5 TRANSFORMACIONES LINEALES

Las transformaciones lineales son las funciones con las que trabajaremos en álgebra lineal. Se trata de funciones entre espacios vectoriales que son compatibles con la estructura, es decir con la suma y el producto por escalares.

5.1 TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición 5.1.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una *transformación lineal* de V en W es una función $T : V \to W$ tal que

(1) $T(v + v') = T(v) + T(v')$, para $v, v' \in V$,

(2) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, para $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observación. $T : V \to W$ es transformación lineal si y sólo si

a) $T(\lambda v + v') = \lambda T(v) + T(v')$, para $v, v' \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Algunas veces usaremos esto último para comprobar si una aplicación de V en W es una transformación lineal.

Ejemplo. Si V es cualquier espacio vectorial, la transformación identidad Id, definida por $\operatorname{Id} v = v$ ($v \in V$), es una transformación lineal de V en V. La transformación cero 0, definida por $0v = 0$, es una transformación lineal de V en V.

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3).$$

Entonces, T es una transformación lineal. La demostración la veremos en la observación que sigue a este ejemplo.

Observar que si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales. Definimos $D : V \to V$, por

$$D(P)(x) = P'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos primero que la derivada de un polinomio es un polinomio, pues

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Además D es lineal, pues $(f+g)' = f' + g'$ y $(\lambda f)' = \lambda f'$, para f, g funciones derivables y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación. Las transformaciones lineales preservan combinaciones lineales, es decir si $T : V \to W$ es una transformación lineal, $v_1, \ldots, v_k \in V$ y $\lambda_1, \ldots + \lambda_k \in \mathbb{K}$, entonces

$$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k).$$

Observar que el caso $k = 2$ se demuestra de la siguiente manera

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = T(\lambda_1 v_1) + T(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2).$$

El caso general se demuestra por inducción.

Observación 5.1.2. Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. En general si $T(x_1, \ldots, x_n)$ en cada coordenada tiene una combinación lineal de los $x_1, \ldots, x_n$, entonces T es una transformación lineal. Mas precisamente, si T está definida por

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_n) &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \ldots \ , a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces T es lineal.

Demostración. Sean $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n)) &= T(\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_n + y_n) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\lambda x_j + y_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(\lambda x_j + y_j)) \\ &= (\lambda \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \ldots, \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \\ &= \lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) + (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \\ &= \lambda T(x_1, \cdots, x_n) + T(y_1, \cdots, y_n). \end{aligned}$$

□

Observación 5.1.3. Recíprocamente, si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es transformación lineal entonces T está definida por una fórmula como (5.1.1) de la de la observación 5.1.2. En efecto, si

$$\begin{aligned} T(e_j) &= (a_{ij}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \\ &= a_{1j}e_1 + \cdots + a_{mj}e_m. \end{aligned}$$

Luego, si $v = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) = T(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) &= x_1T(e_1) + \cdots + x_nT(e_n) \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})e_1 + \cdots + (x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn})e_m \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n}, \ldots, x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn}). \end{aligned}$$

Observación. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ un transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$

Demostración. $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$, por lo tanto

$$-T(0) + T(0) = -T(0) + T(0) + T(0) \;\Rightarrow\; 0 = 0 + T(0) \;\Rightarrow\; 0 = T(0).$$

□

Teorema 5.1.4. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo y $\{w_1, \ldots, w_n\}$, vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que*

$$T(v_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Recordemos que si $v \in V$, existen únicos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ (las coordenadas de v) tal que

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Luego para este vector v definimos

$$T(v) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n.$$

Entonces, T es una correspondencia bien definida que asocia a cada vector v de V un vector $T(v)$ de W. De la definición queda claro que $T(v_j) = w_j$ para cada j. Para ver que T es lineal, sea

$$w = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n,$$

y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Ahora

$$\begin{aligned} \lambda v + w &= \lambda(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \\ &= (\lambda a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (\lambda a_n + b_n)v_n \end{aligned}$$

con lo que, por definición

$$T(\lambda v + w) = (\lambda a_1 + b_1)w_1 + \cdots + (\lambda a_n + b_n)w_n.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\lambda T(v) + T(w) &= \lambda(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n) + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n \\ &= (\lambda a_1 + b_1)w_1 + \cdots + (\lambda a_n + b_n)w_n,\end{aligned}$$

y así

$$T(\lambda v + w) = \lambda T(v) + T(w).$$

Finalmente, debemos probar la unicidad de T. Sea $S : V \to W$ transformación lineal tal que $S(v_j) = w_j$ para $1 \leqslant j \leqslant n$. Entonces, si $v \in V$ un vector arbitrario, $v = \sum_i a_i v_i$ y

$$S(v) = S(\sum_i a_i v_i) \sum_i a_i S(v_i) = \sum_i a_i w_i = \sum_i a_i T(v_i) = T(\sum_i a_i v_i) = T(v)$$

□

El teorema 5.1.4 es muy elemental, pero por su importancia ha sido presentado detalladamente.

Ejemplo. Usando el teorema 5.1.4, podemos demostrar la observación 5.1.2 de la siguiente manera: sea $\mathcal{C}_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ la única transformación lineal tal que

$$T(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}), \quad j = 1, \ldots, n$$

Entonces,

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

es la transformación lineal resultante.

Ejemplo. Los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2) \\ v_2 &= (3, 4)\end{aligned}$$

son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de $\mathbb{R}^2$. De acuerdo con el teorema 5.1.4, existe una única transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (3, 2, 1) \\ T(v_2) &= (6, 5, 4).\end{aligned}$$

Para poder describir T respecto a las coordenadas canónicas debemos calcular $T(e_1)$ y $T(e_2)$, ahora bien,

$$\begin{aligned}(1,0) &= c_1(1,2) + c_2(3,4)\\ (0,1) &= c_3(1,2) + c_4(3,4)\end{aligned}$$

y resolviendo este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas obtenemos

$$\begin{array}{rclcl}(1,0) &=& -2(1,2) &+& (3,4)\\ (0,1) &=& \frac{3}{2}(1,2) &-& \frac{1}{2}(3,4)\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}T(1,0) &= -2T(1,2) + T(3,4) = -2(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2)\\ T(0,1) &= \frac{3}{2}T(1,2) - \frac{1}{2}T(3,4) = \frac{3}{2}(3,2,1) - \frac{1}{2}(6,5,4) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Entonces

$$T(x_1,x_2) = x_1(0,1,2) + x_2(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}x_2, x_1 + \frac{1}{2}x_2, 2x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

§ *Ejercicios*

1) Determine en los siguientes casos si T es una transformación lineal.
   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x,z)$.
   b) $T : \mathbb{R}^4 \to R^4$ definida por $T(X) = -X$.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(X) = X + (0,-1,0)$.
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x+y, y)$.
   e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x, y-x)$.
   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (y,x)$.
   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = xy$

2) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean u, v elemento de V, y sea $T(u) = w$. Probar que si $T(v) = 0$, entonces $T(u+v) = w$.

3) ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(-1,1,1) = (1,0)$ y $T(1,1,1) = (0,1)$ y
   a) $T(0,1,1) = (1,1)$?
   b) $T(0,1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?
   c) $T(1,0,0) = (1,1)$?

4) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea U el subconjunto de elementos $u \in V$ tales que $T(u) = 0$. Supongamos que $w \in W$ y existe $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) = w$. Demuestre que el conjunto de elementos $v \in V$ que satisface $T(v) = w$ es $v_0 + U$.

5) Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean $w_1, \ldots, w_n$ elementos de W que son linealmente independientes, y sean $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Demostrar que $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

5.2 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 5.2.1. Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &:= \{w \in W : \text{existe } v \in V, \text{ tal que } T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\}, \\ \operatorname{Nu}(T) &:= \{v \in V : T(v) = 0\}. \end{aligned}$$

A $\operatorname{Im}(T)$ lo llamamos la *imagen* de T y a $\operatorname{Nu}(T)$ el *núcleo* de T.

Teorema 5.2.2. *Sean* V, W *espacios vectoriales sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal; entonces* $\operatorname{Im}(T) \subset W$ *y* $\operatorname{Nu}(T) \subset V$ *son subespacios vectoriales.*

Demostración. $\operatorname{Im}(T) \neq \emptyset$, pues $0 = T(0) \in \operatorname{Im}(T)$.

Si $T(v_1), T(v_2) \in \operatorname{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}(T)$ y $\lambda T(v_1) = T(\lambda v_1) \in \operatorname{Im}(T)$.

$\operatorname{Nu}(T) \neq \emptyset$ pues $T(0) = 0$ y por lo tanto $0 \in \operatorname{Nu}(T)$.

Si $v, w \in V$ tales que $T(v) = 0$ y $T(w) = 0$, entonces, $T(v + w) = T(v) + T(w) = 0$. por lo tanto $v + w \in \operatorname{Nu}(T)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda.0 = 0$, luego $\lambda v \in \operatorname{Nu}(T)$. □

Definición 5.2.3. Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que V es de dimensión finita.

(1) El *rango* de T es la dimensión de la imagen de T.

(2) La *nulidad* de T es la dimensión del núcleo de T.

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida

$$T(x, y, z) = x + 2y + 3z.$$

Encontrar una base del núcleo y de la imagen.

Solución. Es claro que como T no es 0, la imagen es todo $\mathbb{R}$ (y por lo tanto cualquier $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ es base de la imagen).

Con respecto al núcleo, debemos encontrar una base del subespacio

$$\operatorname{Nu}(T) = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 0\}.$$

Como $x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z$, luego,

$$\operatorname{Nu}(T) = \{(-2s - 3t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}. \tag{5.2.1}$$

Ahora bien, $(-2s - 3t, s, t) = s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$, por lo tanto

$$\operatorname{Nu}(T) =< (-2, 1, 0), (-3, 0, 1) >,$$

y como $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$ son LI, tenemos que forman una base del núcleo. □

La expresión (5.2.1), que depende de dos parámetros (s y t) que son independientes entre ellos, es llamada la *descripción paramétrica* del núcleo

Todas las transformaciones lineales entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son de la forma "multiplicar por una matriz". Más aún, toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede expresar de esta forma. Así que analizaremos un poco más en detalle este tipo de transformaciones.

Observación 5.2.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y consideramos la función T:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Entonces T es una transformación lineal.

Demostración. Debemos ver que T respeta suma y producto por escalares. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$T(v_1 + \lambda v_2) = A(v_1 + \lambda v_2) = Av_1 + \lambda A v_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2)$$

□

Definición 5.2.5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea T la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Diremos que T es *la transformación lineal asociada a* A o *la transformación lineal inducida por* A.

Recíprocamente si $T(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$ transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la *matriz asociada a* T, y $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Muchas veces denotaremos a esta transformación lineal con el mismo símbolo que la matriz, es decir, en este caso con A.

