(5) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)^{1/4}}}{\frac{(-2)^n}{n^{1/4}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{\cancel{n+1}}\, n^{1/4}}{(\cancel{-2})^n (n+1)^{1/4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^{1/4}}{(n+1)^{1/4}} = 2\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/4}}_{=1} = 2 \text{, entonces } R = 1/2.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = -1/2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(-1/2)^n}{n^{1/4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}$ que diverge por ser serie p con $p = 1/4 \leq 1$.
- Si $x = 1/2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(1/2)^n}{n^{1/4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ que es una serie alternante, decreciente y que tiende a 0 cuándo n tiende a infinito, por lo tanto converge.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$ tiene radio de convergencia $1/2$ y converge en el intervalo $(-1/2, 1/2]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}\, x^n$

La serie está centrada en 0.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^4 2^{2(n+1)}}}{\frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4 2^{2n}}{(n+1)^4 2^{2(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^4}_{\to 1}\cdot\frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}}\cdot 2^2} = \frac{1}{4} \text{, entonces } R = 4.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = -4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^4 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{4^n}}{n^4\cancel{4^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ que converge por ser serie p con $p = 4 > 1$.
- Si $x = 4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}4^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4\cancel{4^n}}\cancel{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$ que converge por crit. de las series alternantes.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}x^n$ tiene radio de convergencia 4 y converge en el intervalo $[-4, 4]$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

La serie está centrada en $x = 4$.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{e^n}{n^3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\cancel{n+1}}\, n^3}{\cancel{e^n}(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty} e.\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}_{\to 1} = e \text{, entonces } R = 1/e.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 4 - 1/e$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-(4-1/e))^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{e^n}}{n^3}\cdot\frac{1}{\cancel{e^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, que converge por ser serie p con $p = 3 > 1$.
- Si $x = 4 + 1/e$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-(4+1/e))^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{e^n}}{n^3}\cdot\frac{-1}{\cancel{e^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^3}$, que converge por el mismo motivo.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$ tiene radio de convergencia $1/e$ y converge en el intervalo $[4-1/e, 4+1/e]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

La serie está centrada en $x = 1/4$.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\to 1}\cdot\frac{1}{n+1} = 0 \text{, entonces } R = \infty.$$

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia ∞ y converge en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x+2)^n$$

La serie está centrada en $x = -2$.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{, entonces } R = 2.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = -4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-4+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$, que converge por crit. para series alternantes.
- Si $x = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{0+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot 1^n$, que diverge por ser serie armónica.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$ tiene radio de convergencia 2 y converge $\forall x \in [-4, 0)$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1 \text{, entonces } R = 1.$$

$$-1 < 2x - 3 < 1$$
$$2 < \underset{\cdot 1/2}{\overset{+3}{2x}} < 4$$
$$1 < x < 2$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2.1-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3(-1)^n$ que diverge por crit. de series alternantes.
- Si $x = 2$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2.2-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3$ que diverge por crit. de la divergencia.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$ tiene radio de convergencia 1 y converge $\forall x \in (1, 2)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}} = \infty \text{, entonces } R = 0.$$

Como la serie tiene centro en $x = 1/2$ concluimos que su radio de convergencia es 0 y que converge con $x = \frac{1}{2}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{x^n}{4^n \ln n}$

La serie está centrada en $x = 0$.

Utilizo el criterio del cociente para series de potencias:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{4^n\ln(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{4^n}\ln(n)}{\cancel{4^{n+1}}\ln(n+1)} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{4} \text{, entonces } R = 4.$$

Ahora veamos los bordes:

- Si $x = -4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-4)^n}{4^n\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$ que diverge por crit. de la integral. (resuelto con symbolab)
- Si $x = 4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ que converge por crit. de series alternantes.

Para concluir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^n\ln(n)}$ tiene radio de convergencia 4 y converge $\forall x \in (-4, 4]$