(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \dots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{\frac{5^n}{5}} = \lim_{n\to\infty} 10 \cdot \frac{2^n}{5^n} = 10 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \overset{(*)}{=} 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

(*) Llegamos a una serie geométrica, dónde $r = \frac{2}{5} < 1$, por ésto sabemos que converge a $\underbrace{\frac{r}{1-r}}^{\text{Pues } \sum_{n=1}}$, lo calculamos:

$$\frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$$

Concluimos con que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$ converge y su suma tiende a $\frac{20}{3}$.

(b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \dots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3^n}$

Utilizo el criterio para series alternantes, dónde $a_n = \frac{2}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{(*)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(*) Llegamos a una serie geométrica, dónde $r = \frac{1}{3} < 1$, por ésto sabemos que converge a $\overbrace{\frac{r}{1-r}}^{\text{Pues } \sum_{n=1}}$, lo calculamos:

$$\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Concluimos con que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3^n}$ converge y su suma tiende a 1.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

$$3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{-1}{4}\right)^n}{\frac{-1}{4}} = 3 \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{-1}{4}\right)^n = 12 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \overset{(*)}{=} 12 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-12}{5}$$

(*) Llegamos a una serie geométrica, dónde $r = \frac{-1}{4} < 1$, por ésto sabemos que converge a $\overbrace{\frac{r}{1-r}}^{\text{Pues } \sum_{n=1}}$, lo calculamos:

$$\frac{-1/4}{1+1/4} = \frac{-1/4}{5/4} = \frac{-1}{5}$$

Concluimos con que $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$ converge y su suma tiende a $\frac{-1}{5}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{10^{3n}} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^{3n}} = 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^3}\right)^n = 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^n \overset{(*)}{=} 5 \cdot \frac{1000}{999} = \frac{5000}{999}$$

(*) Llegamos a una serie geométrica, dónde $r = \frac{1}{1000} < 1$, por ésto sabemos que converge a $\overbrace{\frac{1}{1-r}}^{\text{Pues } \sum_{n=0}}$, lo calculamos:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{1}{\frac{999}{1000}} = \frac{1000}{999}$$

Concluimos con que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$ converge y su suma tiende a $\frac{5000}{999}$.

(e) $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos(j\pi)$

$\sum_{j=1}^{\infty} \overbrace{\cos(j\pi)}^{=(-1)^j}$ es una serie alternante, además, $\pi^{j/2} \geq \pi^{(j+1)/2} > 0$, luego:

$$\lim_{j\to\infty} \pi^{j/2} = \pi^{\infty} = \infty$$

Por lo tanto, por criterio de series alternantes diverge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$, por lo tanto ésta serie tiene chances de converger.

Sea $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ (sabiendo de antemano que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot 1}{\cancel{n^2} \cdot (4 - 1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - 1/n^2} = \frac{1}{4} > 0$$

No calculo su suma.

Por criterio de comparación en el límite, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ converge, pues sabíamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}} \quad = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{8^{2n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{8^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{8^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{64}\right)^n$, llegamos a una serie geométrica con $r = \frac{5}{64} < 1$, entonces, por criterio para series alternantes concluimos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$ converge.

No calculo su suma.

(h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^3 \cdot 2^k}{\frac{e^k}{e^3}} = \lim_{n\to\infty} 8e^3 \cdot \frac{2^k}{e^k} = 8e^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k$$

Llego a una serie geométrica, dónde $r = \frac{2}{e} < 1$ (ya que $2<e$), por lo tanto la serie converge.

No calculo su suma.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+2n} = 0$, entonces la serie tiene chances de converger.

$$0 \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces por criterio de comparación para series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ converge.

No calculo su suma.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} = 0$, entonces la serie tiene chances de converger.

Análogo al apartado anterior, $0 \leq \frac{1}{n^2+7n+12} \leq \frac{1}{n^2}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces por criterio de comparación para series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$ converge.

No calculo su suma.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{4^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} - \frac{1}{4^n} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}^{1/2 = r} - \overbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n}^{1/4 = r} = \frac{1/2}{1-1/2} - \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/2}{1/2} - \frac{1/4}{3/4} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ambas series geométricas convergen a $\frac{r}{1-r}$

Concluyo con que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}$ converge y su suma tiende a $2/3$.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (10^{-n} + 9^{-n})$

$\lim_{n\to\infty} 10^{-n} + 9^{-n} = \lim_{n\to\infty} 10^{-n} + \lim_{n\to\infty} 9^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$, dónde ambas series son geométricas y convergen a $\frac{r}{1-r}$, con $r = 1/10$ y $1/9$ respectivamente, calculo la suma:

$$\frac{1/10}{1-1/10} + \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1/10}{9/10} + \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$$

Concluyo con que $\sum_{n=1}^{\infty} (10^{-n} + 9^{-n})$ converge y su suma tiende a $17/72$.

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 3^n}{6^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}}{6^n}}^{\text{I}} + \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{6^n}}^{\text{II}} = 4 + 1 = 5$$

I $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2^3}{6^n} = \underbrace{8 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\frac{1}{3} < 1}$, que converge a $8 \cdot \frac{1/3}{1-1/3} = 8 \cdot \frac{1/3}{2/3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

II $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\frac{1}{2} < 1}$, que converge a $\frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$

Concluyo con que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n}$ converge y su suma tiende a 5.