1

VECTORES

El concepto de vector es básico para el estudio de funciones de varias variables y proporciona la motivación geométrica para todo el curso. Por lo tanto, las propiedades de los vectores, tanto algebraicas como geométricas, serán discutidas en forma resumida en este capítulo.

1.1 ÁLGEBRA LINEAL EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

Sabemos que se puede usar un número para representar un punto en una línea, una vez que se selecciona la longitud de una unidad.

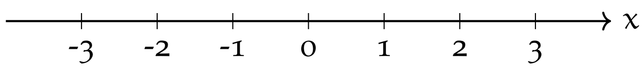


Figura 1: La recta real y algunos números enteros.

Se puede usar un par de números (x, y) para representar un punto en el plano. Estos pueden ser representados como en la figura 2.

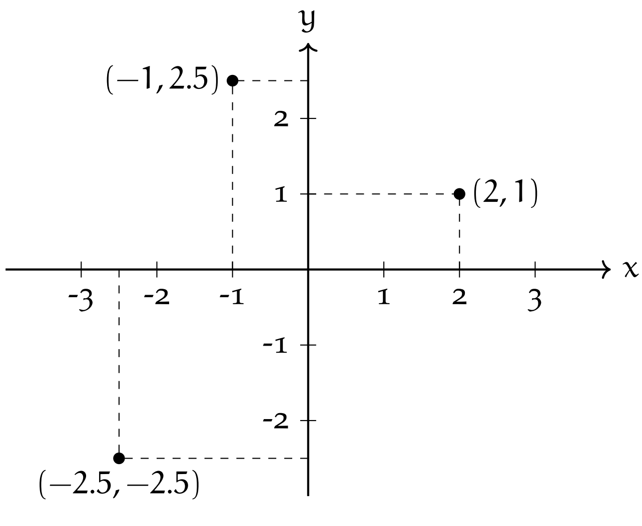


Figura 2: Representación gráfica de los puntos $(2, 1)$, $(-1, 2.5)$ y $(-2.5, -2.5)$ en $\mathbb{R}^2$.

Ahora observamos que un triple de números (x, y, z) se puede usar para representar un punto en el espacio, es decir, espacio tridimensional, o 3-espacio. Simplemente, introducimos un eje más. La figura 3 ilustra esto.

En lugar de usar (x, y, z), también suele usarse la notación (x_1, x_2, x_3). La línea podría llamarse el 1-espacio, y el plano podría llamarse el 2-espacio.

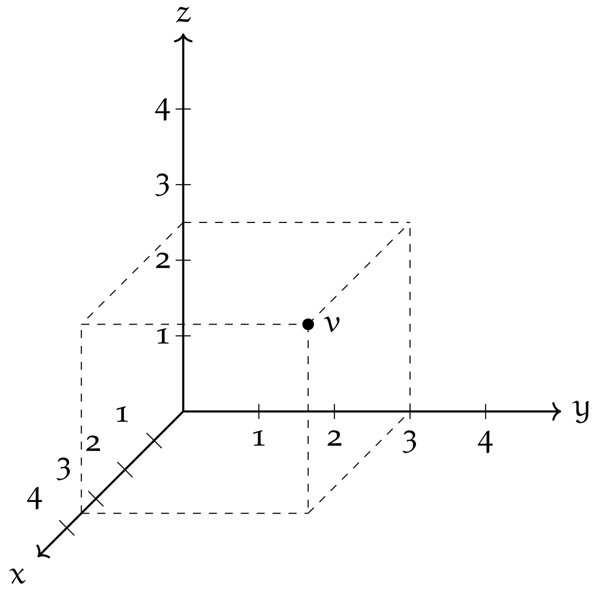


Figura 3: Representación gráfica del punto $v = (3.5, 3, 2.5)$ en $\mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, podemos decir que un solo número representa un punto en el 1-espacio. Un par representa un punto en el 2-espacio. Un triple representa un punto en el 3-espacio.

Aunque no podemos hacer un dibujo para generalizar lo anterior a 4-espacios, no hay nada que nos impida considerar un cuádruple de números y decretar que este es un punto en el 4-espacio. Un quíntuple sería un punto en el 5-espacio, luego vendría un séxtuple, séptuple, óctuple, etc.

Podemos generalizar y definir un punto en el n-espacio, para n un entero positivo, como una n-tupla de números. Vamos a denotar tal n-tupla con letras v, w, u, ... y usaremos otras letras minúsculas para los números. Si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, llamamos a los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las *coordenadas* del punto v. Más precisamente, x_i será la *coordenada* i*-ésima* de v. Por ejemplo, en el 3-espacio, 2 es la primera coordenada del punto $(2, 3, -4)$, y -4 es la tercera coordenada. Denotamos a los n-espacios por $\mathbb{R}^n$. Para formalizar:

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, entonces

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Todo v en $\mathbb{R}^n$ será llamado *punto*. Alternativamente, también podemos decir que v es un *vector en el origen* o simplemente un *vector*.

