(7) Calcular el determinante de las siguientes matrices, usando operaciones elementales por fila y/o columnas u otras propiedades del determinante. Determinar cuáles de ellas son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1 - f_4]{} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - 5f_1 \\ f_4 + 3f_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & -13 & 32 \\ 0 & -5 & 6 & -18 \end{bmatrix}$$

Luego, $\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ 14 & -13 & 32 \\ -5 & 6 & -18 \end{bmatrix} = 441$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$\det(B) = -\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -(2(-1).3.4) = 24$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_5]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - 5f_1 \\ f_4 + 3f_1 \\ f_5 + 2f_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -11 & -8 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 + 11f_1 \\ f_4 - 10f_1 \\ f_5 - 5f_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 + 6f_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\det(C) = 0$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & 1/3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1 \leftrightarrow f_2 \\ f_3 \leftrightarrow f_5}]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -13 & 6 & 1/3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -13 & 6 & 1/3 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $\det(D) = -\left(\frac{1}{3} \cdot \pi.3.1.2\right) = -2\pi$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 2f_1 \\ f_5 + \frac{1}{2}f_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 - 4f_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} = E'$$

Luego, $\det(E') = 1.1.(-6).2.\frac{9}{2} = -\frac{108}{2} = -54$, recordemos que para llegar a E' realizamos una operación que cambia el signo del determinante de la matriz original ($f_2 \leftrightarrow f_3$).

Por lo tanto, $\det(E) = (-1).\det(E') = 54$.