(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $\chi_A(\kappa) = \det(A-\kappa Id) = \begin{vmatrix} 2-\kappa & 3 \\ -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} = (2-\kappa)(1-\kappa)-3(-1) = \kappa^2-3\kappa+2+3 = \kappa^2-3\kappa+5 = \frac{3\pm\sqrt{9-20}}{2} = \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$

El polinomio característico no tiene raíces reales, pero tiene raíces imaginarias $\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$.
Buscamos los autoespacios asociados:

$$A-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix} 2-\frac{3+i\sqrt{11}}{2} & 3 \\ -1 & 1-\frac{3+i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+i\sqrt{11}}{2} & 3 \\ -1 & -\frac{1+i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2(-1)]{f_1\left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(1-i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-3f_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Luego, $(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \kappa_1 + \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})\kappa_2$

Por lo tanto, el subespacio asociado a λ_1 es $V_1 = \{(-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})t, t) : t\in\mathbb{C}\}$

$$A-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{11}}{2} & 3 \\ -1 & -\frac{1-i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2(-1)]{f_1\left(\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\right)} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2}(1+i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1-3f_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Luego, $(A-\lambda_2 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \kappa_1 + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})\kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})\kappa_2$

Por lo tanto, el subespacio asociado a λ_2 es $V_2 = \{(-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})t, t) : t\in\mathbb{C}\}$

b) $\chi_B(\kappa) = \det(B-\kappa Id) = \begin{vmatrix} -9-\kappa & 4 & 4 \\ -8 & 3-\kappa & 4 \\ -16 & 8 & 7-\kappa \end{vmatrix} = (-9-\kappa)(3-\kappa)(7-\kappa)+(-256)+(-256)+64(3-\kappa)+32(7-\kappa)-32(-9-\kappa) = -\kappa^3+\kappa^2+5\kappa+3$
$= -(\kappa+1)^2(\kappa-3)$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, busco los autoespacios asociados:

$$A-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix} -9-(-1) & 4 & 4 \\ -8 & 3-(-1) & 4 \\ -16 & 8 & 7-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \\ -16 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1\cdot(-1/4)]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow 2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3 = 0 \Rightarrow \kappa_2 = 2\kappa_1-\kappa_3$
Por lo tanto, el subespacio asociado a λ_1 es $V_1 = \{(s, 2s-t, t) : s,t\in\mathbb{R}\}$

$$A-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix} -9-3 & 4 & 4 \\ -8 & 3-3 & 4 \\ -16 & 8 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 \\ -8 & 0 & 4 \\ -16 & 8 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2\cdot -1/8]{} \begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -16 & 8 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3+16f_2]{f_1+12f_2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1\cdot 1/4]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[f_3-8f_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_2 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 - 1/2\,\kappa_3 = 0 \\ \kappa_2 - 1/2\,\kappa_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \frac{1}{2}\kappa_3 \\ \kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_3 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_2 es $V_2 = \{(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

c) $\chi_C(\kappa) = \det(C-\kappa Id) = \begin{vmatrix} 4-\kappa & 4 & -12 \\ 1 & -1-\kappa & 1 \\ 5 & 3 & -11-\kappa \end{vmatrix} = (4-\kappa)(-1-\kappa)(-11-\kappa)+20-36+60(-1-\kappa)+4(-11-\kappa)+3(4-\kappa) = -\kappa^3-8\kappa^2-16\kappa = -\kappa(\kappa+4)^2$

Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -4$, busco los autoespacios asociados:

$$A-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-5f_2]{f_1-4f_2} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -16 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3\cdot 1/8]{f_2\cdot 1/8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2+f_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1-\kappa_3 = 0 \\ \kappa_2-2\kappa_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \kappa_3 \\ \kappa_1 = 2\kappa_3 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_1 es $V_1 = \{(t, 2t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

$$A-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix} 4-(-4) & 4 & -12 \\ 1 & -1-(-4) & 1 \\ 5 & 3 & -11-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -12 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-5f_2]{f_1-8f_2} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -20 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3\cdot -1/12]{} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -20 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-3f_3]{f_1+20f_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1-2\kappa_3 = 0 \\ \kappa_2+\kappa_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 2\kappa_3 \\ \kappa_2 = -\kappa_3 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_2 es $V_2 = \{(2t, -t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

d) $\chi_D(\kappa) = \det(D-\kappa Id) = \begin{vmatrix} 2-\kappa & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\kappa & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1-\kappa \end{vmatrix} = (2-\kappa)\begin{vmatrix} 4-\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 1-\kappa & 1 \\ 0 & 3 & -1-\kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\kappa & 1 \\ 0 & 3 & -1-\kappa \end{vmatrix}$
$= (2-\kappa)((4-\kappa)(1-\kappa)(-1-\kappa)-(4-\kappa)3)+(1-\kappa)(-1-\kappa)-3$
$= (2-\kappa)(-\kappa^3+4\kappa^2+4\kappa-16)+(\kappa^2-1)-3$
$= (\kappa^4-6\kappa^3+4\kappa^2+24\kappa-32)+(\kappa^2-4)$
$= \kappa^4-6\kappa^3+5\kappa^2+24\kappa-36$
$= (\kappa-3)^2(\kappa-2)(\kappa+2)$

Luego, la matriz tiene autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, busco los autoespacios asociados:

$$A-\lambda_1 Id = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3\cdot(-1/2)]{f_1\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4-3f_3]{f_2+f_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_1 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1-\kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = 0 \\ \kappa_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \kappa_2 \\ \kappa_3 = 0 \\ \kappa_4 = 0 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_1 es $V_1 = \{(t, t, 0, 0) : t\in\mathbb{R}\}$

$$A-\lambda_2 Id = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3(-1)]{f_2(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4-3f_1]{f_2+2f_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_2 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3-\kappa_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = \kappa_4 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_2 es $V_2 = \{(0, 0, t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

$$A-\lambda_3 Id = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3(1/3)]{f_2(-1)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4-3f_3]{f_1-4f_2} \begin{bmatrix} 0 & 25 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_3 Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3+\frac{1}{3}\kappa_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = -\frac{1}{3}\kappa_4 \end{cases}$
Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_3 es $V_3 = \{(0, 0, \frac{-1}{3}t, t) : t\in\mathbb{R}\}$

e) $\chi_E(\kappa) = \det(E-\kappa Id) = \begin{vmatrix} \lambda-\kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda-\kappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-\kappa & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda-\kappa \end{vmatrix} = (\lambda-\kappa)^n$

Luego la matriz tiene a λ como su único autovalor, buscamos el autoespacio asociado:

$$E-\lambda Id = \begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(E-\lambda Id)\kappa = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \vdots \\ \kappa_{n-1} = 0 \end{cases}$

Por lo tanto el autoespacio asociado a λ es $V = \{(0, 0, \cdots, 0, t) : t\in\mathbb{R}\}$