(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.

a) Los conjuntos del ejercicio (10).

b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) *a)* $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Es base, pues tiene 3 elementos de $\mathbb{R}^3$ que son LI.

b) No es base pues tiene 3 vectores LI y $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 6. Por lo tanto debemos completar con tres matrices para llegar a una base.
La forma más sencilla de hacerlo es pensar una matriz 2x3 como un vector de longitud 6. Luego, formamos la matriz con las filas, encontramos la MERF asociada y completamos. Entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to (1,0,2,0,-1,-3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to (1,0,1,-2,1,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to (1,2,3,3,2,1)$$

Buscamos la MERF asociada a la matriz cuyas filas son los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3\cdot(-1) \\ f_2 \leftrightarrow f_3}]{f_2\cdot 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-1/2 f_3]{f_1-2f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Luego, el conjunto LI $\{(1,0,0,-4,3,3),(0,1,0,1/2,5/2,7/2),(0,0,1,2,-2,-3)\}$ se puede completar a una base con los vectores canónicos $\{(0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,1)\}$.

Volviendo a $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, los vectores canónicos son las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, que completan a una base.

b) Buscamos la MERF asociada a la matriz cuyas filas son los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-f_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2\cdot(-1/2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-2f_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, podemos extender con e_3 y e_4 de tal forma que $\{(1,0,1,0),(0,1,-1/2,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Primero encontramos la forma implícita del subespacio:
$\lambda_1(1,2,1,1)+\lambda_2(1,0,1,1)+\lambda_3(3,2,3,4)=(b_1,b_2,b_3,b_4)$

Resuelvo el sistema $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=b_1 \\ 2\lambda_1+2\lambda_3=b_2 \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=b_3 \\ \lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=b_4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 0 & 2 & b_2 \\ 1 & 1 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & 4 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-f_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 0 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_1 \\ 1 & 1 & 4 & b_4 \end{array}\right] \Rightarrow 0=b_3-b_1 \Rightarrow b_1=b_3$$

Luego el subespacio generado por los vectores del enunciado tiene por forma implícita $\{(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{R}^4 : b_1=b_3\}$

Cualquier vector que no cumpla con ésta condición no pertenece al subespacio y por lo tanto completa a una base.
Por ejemplo, $(0,0,1,0)$ completa a una base.