

(4) Sea $A \in \mathbb{R}^3$ un vector perpendicular a todo vector $X \in \mathbb{R}^3$. Probar que $A = 0$.

Para que A sea perpendicular a todo vector K se debe dar $\langle A, K \rangle = 0$.

$$\langle A, K \rangle = \langle (a_1, a_2, a_3), (k_1, k_2, k_3) \rangle = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 k_1 = 0 \\ a_2 k_2 = 0 \\ a_3 k_3 = 0 \end{cases}$$

Como k_1, k_2, k_3 pueden ser cualquier valor, el sistema sólo se resuelve si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, entonces $A = 0$.