(6) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

Ecuación normal al plano tangente: $\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)), (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1) \rangle = 0$

Ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(a,b,f(a,b))$: $z = (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + f(a,b)$

(a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $(\pi, 4)$.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0

$f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1/\sqrt{2}$

$f_x(x,y) = -\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1y - x0}{y^2} = \frac{-\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{y} \Rightarrow f_x(\pi,4) = \frac{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{-1/\sqrt{2}}{4} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$

$f_y(x,y) = -\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{0y - x1}{y^2} = \frac{x\,\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} \Rightarrow f_y(\pi,4) = \frac{\pi\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4^2} = \frac{\pi/\sqrt{2}}{16} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$

Entonces la ecuación de la recta normal al plano tangente es: $\langle (x,y,z) - (\pi, 4, 1/\sqrt{2}), (1/4\sqrt{2}, -\pi/16\sqrt{2}, 1) \rangle = 0$

Y la ecuación del plano tangente al gráfico es: $z = (x-\pi)\frac{-1}{4\sqrt{2}} + (y-4)\frac{\pi}{16\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, en $(1,2)$.

$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f(1,2) = \frac{1}{5}$

$f_x(x,y) = \frac{\overbrace{1(x^2+y^2) - x(2x+0)}^{x^2+y^2-2x^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_x(1,2) = \frac{-1+4}{5^2} = \frac{3}{25}$

$f_y(x,y) = \frac{0(x^2+y^2) - x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_y(1,2) = \frac{-4}{25}$

Entonces la ecuación de la recta normal al plano tangente es: $\langle (x,y,z) - (1,2,1/5), (-3/25, 4/25, 1) \rangle = 0$

Y la ecuación del plano tangente al gráfico es: $z = (x-1)\frac{3}{25} + (y-2)\left(\frac{-4}{25}\right) + \frac{1}{5}$