Observación. Debido a que separamos las coordenadas de un vector con comas, no es conveniente utilizar la notación española que inicia con coma la parte decimal de un número. Por ejemplo, en este apunte a “dos coma cuatro” lo escribiremos “2.4” y así para cualquier número real.

La mayoría de nuestros ejemplos tendrán lugar cuando $n = 2$ o $n = 3$. Por lo tanto, el lector puede visualizar cualquiera de estos dos casos a lo largo del apunte. Para ello usaremos el *sistema de coordenadas cartesianas* para representar los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, tal como se ha hecho en las figuras 2 y 3.

Ejemplo. Un ejemplo clásico de 3-espacio es, por supuesto, el espacio en el que vivimos. Después de seleccionar un origen y un sistema de coordenadas, podemos describir la posición de un punto (cuerpo, partícula, etc.) mediante 3 coordenadas. Además, como se sabía hace mucho tiempo, es conveniente extender este espacio a un espacio de 4 dimensiones, donde la cuarta coordenada es el tiempo, seleccionándose el origen del tiempo, por ejemplo, como el nacimiento de Cristo, aunque esto es puramente arbitrario. Entonces, un punto con coordenada de tiempo negativo es un punto antes de Cristo, y un punto con coordenada de tiempo positiva es un punto después de Cristo.

Sin embargo, no es que obligatoriamente "el tiempo es la cuarta dimensión". El espacio 4-dimensional anterior es solo un ejemplo posible. Hagamos un ejemplo relacionado a la economía: tomamos como coordenadas la cantidad de dinero gastado por una industria a lo largo de un año. Por ejemplo, podríamos tener un espacio de 6 dimensiones con coordenadas correspondientes a las siguientes industrias: 1. acero, 2. automotriz, 3. productos agrícolas, 4. productos químicos, 5. indumentaria y 6. transporte. Las coordenadas de las 6-tuplas representarían el gasto anual de las industrias correspondientes. Por ejemplo,

$$(1000, 800, 550, 300, 700, 200)$$

significaría que la industria del acero gastó 1000 en un año determinado, la automotriz 800, etc.

También podemos visualizar los 3-espacios como "productos de espacios de dimensiones inferiores". Por ejemplo, podemos ver las coordenadas de los 3-espacios como dos coordenadas en un 2-espacio acompañada por una coordenada en el 1-espacio. Esto es, (x, y, z) indica el mismo punto que $((x, y), z)$. Esto se escribe como

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1.$$

Utilizamos el signo del producto, que no debe confundirse con otros "productos", como el producto de los números. Del mismo modo, podemos escribir

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1.$$

Hay otras formas de expresar $\mathbb{R}^4$ como un producto, a saber:

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Esto significa que al punto $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ lo podemos describir por el par ordenado $((x_1, x_2), (x_3, x_4)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

En general, dado $n > 1$, y n_1, n_2 tal que $n_1 + n_2 = n$, tenemos

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}.$$

De forma más general aún, dado $n > 1$, y $n_1, \ldots, n_k$ tal que $n_1 + \cdots + n_k = n$, tenemos

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}.$$

Ahora vamos a definir cómo sumar los puntos de $\mathbb{R}^n$. Si v, w son dos puntos, digamos en el 2-espacio, definimos $v + w$ como el punto cuyas coordenadas son la suma de cada coordenada. Es decir, si, por ejemplo, $v = (1, 2)$ y $w = (-3, 5)$, entonces $v + w = (-2, 7)$. En 3-espacios la definición es análoga. Por ejemplo, si $v = (-1, y, 3)$ y $w = (x, 7, -2)$, entonces $v + w = (x - 1, y + 7, 1)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

En dos y tres dimensiones podemos definir Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ o $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Generalizando,

Definición 1.1.2. Si $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la suma de los dos vectores como:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

Observemos que se satisfacen las siguientes propiedades: sean v, w, u en $\mathbb{R}^n$, entonces

S1. $v + w = w + v$ (*conmutatividad de la suma*),

S2. $(v + w) + u = v + (w + u)$ (*asociatividad de la suma*),

S3. si definimos

$$0 = (0, \ldots, 0),$$

el punto cuyas coordenadas son todas 0, el *vector cero*, entonces

$$v + 0 = 0 + v = v,$$

(*existencia de elemento neutro de la suma*).