Ejemplo. Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces si $v = (x, y, z)$,

$$A(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

En particular, $(1, -1, 0) \in \mathrm{Nu}(A)$ pues $A(1, -1, 0) = 0$ y

$$\begin{aligned} A(1, 0, 0) &= (1, 2) \in \mathrm{Im}(A) \\ A(0, 1, \pi) &= (1 + \pi, 2 + 2\pi) \in \mathrm{Im}(A) \end{aligned}$$

Observación 5.2.6. Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces

$$T(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es decir, T es la transformación lineal inducida por la matriz $A = [a_{ij}]$. Esto, en particular, demuestra la observación 5.1.2.

Proposición 5.2.7. *Sea* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal y* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *la matriz asociada. Entonces*

- *El núcleo de* T *es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo* $AX = 0$.
- *La imagen de* T *es el conjunto de los* $b \in \mathbb{R}^m$ *para los cuales el sistema* $AX = b$ *tiene solución*

Demostración. Se demuestra fácilmente escribiendo las definiciones de los respectivos subconjuntos.

$$v \in \mathrm{Nu}\, T \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow v \text{ es solución de } AX = 0.$$

$$b \in \mathrm{Im}\, T \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av = b \Leftrightarrow AX = b \text{ tienen solución.}$$

□

Ejemplo 5.2.8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida

$$T(x, y, z) = (x + y,\ x + 2y + z,\ 3y + 3z,\ 2x + 4y + 2z).$$

(1) Describir $\mathrm{Nu}(T)$ en forma paramétrica y dar una base.

(2) Describir Im(T) en forma paramétrica y dar una base.

Solución. La matriz asociada a esta transformación lineal es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Debemos encontrar la descripción paramétrica de

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{v = (x, y, z) : A.v = 0\} \\ \mathrm{Im}(T) &= \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } \exists v \in \mathbb{R}^3, A.v = y\} \end{aligned}$$

En ambos casos, la solución depende de resolver el sistema de ecuaciones cuya matriz asociada es A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 2 & 4 & 2 & y_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1+y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 0 & 2 & 2 & -2y_1+y_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3-3F_2 \\ F_4-2F_2}]{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2y_1-y_2 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3y_1-3y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2y_2+y_4 \end{array}\right].$$

Luego,

$$T(x, y, z) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x - z &= 2y_1 - y_2 \\ y + z &= -y_1 + y_2 \\ 0 &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 &= -2y_2 + y_4 \end{aligned} \right. \qquad (*)$$

Si hacemos $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, entonces las soluciones del sistema describen el núcleo de T, es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{(x, y, z) : x - z = 0, y + z = 0\} = \{(s, -s, s) : s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, -1, 1) : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

que es la forma paramétrica del $\mathrm{Nu}\,T$. Una base del núcleo de T es $\{(1, -1, 1)\}$.

En el sistema (*) las dos primeras ecuaciones no imponen ninguna restricción sobre los y_i (por ejemplo si hacemos $z = 0$ resulta $x = 2y_1 - y_2$, $y = -y_1 + y_2$). Claramente, las últimas dos ecuaciones sí establecen condiciones sobre los y_i y resulta entonces que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } 0 = 3y_1 - 3y_2 + y_3 \text{ y } 0 = -2y_2 + y_4\}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T) &= \{(-\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

que es la descripción paramétrica $\operatorname{Im}(T)$. Es claro que $\{(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$. □

He aquí uno de los resultados más importantes del álgebra lineal.

Teorema 5.2.9. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Suponga que V es de dimensión finita. Entonces*

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Nu} T) = \dim V.$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned}n &= \dim V \\ k &= \dim(\operatorname{Nu} T).\end{aligned}$$

Entonces debemos probar que

$$n - k = \dim(\operatorname{Im} T).$$

Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de $\operatorname{Nu} T$. Existen vectores $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, en V tales que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Para probar el teorema, demostraremos que $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ es una base para la imagen de T.

(1) $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ *genera la imagen de* T.

Si $w \in \operatorname{Im}(T)$, entonces existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tal que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned}w &= T(v) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) + \lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= 0 + \cdots + 0 + \lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n T(v_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ genera la imagen de T.

(2) $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Para ver que $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ es linealmente independiente, suponga que se tienen escalares μ_i tales que

$$\sum_{i=k+1}^{n} \mu_i T v_i = 0,$$

luego

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i T v_i = T(\sum_{i=k+1}^{n} \mu_i v_i).$$

Por lo tanto $v = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i v_i \in \operatorname{Nu}(T)$. Como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de $\operatorname{Nu} T$, existen escalares λ_i tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i,$$

es decir

$$\sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i.$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i - \Big(\sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \Big) \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \mu_n v_n. \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base, y por lo tanto un conjunto LI, tenemos que $0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \cdots = \mu_n$, y en particular $0 = \mu_{k+1} = \cdots = \mu_n$. Por lo tanto $\{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. □

Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. El *rango fila* de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por las filas de A, es decir la dimensión del espacio fila de A. El *rango columna* de A es es la dimensión del subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por las columna de A. Un consecuencia importante del teorema 5.2.9 es le siguiente resultado.

Teorema 5.2.10. *Si A es una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces*

$$\textit{rango fila}\ (A) = \textit{rango columna}\ (A).$$

Demostración. Sea T la transformación lineal

$$\begin{array}{llll} T: & \mathbb{K}^{n\times 1} & \to & \mathbb{K}^{m\times 1} \\ & X & \mapsto & AX. \end{array}$$

Observar que

$$\operatorname{Nu}(T) = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : AX = 0\}.$$

Es decir $\operatorname{Nu}(T)$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Ahora bien, si $k = \textit{rango fila}\ (A)$, ya hemos dicho (capítulo 4, sección 4.4) que la dimensión del subespacio de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ es $n - k$. Luego

$$\textit{rango fila}\ (A) = \dim V - \dim(\operatorname{Nu} T). \tag{5.2.2}$$

Por otro lado

$$\operatorname{Im}(T) = \{AX : X \in \mathbb{K}^{n\times 1}\}.$$

Ahora bien,

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es decir, que la imagen de T es el espacio generado por las columnas de A. Por tanto,

$$\textit{rango}(T) = \textit{ rango columna } (A).$$

Por el teorema 5.2.9

$$\textit{rango}(T) = \dim V - \dim(\operatorname{Nu} T),$$

y por lo tanto

$$\textit{rango columna } (A) = \dim V - \dim(\operatorname{Nu} T). \tag{5.2.3}$$

Obviamente, las igualdades (5.2.2) y (5.2.3) implican

$$\textit{rango fila } (A) = \textit{rango columna } (A).$$

□

Definición 5.2.11. Si A es una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces el *rango* de A es el rango fila de A (que es igual al rango columna).

§ *Ejercicios*

1) Determinar bases del núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales
   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$.
   b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S(x, y) = (0, x - y, 3y)$.

2) Sea $T : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_4[x]$ dada por $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$. ¿Cuáles de los siguientes polinomios se encuentra en $\operatorname{Nu} T$? ¿Cuáles en $\operatorname{Im} T$?
   a) x^3,
   b) 0,
   c) $12x - \frac{1}{2}x^3$,
   d) $1 + 3x^2 - x^3$.

3) Determinar la dimensión del núcleo de la transformación lineal T en los siguientes casos.
   a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ con $\dim(\operatorname{Im} T) = 5$.
   b) $T : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ con $\dim(\operatorname{Im} T) = 1$.
   c) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ con T epimorfismo.
   d) $T : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ con T epimorfismo.

4) Describir explícitamente una transformación linar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen esté generada por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$.

5) Sea $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ la transformación lineal "derivada de". Describir el núcleo de D. ¿Cuál es el núcleo de la transformación lineal "derivada k-ésima de"?

6) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

   a) Si (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ ¿Cuáles son las condiciones sobre (a, b, c) para que el vector pertenezca a $\operatorname{Im} T$?

   b) Encontrar una base de $\operatorname{Im} T$.

   c) Si (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ ¿Cuáles son las condiciones sobre (a, b, c) para que el vector pertenezca a $\operatorname{Nu} T$?

   d) Encontrar una base de $\operatorname{Nu} T$.

7) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - x_2 + x_4, -3x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 + x_3 + 2x_4).$$

   (1) Encontrar una base de $\operatorname{Im} T$ y dar su dimensión.

   (2) Dar la dimensión del núcleo usando el teorema de la dimensión.

   (3) Extender la base de $\operatorname{Im} T$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

8) Sea V sea un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que los dos enunciados siguientes sobre T son equivalentes.

   a) La intersección de $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Nu} T$ es el subespacio cero de V.

   b) Si para $v \in V$, $T(Tv) = 0$, entonces $Tv = 0$.

5.3 ISOMORFISMOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Definición 5.3.1. Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

(1) T es *epimorfismo* si T es suryectiva, es decir si $\operatorname{Im}(T) = W$.

(2) T es *monomorfismo* si T es inyectiva (o 1-1), es decir si dados $v_1, v_2 \in V$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$, entonces $v_1 = v_2$.

(3) T es *isomorfismo* si T es suryectiva e inyectiva.

Observación. T es epimorfismo si y sólo si

$$\text{T es lineal y } \forall\, w \in W,\ \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w.$$

Esto se deduce inmediatamente de la definiciones de función suryectiva y de $\mathrm{Im}(T)$.

T es monomorfismo si y sólo si

$$\text{T es lineal y } \forall\, v_1, v_2 \in V:\ v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2).$$

Esto se obtiene aplicando el contrarrecíproco a la definición de función inyectiva.

Observar que V es trivialmente isomorfo a V, ya que el operador identidad es un isomorfismo de V sobre V.

Proposición 5.3.2. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Entonces* T *es monomorfismo si y sólo si* $\mathrm{Nu}(T) = 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Debemos ver que $\mathrm{Nu}(T) = 0$, es decir que si $T(v) = 0$, entonces $v = 0$. Ahora bien, si $T(v) = 0$, como $T(0) = 0$, tenemos que $T(v) = T(0)$, y como T es inyectiva, implica que $v = 0$.

($\Leftarrow$) Sean $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = T(v_2)$. Entonces

$$0 = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2).$$

Por lo tanto, $v_1 - v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$. Por hipótesis, tenemos que $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$. □

Ejemplo. Probaremos que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y - z, -x + 3y).$$

es un monomorfismo, probando que $\mathrm{Nu}(T) = 0$.

Observemos que $(x, y, z) \in \mathrm{Nu}(T)$ si y solo si $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, es decir si y solo si

$$\begin{cases} x + z & = 0 \\ y - z & = 0 \\ -x + 3z & = 0, \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3]{F_1-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es la única solución del sistema $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y por lo tanto $\mathrm{Nu}(T) = 0$.

Observación. Sea $T : V \to W$ transformación lineal,

(1) T es epimorfismo si y sólo si $\operatorname{Im}(T) = W$ si y solo si $\mathrm{rango}(T) = \dim W$.

