(7) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Reducimos A a la MERF asociada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - f_1 \\ \vdots \\ f_{100} - f_1}]{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 99 & 99 & 99 & \cdots & 99 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_4 - 3f_2 \\ \vdots \\ f_{100} - 99f_2}]{f_3 - 2f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdots & -2014 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema ahora es $\begin{cases} k_1 - k_3 - 2k_4 - \cdots - 2014k_{2016} = 0 \\ k_2 + 2k_3 + 3k_4 + \cdots + 2015k_{2016} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \sum\limits_{n=3}^{2016} (n-2)k_n \\ k_2 = \sum\limits_{n=3}^{2016} (1-n)k_n \end{cases}$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es $\left\{ \left(\sum\limits_{n=3}^{2016} (n-2)k_n, \sum\limits_{n=3}^{2016} (1-n)k_n, k_3, k_4, \dots, k_{2016} \right) : k_3, k_4, \dots, k_{2016} \in \mathbb{R} \right\}$

b) Podemos repetir la secuencia de operaciones sobre el vector de unos para obtener las soluciones.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - f_1 \\ \vdots \\ f_{100} - f_1}]{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_4 - 3f_2 \\ \vdots \\ f_{100} - 99f_2}]{f_3 - 2f_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Análogamente a a), el sistema ahora es $\begin{cases} k_1 - k_3 - 2k_4 - \cdots - 2014k_{2016} = -1 \\ k_2 + 2k_3 + 3k_4 + \cdots + 2015k_{2016} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 + \sum\limits_{n=3}^{2016} (n-2)k_n \\ k_2 = 1 + \sum\limits_{n=3}^{2016} (1-n)k_n \end{cases}$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es $\left\{ \left(-1 + \sum\limits_{n=3}^{2016} (n-2)k_n, 1 + \sum\limits_{n=3}^{2016} (1-n)k_n, k_3, k_4, \dots, k_{2016} \right) : k_3, k_4, \dots, k_{2016} \in \mathbb{R} \right\}$