S4. si $v = (x_1, \ldots, x_n)$, definimos $-v = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Entonces

$$v + (-v) = (-v) + v = 0$$

(*existencia de opuesto* o *inverso aditivo*).

Estas propiedades se deducen casi trivialmente de la definición de suma, coordenada a coordenada, y de la validez de las propiedades en el caso de la recta real. Como es usual en otros contextos ya conocidos, si $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces denotamos $v - w := v + (-w)$.

Ejemplo. Vimos al final del ejemplo de la página 7 que una n-tupla puede representar cuestiones relacionadas con las finanzas. En nuestro ejemplo una 6-tupla representaba el gasto anual de determinadas actividades económicas, por ejemplo los gastos en los años 2000 y 2001 son

$$\begin{array}{lcl} 2000 & \rightarrow & (1000, 800, 550, 300, 700, 200) \\ 2001 & \rightarrow & (1200, 700, 600, 300, 900, 250) \end{array}$$

Luego los costos totales en los dos años son

$$\begin{aligned} &(1000, 800, 550, 300, 700, 200) + (1200, 700, 600, 300, 900, 250) = \\ &= (1000 + 1200, 800 + 700, 550 + 600, 300 + 300, 700 + 900, 200 + 250) \\ &= (2200, 1500, 1350, 600, 1600, 450). \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior es claro que la suma de puntos se corresponde con lo que nosotros esperamos que ocurra.

En el plano y en el espacio la suma se puede hacer en forma "geométrica". Veamos ahora hagamos una interpretación geométrica de la suma en el plano.

En álgebra lineal a veces resultará conveniente pensar a cada punto como un *vector* que comienza en el origen. Los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden graficar como "flechas" que parten del origen y llegan a las coordenadas del punto. Veamos en los siguientes ejemplos que está interpretación es útil.

Ejemplo. Sea $v = (2, 3)$ y $w = (-1, 1)$. Entonces $v + w = (1, 4)$. En el dibujo de los puntos involucrados aparece un *paralelogramo* (fig. 4)

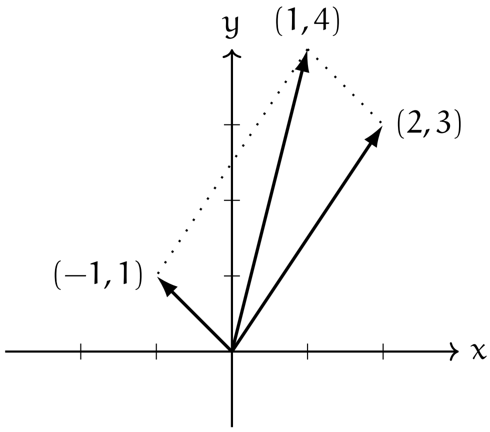


Figura 4: Ejemplo de la ley del paralelogramo.

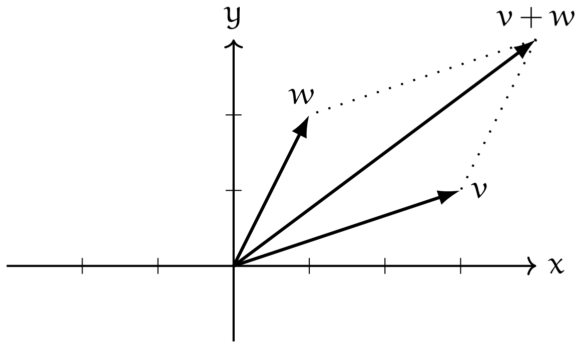


Figura 5: La ley del paralelogramo.

Ejemplo. Sea $v = (3,1)$ y $w = (1,2)$. Entonces

$$v + w = (4,3).$$

Esta suma la representamos en la fig. 5.

Vemos de nuevo que en la representación geométrica aparece un paralelogramo. La razón por la cual la figura que aparece es un paralelogramo se puede dar en términos de la geometría plana de la siguiente manera. Obtenemos $v = (1,2)$ comenzando desde el origen $0 = (0,0)$, y moviéndonos 1 unidad hacia la derecha y 2 hacia arriba. Para obtener $v + w$, comenzamos desde v, y de nuevo nos movemos 1 unidad a la derecha y 2 hacia arriba. Así, el segmento entre 0 y w, y entre v y $v + w$ son las hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos correspondientes son de la misma longitud y paralelos. Los segmentos anteriores son por lo tanto paralelos y de la misma longitud, como se ilustra en la fig. 6. Esta forma geométrica de visualizar la suma de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ es conocida como *ley del parelogramo.*

