

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c \operatorname{Id}_n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

Sea v un autovector de A con autovalor λ , es decir $Av = \lambda v$, entonces

$$\begin{aligned} f(A)v &= (aA^2 + bA + c\operatorname{Id}_n)v \\ &= aA^2v + bAv + c\operatorname{Id}_nv \\ &= aA^2(\lambda v) + bA(\lambda v) + c\operatorname{Id}_n(\lambda v) \\ &= a\lambda A(v) + \lambda bv + cv \\ &= a\lambda^2 v + \lambda bv + cv \\ &= (a\lambda^2 + \lambda b + c)v \\ &= f(\lambda)v \end{aligned}$$