuitivamente negando la definición de linealmente dependiente y el resultado (LI 2) es el contrarrecíproco de (LI 1).

Observación. Para los interesados, lo anterior es un ejercicio de lógica: ser LD se puede enunciar

$$(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : (\exists i : \lambda_i \neq 0) \wedge (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0)). \quad (\text{LD})$$

Recordar que $\neg(\exists \lambda : P \wedge Q) \equiv (\forall \lambda : \neg P \vee \neg Q)$ y que $\neg P \vee \neg Q \equiv P \Rightarrow \neg Q$. Luego la negación de (LD), es decir ser LI, es

$$(\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n : (\exists i : \lambda_i \neq 0) \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \neq 0). \quad (\text{LI 1})$$

Como $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$, el contrarrecíproco, la propiedad (LI 1) es equivalente a

$$(\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n : (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0) \Rightarrow (\forall i : \lambda_i = 0)). \quad (\text{LI 2})$$

Las siguientes afirmaciones son consecuencias fácilmente deducibles de la definición.

- (1) Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.
- (2) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
- (3) Todo conjunto que contiene el vector 0 es linealmente dependiente; en efecto, $1 \cdot 0 = 0$.

Ejemplo. En \mathbb{R}^3 los vectores $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$ son LI, pues si $\lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(-1, 1, 1) = 0$, entonces $0 = (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$, y esto es cierto si

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_1 = -\lambda_2$, por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Es decir, hemos visto que

$$\lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(-1, 1, 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

y, por lo tanto, $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$ son LI.

Ejemplo. Sea \mathbb{K} cuerpo. En \mathbb{K}^3 los vectores

$$\begin{aligned}v_1 &= (3, 0, -3) \\ v_2 &= (-1, 1, 2) \\ v_3 &= (4, 2, -2) \\ v_4 &= (2, 1, 1)\end{aligned}$$

son linealmente dependientes, pues

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0 \cdot v_4 = 0.$$

Por otro lado, los vectores

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

son linealmente independientes.

Observación. En general, en \mathbb{K}^m , si queremos determinar si v_1, \dots, v_n es LI, planteamos la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = (0, \dots, 0),$$

que, viéndola coordenada a coordenada, es equivalente a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (que son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). Si la única solución es la trivial entonces v_1, \dots, v_n es LI. Si hay alguna solución no trivial, entonces v_1, \dots, v_n es LD.

Definición 4.3.3. Sea V un espacio vectorial. Una *base* de V es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ tal que

- (1) \mathcal{B} genera a V , y
- (2) \mathcal{B} es LI.

El espacio V es de *dimensión finita* si tiene una base finita, es decir con un número finito de elementos.

Ejemplo (BASE CANÓNICA DE \mathbb{K}^n). Sea el espacio vectorial \mathbb{K}^n y sean

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

(e_i es el vector con todas sus coordenadas iguales a cero, excepto la coordenada i que vale 1). Entonces veamos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{K}^n .

Probemos que e_1, \dots, e_n genera \mathbb{K}^n : si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Por lo tanto, e_1, \dots, e_n genera a \mathbb{K}^n .

Probemos que e_1, \dots, e_n es LI: si

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Luego, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ y por lo tanto e_1, \dots, e_n es LI.

Para $1 \leq i \leq n$, al vector e_i se lo denomina el *i-ésimo vector canónico* y a la base $\mathcal{C}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ se la denomina la *base canónica* de \mathbb{K}^n .

Ejemplo. Sea P una matriz $n \times n$ invertible con elementos en el cuerpo \mathbb{K} . Entonces si C_1, \dots, C_n son los vectores columna de P (ver definición 4.4.1), estos forman una base de \mathbb{K}^n . Eso se verá como sigue. Si $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, lo podemos ver como columna y

$$PX = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n.$$

Como $PX = 0$ tiene solo la solución trivial $X = 0$, se sigue que $\{C_1, \dots, C_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. ¿Por qué generan \mathbb{K}^n ? Sea $Y \in \mathbb{K}^n$, si $X = P^{-1}Y$, entonces $Y = PX$, esto es

$$Y = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n.$$

Así, $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una base de \mathbb{K}^n .

