(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A)$.

b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

a) Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\chi_A(x) = \det(A - x\,Id) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix}$

$$= (a_{11}-x)(a_{22}-x) - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{11}x - a_{22}x + x^2 - a_{12}a_{21}$$

$$= x^2 - (a_{11}+a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= x^2 - Tr(A)x + \det(A)$$

b) Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\chi_A(x) = x^2 - Tr(A)x + \det(A)$, como A no es invertible tenemos que $\det(A) = 0$,

luego $\chi_A(x) = x^2 - Tr(A)x = x(x - Tr(A))$

Por lo tanto, los autovalores de A son 0 y $Tr(A)$.