(10) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?

b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.

c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

a) Si $b=0$, entonces $z=0$ es la única solución. Si $b \neq 0$, usaremos la forma polar de b. Si $b = re^{i\theta}$ con $r \neq 0$, entonces $z = \pm\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ son los dos posibles valores de z tal que $z^2 = b$. Ahora bien,

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{i\theta/2} \in \{0, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \{0, 2\pi\} + 4\pi\mathbb{Z}.$$

Como wl argumento de b es θ, concluimos que $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si el argumento de b es un múltiplo entero de 2π, es decir si b es real positivo.

b) Si z es imaginario puro, entonces $z = ia$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego, $z^2 = -a^2 = 4$, y por lo tanto $a^2 = -4$, lo que no tiene solución en $\mathbb{R}$.

c) Si z es imaginario puro, entonces $z = ia$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego, $z^2 = -a^2 = -4$, y por lo tanto $a^2 = 4$, lo que tiene solución en $\mathbb{R}$, $a = \pm 2$.