(2) T es monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Nu}(T) = 0$ si y sólo si $\mathrm{nulidad}(T) = 0$.

Proposición 5.3.3. *Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces,*

(1) T es monomorfismo si y sólo si T de un conjunto LI es LI.

(2) T es epimorfismo si y sólo si T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W.

Demostración. Haremos la demostración para el caso de dimensión finita, pero en el caso general la demostración es similar.

(1) ($\Rightarrow$) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto LI en V y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = 0,$$

entonces

$$0 = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

Como T es inyectiva, por proposición 5.3.2,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

lo cual implica que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son todos nulos. Por lo tanto, $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ son LI.

(1) ($\Leftarrow$) Sea $v \in V$ tal que $T(v) = 0$. Veremos que eso implica que $v = 0$. Ahora bien, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

por lo tanto

$$0 = T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n).$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es LI, por hipótesis, $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es LI y, por lo tanto, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son todos nulos. Luego $v = 0$. Es decir probamos que el núcleo de T es 0, luego por proposición 5.3.2, T es monomorfismo.

(1) ($\Leftarrow$ *alternativa*) Sea $v \in V$ tal que $T(v) = 0$. Si $v \neq 0$, entonces $\{v\}$ es un conjunto LI en V. Luego, $\{T(v)\}$ es un conjunto LI en W y por lo tanto $T(v) \neq 0$. Así, si $T(v) = 0$ entonces $v = 0$ y por lo tanto T es un monomorfismo.

(2) ($\Rightarrow$) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V y sea $w \in W$. Como T es epimorfismo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Ahora bien,

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \quad \text{para algún } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},$$

por lo tanto,

$$w = T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n).$$

Es decir, cualquier $w \in W$ se puede escribir como combinación lineal de los $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ y, por lo tanto, generan W.

(2) ($\Leftarrow$) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, por hipótesis $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ generan W, es decir dado cualquier $w \in W$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$w = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n),$$

y por lo tanto $w = T(v)$, con

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

□

Recordemos que si una función $f : X \to Y$ es suryectiva e inyectiva, es decir biyectiva, existe su inversa, la cual también es biyectiva. La inversa se denota $f^{-1} : Y \to X$ y viene definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Teorema 5.3.4. *Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Entonces $T^{-1} : W \to V$ es lineal y, por lo tanto, también es un isomorfismo.*

Demostración.

Sean $w_1, w_2 \in W$, probemos que $T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$.

Sean $v_1 = T^{-1}(w_1)$, $v_2 = T^{-1}(w_2)$. Por lo tanto $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + T(v_2)) = T^{-1}(T(v_1 + v_2)) = \\ &= (T^{-1} \circ T)(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

Sean $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, probemos que $T^{-1}(\lambda w) = \lambda T^{-1}(w)$.

Sea $v = T^{-1}(w)$, entonces

$$T^{-1}(\lambda w) = T^{-1}(\lambda T(v)) = T^{-1}(T(\lambda v)) = (T^{-1} \circ T)(\lambda v) = \lambda v = \lambda T^{-1}(w).$$

□

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $T(a, b) = a + ib$. Entonces T es un isomorfismo entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Ejemplo 5.3.5. (TRANSFORMACIONES LINEALES RÍGIDAS DE $\mathbb{R}^2$ EN $\mathbb{R}^2$.) Veremos a continuación que las rotaciones y reflexiones son isomorfismos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, definimos la transformación lineal

$$\begin{aligned} R_\theta : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\theta) \end{aligned}$$

Observemos que si escribimos el vector (x, y) en coordenadas polares, es decir si

$$(x, y) = r(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha), \quad r > 0, \; 0 \leqslant \alpha < 2\pi,$$

entonces

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y) &= R_\theta(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) \\ &= (r\cos\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta) \\ &= (r\cos(\alpha+\theta), r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)) \\ &= r(\cos(\alpha+\theta), \operatorname{sen}(\alpha+\theta)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_\theta(x, y)$ es el vector (x, y) rotado θ grados en sentido antihorario y en consecuencia R_θ es denominada la *rotación antihoraria en* θ *radianes*. No es difícil verificar que $R_\theta \circ R_{-\theta} = \mathrm{Id}$ y, en consecuencia, R_θ es un isomorfismo.

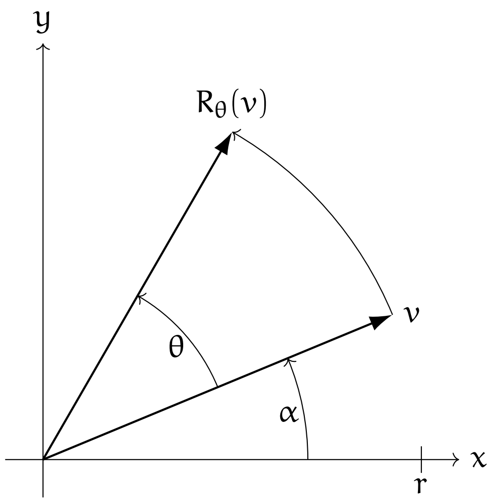

Figura 21: Rotación θ grados.

Otras transformaciones lineales importantes de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son

$$S_h(x, y) = (x, -y) \quad \text{y} \quad S_v(x, y) = (-x, y).$$

La primera es la reflexión en el eje x y la segunda la reflexión en el eje y. Claramente $S_h^2 = S_v^2 = \mathrm{Id}$ y por lo tanto ambos son isomorfismos.

Las siguientes afirmaciones se comprueban algebraicamente en forma sencilla, pero nos podemos convencer de ellas por su interpretación geométrica:

$$R_\theta \circ R_\varphi = R_{\theta+\varphi}, \tag{5.3.1}$$

$$R_{\pi/2} \circ S_h \circ R_{-\pi/2} = S_v. \tag{5.3.2}$$

La fórmula (5.3.1) nos dice que rotar φ radianes y luego rotar θ radianes es lo mismo que rotar $\theta + \varphi$ radianes. La fórmula (5.3.2) nos dice que rotar $-90°$, luego hacer una reflexión horizontal y luego rotar $90°$ es lo mismo que hacer una reflexión vertical.

Proposición 5.3.6. *Sea* $T : V \to W$ *transformación lineal. Entonces* T *es un isomorfismo si y solo si* T *de una base de* V *es una base de* W*.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{B}$ base de V. Como T es isomorfismo, T es mono y epi, luego por proposición 5.3.3, $T(\mathcal{B})$ es LI y genera W, es decir, es base de W.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{B}$ base de V y $T : V \to W$ transformación lineal tal que $T(\mathcal{B})$ es base. Por lo tanto, manda un conjunto LI a un conjunto LI y un conjunto de generadores de V a un conjunto de generadores de W. Por proposición 5.3.3, T es mono y epi, por lo tanto T es un isomorfismo. □

Corolario 5.3.7. *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales de dimensión finita tal que* V *es isomorfo a* W*. Entonces* $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración. Como V es isomorfo a W, existe un isomorfismo $T : V \to W$. Por la proposición anterior si $v_1, \ldots, v_n$ es base de V, entonces $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ es base de W. Por lo tanto, $\dim(V) = n = \dim(W)$. □

Ejercicio. Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $T : V \to W$, $S : W \to Z$ isomorfismos. Entonces,

(1) $S \circ T : V \to Z$ también es un isomorfismo y

(2) $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Como ya se ha dicho, V es isomorfo a V vía la identidad. Por el teorema anterior, si V es isomorfo a W, entonces W es isomorfo a V. Por el ejercicio anterior, si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z, entonces V es isomorfo a Z. En resumen, el isomorfismo es una relación de equivalencia sobre la clase de espacios vectoriales. Si existe un isomorfismo de V sobre W, se dirá a veces que V *y* W *son isomorfos*, en vez de que V es isomorfo a W. Ello no será motivo de confusión porque V es isomorfo a W, si, y solo si, W es isomorfo a V.

Teorema 5.3.8. *Sean* V, W *espacios vectoriales de dimensión finita sobre* $\mathbb{K}$ *tal que* $\dim V = \dim W$*. Sea* $T : V \to W$ *transformación lineal. Entonces, son equivalentes:*

a) T *es un isomorfismo.*

b) T *es monomorfismo.*

c) T *es epimorfismo.*

d) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*, entonces* $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ *es una base de* W*.*

Demostración (*). Sea $n = \dim V = \dim W$.

a) $\Rightarrow$ *b)*. Como T es isomorfismo, es biyectiva y por lo tanto inyectiva.

b) $\Rightarrow$ *c)*. T monomorfismo, entonces $\mathrm{nulidad}(T) = 0$ (proposición 5.3.2. Luego, como $\mathrm{rango}(T) + \mathrm{nulidad}(T) = \dim V$, tenemos que $\mathrm{rango}(T) = \dim V$. Como $\dim V = \dim W$, tenemos que $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(T) = \dim W$. En consecuencia, T es suryectiva.

c) $\Rightarrow$ *a)*. T es suryectiva, entonces $\mathrm{rango}(T) = n$, luego $\mathrm{nulidad}(T) = 0$, por lo tanto $\mathrm{Nu}(T) = 0$ y en consecuencia T es inyectiva. Como T es suryectiva e inyectiva es un isomorfismo.

Hasta aquí probamos que *a)*, (refb-dimV=dimW y *c)* son equivalentes, luego si probamos que *a)*, *b)* o *c)*$\Rightarrow$ *d)* y que *d)* $\Rightarrow$ *a)*, *b)* o *c)*, estaría probado el teorema.

a) $\Rightarrow$ *d)*. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es LI y genera V. Por proposición 5.3.3, tenemos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es LI y genera W, por lo tanto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de W.

d) $\Rightarrow$ *a)*. Como T de una base es una base, entonces T de un conjunto LI es un conjunto LI y T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W. Por lo tanto, por proposición 5.3.3, T es monomorfismo y epimorfismo, luego T es un isomorfismo. □

Corolario 5.3.9. *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim V = \dim W$. Entonces V y W son isomorfos.*

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de W. Poe teorema 5.1.4 existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(v_i) = w_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Por el teorema anterior, T es un isomorfismo. □

Ejemplo. $\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} : a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^n$, esto es consecuencia inmediata del corolario anterior, pues ambos tienen dimensión n. Explícitamente, $1, x, \ldots, x^{n-1}$ es base de $\mathbb{K}_n[x]$ y sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$, entonces un isomorfismo de $\mathbb{K}_n[x]$ a $\mathbb{K}^n$ viene dado por la única transformación lineal $T : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}^n$ tal que

$$T(x^i) = e_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Ejemplo. $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$. El isomorfismo viene dado por $T : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ tal que

$$T(E_{ij}) = e_{(i-1)n+j}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Por ejemplo, en el caso 2×2,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto (1,0,0,0) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto (0,1,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto (0,0,1,0) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto (0,0,0,1).$$

§ *Ejercicios*

1) Probar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida

$$(a, b, c, d) \mapsto \begin{bmatrix} c & a+d \\ b & d \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo.