Ejemplo. Sea $\mathbb{K}_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor que n con coeficientes en \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}_n[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} : a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Entonces $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ es una base de $\mathbb{K}_n[x]$. Es claro que los $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ generan $\mathbb{K}_n[x]$. Por otro lado, si $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$, tenemos que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ejemplo (BASE CANÓNICA DE $M_{m \times n}(\mathbb{K})$). Sean $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$[E_{ij}]_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es decir E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 0, excepto la entrada ij que vale 1. En el caso 2×2 tenemos las matrices

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volviendo al caso general, es claro que si $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}, \quad (4.3.1)$$

luego $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ genera $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. También, por la ecuación (4.3.1), es claro que si $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = 0$, entonces $a_{ij} = 0$ para todo i y j . Luego, $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ es LI.

Concluyendo, $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ es una base de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y se la denomina la *base canónica* de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Observación. ¿Todo espacio vectorial tiene una base? La respuesta es *sí*. Sin embargo, la demostración de este hecho no es sencilla y requiere de herramientas de la teoría de conjuntos, en particular del Lema de Zorn. El lector interesado podrá ver el artículo sobre bases de un espacio vectorial en la Wikipedia: [https://es.wikipedia.org/wiki/Base_\(álgebra\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Base_(álgebra)) y una demostración de la existencia de bases para cualquier espacio vectorial en <http://fernandorevilla.es/blog/2014/06/22/existencia-de-base-en-todo-espacio-vectorial>.

Más allá, de la dificultad en la demostración, supondremos siempre que todo espacio vectorial tiene una base.

Si S es un conjunto finito denotemos $|S|$ al *cardinal* de S es decir, la cantidad de elementos de S .

Teorema 4.3.4. *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores w_1, \dots, w_m . Entonces todo conjunto independiente de vectores de V es finito y contiene a lo más m elementos.*

Demostración. Sea $V = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ y $S \subset V$. El enunciado del teorema es equivalente a decir:

$$\text{si } S \text{ es LI} \Rightarrow |S| \leq m.$$

Para demostrar este teorema es suficiente probar el contrarrecíproco del enunciado, es decir:

$$\text{si } |S| > m \Rightarrow S \text{ es LD},$$

o, dicho de otra forma, todo subconjunto S de V que contiene más de m vectores es linealmente dependiente. Sea S un tal conjunto, entonces $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ con $n > m$. Como w_1, \dots, w_m generan V , existen escalares a_{ij} en \mathbb{K} tales que

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad (1 \leq j \leq n).$$

Probaremos ahora que existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$. Ahora bien, para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \dots + x_n v_n &= \sum_{j=1}^n x_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (x_j a_{ij}) w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) w_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Si cada coeficiente que multiplica a cada w_i es nulo, entonces $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$. Vamos a ver ahora que existen x_1, \dots, x_n no todos nulos tal que los coeficientes que multiplica a w_i en $(*)$ sean todos nulos. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0, \quad (1 \leq i \leq m)$$

tiene m ecuaciones y $n > m$ incógnitas, luego, por el teorema 2.4.7, existen escalares $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0$, ($1 \leq i \leq m$) y, por (*)

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) w_i = \sum_{i=1}^m 0 \cdot w_i = 0,$$

con algún $x_i \neq 0$. Esto quiere decir que los v_1, \dots, v_n son LD. □

Corolario 4.3.5. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración. Como V es de dimensión finita, tiene una base finita \mathcal{B} de m vectores, es decir, \mathcal{B} es base de V y $|\mathcal{B}| = m$. Sea \mathcal{B}' otra base de V , como \mathcal{B} genera V y \mathcal{B}' es un conjunto LI, entonces, por el teorema anterior, $|\mathcal{B}'| \leq m$. Sea $n = |\mathcal{B}'|$, entonces $n \leq m$. Por otro lado \mathcal{B}' es base y, por lo tanto, genera V y \mathcal{B} es LI, luego, por el teorema anterior nuevamente, $m \leq n$, y en consecuencia $m = n$. □

Hemos demostrado, si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V , entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 4.3.6. Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que n es la dimensión de V y denotaremos $\dim V = n$, si existe una base de V de n vectores. Si $V = \{0\}$, entonces definimos $\dim V = 0$.