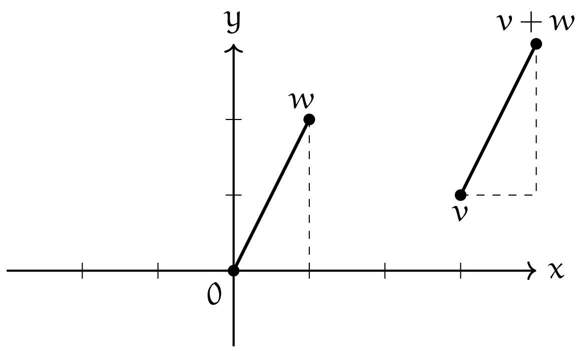


Figura 6: La ley del paralelogramo.

Ejemplo. Sea el punto $v = (3,1)$, entonces $-v = (-3,-1)$. Si dibujamos v y $-v$ vemos que $-v$ es un vector del mismo "tamaño" que v pero con la dirección opuesta. Podemos ver a $-v$ como la reflexión de v a través del origen (fig. 7).

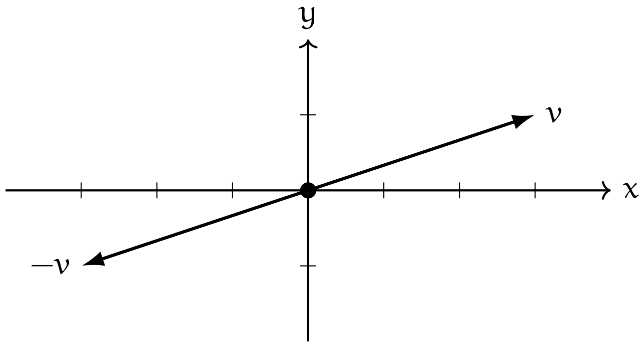


Figura 7: El opuesto de un vector.

La resta de dos vectores también se puede representar geométricamente: restemos al vector v el vector w. Como primera opción podemos encontrar el vector $-w$ y sumarlo a v aplicando la ley del paralelogramo. Esto es equivalente a lo siguiente: los vectores v y w determinan el triángulo determinado por los puntos 0, v y w. Entonces, el lado determinado por w y v, en ese sentido, trasladado al origen es el vector $v - w$ (fig. 8). Claramente, esta forma geométrica de hacer la resta es de nuevo una aplicación de la ley del paralelogramo, pues $(v - w) + w = v$.

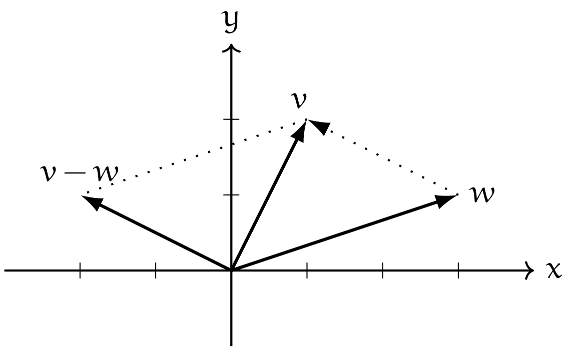


Figura 8: Resta de vectores.

Ahora consideraremos la multiplicación de un vector v por un número.

Definición 1.1.3. Sea $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda.v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

También denotamos a esta multiplicación por λv.

Ejemplo. Si $v = (2, -1, 5)$ y $\lambda = 7$, entonces $\lambda v = (14, -7.35)$.

Es fácil verificar las siguientes reglas: dados $v, w \in \mathbb{R}^n$,

P1. $1.v = v$.

P2. $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2)v$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

D1. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (*propiedad distributiva*).

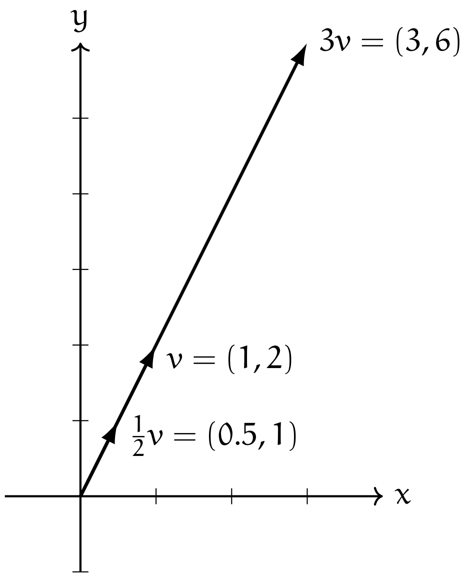
D2. $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (*propiedad distributiva*).

