(7) Para las siguientes funciones encontrar: *(i)* el gradiente en el punto indicado, *(ii)* una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado, *(iii)* una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

Gradiente: $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$

Ecuación del plano tangente al gráfico de f: $z = (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + f(a,b)$

Ecuación de la recta tangente a la curva de nivel: $(x,y) = (x_0, y_0) + t(-f_y(x_0,y_0), f_x(x_0,y_0))$

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, en (1,1).

$$f_x(x,y) = \frac{1(x+y)-(x-y).1}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Entonces $\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, $z = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$ y $(x,y) = (1,1) + t(1/2, 1/2)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $(0,2)$.

$$f_x(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)-2xy.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^2+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_x(0,2) = 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2)-2xy.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3+2xy^2-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_y(0,2) = 0$$

Entonces, $\nabla f(0,2) = (1,0)$, $z = x$ y $(x,y) = (0,2) + t(0,1)$