Ejemplo. Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

- (1) $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.
- (2) $\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$, pues la base canónica de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tiene mn elementos.
- (3) $\dim \mathbb{K}_n[x] = n$, pues $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ es una base.

Corolario 4.3.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

- (1) cualquier subconjunto de V con más de n vectores es linealmente dependiente;
- (2) ningún subconjunto de V con menos de n vectores puede generar V .

Demostración.

- (1) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , entonces v_1, \dots, v_n generan V , luego, por el teorema 4.3.4, cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores es LD.

- (2) Sea S subconjunto de V con $m < n$ vectores. Si S genera V , entonces todo subconjunto de más de m vectores es LD (teorema 4.3.4), por lo tanto, un subconjunto de n vectores es LD. En consecuencia, no puede haber una base de n elementos, lo cual contradice la hipótesis.

□

Lema 4.3.8. Sea S un subconjunto LI de un espacio vectorial V . Suponga que w es un vector de V que no pertenece al subespacio generado por S . Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración. Suponga que v_1, \dots, v_n son vectores distintos de S y sean $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0. \quad (4.3.2)$$

Debemos probar que $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, y $\lambda = 0$. Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación por λ y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Luego w estaría en el subespacio generado por S , lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $\lambda = 0$ y, en consecuencia

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como S es un conjunto linealmente independiente, todo $\lambda_i = 0$.

□

Teorema 4.3.9. Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V . Entonces S_0 es finito y existen w_1, \dots, w_m vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \dots, w_m\}$ es una base de V .

Demostración. Se extiende S_0 a una base de V , como sigue. Si S_0 genera V , entonces S_0 es una base de V y está demostrado. Si S_0 no genera V , por el lema anterior se halla un vector w_1 en V tal que el conjunto $S_1 = S_0 \cup \{w_1\}$ es independiente. Si S_1 genera V , está demostrado. Si no, se aplica el lema para obtener un vector w_2 en V tal que el conjunto $S_2 = S_1 \cup \{w_2\} = S_0 \cup \{w_1, w_2\}$ es independiente. Si se continúa de este modo, entonces (y en no más de $\dim V$ de etapas) se llega a un conjunto

$$S_m = S_0 \cup \{w_1, \dots, w_m\}$$

que es independiente y que genera V (si no, continuamos), por lo tanto S_m es base de V .

□

Es decir, todo subconjunto LI de un espacio vectorial de dimensión finita se puede completar a una base.

Corolario 4.3.10. *Sea W es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de W . Entonces, S_0 se puede completar a una base de W .*

Demostración. Como S_0 es un conjunto linealmente independiente de W , entonces S_0 es también un subconjunto linealmente independiente de V ; como V es de dimensión finita, S_0 no tiene más de n elementos y por lo tanto es finito.

Como W es un espacio vectorial, aplicando el teorema anterior completamos a una base de W . \square

Corolario 4.3.11. *Sea V espacio vectorial de dimensión finita y $V \neq \{0\}$, entonces $\dim V > 0$.*

Demostración. Como $V \neq \{0\}$, existe $v \in V$ con $v \neq 0$. Entonces, $S_0 = \{v\}$ es LI, pues $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Por el teorema anterior, S_0 se extiende a una base B . Como $|B| \geq |S_0| = 1$, tenemos que $\dim V > 0$. \square

Corolario 4.3.12. *Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V , entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.*

Demostración. Si $W = \{0\}$, entonces $\dim W = 0$, como $W \subsetneq V$, tenemos que V es no nulo y por lo tanto $\dim W = 0 < \dim V$.