También tengamos en cuenta que

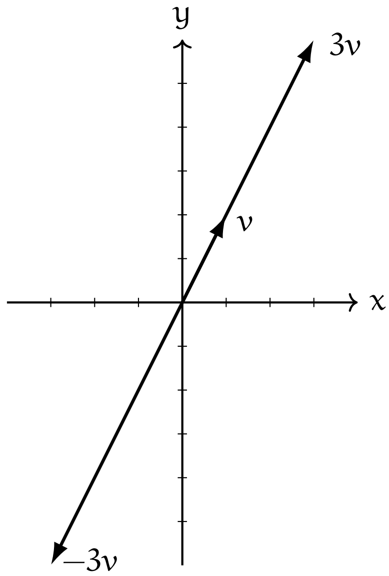
$$(-1)v = -v.$$

¿Cuál es la representación geométrica de la multiplicación de un vector por un número?

Ejemplo. Sea $v = (1,2)$ y $\lambda = 3$. Luego $\lambda v = (3,6)$ como en la siguiente figura:



(a)



(b)

La multiplicación por 3 equivale a "estirar" v por 3. Del mismo modo, $\frac{1}{2}v$ equivale a estirar v en $\frac{1}{2}$, es decir, reducir v a la mitad de su tamaño. En general, si t es un número con $t > 0$, interpretamos tv como un punto en la misma dirección que v con tamaño t-veces el tamaño de v. De hecho, decimos que v y w tienen la misma dirección si existe un número $\lambda > 0$ tal que $v = \lambda w$. La multiplicación por un número negativo invierte la dirección. Así, $-3v$ se representa como en la figura anterior, en la parte (b). Decimos que v y w (ninguno de los cuales es cero) tienen direcciones opuestas si existe un número $\lambda < 0$ tal que $v = \lambda w$. Por lo tanto, $-v$ tiene dirección opuesta a v.

Más allá de las interpretaciones geométricas, hemos definido en forma algebraica la suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ y la multiplicación de un vector por un escalar, y estas operaciones tienen ciertas propiedades de interés.

Concluyendo, las definiciones y resultados más importantes de esta sección son:

Sean $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,

- $\lambda.v := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Dados v, w, u en $\mathbb{R}^n$, se verifican

S1. $v + w = w + v$ (*conmutatividad de la suma*),

S2. $(v + w) + u = v + (w + u)$ (*asociatividad de la suma*),

S3. sea $0 := (0, \ldots, 0)$, el *vector cero*, entonces $0 + v = v + 0 = v$ (*existencia de elemento neutro de la suma*).

S4. Si $v = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $-v := (-x_1, \ldots, -x_n)$ y se satisface $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (*existencia de opuesto* o *inverso aditivo*).

P1. $1.v = v$.

P2. $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1\lambda_2)v$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

D1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (*propiedad distributiva*).

D2. $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (*propiedad distributiva*).

Verán más adelante que las propiedades anteriores son muy parecidas a los "axiomas" que se utilizan en el capítulo 4 para definir espacios vectoriales abstractos (ver definición 4.1.1).

Definición 1.1.4. Dado, $n \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se denota $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i := (0, ..., 1, ..., 0)$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ los vectores son $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

Estos vectores jugarán un rol central en la materia, principalmente, por la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.5. *Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de la base canónica. Explícitamente, si $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$(x_1, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

La demostración es trivial pero por ahora no la haremos.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) \\ &= 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \\ &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3\end{aligned}$$

§ *Ejercicios*

1) Dados $v = (-1, 2 - 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

1.2 EL PRODUCTO ESCALAR

En 2-espacios, dados dos vectores $v = (x_1, x_2)$ y $w = (y_l, y_2)$, definimos su *producto escalar* como

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Para el caso de 3-espacios, sean $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_l, y_2, y_3)$, entonces el *producto escalar de* v *y* w es

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Finalmente, en los n-espacios, generalizamos la definición de la manera obvia:

Definición 1.2.1. Sean $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_l, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, el *producto escalar de* v *y* w se define como

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Es importante notar que este producto es un número real. Por ejemplo, si

$$v = (1, 3, -2) \quad \text{y} \quad w = (-1, 4, -3),$$

entonces

$$\langle v, w \rangle = -1 + 12 + 6 = 17.$$

Por el momento, no le damos una interpretación geométrica a este producto escalar y veremos esto en la sección 1.3. Ahora derivaremos algunas propiedades importantes.

