(10) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2$?

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r)$ y para $1 \leq i \leq n$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces

(i) el vector $\bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de máximo crecimiento de f en $\bar{a}$

(ii) el vector $\bar{v} = -\frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de mínimo crecimiento de f en $\bar{a}$.

$$f_x(x,y) = 2(x+y-2) + 2(3x-y-6).3 = 2(x+y-2)+6(3x-y-6) \Rightarrow f_x(1,1) = -24$$

$$f_y(x,y) = 2(x+y-2)+2(3x-y-6).(-1) = 2(x+y-2)-2(3x-y-6) \Rightarrow f_y(1,1) = 8$$

$$\nabla f(x,y) = (-24, 8)$$

$$\|\nabla f(x,y)\| = \sqrt{(-24)^2+8^2} = \sqrt{640} = \sqrt{8^2 . 10} = 8\sqrt{10}$$

Finalmente, $u = \left(\frac{-24}{8\sqrt{10}}, \frac{8}{8\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ es la tasa de máximo crecimiento y

$v = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ la tasa de menor crecimiento.