

UNIVERSITAT DE VIC

EURECAT

TREBALL FINAL DE MASTER

**Disseny i implementació del  
control d'orientació d'una  
plataforma multirotor**

*Ignacio González Portillo*

Supervisat per

Julian Cayero Becerra

10 de gener de 2021

# Resum

En els últims anys els drons han evolucionat guanyant una gran popularitat, passant de ser tractats com a joguines orientades a l'oci, a ser considerats eines de gran utilitat en una àmplia varietat de sectors professionals. Independentment de l'aplicació o el grau d'autonomia de la plataforma, sempre és necessària la implementació d'un sistema de control per tal d'estabilitzar la plataforma de vol. Aquests sistemes faciliten les operacions de control per part d'un pilot extern o un sistema de control d'alt nivell com una navegació autònoma. Podríem definir el control d'actitud o orientació com el procés d'adquirir i mantenir una determinada orientació a l'espai. Aquests tipus de sistemes de control són d'una importància vital per l'estabilitat de tot el sistema de vol, la seva robustesa davant d'incerteses i pertorbacions externes serà critica per poder garantir operacions amb un vol segur en diferents situacions. Els controladors actuals es dissenyen de manera específica per complir tasques de forma molt concreta, el que implica que aquests dissenys siguin molt sensibles a modificacions en les característiques de l'aeronau o l'ambient. Una de les aplicacions més prometedores dels UAVs és el seu ús en l'entrega de paqueteria [1]. En aquest tipus d'aplicacions on la plataforma haurà de suportar el pes de diferents càrregues durant el dia, el rendiment dels controladors tradicionals es veurà afectat, posant en risc el paquet, el dron o les persones que es trobin al voltant. Aquest projecte es centra en l'exploració i implementació de controladors d'orientació de baix nivell, directament desenvolupats en l'espai ortogonal  $SO(3)$ , com a alternativa als controladors basats en altres sistemes de representació com els angles d'Euler o els quaternions. Es proposa també un sistema de control amb la capacitat de treballar sota canvis inesperats en la massa o la inèrcia de la nau, i davant de possibles forces externes. Per complir aquesta tasca serà necessari fer una recerca bibliogràfica, explorar implementacions ja existents, desenvolupar algoritmes i validar-los amb diferents escenaris de simulació.

# Abstract

In recent years, quadrotor unmanned aerial vehicles (UAVs) have been an area of increasing interest. In the beginning drones were considered a toy or a hobby, but in the last years quadrotors are involved in a large range of professional areas. Independently of the application, attitude controller implementation is always necessary to ensure aircraft stability and control. These type of systems allow external pilots or high-level controllers, such as autonomous navigation, to operate safely. We can define attitude control as the process of obtaining and controlling body spatial orientation. Attitude controller performance is critical in the stability of the whole system, but also to show enough robustness in the presence of model uncertainties and disturbances. Current controllers are specifically designed to perform some tasks, for that reason controllers are model dependent and assume accurate representations of the dynamics, in the presence of disturbances or uncertainties the controller would result unstable. One of the most promising applications is drone delivery service [1]. In that type of tasks where the aircraft will carry a payload, traditional controllers' performance would be affected, and the fly operation would result dangerous. The work here presented is based on the exploration and implementation of low-level attitude controllers directly developed on the special orthogonal group  $SO(3)$  to avoid complexities and ambiguities associated with other attitude representations such as Euler angles or quaternions. Adaptive attitude controller to achieve robustness against model uncertainties and external disturbances, is also proposed. The main topics of the project are: bibliography research, study of previous implementations, develop and test different control algorithms and provide simulation results and validation.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
1.1	Context	1
1.2	Objectius	6
1.3	Estructura de la memòria	7
<b>2</b>	<b>Fonaments teòrics</b>	<b>8</b>
2.1	Sistemes de representació de l'orientació	8
2.2	Dinàmica sòlid rígid	13
2.3	Model quad-rotor	16
2.4	Model electromecànic motor DC	21
<b>3</b>	<b>Algoritme pel control d'orientació</b>	<b>23</b>
3.1	Descripció de l'algoritme	26
3.1.1	Conversió del sistema de representació	26
3.1.2	Càlcul de la velocitat i acceleració angular desitjades ( $\Omega_d, \dot{\Omega}_d$ )	27
3.1.3	Funció i vectors d'error ( $\Psi, e_R, e_\Omega$ )	28
3.1.4	Llei de control ( $u$ )	30
3.2	Sistema de control adaptatiu	31
3.2.1	Efecte de pertorbacions i incertes sobre la dinàmica de l'orientació	33
3.2.2	Model de referència	34
3.2.3	Error entre model real i model de referència	35
3.2.4	Model real	36

