(6) Determinar si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente, o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}\right| = \frac{1}{n^2+\ln(n)} \quad \forall n \geq 1$$

Sabemos que $n^2+\ln(n) \geq n^2$ con $n \geq 1$, entonces $\frac{1}{n^2+\ln(n)} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{serie p converge con } p>1}$, por criterio de comparación de series tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\ln(n)}$ converge.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}$ converge absolutamente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

$$\left|\frac{(-1)^{2n}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} \quad \forall n$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ converge absolutamente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

$$\left|\frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}\right| = \left|\frac{100(-1)^n}{2n+3}\right| = \frac{100}{2n+3} \quad \forall n. \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3} = 100\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2n+3}\,dn \underset{\substack{u=2n+3\\ du=2dn}}{=} \int_1^{\infty} \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \ln(2n+3)\Big|_1^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \ln(2t+3)-\ln(2+3)$$

$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{2t+3}{5}\right) = \infty$, $\overset{\text{crit. de la integral.}}{\text{por lo tanto}}$, la serie no converge absolutamente, veamos si lo hace condicionalmente:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = 100\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$, que es una serie alternante, decreciente y que tiende a 0 cuándo n tiende a ∞, por lo tanto la serie converge condicionalmente.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge por ser serie p con $p=\frac{1}{2}\leq 1$, entonces la serie no converge absolutamente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ es una serie alternante que es decreciente y tiende a 0 cuándo n tiende a infinito, por lo tanto la serie converge condicionalmente.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

$$\left|\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \quad \forall n.$$

Utilizo el criterio de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Primero calculo la integral indefinida:

$$\int \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)} \underset{\substack{u=n+1\\ du=dn}}{=} \int \frac{du}{u\ln(u)} \underset{\substack{v=\ln(u)\\ dv.u=du}}{=} \int \frac{dv\,\cancel{u}}{\cancel{u}\,v} = \ln|v|+c = \ln|\ln|u||+c = \ln|\ln(n+1)|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Ahora calculo la integral impropia:

$\int_1^{\infty} \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)} = \lim_{t\to\infty} \ln|\ln(n+1)|\Big|_1^t = \lim_{n\to\infty} \ln|\ln(t+1)|-\ln|\ln(2)| = \infty$, entonces la serie diverge.

Ahora que sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$ no converge absolutamente, veamos si converge condicionalmente:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$, que es una serie alternante, decreciente y que tiende a 0 cuándo n tiende a infinito, por lo tanto la serie converge condicionalmente.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

$$\left|\frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}\right| = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \forall n.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1-1/n^2)}{\cancel{n^2}(1+1/n^2)} = 1$, por criterio de la divergencia, $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}\right|$ diverge.

Por otro lado, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$ es una serie alternante, decreciente, pero que no tiende a 0, por lo tanto diverge.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

$$\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} = 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|$ diverge por criterio de la divergencia.

Por otro lado, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ es una serie alternante, decreciente y que no tiende a 0 cuando n tiende a infinito, por lo tanto la serie diverge.