(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$, $a_n = \left\{ 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}, \frac{12}{37}, \frac{7}{25}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada superiormente por 1 y acotada inferiormente por 0, es positiva a partir de 1, es alternante y converge a 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, $a_n = \left\{ \operatorname{sen}(1), \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\right), \dots \right\}$

La sucesión es acotada entre $(0,1)$, es siempre positiva, decreciente y converge a 0.

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$, $a_n = \left\{ \frac{-1}{e}, \frac{2}{e^2}, \frac{-3}{e^3}, \frac{4}{e^4}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada entre $(-1,1)$, no es positiva ni negativa, pues es alternante y converge a 0.

(d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_n = \left\{ 1, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{4}{45}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada entre $[2,0)$, es positiva, decreciente a partir de a_2 y converge a 0.

(e) $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$, $a_n = \left\{ \ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln\left(\frac{4}{3}\right), \ln\left(\frac{5}{4}\right), \ln\left(\frac{6}{5}\right), \ln\left(\frac{7}{6}\right), \dots \right\}$

La sucesión es acotada entre $(0,1)$, es positiva, decreciente y converge a 0.

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \ln(1) = 0$$

(f) $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$, $a_n = \left\{ 2, \frac{8}{3}, \frac{16}{5}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada inferiormente por 2, es positiva, creciente y diverge a ∞.

(g) $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{32}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada por $[1,0)$, es positiva, decreciente y converge a 0.

(h) $a_n = \frac{\ln(n+3)}{n+3}$, $a_n = \left\{ \frac{\ln(4)}{4}, \frac{\ln(5)}{5}, \frac{\ln(6)}{6}, \dots \right\}$

La sucesión es acotada por $(0,1)$, es positiva, decreciente y converge a 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+3)}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+3}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0$$

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \dots$

La serie está acotada entre $(1,2)$, es positiva, decreciente y converge a 1.