Proposición 1.2.2. *Sean* v, w, u *tres vectores en* $\mathbb{R}^n$, *entonces*

P1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

P2.

$$\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle = \langle w + u, v \rangle.$$

P3. *Si* λ *es un número, entonces*

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \quad y \quad \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle.$$

P4. *Si* $v = 0$ *es el vector cero, entonces* $\langle v, v\rangle = 0$*, de lo contrario*

$$\langle v, v\rangle > 0$$

Demostración. Expresemos los tres vectores en coordenadas: $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n)$, $u = (z_1, \ldots, z_n)$.

P1.

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n$$

porque para cualquiera de los dos números x, y, tenemos que $xy = yx$. Esto prueba la propiedad .

Para P2, sea $u = (z_1, \ldots, z_n)$. Entonces

$$w + u = (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$$

y

$$\begin{aligned}\langle v, w+u\rangle &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)\rangle \\ &= x_1(y_1 + z_1) + \cdots x_n(y_n + z_n) \\ &= x_1y_1 + x_1z_1 + \cdots x_ny_n + x_nz_n\end{aligned}$$

Reordenando los términos obtenemos

$$\langle v, w+u\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + x_1z_1 + \cdots + x_nz_n,$$

que no es otra cosa que $\langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$.

Dejamos la propiedad P3 como ejercicio.

Finalmente probemos P4. Observemos que

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1.2.1}$$

Como $x_i^2 \geqslant 0$ para todo i, entonces $\langle v, v\rangle \geqslant 0$. Además, es claro que si v tiene todas las coordenadas iguales a 0, entonces $\langle v, v\rangle = 0$. En el caso que $v \neq 0$, entonces, existe algún i tal que $x_i \neq 0$, por lo tanto $x_i^2 > 0$ y por la ecuación (1.2.1), tenemos que $\langle v, v\rangle > 0$. $\square$

Por la propiedad P1 diremos que el producto escalar es *simétrico*, por las propiedades P2 y P3 diremos que es una *forma bilineal* y, finalmente, por la propiedad P4 diremos que es *definido positivo.*

El producto escalar $\langle v, w\rangle$ puede ser igual a 0 para determinados vectores, incluso ambos distintos de 0. Por ejemplo, si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, -\frac{4}{3})$, entonces

$$\langle v, w\rangle = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Definición 1.2.3. Decimos que dos vectores v y w en $\mathbb{R}^n$ son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle v, w\rangle = 0$. Cuando v y w son ortogonales denotamos $v \perp w$.

Por el momento, no es claro que en el plano la definición anterior coincida con nuestra noción geométrica e intuitiva de perpendicularidad. Esto lo veremos en la siguiente sección. Aquí nos limitaremos a observar un ejemplo.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ consideremos los vectores

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1),$$

representados en la fig. 9

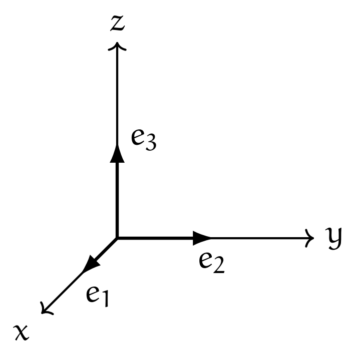


Figura 9: Vectores canónicos en $\mathbb{R}^3$.

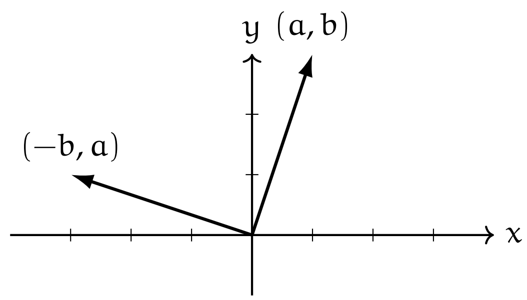
Luego, vemos que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, si $i \neq j$ y por lo tanto e_i es perpendicular a e_j si $i \neq j$, lo cual concuerda con nuestra intuición.

Observemos que si $v = (x_1, x_2, x_3)$, entonces $\langle v, e_i \rangle = x_i$. Por lo tanto, si la coordenada i-ésima de v es cero, v es ortogonal a e_i. Esto nos dice, por ejemplo, que si v es un vector contenido en el plano que incluye e_2 y e_3, es decir si la primera coordenada es cero, entonces v es ortogonal a e_1.

Ejemplo. Sea (a, b) un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces $(-b, a)$ es un vector ortogonal a (a, b) debido a que

$$\langle (a,b), (-b,a) \rangle = a \cdot b + (-b) \cdot a = 0.$$

Si graficamos con un ejemplo, $a = 1$, $b = 3$; vemos que esto se corresponde con nuestra intuición de perpendicularidad.