Si $W \neq \{0\}$, sea S subconjunto LI de W . Claramente S también es LI en V y por lo tanto $|S| < \dim(V)$. El axioma de buena ordenación nos garantiza que existe S subconjunto LI de W con $|S|$ máximo.

Veamos que S genera W . Si S no generara a W , entonces existiría $w \in W$ y $w \notin \langle S \rangle$. Como S es LI, por lema 4.3.8, $S \cup \{w\}$ es LI, está incluido en W y tiene cardinal mayor a S . Esto es un absurdo por la maximalidad de S .

Por lo tanto S es un conjunto LI que genera W , es decir, S es una base de W .

Como W es un subespacio propio de V existe un vector v en V que no está en W . Agregando v a la base S de W se obtiene un subconjunto LI de V (lema 4.3.8). Así, $\dim W < \dim V$. \square

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. Veremos ahora que dado un conjunto finito de generadores, existe un subconjunto que es una base.

Teorema 4.3.13. *Sea $V \neq 0$ espacio vectorial y S un conjunto finito de generadores de V , entonces existe un subconjunto B de S que es una base.*

Demostración. Sea

$$C = \{|R| : R \subseteq S \wedge R \text{ es LI}\}.$$

Como V no es nulo y S genera V , S contiene algún vector no nulo, que obviamente es LI, Luego, $C \neq \emptyset$. Ahora bien, C es un subconjunto no vacío

de \mathbb{N} y acotado superiormente por $|S|$, entonces por el axioma de buena ordenación tiene máximo.

Sea n el máximo de C entonces existe $\mathcal{B} \subseteq S$ tal que $|\mathcal{B}| = n$ y \mathcal{B} es LI. Veremos que \mathcal{B} es una base. Para ello, como \mathcal{B} es LI, sólo falta ver que \mathcal{B} genera a V .

Supongamos que existe $v \in S$ tal que $v \notin \langle \mathcal{B} \rangle$. Por el lema 4.3.8, entonces $\mathcal{B} \cup \{v\}$ es LI y este subconjunto LI de S tiene $n + 1$ elementos, lo cual contradice la maximalidad de n . Es claro entonces, que $v \in S \Rightarrow v \in \mathcal{B}$, es decir $S \subset \langle \mathcal{B} \rangle$. Como $S \subset \langle \mathcal{B} \rangle$, entonces $V = \langle S \rangle \subset \langle \mathcal{B} \rangle$, es decir $V = \langle \mathcal{B} \rangle$. \square

Teorema 4.3.14. *Si W_1 , y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Demostración. El conjunto $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de W_1 y W_2 y por lo tanto un espacio vectorial de dimensión finita. Sea u_1, \dots, u_k una base de $W_1 \cap W_2$, por el teorema 4.3.9, existen v_1, \dots, v_n vectores en W_1 y w_1, \dots, w_m vectores en W_2 tal que

$$\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\} \text{ es una base de } W_1,$$

y

$$\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\} \text{ es una base de } W_2.$$

Es claro que, el subespacio $W_1 + W_2$ es generado por los vectores

$$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m.$$

Veamos que estos vectores forman un conjunto independiente. En efecto, suponga que

$$\sum \lambda_i u_i + \sum \gamma_i v_i + \sum \mu_i w_i = 0, \quad (4.3.3)$$

luego

$$\sum \mu_i w_i = -\sum \lambda_i u_i - \sum \gamma_i v_i.$$

Por lo tanto, $\sum \mu_i w_i \in (W_1 \cap W_2) + W_1 = W_1$. Es decir, $\sum \mu_i w_i \in W_2$ y $\sum \mu_i w_i \in W_1$, por lo tanto $\sum \mu_i w_i \in (W_1 \cap W_2)$, y entonces

$$\sum \mu_i w_i = \sum \alpha_i u_i \Rightarrow 0 = \sum \alpha_i u_i - \sum \mu_i w_i.$$

