(12) Estimar el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por su polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 8$, para $7 \leq x \leq 9$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(8)}{n!}(x-8)^n$$

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - T_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x-8)^3 \right| \quad , \quad t \in (x,8) \text{ ó } t \in (8,x) \text{, veamos ambos casos:}$$

Si $7 \leqslant x \leqslant 9$ y $t \in (x,8) \Rightarrow t \in (7,8)$

Si $7 \leqslant x \leqslant 9$ y $t \in (8,x) \Rightarrow t \in (8,9)$

de esto concluimos que $t \in (7,9) - \{8\}$

$$\left| \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x-8)^3 \right| \leqslant ? \quad \text{Busco } f^{(3)}(t):$$

$f(x) = x^{1/3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ $\quad f''(x) = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$ $\quad f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$

Entonces $|f^{3}(t)| = \left| \frac{10}{27} t^{-8/3} \right| = \frac{10}{27} \left| t^{-8/3} \right| < ?$ ⊛

$7 < t < 8$

$7^8 < t^8 < 8^8$

$1/t^8 < 1/7^8$

$1/t^{8/3} < 1/7^{8/3} \Rightarrow \left| 1/t^{8/3} \right| < \left| 1/7^{8/3} \right| < 1$

Reemplazando en ⊛, $|f^{(3)}(t)| < \frac{10}{27} \cdot 1 = \frac{10}{27}$

Por otro lado, $7 \leqslant x \leqslant 9$

$7-8 \leqslant x-8 \leqslant 9-8$

$-1 \leqslant x-8 \leqslant 1$

$(-1)^3 \leqslant (x-8)^3 \leqslant 1^3$

$-1 \leqslant (x-8)^3 \leqslant 1$

Entonces $|(x-8)^3| \leqslant 1$

Finalmente, $\left| \frac{f^{3}(t)}{3!}(x-8)^3 \right| = \frac{1}{3!} \cdot \frac{10}{27} \cdot 1 = \frac{10}{3!\,27}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x} \approx \frac{10}{3!\,27}$