2) Probar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida

$$a + bx \mapsto (a - b, b)$$

es un isomorfismo.

3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida

$$T(x, y) = (3x - y, 4x + 2y).$$

Probar que T es un isomorfismo y calcular T^{-1}.

4) ¿Para que n los siguientes subespacios son isomorfos a $\mathbb{R}^n$?
   a) $\mathbb{R}_5[x]$.
   b) $\mathbb{R}_2[x]$.
   c) $\mathbb{R}^{2\times 3}$.
   d) El plano $2x - y + z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

5) Dar en forma explícita un isomorfismo de $\mathbb{R}_3[x]$ a $\mathbb{R}^3$ tal que

$$1 + x^2 \mapsto (1, 1, 0), \qquad 2 - x \mapsto (1, -1, 1).$$

6) Sea $L : V \to V$ una transformación lineal tal que $L^2 + 2L + \mathrm{Id} = 0$. Demuestre que L es invertible.

7) Usando el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, $(a, b) \mapsto a + ib$, podemos pensar a las transformaciones rígidas del plano del ejemplo 5.3.5) como funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.
   a) Probar que la reflexión horizontal $S_h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $S_h(z) = \bar{z}$.
   b) Probar que $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ (producto de números complejos).
   c) Probar que la reflexión vertical S_v es $S_v = R_\pi \circ S_h$.

8) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal. Diremos que T es una *isometría* si $||T(v)|| = ||v||$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
   a) Probar que las rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^2$ son isometrías.
   b) Probar que una isometría es un isomorfismo y que la inversa también es una isometría.

c) Probar que si T es una isometría, entonces

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

[Ayuda: usar la identidad de polarización vista en el ejercicio 5 de la sección 1.3].

9) Usando el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, $(a, b) \mapsto a + ib$, podemos pensar a las isometrías del plano como funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

a) Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una isometría. Probar que $T(1) = e^{i\theta}$, para algún θ tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

b) Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una isometría tal que $T(1) = 1$. Probar que, o bien $T = \mathrm{Id}$, o bien $T = S_h$.

c) Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una isometría tal que $T(1) = e^{i\theta}$. Probar que, o bien $T = R_\theta$, o bien $T = R_\theta \circ S_h$.

10) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $v, w \in V$ con $w \neq 0$. La *recta que pasa por v y es paralela a w* se define como el conjunto de todos los elementos $v + tw$ con $t \in \mathbb{R}$. El *segmento de recta entre v y $v + w$* se define como el conjunto de todos los elementos

$$v + tw \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Sea $T : V \to U$ una transformación lineal. Muestre que la imagen por T de un segmento de recta en V es un segmento de recta en U. ¿Entre qué puntos?

Pruebe que la imagen de una recta por T es o bien una recta o bien un punto.

11) Sea V un espacio vectorial y v_1, v_2 dos elementos de V linealmente independientes. El conjunto de subconjunto de V definido:

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$$

se llama el *paralelogramo generado por v_1 y v_2*.

a) Sea $T : V \to W$ transformación lineal, v_1, v_2 dos elementos de V que son linealmente independientes y tales que $T(v_1), T(v_2)$ son linealmente independientes. Probar que la imagen por T del paralelogramo generado por v_1 y v_2 es el paralelogramo generado por $T(v_1)$ y $T(v_2)$.

b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to R^2$ una isometría y v, w vectores en $\mathbb{R}^2$ que son LI. Probar que el área del paralelogramo generado por v, w es igual al área del paralelogramo generado por $T(v), T(w)$ (ver ejercicio 6 de la sección 3.5).

5.4 ÁLGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES (*)

En el estudio de las transformaciones lineales de V en W es de fundamental importancia que el conjunto de estas transformaciones hereda una estructura natural de espacio vectorial. El conjunto de las transformaciones lineales de un espacio V en sí mismo tiene incluso una estructura algebraica mayor, pues la composición ordinaria de funciones da una "multiplicación" de tales transformaciones.

Observemos primero que si X conjunto y W espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, entonces

$$F(X, W) := \{f : X \to W\},$$

es decir el conjunto de funciones de X en W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la suma y el producto por escalares definido:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \quad f, g \in F(X, W),\ x \in X \\
(\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \qquad\qquad f \in F(X, W),\ x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

La demostración de esto es sencilla y se basa en el hecho que W es un espacio vectorial.

Teorema 5.4.1. *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ Sean $T, S : V \to W$ transformaciones y $\mu \in \mathbb{K}$. Entonces, $T + S$ y μT son transformaciones lineales de V en W.*

Demostración. Sean $v, v' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
(T+S)(\lambda v + v') &= T(\lambda v + v') + S(\lambda v + v') && \text{(def. de } T+S\text{)} \\
&= \lambda T(v) + T(v') + \lambda S(v) + S(v') && \text{(}T \text{ y } S \text{ lineales)} \\
&= \lambda(T(v) + S(v)) + T(v') + S(v') && \\
&= \lambda((T+S)(v)) + (T+S)(v') && \text{(def. de } T+S\text{)} \\
&= \lambda(T+S)(v) + (T+S)(v') && \text{(def. de } \lambda(T+S)\text{)).}
\end{aligned}$$

que dice que $T + U$ es una transformación lineal. En forma análoga, si $\mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(\mu T)(\lambda v + v') &= \mu T(\lambda v + v') && \text{(def. de } \mu T\text{)} \\
&= \mu\lambda T(v) + \mu T(v') && \text{(}T \text{ lineal)} \\
&= \lambda\mu T(v) + \mu T(v') && \\
&= \lambda(\mu T)(v) + (\mu T)(v') && \text{(def.de } \mu T\text{).}
\end{aligned}$$

que dice que μT es una transformación lineal. □

Corolario 5.4.2. *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, el conjunto de transformaciones lineales de V en W es un subespacio vectorial de $F(V, W)$.*

Se denotará $L(V, W)$ al espacio vectorial de las transformaciones lineales de V en W.

Teorema 5.4.3. *Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Entonces la función compuesta $U \circ T$ definida por $(U \circ T)(v) = U(T(v))$ es una transformación lineal de V en Z.*

Demostración. Sean $v, v' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
(U \circ T)(\lambda v + v') &= U(T(\lambda v + v')) && \text{(def. de composición)}\\
&= U(\lambda T(v) + T(v')) && \text{(T lineal)}\\
&= \lambda U(T(v)) + U(T(v')) && \text{(U lineal)}\\
&= \lambda (U \circ T)(v) + (U \circ T)(v') && \text{(def. de composición).}
\end{aligned}$$

□

Para simplificar, a veces denotaremos la composición por yuxtaposición, es decir

$$U \circ T = UT.$$

En lo que sigue debemos interesarnos principalmente en transformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. Como se tendrá a menudo que escribir "T es una transformación lineal de V en V", se dirá más bien: "T es un operador lineal sobre V".

Definición 5.4.4. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un *operador lineal* sobre V es una transformación lineal de V en V.

Cuando en el teorema 5.4.3, consideramos $V = W = Z$, tenemos que U y T son opera- dores lineales en el espacio V, y por lo tanto la composición UT es también un operador lineal sobre V. Así, el espacio $L(V, V)$ tiene una "multiplicación" definida por composición. En este caso el operador TU también está definido, y debe observarse que en general $UT \neq TU$, es decir, $UT - TU \neq 0$. Se ha de advertir de manera especial que si T es un operador lineal sobre V, entonces se puede componer T con T. Se usará para ello la notación $T^2 = TT$, y en general $T^n = T \cdots T$ (n veces) para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Si $T \neq 0$, se define $T^0 = \mathrm{Id}_V$, el operador identidad.

Lema 5.4.5. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$; sean U, T y S operadores lineales sobre V y sea λ un elemento de $\mathbb{K}$. Denotemos Id_V el operador identidad. Entonces*

(1) $U = \mathrm{Id}_V U = U \,\mathrm{Id}_V$,

(2) $U(T + S) = UT + US$, $(T + S)U = TU + SU$,

(3) $\lambda(UT) = (\lambda U)T = U(\lambda T)$.

Demostración. (1) es trivial.

Demostraremos $U(T+S) = UT + US$ de (2) y todo lo demás se dejará como ejercicio. Sea $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} U(T+S)(v) &= U((T+S)(v)) && \text{(definición de composición)} \\ &= U(T(v)+S(v)) && \text{(definición de } T+S) \\ &= U(T(v)) + U(S(v)) && \text{(}U\text{ lineal)} \\ &= UT(v) + US(v) && \text{(definición de composición).} \end{aligned}$$

□

El contenido de este lema, y algunos otros resultados sobre composición de funciones de un conjunto en si mismo (como ser la asociatividad), dicen que el espacio vectorial $L(V,V)$, junto con la operación de composición, es lo que se conoce tomo una álgebra asociativa sobre $\mathbb{K}$, con identidad (ver https://es.wikipedia.org/wiki/Álgebra_asociativa).

§ *Ejercicios*

1) Sean $T, S, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x-z, y+z, -x+y), \\ S(x,y,z) &= (2x-y+z, y+3z, -2x+2y-z), \\ R(x,y,z) &= (3x-y+z, 4y+3z, -x+3y). \end{aligned}$$

Calcular

a) $T \circ S$. *b)* $S \circ R$. *c)* $(T \circ S) \circ R$. *d)* $T \circ (S \circ R)$.

2) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Diremos que T es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = 0$.

a) Probar que si T es nilpotente y $T^k = 0$, entonces $T^n = 0$ para $n \geqslant k$.

b) Sea T nilpotente. Definimos

$$e^T := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} T^i.$$

(Observar que e^T está bien definido por ser T nilpotente).

Probar que e^T es invertible y su inversa es e^{-T}.

c) Sean T, S nilpotentes y tales que $TS = ST$. Probar que $T+S$ es nilpotente y que

$$e^T e^S = e^{T+S}.$$

5.5 COORDENADAS

Una de las características útiles de una base $\mathcal{B}$ en un espacio vectorial V de dimensión n es que permite introducir coordenadas en V en forma análoga a las "coordenadas naturales", x_i, de un vector $v = (x_1, \ldots, x_n)$ en el espacio $\mathbb{K}^n$. En este esquema, las coordenadas de un vector v en V, respecto de la base $\mathcal{B}$, serán los escalares que sirven para expresar v como combinación lineal de los vectores de la base. En el caso de la base canónica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{K}^n$ tenemos

$$v = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

por lo tanto x_i es la coordenada i-ésima de v respecto a la base canónica.

En forma análoga veremos que si $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, entonces existe una única forma de escribir

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,$$

y los valores x_i serán las *coordenadas de* v en la base dada.

Definición 5.5.1. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una *base ordenada* de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente y que genera V.