Como $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ es una base y por lo tanto LI, tenemos que $0 = \alpha_i = \mu_j$, para todo i, j . Por lo tanto, por (4.3.3),

$$\sum \lambda_i u_i + \sum \gamma_i v_i = 0. \quad (4.3.4)$$

Como $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$ es una base de W_1 , tenemos que también $0 = \lambda_i = \gamma_j$ para todo i, j . Luego $0 = \lambda_i = \gamma_j = \mu_r$, para cualesquiera i, j, r y por

lo tanto $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ es LI y como generaban a $W_1 + W_2$ resultan ser una base de $W_1 + W_2$, por lo tanto $\dim(W_1 + W_2) = k + n + m$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\dim W_1 + \dim W_2 &= (k + n) + (k + m) \\ &= k + (k + n + m) \\ &= \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).\end{aligned}$$

□

§ Ejercicios

- 1) Determinar si cada uno de los siguiente conjuntos es una base de \mathbb{R}^3 .
 - a) $S_1 = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 0, 1)\}$,
 - b) $S_2 = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$,
 - c) $S_3 = \{(0, 2, -1), (1, 1, 1), (2, 5, 0)\}$,
 - d) $S_4 = \{(0, 2, -1), (1, 1, 1), (1, 3, 0)\}$.
- 2) Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{K}[x]$ son LI y en caso de serlo extender a una base.
 - a) $U_1 = \{x, x^2 + 2x, x^2 + 3x + 1, x^3\}$,
 - b) $U_2 = \{1, x, x + x^2, x^2 + x^3\}$,
 - c) $U_3 = \{1, x^2 + x, x^2 + x, x^3\}$.
- 3) Encuentre una base para cada uno de estos subespacios del espacio $\mathbb{K}_4[x]$ de los polinomios de grado menor o igual a 3.
 - a) El subespacio de polinomios $p(x)$ en $\mathbb{K}_4[x]$ tal que $p(7) = 0$.
 - b) El subespacio de polinomios $p(x)$ tal que $p(7) = 0$ y $p(5) = 0$.
 - c) El subespacio de polinomios $p(x)$ tal que $p(7) = 0$, $p(5) = 0$ y $p(3) = 0$.
 - d) El espacio de polinomios $p(x)$ tal que $p(7) = 0$, $p(5) = 0$, $p(3) = 0$ y $p(1) = 0$.
- 4) Probar que los polinomios $p_1 = x^5 + x^4$, $p_2 = x^5 + 7x^3$, $p_3 = x^5 + 1$, $p_4 = x^5 + 3x$ son LI en $\mathbb{K}_6[x]$ (polinomios de grado menor que 6) y extender $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ a una base de $\mathbb{K}_6[x]$.
- 5) Sean $\mathbb{K}[x, y]$ los polinomios en 2 variables con coeficientes en \mathbb{K} (ver sección 4.1, ejercicio 3). Encontrar una base de $\mathbb{K}[x, y]$.
- 6) Sean u_1, \dots, u_k vectores mutuamente ortogonales en \mathbb{R}^n , es decir $u_i \perp u_j$ si $i \neq j$. Probar que $\{u_1, \dots, u_k\}$ es un conjunto LI.

