(3) Calcular el determinante de las siguientes matrices haciendo la reducción a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1 - af_4 \\ f_2 - f_4 \\ f_3 - f_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_4]{(*)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4 + f_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & -a^2-a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4 + f_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+3 \end{bmatrix}$$

Luego, $\overset{\text{Por }(*)}{-\det(A)} = 1.(a-1).(a-1).(-a^2-2a+3)$

$= (a^2-2a+1)(-a^2-2a+3)$

$= -a^4+6a^2-8a+3$

Por lo tanto, $\det(A) = a^4-6a^2+8a-3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_1 - f_5 \\ f_2 - f_5 \\ f_3 - f_5 \\ f_4 - f_5}]{} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_5 \leftrightarrow f_4]{} B_1 \xrightarrow[f_4 \leftrightarrow f_3]{} B_2 \xrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_2]{} B_3 \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = B'$$

$\det(B') = 1.(-2)^4 = 16$, pero para llegar de B a B' hay 4 operaciones elementales que cambian el signo.

Luego $\det(B) = (-1)^4 \det(B') = \det(B') = 16$