La diferencia entre la definición de "base" y la de "base ordenada", es que en la última es importante el orden de los vectores de la base. Si la sucesión $v_1, \ldots, v_n$ es una base ordenada de V, entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. La base ordenada es el conjunto, juntamente con el orden dado. Se incurrirá en un pequeño abuso de notación y se escribirá

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

diciendo que $\mathcal{B}$ es una base ordenada de V.

Proposición 5.5.2. *Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces, para cada $v \in V$, existen únicos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Demostración. Como $v_1, \ldots, v_n$ generan V, es claro que existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$. Veremos que $x_i = y_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Como $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, restando miembro a miembro obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) v_i.$$

Ahora bien, $v_1, \ldots, v_n$ son LI, por lo tanto todos los coeficientes de la ecuación anterior son nulos, es decir $x_i - y_i = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y entonces $x_i = y_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. □

La proposición anterior permite, dada una base ordenada, asociar a cada vector una n-tupla que serán la coordenadas del vector en esa base.

Definición 5.5.3. sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V, si $v \in V$ y

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

entonces x_i *es la coordenada* i*-ésima de* v y denotamos

$$[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n).$$

También nos será útil describir a v como una matriz $n \times 1$ y en ese caso hablaremos de *la matriz de* v *en la base* $\mathcal{B}$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

En lo que sigue, usaremos la misma notación para la n-tupla y para la matriz.

Ejemplo. Sea $\mathcal{B} = \{(1, -1), (2, 3)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Encontrar las coordenadas de $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en la base $\mathcal{B}$.

Solución. Debemos encontrar $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 0) = x_1(1, -1) + x_2(2, 3).$$

Es decir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $x_1 = \frac{3}{5}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$, es decir

$$(1, 0) = \frac{3}{5}(1, -1) + \frac{1}{5}(2, 3) \quad \text{o equivalentemente} \quad (1, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})_{\mathcal{B}}.$$

De forma análoga podemos ver que

$$(0, 1) = -\frac{2}{5}(1, -1) + \frac{1}{5}(2, 3) \quad \text{o equivalentemente} \quad (0, 1) = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})_{\mathcal{B}}.$$

□

Proposición 5.5.4. *Sea* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base ordenada de* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial. Entonces*

(1) $[v + w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}}$, *para* $v, w \in V$,

(2) $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$, *para* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $v \in V$.

Demostración.

(1) Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$, entonces

$$v + w = (x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (x_n + y_n)v_n,$$

luego,

$$\begin{aligned} [v+w]_{\mathcal{B}} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

(2) Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y $\in \mathbb{K}$, entonces

$$\lambda v = (\lambda x_1)v_1 + \cdots + (\lambda x_n)v_n,$$

luego,

$$\begin{aligned} [\lambda v]_{\mathcal{B}} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \\ &= \lambda(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \lambda [v]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

□

Observación. En la siguiente sección veremos una forma sistemática para hacer *"cambio de coordenadas"*. Es decir, dadas dos bases ordenadas $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ encontraremos una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'}$ para todo v en V (corolario 5.6.4).

§ *Ejercicios*

1) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

2) Dar las coordenadas del polinomio $p(x) = -1 + 10x + 2x^2 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada
$$\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}.$$

3) *a)* Dar una base ordenada del subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.

   b) Dar las coordenadas de $w = (1,-1,-1)$ en la base que haya dado en el item anterior.

   c) Dado $(x,y,z) \in W$, dar las coordenadas de (x,y,z) en la base que haya calculado en el item (a).

5.6 MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V, y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base ordenada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T está determinada por su efecto sobre los vectores v_j, puesto que todo vector de V es combinación lineal de ellos. Cada uno de los n vectores Tv_j se expresa de manera única como combinación lineal
$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad (5.6.1)$$
de los w_i. Los escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ son las coordenadas de Tv_j en la base ordenada $\mathcal{B}'$. Por consiguiente, la transformación T está determinada por los $m \cdot n$ escalares a_{ij} mediante la expresión (5.6.1).

Definición 5.6.1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que
$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

A A La matriz $m \times n$ definida por $[A]_{ij} = a_{ij}$ se la denomina *la matriz de* T *respecto a las bases ordenadas* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$; y se la denota
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A.$$

Si $T : V \to V$ una transformación lineal y $\mathcal{B}$ es una base ordenada de V, a la matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ también se la denota $[T]_{\mathcal{B}}$.

Observación. En las hipótesis de la notación anterior, observar que
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [T(v_j)]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [T(v_n)]_{\mathcal{B}'} \right].$$

Es decir, la matriz de T respecto a las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $T(v_j)$ en la base ordenada $\mathcal{B}'$. En particular, si $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una transformación lineal, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^m$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_{n-1} & Tv_n \\ | & | & & | & | \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$T(x, y, z) = (2x + y, 3y, x + 4z, z).$$

Sean $\mathcal{C}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Entonces

$$\begin{array}{rcccccccccc} T(e_1) & = & (2,0,1,0) & = & 2 \cdot e_1 & + & 0 \cdot e_2 & + & 1 \cdot e_3 & + & 0 \cdot e_4 \\ T(e_2) & = & (1,3,0,0) & = & 1 \cdot e_1 & + & 3 \cdot e_2 & + & 0 \cdot e_3 & + & 0 \cdot e_4 \\ T(e_3) & = & (0,0,4,1) & = & 0 \cdot e_1 & + & 0 \cdot e_2 & + & 4 \cdot e_3 & + & 1 \cdot e_4 \end{array}$$

Por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que si escribimos los vectores en coordenadas con respecto a las bases canónicas, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \\ x + 4z \\ z \end{bmatrix}$$

o más formalmente

$$[T]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_4}[v]_{\mathcal{C}_3} = [T(v)]_{\mathcal{C}_4}.$$

Observación. Recordemos que si $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$, el operador lineal asociado a A si se define por

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}.$$

Es decir

$$T(x_1, \ldots, x_n) := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (5.6.2)$$

Sean $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{C}_m$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, entonces

$$[T]_{\mathcal{C}_n\mathcal{C}_m} = A.$$

Ejemplo 5.6.2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$T(x, y, z) = (2x + y, 3y, x + 4z),$$

y sean $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, bases ordenadas. Encontrar $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

Solución.

$$\begin{array}{lllllllll}
T(1,1,1) & = & (3,3,5) & = & a_{11}(1,0,1) & + & a_{21}(1,1,0) & + & a_{31}(0,1,0) \\
T(1,1,0) & = & (3,3,1) & = & a_{12}(1,0,1) & + & a_{22}(1,1,0) & + & a_{32}(0,1,0) \\
T(1,0,0) & = & (2,0,1) & = & a_{13}(1,0,1) & + & a_{23}(1,1,0) & + & a_{33}(0,1,0).
\end{array}$$

Para encontrar los coeficientes a_{ij}, debemos resolver los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(3, 3, 5) &= (a_{11} + a_{21}, a_{21} + a_{31}, a_{11}) \\
(3, 3, 1) &= (a_{12} + a_{22}, a_{22} + a_{32}, a_{12}) \\
(2, 0, 1) &= (a_{13} + a_{23}, a_{23} + a_{33}, a_{13}).
\end{aligned}$$

Genéricamente, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &= x \\
\lambda_2 + \lambda_3 &= y \\
\lambda_1 &= z,
\end{aligned}$$

que es muy fácil de resolver y sus soluciones son $\lambda_1 = z$, $\lambda_2 = x - z$ y $\lambda_3 = -x + y + z$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{lll}
a_{11} = 5, & a_{21} = 3 - 5 = -2, & a_{31} = -3 + 3 + 5 = 5, \\
a_{12} = 1, & a_{22} = 3 - 1 = 2, & a_{32} = -3 + 3 + 1 = 1, \\
a_{13} = 1, & a_{23} = 2 - 1 = 1, & a_{33} = -2 + 0 + 1 = -1.
\end{array}$$

Es decir,

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Veremos otra forma, creemos más conveniente, de calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ en el ejemplo 5.6.11. □

Proposición 5.6.3. *Sea* V *y* W *un espacios vectoriales de dimensión* n *y* m *respectivamente y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Sea* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base ordenada de* V*, y* $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *una base ordenada de* W*. Entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall v \in V. \tag{5.6.3}$$

Demostración. Si

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

entonces $[T]_{ij} = a_{ij}$. Sea $v \in$, entonces $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ con $x_i \in \mathbb{K}$, por lo tanto

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(v) = T(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) w_i = \\ = (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j}) w_1 + (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j}) w_2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj}) w_m \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj} \end{bmatrix}. \qquad (5.6.4)$$

Por otro lado,

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}. \qquad (5.6.5)$$

De las ecuaciones (5.6.4) y (5.6.5) se deduce la formula (5.6.3). □

Corolario 5.6.4. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$*, sean* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{B}'$ *bases ordenadas de* V*. Entonces*

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}}, \quad \forall v \in V.$$

Demostración. Por la proposición 5.6.3 tenemos que

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}(v)]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}'}.$$

□

Definición 5.6.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es llamada la *matriz de cambio de base* de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$.

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0),(0,-1)\}$ bases ordenadas de V. Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Solución. Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ordenadas de V, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(1,0) &= (1,0) = a_{11}(1,1) + a_{21}(1,-1), \\ \mathrm{Id}(0,-1) &= (0,-1) = a_{12}(1,1) + a_{22}(1,-1), \end{aligned}$$

para ciertos $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Es decir

$$\begin{aligned} (1,0) &= (a_{11} + a_{21}, a_{11} - a_{21}), \\ (0,-1) &= (a_{12} + a_{22}, a_{12} - a_{22}). \end{aligned}$$

lo que implica que $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}$ y $-a_{12} = a_{22} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.6.6 (*). *Sea* V *y* W *un espacios vectoriales de dimensión* n *y* m *respectivamente y* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *dos bases ordenadas de* V *y* W *respectivamente. Entonces*

$$\kappa : L(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

definida

$$T \mapsto [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'},$$

es un isomorfismos de espacios vectoriales.

Demostracion. Primero probaremos que κ es lineal y luego que tiene inversa.

Sean $T, T' \in L(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, veamos que $\kappa(\lambda T + T') = \lambda\kappa(T) + \kappa(T')$, es decir

$$[\lambda T + T']_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \lambda[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [T']_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \tag{5.6.6}$$

Para $1 \leqslant j \leqslant n$, sean

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{y} \qquad T'(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} w_i,$$

es decir

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [a_{ij}] \qquad \text{y} \qquad [T']_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [a'_{ij}],$$

entonces

$$\begin{aligned} (\lambda T + T')(v_j) &= \lambda T(v_j) + T'(v_j) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij} + a'_{ij}) w_i, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[\lambda T + T']_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\lambda a_{ij} + a'_{ij}] = \lambda[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [T']_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

y hemos probado (5.6.6) y, en consecuencia, κ es lineal.

