(3) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{1/n}_{0}}} = 1 \text{, entonces } R = 1.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}}$ diverge (serie p).
- Si $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (crit. de series alternantes)

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge $\forall x \in [-1, 1)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right| : \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}(n+1)|}{|(-1)^n (n+2)|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-(n+1)}{n+2}\right| = 1 \text{, entonces } R = 1.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge por crit. de series alternantes.
- Si $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge, pues $\frac{1}{n+1} > \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{sabemos que diverge.}}$ (crit. de comparación para series)

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ converge $\forall x \in (-1, 1]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^3} : \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n n^3}{(-1)^{n-1}(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{1/n}_{\to 0})} = 1 \text{, entonces } R = 1.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ converge por crit. de series alternantes.
- Si $x = -1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^3}$ converge (serie p).

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$ converge $\forall x \in [-1, 1]$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+1/n}}{\cancel{\sqrt{n}}} = 1 \text{, entonces } R = 1.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ diverge por crit. de la divergencia $(\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty)$
- Si $x = -1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^n$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(-1)^n \nexists$.

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$ converge $\forall x \in (-1, 1)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{, entonces } R = \infty.$$

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)(n+1) = \lim_{n\to\infty} n+2+1/n = \infty \text{, entonces } R = 0.$$

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ converge en $x=0$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\text{valor absoluto}}{\cancel{(-1)^{n+1}}}(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{\overset{\text{valor absoluto}}{\cancel{(-1)^n}} n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cancel{2^n}}{n^2 \cancel{2^n}\cdot 2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 1+1/n = \frac{1}{2} \text{, entonces } R = 2.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ que diverge por criterio de la divergencia.
- Si $x = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^2 (-2)^n}{2^n}}_{(-2)^n = (-1)^n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n (-1)^n}_{=1} \cdot \frac{n^2 \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$ que diverge por crit. de la divergencia.

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$ converge $\forall x \in (-2, 2)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)^3} : \frac{10^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} n^3}{10^n (n+1)^3} = 10 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 10 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^3 = 10 \text{, entonces } R = 1/10.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1/10$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (1/10)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ que converge (serie p)
- Si $x = -1/10$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (-1/10)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n (1/10)^n}{n^3}$ que converge por crit. de series alternantes.

Para concluir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$ converge $\forall x \in [-1/10, 1/10]$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{1+5^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+5^{n+1})\, n!}{(1+5^n)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+5^{n+1})}{(1+5^n)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5^{n+1}}{1+5^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} = 0 \text{, entonces } R = \infty.$$

Para concluir, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$ converge $\forall x \in (-\infty, \infty)$