(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

Las matrices triangulares estrictas, superiores o inferiores, satisfacen la propiedad $A^n = 0$ y muchas de ellas satisfacen $A^{n-1} \neq 0$. Probemos con una matriz triangular estricta superior particular:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

Es decir, A es una matriz $n\times n$ con 1's encima de la diagonal y 0's en todas las demás entradas.
Más formal: $[A]_{i,i+1} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$.

Probaremos por inducción que para $h < n$, $[A^h]_{i,i+h} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i+h$. Es decir:

$$A^h = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-h} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$ donde e_1 está en la columna $h+1$.

Si $h=1$ el resultado vale por definición de A.
Supongamos que el resultado es cierto para $h-1$, luego:

$$A^{h-1} = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-h+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$ dónde e_1 está en la columna h. Por lo tanto:

$$A.A^{h-1} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-h+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

Como $[A.A^{h-1}]_{i,j} = F_i(A).C_j(A^{h-1})$ (dónde . indica el producto escalar), los únicos productos no nulos son $\begin{cases} F_1(A).C_{h+1}(A^{h+1}) = 1, \\ F_2(A).C_{h+2}(A^{h+1}) = 1, \\ F_3(A).C_{h+3}(A^{h+1}) = 1, \text{ etc.} \end{cases}$

Es decir, las entradas de A^h valen 1 en $(1,h+1), (2,h+2), (3,h+3)$, etc. Lo cual prueba el resultado.

Probando ésto, tenemos $A^{n-1} = (0 \cdots 0\ e_1) \neq 0$ y $A^n = A.A^{n-1} = 0$.