Definamos ahora la inversa de κ: sea $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ y sea $T : V \to W$ la única transformación lineal que satisface, para $1 \leqslant j \leqslant n$, que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

Es claro que esta aplicación tiene dominio en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y su imagen está contenida en $L(V, W)$. Más aún, es muy sencillo comprobar que es la aplicación inversa a κ.

□

Teorema 5.6.7. *Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$; sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ son bases ordenadas de los espacios V, W y Z, respectivamente, entonces*

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \tag{5.6.7}$$

Demostración. Sean

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}, \quad \mathcal{B}'' = \{z_1, \dots, z_l\}$$

y

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad U(w_i) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Es decir

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [a_{ij}] \qquad \text{y} \qquad [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = [b_{ij}].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(UT)(v_j) &= U(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} U(w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k \\
&= \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}) z_k.
\end{aligned}$$

Luego el coeficiente kj de la matriz $[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ es $\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$ que es igual a la fila k de $[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ por la columna j de $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, en símbolos, si $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$ y $C = [UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$, entonces

$$[C]_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} = F_k(B)C_j(A) = [BA]_{kj}.$$

□

Corolario 5.6.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz de cambio de base $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es invertible y su inversa es $P^{-1} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$*

Demostración.

$$P^{-1}P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Id}\,.$$

□

Corolario 5.6.9. *Sean V espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V y $T, U : V \to V$ operadores lineales. Entonces*

(1) $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.

(2) Si $\mathrm{Id} : V \to V$ es el operador identidad, entonces $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}$, donde Id es la matriz identidad $n \times n$.

(3) Si T es invertible, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz invertible y

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Demostración. (1) Es inmediato del teorema anterior tomado $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'' = \mathcal{B}$.
(2) $\mathrm{Id}(v_i) = v_i$ y por lo tanto

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}\,.$$

(3) $\mathrm{Id} = TT^{-1}$, luego

$$\mathrm{Id} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = [TT^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}}.$$

Análogamente, $\mathrm{Id} = T^{-1}T$, luego

$$\mathrm{Id} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}T]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}.$$

Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$. □

Corolario 5.6.10. *Sea* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *una transformación lineal y sean* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *bases ordenadas de* $\mathbb{K}^n$ *y* $\mathbb{K}^m$*, respectivamente. Entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{C}_m\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{C}_n\mathcal{C}_m}[\mathrm{Id}_n]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_n}. \tag{5.6.8}$$

donde $\mathcal{C}_n$ *y* $\mathcal{C}_m$ *las bases canónicas de* $\mathbb{K}^n$ *y* $\mathbb{K}^m$*, respectivamente.*

Demostración. Es claro que $T = \mathrm{Id}_m \circ T \circ \mathrm{Id}_n$, luego

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}_m \circ T \circ \mathrm{Id}_n]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \\
&= [\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{C}_m\mathcal{B}'}[T \circ \mathrm{Id}_n]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_m} && (\text{teorema } 5.6.7) \\
&= [\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{C}_m\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_m}[\mathrm{Id}_n]_{\mathcal{C}_n\mathcal{B}} && (\text{teorema } 5.6.7).
\end{aligned}$$

□

Observación. El corolario 5.6.10 nos da una forma metódica de calcular la matriz de una transformación lineal en bases distintas de las canónicas.

En las hipótesis del corolario observemos que

- $[\mathrm{Id}_n]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_n}$ es muy fácil de calcular pues es la matriz donde las columnas son las coordenadas canónicas de los vectores de la base ordenada $\mathcal{B}$.
- $[T]_{\mathcal{C}_n\mathcal{C}_m}$ también es fácil de calcular, pues es la matriz de T en las bases canónicas.
- Calculamos $[\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_m}$ que es la matriz donde las columnas son las coordenadas canónicas de los vectores de la base ordenada $\mathcal{B}'$.
- Obtenemos la matriz inversa de $[\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_m}$ que, por corolario 5.6.8, es $[\mathrm{Id}_m]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_m} = [\mathrm{Id}_m]_{\mathcal{C}_m\mathcal{B}'}$.
- Finalmente, calculamos $[\mathrm{Id}_m]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_m}[T]_{\mathcal{C}_n\mathcal{C}_m}[\mathrm{Id}_n]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_n} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Ejemplo 5.6.11. Repitamos el ejemplo 5.6.2 pero ahora usando el corolario 5.6.10. Es decir, si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$T(x, y, z) = (2x + y, 3y, x + 4z),$$

y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, entonces calculemos $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ con la fórmula (5.6.8).

Solución. Las dos matríces más fáciles de calcular son:

$$[\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (2,0,1) = 2(1,0,1) + 0(1,1,0) + 1(0,1,0)\\
T(0,1,0) &= (1,3,0) = 1(1,0,1) + 3(1,1,0) + 0(0,1,0)\\
T(0,0,1) &= (0,0,4) = 0(1,0,1) + 0(1,1,0) + 4(0,1,0).
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos ahora $[\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_3]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto,

$$[\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, por la fórmula (5.6.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}[\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.6.12. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *y sean*

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

bases ordenadas de V*. Sea* T *es un operador lineal sobre* V*. Entonces, si* P *es la matriz de cambio de base de* $\mathcal{B}'$ *a* $\mathcal{B}$*, se cumple que*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

Es decir

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}. \tag{5.6.9}$$

Demostración. La demostración es muy parecida a la demostración del corolario 5.6.10. Tenemos que $T = \mathrm{Id} \circ T$ y $T = T \circ \mathrm{Id}$, luego

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id} \circ T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 5.6.7)} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T \circ \mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 5.6.7)} \\
&= P^{-1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}P && \text{(corolario 5.6.8).}
\end{aligned}$$

□

La fórmula (5.6.9) es importante por si misma y debemos recordarla.

El teorema 5.6.12 nos permite definir el determinante de un operador lineal. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador lineal sobre V. Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V, entonces $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$, para P una matriz invertible. Por lo tanto,

$$\det([T]_{\mathcal{B}'}) = \det(P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P) = \det([T]_{\mathcal{B}}PP^{-1}) = \det([T]_{\mathcal{B}}).$$

Es decir, el determinante de la matriz de T en cualquier base siempre es igual.

Definición 5.6.13. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador lineal sobre V. El *determinante de* T es el determinante de la matriz de T en alguna base de V.

§ *Ejercicios*

1) Sean V, W espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ base de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ base de W. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= 3w_1 - 2w_2 - w_3 \\
T(v_2) &= 5w_1 + 2w_3.
\end{aligned}$$

Calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

2) En cada uno de los siguientes casos calcular $[\mathrm{Id}_3]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

a) $$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,1,0),(-1,1,1),(0,1,2)\},\\ \mathcal{B}' &= \{(2,1,1),(0,0,1),(-1,1,1)\}. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(3,2,1),(0,-2,5),(1,1,2)\},\\ \mathcal{B}' &= \{(2,1,1),(0,0,1),(-1,1,1)\}. \end{aligned}$$

3) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ en los siguientes casos.

a) $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, $\mathcal{D} = \{e_2, e_1\}$. *b)* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, $\mathcal{D} = \{(1,2),(1,4)\}$.

c) $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,4)\}$, $\mathcal{D} = \{e_1, e_2\}$.

d) $\mathcal{B} = \{(-1,1),(2,2)\}$, $\mathcal{D} = \{(0,4),(1,3)\}$.

4) Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Suponga que existen números $c_1, \ldots, c_n$ tal que $T(v_i) = c_i v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Describa $[L]_{\mathcal{B}}$.

5) Decidir si existe un monomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(2,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir, además calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

6) Decidir si existe un epimorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(1,-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir, además calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

7) Sea $T : V \to V$ un operador lineal y sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases ordenadas de V.

a) Probar que $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{B}'}$ son matrices semejantes (para la definición de matrices semejantes ver sección 3.4, ejercicio 2).

b) Probar que si A es es la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ y B es semejante a A, entonces existe una base ordenada $\mathcal{D}$ tal que $[T]_{\mathcal{D}} = B$.

5.7 OPERADORES DIAGONALIZABLES

Vimos en la sección 3.6 la definición de autovalores y autovectores de una matriz. Por otro lado, en la sección 5.6 vimos que dada una base podemos asignarle a cada transformación lineal una matriz. En esta sección veremos, entro otros temas, los autovalores y autovectores desde una perspectiva de las transformaciones lineales. Por lo dicho anteriormente verán que muchos conceptos y demostraciones se repiten o son similares al caso de la matrices.

Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Un operador lineal en V es *diagonalizable* si existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.7.1}$$

En general, los operadores diagonalizables permiten hacer cálculos sobre ellos en forma sencilla, por ejemplo el núcleo del operador definido por (5.7.1) es $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ y su imagen es $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$ (vermos la demostración de estos resultado más adelante). Otra propiedad importante de los operadores diagonalizables es que la matriz de la transformación lineal en una base adecuada es diagonal (de allí viene el nombre de diagonalizable). En el caso del operador definido por (5.7.1) tenemos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

No todo operador lineal es diagonalizable y no es inmediato, ni sencillo, de la definición de un operador lineal decidir si es diagonalizable o no. En esta sección veremos herramientas para estudiar un operador lineal T y su posible diagonalización. La ecuación (5.7.1) sugiere se estudien los vectores que son transformados por T en múltiplos de sí mismos.

Definición 5.7.1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Un *valor propio* o *autovalor* de T es un escalar λ de $\mathbb{K}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ con $T(v) = \lambda v$. Si λ es un autovalor de T, entonces

(1) cualquier $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ se llama un *vector propio* o *autovector* de T asociado al valor propio λ;

(2) la colección de todos los $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ se llama *espacio propio* o *autoespacio* asociado a λ.

Los valores propios se llaman también a menudo raíces características, eigenvalores, valores característicos o valores espectrales. En el caso de vectores propios o autovectores, también hay varias denominaciones. Nosotros usaremos, preferentemente, “autovalores” y “autovectores”.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos

$$V_\lambda := \{v \in V : Tv = \lambda v\}.$$

Observar que $V_\lambda \neq 0$ si y sólo si λ es autovalor y en ese caso V_λ es el *autoespacio asociado a* λ.

Teorema 5.7.2. *Sea* V *un espacio vectorial y sea* $T : V \to V$ *una aplicación lineal. Sea* $\lambda \in \mathbb{K}$ *entonces,* V_λ *es subespacio de* V.

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $Tv_1 = \lambda v_1$ y $Tv_2 = \lambda v_2$. Entonces

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2),$$

es decir si $v_1, v_2 \in V_\lambda$, probamos que $v_1 + v_2 \in V_\lambda$.

Sea ahora $c \in F$, entonces $T(cv_i) = cT(v_1) = c\lambda v_1 = \lambda(cv_1)$. Por lo tanto, si $v_1 \in V_\lambda$ y $c \in F$, probamos que $cv_1 \in V_\lambda$.