- 7) Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una base ortogonal de \mathbb{R}^n (ver definición 1.7.1), es decir \mathcal{B} es un conjunto de n vectores mutuamente ortogonales. Probar que \mathcal{B} es una base en el sentido de la definición 4.3.3.
- 8) Sea e_i en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ definido como el vector que tiene el coeficiente 1 en la coordenada i y todas las demás coordenadas iguales a 0 (para la definición de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ver sección 4.1, ejercicios 5 y 6).
Probar que $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
¿Es \mathcal{B} una base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

4.4 DIMENSIONES DE SUBESPACIOS

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, ya hemos visto que las soluciones del sistema $AX = 0$ forman un subespacio vectorial. Sea R la MERF equivalente por filas a A y r la cantidad de filas no nulas de R . Ahora bien, cada fila no nula está asociada a una variable principal y las $n - r$ variables restantes son variables libres que generan todas las soluciones. El hecho de que tenemos $n - r$ variables libres no dice que hay $n - r$ vectores LI que generan W , y por lo tanto, $\dim W = n - r$. Esto lo veremos en el ejemplo que sigue. La demostración de hecho mencionado más arriba se verá en el capítulo correspondiente a transformaciones lineales (capítulo 5).

Ejemplo. Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} x - y - 3z + w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución. W está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define W es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 4w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0, \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{rcl} x & = & -2z - 4w \\ y & = & -5z - 3w, \end{array}$$

y entonces

$$\begin{aligned} W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$ es una base de W y, por lo tanto, su dimensión es 2. \square

Definición 4.4.1. Sea $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. El *vector fila* i es el vector $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$. El *espacio fila* de A es el subespacio de \mathbb{K}^n generado por los m vectores fila de A . De forma análoga, se define el vector columna j al vector $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ y el *espacio columna* de A es el subespacio de \mathbb{K}^m generado por los n vectores columna de A .

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 5},$$

entonces, por definición, el espacio fila es el subespacio generados por las filas de la matriz:

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle_{\mathbb{C}}.$$

También, como vimos en (1) del ejemplo de la página 124, el espacio fila puede ser caracterizado de forma implícita:

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 : x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_3 \right\}.$$

Teorema 4.4.2. Sean A matriz $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} , P matriz $m \times m$ invertible y $B = PA$. Entonces el espacio fila de A es igual al espacio fila de B .

Demostración. Sea $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Como $B = PA$, tenemos que la fila i de B es

$$\begin{aligned} (b_{i1}, \dots, b_{in}) &= (F_i(P) \cdot C_1(A), \dots, F_i(P) \cdot C_n(A)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m p_{ij} a_{jn} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m p_{ij} (a_{j1}, \dots, a_{jn}). \end{aligned}$$

Luego, cada vector fila de B se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de A , y por lo tanto el espacio fila de B está incluido en el espacio fila de A .

Ahora bien, como P invertible, podemos multiplicar por P^{-1} a izquierda la fórmula $B = PA$, y obtenemos $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$. Haciendo el mismo razonamiento que arriba concluimos que también el espacio fila de A está incluido en el espacio fila de B y por lo tanto son iguales. \square

Corolario 4.4.3. Sean A matriz $m \times n$ y R la MRF equivalente por filas a A . Entonces, el espacio fila de A es igual al espacio fila de R y las filas no nulas de R forman una base del espacio fila de A .

Demostración. $R = PA$, donde P es una matriz $m \times m$ invertible, luego, por el teorema anterior, el espacio fila de A es igual al espacio fila de R . Calculemos ahora cual es la dimensión del espacio fila de R . Veamos que filas no nulas de R son LI.

Recordemos que por definición de MRF cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0, por lo tanto una combinación lineal no trivial resulta en un vector no nulo: si v es una fila no nula de R , con el 1 principal en la coordenada i y $\lambda \neq 0$, entonces λv vale λ en la posición i y esta coordenada no puede ser anulada por la combinación de otras filas. \square

Corolario 4.4.4. Sean A matriz $n \times n$. Entonces, A es invertible si y sólo si las filas de A son una base de \mathbb{K}^n .

Demostración. Si A es invertible entonces la MERF de A es la identidad, por lo tanto el espacio fila de A genera \mathbb{K}^n .

Por otro lado, si el espacio fila de A genera \mathbb{K}^n , el espacio fila de la MERF es \mathbb{K}^n y por lo tanto la MERF de A es la identidad y en consecuencia A es invertible.

