(6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3(-1)]{f_2-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -9 & b_2-2b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2-3f_3]{f_1+3f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1-3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2-2b_1+3b_3 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \end{array}\right]$$

Para que el sistema tenga solución se debe dar $b_2-2b_1+3b_3=0$, entonces el conjunto de soluciones es $\{(s, 2s-3t, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$

b) $\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1+b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-f_4]{f_2-2f_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_2-2b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_3-b_4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right]$$

Para que el sistema tenga solución se debe dar $\begin{cases} b_1+b_2-2b_4=0 \\ b_1+b_3-b_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 2b_4-b_1 \\ b_3 = b_4-b_1 \end{cases}$

El conjunto de soluciones es $\{(s, 2t-s, t-s, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$

Primero busco la MERF asociada del sistema si fuera homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+f_1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-2f_3]{f_1+f_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2\cdot(-1/6)]{f_1\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-9f_2]{f_1+13f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la MERF asociada al sistema es Id_3 puedo concluir que el conjunto de soluciones es $\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3\}$