(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

(a) $a_n = \frac{5-2n}{3n-7}$, sea $f(n) = \frac{5-2n}{3n-7}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-2n}{3n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(\frac{5}{n}-2)}{\cancel{n}(3-\frac{7}{n})} = \frac{0-2}{3-0} = \frac{-2}{3}$$

Por lo tanto la sucesión converge.

(b) $a_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$, sea $f(n) = \frac{n}{\ln(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n+1)} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

Por lo tanto la sucesión diverge.

(c) $a_n = n - \sqrt{n^2-4n}$, sea $f(n) = n-\sqrt{n^2-4n}$

$$\lim_{n\to\infty} n-\sqrt{n^2-4n} \overset{\text{multiplico por el conjugado}}{=} \lim_{\to\infty} (n-\sqrt{n^2-4n})\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+\cancel{n\sqrt{n^2-4n}}-\cancel{n\sqrt{n^2-4n}}-\cancel{n^2}+4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}} = 4\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{\sqrt{n^2-4n}}{n}}_{*}} = 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}$$

$$= 4 \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}} = 4 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Por lo tanto la sucesión converge.

$$* \quad \frac{\sqrt{n^2-4n}}{n} = \frac{\sqrt{n^2(1-\frac{4}{n})}}{n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\sqrt{1-\frac{4}{n}}$$

(d) $a_n = 20\,(-1)^{n+1}$, sea $f(k) = 20(-1)^{k+1}$

$\lim_{k\to\infty} 20\cdot(-1)^{k+1} = 20 \lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1}$, este límite no existe porque el resultado oscila entre $20\cdot(\pm 1)$, por lo tanto la sucesión diverge.

(e) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, sea $f(k) = \left(\frac{-1}{3}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k>0 \end{cases}$$

Por lo tanto la sucesión converge.

(f) $a_n = n^3 e^{-n}$, sea $f(k) = k^3 e^{-k}$

$$\lim_{k\to\infty} k^3 e^{-k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{e^k} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2}{e^k} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{6k}{e^k} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{6}{e^k} = 0$$

Por lo tanto la sucesión converge.

(g) $a_n = \cos(n\pi)$, sea $f(k) = \cos(k\pi)$

$f(k) = \cos(k)$ es una función que oscila entre $[-1,1]$, por lo tanto $\lim_{k\to\infty} \cos(k\pi) \nexists$, entonces la sucesión diverge.

(h) $a_n = n\,\mathrm{sen}(6/n)$

$n\,\mathrm{sen}(6/n)$ puede escribirse como $\frac{\mathrm{sen}(6/n)}{\frac{1}{n}}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(6/n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cos(6/n)\cdot(-6)}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 6\cdot\frac{\cancel{n^2}\cos(6/n)}{\cancel{n^2}} = 6\cos(0) = 6$$

Por lo tanto la sucesión converge.

(i) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{5}{n}\right)^n \overset{\text{Ley de los exponentes}}{=} \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1-5/n)} \overset{?}{=} \frac{1}{e^5}$$

Por lo tanto la sucesión converge.

(j) $a_n = \pi/4 - \arctan(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} - \arctan(n) = \frac{\pi}{4} - \lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{-2\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto la sucesión converge.