§ *Ejercicios*

1) Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2-0),(2,-3,-1)\rangle$,
   b) $\langle(4,-1),(-1,2)\rangle$.
2) Dados $v = (-1, 2-0)$, $w = (2,-3,-1)$ y $u = (1,-1,1)$, verificar que:
$$\langle 2v+3w, -u\rangle = -2\langle v,u\rangle - 3\langle w,u\rangle$$
3) Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y sea e_1, e_2 y e_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (ver definición 1.1.4). Verificar que
$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$
4) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
   a) se cumple:
$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v,u\rangle + \lambda_2\langle w,u\rangle.$$
   b) Si $\langle v,w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v,v\rangle + \lambda_2^2\langle w,w\rangle.$$
5) Probar que
   a) $(2,3,-1)$ y $(1,-2,-4)$ son ortogonales.
   b) $(2,-1)$ y $(1,2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.
6) Encontrar
   a) un vector no nulo ortogonal a $(3,-4)$,
   b) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$,
   c) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$ y $(0,1,-1)$,

1.3 LA NORMA DE UN VECTOR

Si v es vector, entonces $\langle v,v\rangle \geqslant 0$ y definimos como la *norma de* v o *longitud de* v al número
$$||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Cuando v pertenece al plano y $v = (x,y)$, entonces $||v|| = \sqrt{x^2+y^2}$ y si graficamos el vector en la fig. 10, vemos que la noción de norma o longitud en $\mathbb{R}^2$ se deduce del teorema de Pitágoras.

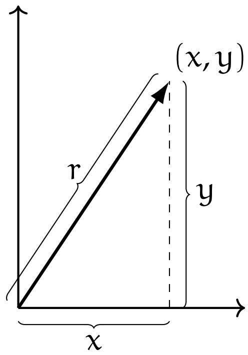


Figura 10: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

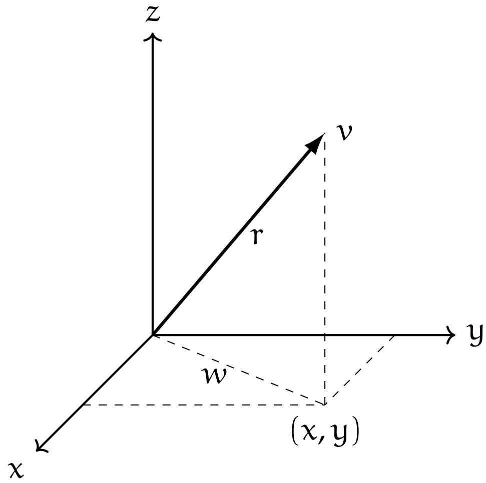


Figura 11: $w = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r = \sqrt{w^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Si $n = 3$, el dibujo es como en la fig. 11, para $v = (x, y, z)$. Es decir, por la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras obtenemos que la longitud de v es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En general, si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

y la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras nos dice que esta es la definición correcta de longitud o norma de un vector.

Proposición 1.3.1. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

$$||\lambda v|| = |\lambda| ||v||.$$

Demostración. $||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$, por la propiedad P3 del producto escalar,

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Es decir $||\lambda v||^2 = \lambda^2 ||v||^2$, por lo tanto (sacando raíz cuadrada), $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$. □

El producto escalar no sólo es útil para definir la longitud de un vector, sino que también nos dice cual es el ángulo entre dos vectores no nulos: sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$; veremos a continuación que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\theta),$$

o equivalentemente

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{||v_1||\,||v_2||}, \tag{1.3.1}$$

donde θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = ||v_1||(\cos(\alpha_1), \operatorname{sen}(\alpha_1)), \quad v_2 = ||v_2||(\cos(\alpha_2), \operatorname{sen}(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{1.3.2}$$

Es decir,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{1.3.3}$$

y precisamente, $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Esto se puede generalizar a $\mathbb{R}^3$ y ahí en vez de la fórmula (1.3.2) se debe usar la ley esférica de los cosenos. Los resultados se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ y en general vale que si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, entonces el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right). \tag{1.3.4}$$

Terminaremos esta sección dando la noción de distancia entre dos vectores o dos puntos.

Definición 1.3.2. Sea $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonce las *distancia* entre v y w es $||v - w||$.

Vemos en la fig. 12 que la norma del vector $v - w$ es la longitud del segmento que une w con v.

Una de las desigualdades más notables referentes a la norma de un vector es la *desigualdad triangular*:

Proposición 1.3.3. *Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||,$$

y la igualdad se cumple sólo cuando w es múltiplo de v.