Esto termina de probar el teorema. □

Teorema 5.7.3. *Sea* V *espacio vectorial y sea* $T : V \to V$ *una aplicación lineal. Sean* $v_1, \ldots, v_m$ *autovectores de* T, *con autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *respectivamente. Suponga que estos autovalores son distintos entre si, esto es,* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *si* $i \neq j$. *Entonces* $v_1, \ldots, v_m$ *son linealmente independientes.*

Demostración. Hagamos la demostración por inducción sobre m.

Caso base. Si $m = 1$, no hay nada que demostrar puesto que un vector no nulo el LI.

Paso inductivo. Supongamos que el enunciado es verdadero para el caso $m - 1$ con $m > 1$, (hipótesis inductiva o HI), y probemos entonces que esto implica que es cierto para m. Debemos ver que si

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots c_m v_m = 0 \tag{$*$}$$

entonces $c_1 = \cdots c_m = 0$. Multipliquemos $(*)$ por λ_1, obtenemos:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2 + \cdots c_m \lambda_1 v_m = 0. \tag{$**$}$$

También apliquemos T a $(*)$ y obtenemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots c_m \lambda_m v_m = 0. \tag{$***$}$$

Ahora a $(**)$ le restamos $(***)$ y obtenemos:

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \cdots c_m(\lambda_1 - \lambda_m) v_m = 0. \tag{5.7.2}$$

Como, por hipótesis inductiva, $v_2, \ldots, v_m$ son LI, tenemos que $c_i(\lambda_1 - \lambda_i) = 0$ para $i \geqslant 2$. Como $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ para $i \geqslant 2$, obtenemos que $c_i = 0$ para $i \geqslant 2$. Por $(*)$ eso implica que $c_1 = 0$ y por lo tanto $c_i = 0$ para todo i. □

Corolario 5.7.4. *Sea* V *espacio vectorial de dimensión* n *y sea* $T : V \to V$ *una aplicación lineal que tiene* n *autovectores* $v_1, \ldots, v_n$ *cuyos autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *son distintos entre si. Entonces* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V.

Recordemos que si T es una transformación lineal, el determinante de T se define como el determinante de la matriz de la transformación lineal en una base dada y que este determinante no depende de la base.

Definición 5.7.5. Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ lineal, el *polinomio característico de* T es $\chi_T(x) = \det(x \operatorname{Id} - T)$.

Es decir si $A = [a_{ij}]$, matriz $n \times n$, es la matriz de T es una base dada, i.e. $A = [T]_{\mathcal{B}}$, para $\mathcal{B}$ base ordenada de V, entonces

$$\chi_T(x) = \chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y su matriz en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det \begin{bmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{bmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad - bc).$$

Es decir,

$$\chi_T(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc).$$

Ejemplo 5.7.6. Consideremos la transformación lineal de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por (con abuso de notación incluido)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x - 10y + 6z \\ 8x - 8y + 6z \\ -5x + 5y - 3z \end{bmatrix}.$$

Es decir, si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 6 \\ 8 & -8 & 6 \\ -5 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Entonces el polinomio característico de T es

$$\det \begin{bmatrix} x - 10 & 10 & -6 \\ -8 & x + 8 & -6 \\ 5 & -5 & x + 3 \end{bmatrix} = x^3 + x^2 - 6x.$$

Es posible factorizar esta expresión y obtenemos

$$\chi_T(x) = x(x-2)(x+3).$$

Proposición 5.7.7. *Sea* V *espacio vectorial de dimensión* n *y sea* $T : V \to V$ *lineal. Entonces* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es autovalor si y sólo si* λ *es raíz del polinomio característico.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Si λ es autovalor, entonces existe $v \in V$, no nulo, tal que $Tv = \lambda v$, luego

$$0 = \lambda v - Tv = \lambda \operatorname{Id} v - Tv = (\lambda \operatorname{Id} - T)v.$$

Por lo tanto, $\lambda \operatorname{Id} - T$ no es invertible, lo cual implica que $0 = \det(\lambda \operatorname{Id} - T) = \chi_T(\lambda)$. Es decir, λ es raíz del polinomio característico.

($\Leftarrow$) Si λ es raíz del polinomio característico, es decir si $0 = \chi_T(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - T)$, entonces $\lambda \operatorname{Id}_T$ no es una transformación lineal invertible, por lo tanto su núcleo es no trivial. Es decir existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $(\lambda \operatorname{Id}_T)v = 0$, luego $Tv = \lambda v$, por lo tanto v es autovector con autovalor λ. $\square$

Repetimos ahora algunos conceptos ya expresados al comienzo de la sección.

Definición 5.7.8. Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ lineal. Diremos que T *es diagonalizable* si existe una base de V de autovectores de T.

En el caso que T sea una transformación lineal diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sea una base de autovectores con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

y, por lo tanto, la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ es diagonal, más precisamente

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Consideremos la transformación lineal de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida en el ejemplo 5.7.6.

Ya vimos que el polinomio característico de esta aplicación es

$$\chi_T(x) = x(x-2)(x+3).$$

Luego, por proposición 5.7.7, los autovalores de A son 0, 2 y -3. Debido al corolario 5.7.4 existe una base de autovectores de T. Veamos cuales son. Si λ autovalor de T, para encontrar los autovectores con autovalor λ debemos resolver la ecuación $\lambda v - Tv = 0$, en este caso sería

$$\begin{bmatrix} \lambda - 10 & 10 & -6 \\ -8 & \lambda + 8 & -6 \\ 5 & -5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para $\lambda = 0, 2, -3$. Resolviendo estos tres sistemas, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}, \\ V_2 &= \{(-2z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}, \\ V_{-3} &= \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{(1, 1, 0), (-2, -1, 1), (-2, -2, 1)\}$ es una base de autovectores de la transformación lineal.

Proposición 5.7.9. *Sea* V *espacio vectorial de dimensión* n *y sea* $T : V \to V$ *lineal tal que tiene una base de autovectores* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *con autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Entonces* $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$.

Demostración. Reordenemos la base de tal forma que $\lambda_i = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$ y $\lambda_i \neq 0$ para $k < i \leqslant n$. Todo $v \in V$ se escribe en términos de la base como

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n, \quad (x_i \in \mathbb{K}),$$

y entonces

$$T(v) = \lambda_{k+1} x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n. \tag{5.7.3}$$

Luego, $T(v) = 0$ si y sólo si $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, y esto se cumple si y solo si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$, es decir $v \in \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$. También es claro por la ecuación (5.7.3) que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{\lambda_{k+1} x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n : x_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\mu_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \mu_n v_n : \mu_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle. \end{aligned}$$

□

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el operador definido por $T(x, y) = (y, x)$. Probar que T es diagonalizable y encontrar una base de autovectores.

Demostración. Por la proposición 5.7.7, los autovalores de T son las raíces del polinomio característico, es decir las raíces de

$$\chi_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Luego los autovalores son 1 y -1. Para hallar un autovector con autovalor 1 debemos resolver la ecuación $T(x, y) = (x, y)$. Ahora bien,

$$(x, y) = T(x, y) = (y, x),$$

luego $x = y$ y claramente $(1, 1)$ es autovector con autovalor 1.

Por otro lado $T(x, y) = -(x, y)$, implica que $(y, x) = -(x, y)$, es decir $y = -x$ y claramente podemos elegir $(1, -1)$ como autovector con autovalor -1.

Luego $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ de autovectores de T. □

No todas las transformaciones lineales son diagonalizables, como veremos en el ejemplo a continuación.

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el operador definido por $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Probar que T tiene un único autovalor λ cuyo autoespacio $V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^2 : Tv = \lambda v\}$ es de dimensión 1.

Demostración. La matriz de T en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por la proposición 5.7.7, los autovalores de T son las raíces del polinomio característico, es decir las raíces de

$$\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x-4 \end{bmatrix} = (x-2)(x-4) + 1 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2.$$

Es decir el único autovalor posible es 3.

Debemos ver para que valores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se satisface la ecuación

$$T(x, y) = 3(x, y).$$

tiene solución. Esta ecuación es equivalente a

$$\begin{array}{rcll} (2x - y, x + 4y) & = & (3x, 3y) & \Leftrightarrow \\ 2x - y = 3x & , & x + 4y = 3y & \Leftrightarrow \\ -y = x & , & x = -y & \Leftrightarrow \\ y & = & -x & \end{array}$$

Luego $V_3 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ que es de dimensión 1 y por lo tanto no hay una base de autovectores.

$\square$

Proposición 5.7.10. *Sea* T *un operador lineal diagonalizable sobre un espacio vectorial* V *de dimensión finita. Sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *los autovalores distintos de* T*. Entonces, el polinomio característico de* T *es*

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \ldots (x - \lambda_k)^{d_k}$$

con

$$d_i = \dim V_{\lambda_i},$$

para $i = 1, \ldots, k$.

Demostración (∗). T es un operador lineal diagonalizable y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T. Entonces existe una base ordenada $\mathcal{B}$ con respecto a la cual T está representado por una matriz diagonal; es decir, los elementos de la diagonal son los escalares λ_j cada uno de los cuales se repite un cierto número de veces. Más específicamente, si $v_{j1}, \ldots, v_{jd_j}$ son los vectores en $\mathcal{B}$ con autovalor λ_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, reordenamos la base de tal forma que primero estén los autovectores con autovalor λ_1, a continuación los de autovalor λ_2, etc.:

$$\mathcal{B} = \{v_{11}, \ldots, v_{1d_1}, \ldots, v_{k1}, \ldots, v_{kd_k}\}.$$

Ahora bien, si $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} v &= x_1 v_{11} + \cdots + x_{d_1} v_{1d_1} + \cdots + x_n v_{n1} + \cdots + x_{d_n} v_{nd_n} \\ &= v_1 + v_2 + \cdots + v_k \end{aligned}$$

con $v_i = x_i v_{i1} + \cdots + x_{d_i} v_{id_i} \in V_{\lambda_i}$. Luego

$$T(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \cdots + \lambda_k v_k \tag{5.7.4}$$

Veamos que $V_{\lambda_i} =< v_{i1}, \ldots, v_{id_i} >$ para $1 \leqslant i \leqslant k$. Es claro que $< v_{i1}, \ldots, v_{id_i} > \subset V_{\lambda_i}$. Probemos ahora que, $V_{\lambda_i} \subset < v_{i1}, \ldots, v_{id_i} >$: si $v \in V_{\lambda_i}$, entonces $T(v)$ es como en (5.7.4) y, por lo tanto, si $v_j \neq 0$ para $j \neq i$ entonces $T(v) \neq \lambda_j v$, lo que contradice la hipótesis. Es decir $v = v_i \in < v_{i1}, \ldots, v_{id_i} >$. Hemos probado que $V_{\lambda_i} =< v_{i1}, \ldots, v_{id_i} >$ y como $v_{i1}, \ldots, v_{id_i}$ son LI, entonces $\dim V_{\lambda_i} = d_i$.

