(5) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^4-2} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3k^2} = 0$, entonces la serie tiene chances de converger.

Sea $a_n = \frac{n}{n^4-2}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$. (Sabiendo de antemano que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^4-2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}(n-2/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-2/n^3} = 0$

Cómo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, por criterio de comparación en el límite tengo que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$ converge.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+k+1} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{k}}}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}(2k+1)} = 0$, por lo tanto la serie puede converger.

Tengo que $0 \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{b_n}$ ya que si divido el numerador por algo menor, obtendré un número mayor, y $n^2 < n^2+n+1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por criterio de comparación para series, si demuestro que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge:

$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{k}}}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k.2\sqrt{k}} = 0$

Logramos demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$ converge, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ converge.

(c) $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi^n+5} = 0$, entonces la serie tiene chances de converger.

Luego, $0 \leq \frac{1}{\pi^n+5} \leq \frac{1}{\pi^n}$

Sabemos que $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ converge por ser una serie geométrica con $r = \frac{1}{\pi} < |1|$,

ahora bien, por criterio de comparación para series tengo que como $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ converge, entonces $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$ converge.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1/n^2+\sqrt{n}/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n^2+\sqrt{n}/n} = \infty$

Por criterio de la divergencia concluyo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ diverge.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} : \frac{n^4}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 n!}{(n+1)!\, n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 \cancel{n!}}{(n+1).\cancel{n!}\, n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{4-1}}{\cancel{(n+1)}\, n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^4}$

Luego, $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{k^4} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{3(k+1)^2}{4k^3} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{6(k+1)}{12k^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{k+1}{k^2} \overset{\text{L'hopital}}{=} \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$

Por criterio del cociente, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ converge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+1/n^2)}{\cancel{n^2}(n+1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overbrace{1/n^2}^{\to 0}}{n+\underbrace{1/n^2}_{\to 0}} = 0$, entonces la serie tiene chances de converger.

Luego, $0 \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \leq \frac{n^2+1}{n^3+1} \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que la serie armónica diverge, por el criterio de comparacion de series concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ diverge.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 e^{n+1}} : \frac{n!}{n^2 e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^2 e^n}{(n+1)^2 e^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1).\cancel{n!}\, n^2 \cancel{e^n}}{(n+1)^2.e.\cancel{e^n}.\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cancel{(n+1)}}{e(n+1)^{2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e(n+1)}$

$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}.n}{\cancel{n}(1+1/n)} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\underbrace{1/n}_{\to 0}} = \frac{1}{3}.\infty = \infty$

Por criterio del cociente, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$ diverge.

(h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\ln(n+1)} : \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\ \cancel{3^n} \ln(n)}{3^{\cancel{n+1}} \ln(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}^{\text{I}} . \overbrace{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}^{\text{II}}$

$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n}\ \ln\left(\frac{1}{1+1/n}\right) = \frac{1}{3}.1.0 = 0 < 1$

I $\frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}} = 1+1/n$

II $\frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} = \frac{1}{1+1/n}$

Por criterio del cociente, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln(n)}$ converge.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{e^1} = e > 1$

Por criterio del cociente, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ diverge.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{2(n+1)+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{5^{2n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{2(n+1)+1}.n^n}{(n+1)^{n+1}.5^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^2 \cancel{5^{2n+1}} n^n}{(n+1)^n(n+1)\cancel{5^{2n+1}}} = 25 \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = 25 \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}^{e} \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{0} = 0 < 1$

Por criterio del cociente, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{n^n}$ converge.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} < 1$

Por criterio de la raíz, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ converge.

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1$

Por criterio de la raíz, tengo que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ converge.