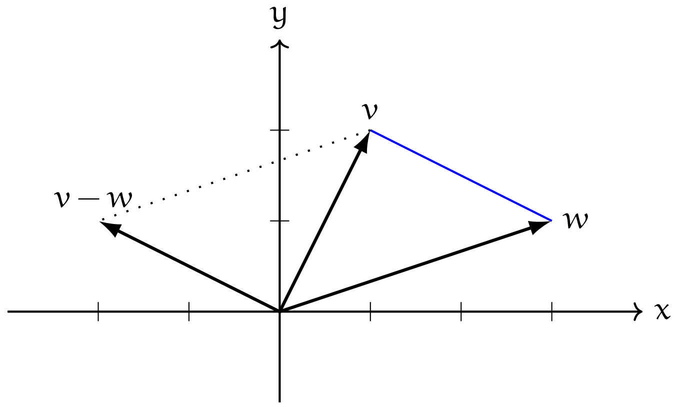


Figura 12: Distancia de v a w.

Demostración. Podemos probar este resultado en base a una demostración "geométrica" basada en el hecho de que $|\cos\theta| \leqslant 1$ y luego utilizando la ecuación 1.3.1. Más formalmente en el capítulo 6 se verá que

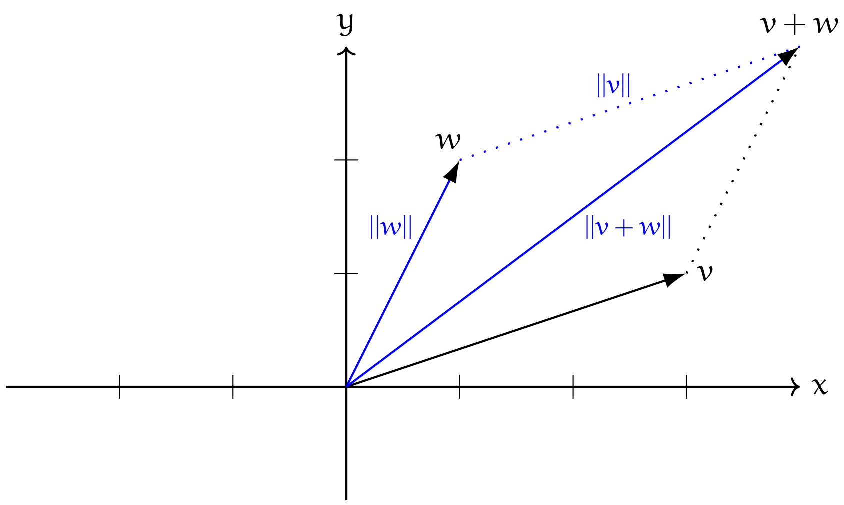
$$\langle v_1, v_2 \rangle \leqslant ||v_1||\,||v_2||$$

(proposición 6.1.7, desigualdad de Cauchy-Schwarz) y de esta desigualdad se deduce fácilmente la desigualdad triangular probando que

$$||v + w||^2 \leqslant (||v|| + ||w||)^2.$$

□

La desigualdad triangular expresa en forma algebraica el resultado, más conocido, "en todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos", que graficamos a continuación.



§ *Ejercicios*

1) Encontrar la longitud de los vectores.

$$(a)\ (2,3), \qquad (b)\ (t,t^2), \qquad (c)\ (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi).$$

2) Calcular $\langle v,w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

$$(a)\ v=(2,2), w=(1,0), \qquad (b)\ v=(-5,3,1), w=(2,-4,-7).$$

3) Dados $v, w, \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v,w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

4) Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v,w\rangle| \leqslant ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).}$$

[Ayuda: elevar al cuadrado y aplicar la definición.]

5) (Identidad de polarización) Probar que

$$\langle x,\ y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n\ .$$

[Ayuda: usar solo las propiedades P1, P2, P3 y P4 de la proposición 1.2.2.]

1.4 VECTORES AFINES

En esta sección veremos el concepto de vector afín, que nos servirá para entender más geométricamente los conceptos de rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente (secciones 1.5 y 1.6). Definimos un *vector afín* como un par ordenado de puntos v y w, que escribimos $\overrightarrow{vw}$ y lo visualizamos como una flecha entre v y w. Llamamos a v el *punto inicial* y w el *punto final* del vector afín (fig. 13).

Sean $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{pq}$ dos vectores afines. Diremos que son *equivalentes* si $w-v = q-p$.

Cada vector afín $\overrightarrow{vw}$ es equivalente a uno cuyo punto de inicial es el origen, pues $\overrightarrow{vw}$ es equivalente a $\overrightarrow{0(w-v)}$ (ver fig. 14).

Claramente este es el único vector cuyo punto inicial es el origen y que es equivalente a $\overrightarrow{vw}$. Si visualizamos la ley del paralelogramo en el