

(9) Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

Si $f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)}$, la serie de Taylor con centro en 4 es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)} (x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1} (n+1)} (x-4)^n$

Ahora busco su radio de convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1} (n+2)}}{\frac{(-1)^n}{3^n (n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (n+1)}{3^{n+1} (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3}^1 (n+1)}{\cancel{3}^1 \cdot 3 (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{3}, \text{ entonces el radio de convergencia es } R = 3.$$