Hemos probado que A es invertible si y sólo si las n filas de A generan \mathbb{K}^n . Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, todo conjunto de n generadores es una base. \square

El corolario 4.4.3 nos provee un método para encontrar una base de un subespacio de \mathbb{K}^n generado por m vectores: si $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ y $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

donde las filas son los vectores v_1, \dots, v_m . Luego calculamos R , una MRF equivalente por filas a A , y si R tiene r filas no nulas, las r filas no nulas son una base de W y, por consiguiente, $\dim W = r$.

Ejemplo. Encontrar una base de $W = \langle (1, 0, 1), (1, -1, 0), (5, -3, 2) \rangle$.

Solución. Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan W , es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 5F_1}]{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim W = 2$ y $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ es una base de W . \square

El método que nos provee el corolario 4.4.3 nos permite encontrar una base de un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n a partir de un conjunto de generadores del subespacio. Como vimos en el teorema 4.3.13, en todo conjunto finito de generadores existe un subconjunto que es una base. El siguiente teorema nos permite encontrar uno de tales subconjuntos.

Teorema 4.4.5. Sea v_1, \dots, v_r vectores en \mathbb{K}^n y $W = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Sea A la matriz formada por las filas v_1, \dots, v_r y R una MRF equivalente por filas a A que se obtiene sin el uso de permutaciones de filas. Si i_1, i_2, \dots, i_s son las filas no nulas de R , entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W .

Demostración. Se hará por inducción sobre r .

Si $r = 1$ es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para $r - 1$ (hipótesis inductiva).

Sea $W' = \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$ y sea A' la matriz formada por las $r - 1$ filas v_1, \dots, v_{r-1} . Sea R' la MRF equivalente por filas a A' que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si i_1, i_2, \dots, i_s son las filas no nulas de R' , entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W' .

Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si $v_r \in W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de A .

Si $v_r \notin W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}, v_r$ es una base de W (lema 4.3.8) y la MRF de A tiene la última fila no nula. \square

Ejemplo. Sea $S = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (5, -3, 2)\}$ y $W = \langle S \rangle$. Encontrar una base de W que sea un subconjunto de S .

Solución. Hemos visto en el ejemplo de la página 139 que una MRF de A es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y que la misma se obtiene sin usar permutaciones. Esta matriz tiene las dos primeras filas no nulas, por lo tanto, $\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ es una base de W . \square

Finalmente, terminaremos esta sección con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

Teorema 4.4.6. Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Entonces son equivalentes

- (1) A es invertible.
- (2) A es equivalente por filas a Id_n .
- (3) A es producto de matrices elementales.
- (4) El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.
- (5) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.
- (6) $\det A \neq 0$.
- (7) Las filas de A son LI.
- (8) Las columnas de A son LI.

Demostración. Por teoremas 3.4.6 y 3.4.9, tenemos que (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5).

(1) \Leftrightarrow (6). Por teorema 3.5.9.

(1) \Leftrightarrow (7). Por corolario 4.4.4.

(1) \Leftrightarrow (8). A invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible \Leftrightarrow las filas de A^t son LI \Leftrightarrow las columnas de A son LI. \square

§ Ejercicios

- 1) Encontrar una base del espacio fila de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 2) En los siguientes casos, encontrar un subconjunto de S que sea base de $\langle S \rangle$.

a) $S = \{(1, 2, 1), (3, 2, -2), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$

b) $S = \{(0, -2, 4, 1), (1, -1, 1, 1), (-4, -1, 3, 0), (2, -1, 1, 1)\}.$

c) $S = \{(3, -1, 4, 1), (-1, 0, 8, 0), (1, -1, 2, 1), (2, -1, 12, 1), (2, -1, 0, 1)\}.$

- 3) Encontrar una base de $\mathbb{K}_5[x]$ tal que todos los elementos de la base sean polinomios mónicos de grado 4.
- 4) En una matriz 4×5 , cuál conjunto es LD ¿el conjunto de filas o el conjunto de columnas?