Por otro lado, la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \operatorname{Id}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \operatorname{Id}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \operatorname{Id}_n \end{bmatrix}$$

donde Id_j es la matriz identidad $d_j \times d_j$. Luego, el polinomio característico de T es el producto

$$(x - \lambda_1)^{d_1} \ldots (x - \lambda_k)^{d_k}.$$

□

Ejemplo. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{bmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1).$$

¿Cuáles son las dimensiones de los espacios de los vectores propios asociados con los dos valores propios? Se deben resolver las ecuaciones asociadas a las matrices

$$2\,\mathrm{Id} - A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathrm{Id} - A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Las soluciones de estos sistemas son los autoespacios de autovalor 2 y 1 respectivamente. En el primer caso,

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_1+3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución del sistema asociado a $2\,\mathrm{Id} - A$ es

$$V_2 = \{(2y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (2, 1, 0), (2, 0, 1) >$$

cuya dimensión es 2.

Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_1+4F_2} \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-2F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución del sistema asociado a $\mathrm{Id} - A$ es

$$V_1 = \{(z, -\frac{1}{3}z, z) : z \in \mathbb{R}\} =< (1, -\frac{1}{3}, 1) > .$$

Entonces, una base de autovectores de T podría ser

$$\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, -\frac{1}{3}, 1)\}$$

y en esa base la matriz de la transformación lineal es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

§ *Ejercicios*

1) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 4z, 2x + y - 4z, 3z).$$

(1) Encontrar los autovalores de T.

(2) Encontrar bases de los autoespacios de T.

(3) Determinar si T es diagonalizable.

2) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n).$$

a) ¿Cuál es el polinomio característico de T?

b) ¿Cuáles son los autovalores y los autoespacios?

3) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \ldots, \sum_{k=1}^{i} a_{ik}x_k, \ldots).$$

(El término $\sum_{k=1}^{i} a_{ik}x_k$ está ubicado en la coordenada i-ésima).

a) Encontrar la matriz de T en la base canónica.

b) ¿Cuál es el polinomio característico de T?

c) ¿Cuáles son los autovalores y los autoespacios?

4) Sea $T : V \to V$ un operador lineal invertible. Probar que si λ es autovalor de T, entonces $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

5) Sea $T : V \to V$ un operador lineal, y sea $v_1, \ldots, v_n$ una base de V que consta de autovectores que tienen autovalores distintos. Demostrar que cualquier autovector de T es un múltiplo escalar de algún v_i.

6) $T : V \to V$ un operador lineal, sean λ, μ dos autovalores distintos de T y sean $\mathcal{B}_\lambda$ y $\mathcal{B}_\mu$ bases de V_λ y V_μ, respectivamente.

Probar que $\mathcal{B}_\lambda \cup \mathcal{B}_\mu$ es una base de $V_\lambda + V_\mu$.

7) Sea $T : V \to V$ un operador lineal diagonalizable con dos autovalores λ, μ . Probar que V es suma directa de los autoespacios V_λ y V_μ, es decir

$$V = V_\lambda \oplus V_\mu.$$

(La definición de suma directa se encuentra en la sección 4.2, ejercicio *8*).

8) Sea V espacio vectorial de dimensión finita. $S : V \to V$ una aplicación lineal. Diremos que S es un *involución* si $S^2 = \mathrm{Id}$.

Sea $S : V \to V$ una involución. Entonces los conjuntos

$$V_1 = \{v \in V : S(v) = v\}, \qquad V_{-1} = \{v \in V : S(v) = -v\}$$

son subespacios vectoriales y

$$V = V_1 \oplus V_{-1}.$$

9) Sean $T, S : V \to V$ dos operadores lineales. Probar que $T \circ S$ y $S \circ T$ tienen los mismos autovalores.

5.8 OPERADORES SIMÉTRICOS EN $\mathbb{R}^n$

Definición 5.8.1. Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^n$, diremos que T es un *operador simétrico* si la matriz de T en la base canónica es simétrica, es decir si $[T]_{\mathcal{C}}^t = [T]_{\mathcal{C}}$

Observar, como ya hemos visto anteriormente, que en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar es

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_i x_i y_i = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Es decir, si usamos la convención que un vector en $\mathbb{R}^n$ se escribe como una matriz columna (de n filas y una columna), tenemos que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador simétrico y A la matriz asociada a T, es decir $A = [T]_{\mathcal{C}}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica. Si trabajamos en las coordenadas canónicas es claro que $T(x) = Ax$ y debido a esto a menudo intercambiaremos T por A y viceversa.

Veremos ahora que un operador simétrico T, o equivalentemente, una matriz A simétrica, tiene al menos un autovalor. En el capítulo 6, en la sección 6.4, veremos que este resultado implicará que T es diagonalizable, es decir que hay una base de autovectores del operador o, equivalentemente, que existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Usaremos el siguiente resultado sin demostración.

Teorema 5.8.2 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Es decir si*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \textit{ con } a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0 \textit{ y } n \geqslant 1,$$

entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(\alpha) = 0$.

Pese a llamarse "Teorema fundamental del álgebra", este resultado no suele demostrarse en los cursos de álgebra, pues su demostración requiere del uso de análisis matemático.

Si α es raíz de p, un polinomio de grado n, por el teorema del resto, $p(x) = (x - \alpha)p_1(x)$, con p_1 un polinomio de grado $n - 1$. Aplicando inductivamente este procedimiento, podemos deducir:

Corolario 5.8.3. *Si* p *es un polinomio de de grado* $n \geqslant 1$ *con coeficientes en* $\mathbb{C}$, *entonces*

$$p(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

con $c, \alpha_i \in \mathbb{C}$.

Observación 5.8.4. Recordemos que si $a + bi \in \mathbb{C}$, a es la *parte real* y b es la *parte imaginaria*. El conjugado $a + b_i$ es $\overline{a + bi} = a - bi$. La conjugación cumple que $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ $(z, w \in \mathbb{C})$. Recordemos también que $z\overline{z} = |z|^2$.

Si $x \in \mathbb{C}^n$, entonces cada coordenada de x es un número complejo, es decir $x_i = a_i + ib_i$, con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Luego si $v = (a_1, \dots, a_n)$ y $w = (b_1, \dots, b_n)$, tenemos que $x = v + wi$ con $v, w \in \mathbb{R}^n$. En este caso, diremos que v es la parte real de x y w la parte imaginaria. También podemos extender la conjugación a $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^{n \times m}$ coordenada a coordenada y entonces no es difícil verificar que si $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B},$$

y que si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$ y además

$$\overline{\alpha A B} = \overline{\alpha}\,\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}\,\overline{\alpha B}.$$

Notar también que si $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$z^t\,\overline{z} = [z_1\ \dots\ z_n] \begin{bmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{bmatrix} = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2,$$

que es > 0 si el vector no es nulo. Denotaremos la expresión de arriba como $||z||^2$.

Teorema 5.8.5. *Sea* T *un operador simétrico de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *autovalor real de* T.

Demostración. Sea $A = [T]_{\mathcal{C}}$. Extendamos T a una transformación lineal de $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ de manera natural, con el producto de matrices $T(x) = Ax$ con $x \in \mathbb{C}^n$. Sea χ_A el polinomio característico de A. Por el teorema fundamental del álgebra, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\chi_A(\lambda) = 0$. Luego existe $x \in \mathbb{C}^n$, no nulo, tal que $Ax = \lambda x$. Veremos que λ es un número real. Por un lado, como A tiene coeficientes reales, tenemos que $A = \overline{A}$ y entonces:

$$x^t A \overline{x} = x^t \overline{A}\,\overline{x} = x^t \overline{Ax} = x^t \overline{\lambda x} = \overline{\lambda} x^t \overline{x} = \overline{\lambda} ||x||^2.$$

Por otro lado, como A es simétrica,

$$x^t A \overline{x} = x^t A^t \overline{x} = (Ax)^t \overline{x} = (\lambda x)^t \overline{x} = \lambda x^t \overline{x} = \lambda ||x||^2.$$

Por lo tanto, $\lambda = \overline{\lambda}$, lo cual nos dice que $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, existe un vector $x \in \mathbb{C}^n$ no nulo y $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $Ax = \lambda x$. Si $x = v + iw$ con $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\lambda v + i\lambda w = \lambda x = Ax = Av + iAw.$$

Como A es una matriz real $Av, Aw \in \mathbb{R}^n$ y como $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $Av = \lambda v$ y $Aw = \lambda w$ Como $x = v + iw$ es no nulo, entonces o v o w son no nulos y por lo tanto hay al menos un autovector en $\mathbb{R}^n$ con autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. □

El siguiente resultado, el *teorema espectral*, requiere para su demostración una generalización del resultado anterior para espacios de producto interno de dimensión finita y matrices (transformaciones lineales) simétricas respecto a este producto interno. Todos estos conceptos y resultados son generalizaciones sencillas, pero llevan algún tiempo desarrollarlas y el lector interesado las puede ver en la sección 6.4.

Teorema 5.8.6 (Teorema espectral)**.** *Sea A matriz simétrica $n \times n$. Entonces existe $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una BON de $\mathbb{R}^n$ de autovectores de A.*

Corolario 5.8.7. *Sea A matriz simétrica $n \times n$, entonces A es diagonalizable.*

Ejemplo. Encontremos autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como es una matriz simétrica sabemos que es diagonalizable, es decir tiene una base de autovectores. El polinomio característicos es

$$\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} = x^3 - 6x^2 + 10x - 4.$$

Ahora bien, las raíces de $x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Para averiguar los autovectores debemos plantear las ecuaciones $Ax = \lambda_i x$, que resultan en los siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= \lambda_i x_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= \lambda_i x_2 \\ -x_2 + 2x_3 &= \lambda_i x_3, \end{aligned}$$

$(i = 1, 2, 3)$, o equivalentemente,

$$\begin{aligned} (2-\lambda_i)x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + (2-\lambda_i)x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + (2-\lambda_i)x_3 &= 0, \end{aligned}$$

$(i = 1, 2, 3)$. En el caso de $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$, resulta

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 - \sqrt{2}x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 - \sqrt{2}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda(1, -\sqrt{2}, 1)$. Si continuamos resolviendo los sistemas de ecuaciones, podemos encontrar la siguiente base de autovectores:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -\sqrt{2}, 1) \\ v_2 &= (-1, 0, 1) \\ v_3 &= (1, \sqrt{2}, 1). \end{aligned}$$

§ *Ejercicios*

1) Encontrar los autovalores de las siguientes matrices.

   a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Encontrar los autovalores de las siguientes matrices.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal simétrico. Sean v_1, v_2 autovalores de A con autovalores λ_1, λ_2 respectivamente. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, demostrar que v_1 es perpendicular a v_2.

4) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal simétrico. Si A tiene solo un autovalor propio, demostrar que toda base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ consta de autovectores de A.

5) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal simétrico. Suponga que hay n autovalores distintos de A. Demostrar que sus autovectores forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.