<b>4 Resultats i validació numèrica</b>	<b>38</b>
4.1 Model simplificat	39
4.2 Model amb dinàmiques de quad-rotor	42
4.3 Resultats sistema de control adaptatiu	48
4.3.1 Model simplificat	48
4.3.2 Model amb dinàmiques de quad-rotor	51
<b>5 Conclusions</b>	<b>55</b>

# Índex de figures

1-1	Exemples de drons: a) Primer dron de la història. b) Dron militar. c) Hexacòpter	3
1-2	Aplicacions dels drons: a) Entrega de paqueteria. b) Agricultura de precisió. c) Elaboració de mapes.	4
2-1	Convenis de representació: a) Angles d'Euler. b) Regla de la ma dreta. c) Regla del llevataps.	9
2-2	Matriu de rotació sobre un vector	11
2-3	Matriu de rotació entre dos eixos de referència	11
2-4	Orientació del sistemes de referència	14
2-5	Representació forces principals sobre un quad-rotor. a) Sense desplaçament horitzontal. b) Amb desplaçament horitzontal	17
2-6	a), b) Moment 3D generats pels motors. c) Configuració + d'un quad-rotor	19
2-7	Esquema electromecànic motor DC	21
3-1	Arquitectura del controlador d'orientació proposat	25
3-2	Seqüència (1,2,3) pels angles d'Euler	27
3-3	Arquitectura control adaptatiu	33
4-1	Model simplificat implementat a Simulink	39
4-2	Resposta de l'algoritme sobre el model d'un sòlid rígid, amb una comanda d'orientació fixa.	40

4-3	Resposta de l'algoritme sobre el model d'un sòlid rígid amb una comanda d'orientació variable. . . . .	41
4-4	Model amb dinàmiques de quad-rotor implementat a Simulink . . . . .	42
4-5	Implementació en Simulink del controlador de velocitat . . . . .	43
4-6	Simulació per validar el correcte funcionament del model incloent les dinàmiques d'un quad-rotor i dels motors. . . . .	44
4-7	Ampliació calcul velocitat dels motors . . . . .	45
4-8	Simulació sobre model de quad-rotor, amb una comanda d'orientació de tipus sinusoidal pels 3 eixos . . . . .	46
4-9	Simulació sobre model de quad-rotor amb una comanda d'orientació provinent d'una emissora de radio . . . . .	47
4-10	Emissora de radio model FlySky-i6. . . . .	47
4-11	Model simplificat de controlador adaptatiu en Simulink . . . . .	48
4-12	Simulació control adaptatiu sobre un model simplificat en presència d'incertesa en la inèrcia i pertorbacions externes fixes i variables. . . . .	50
4-13	Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia. . . . .	52
4-14	Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia i pertorbació externa de moment constant. . . . .	53
4-15	Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia i pertorbació externa de moment variable. . . . .	54
4-16	Calcul velocitat dels motors amb singularitat . . . . .	54

# Capítol 1

## Introducció

En aquest primer capítol s'introduirà al lector el concepte de control d'actitud o d'orientació i es descriurà breument el context on es desenvolupa, així com les seves principals aplicacions. Per altra banda es descriuran els objectius del treball i es definiran els contingut de la memòria.

### 1.1 Context

Podem definir el control d'actitud com el conjunt d'accions efectuades amb la intenció de controlar i seguir l'orientació a l'espai d'un cos respecte a un sistema de coordenades fix, usualment conegut com a sistema de referència fix o eixos mòn. Es considera que el cos a controlar segueix les dinàmiques d'un sólid rígid ideal<sup>1</sup>. Pel que respecte a aquest treball, es proposa una solució orientada al control d'actitud d'un UAV<sup>2</sup> de petites dimensions, i més concretament un quad-rotor<sup>3</sup>, en posteriors capítols se'n detallaran les característiques.

Per poder dur a terme el seguiment i control d'orientació del cos, és necessari per una banda conèixer les equacions que descriuen les dinàmiques del moviment d'aquests tipus de cosos, i més concretament la dinàmica de la seva orientació. I d'altra

---

<sup>1</sup>Cos format per partícules que es mantenen sempre a una distància fixa entre elles amb independència de les forces o moments aplicats.

<sup>2</sup>Unmanned Aerial Vehicle.

<sup>3</sup>Helicòpter de tipus multi-rotor amb 4 motors.

banda, és necessari escollir i definir un sistema matemàtic per descriure i controlar aquestes orientacions i la seva evolució. Més endavant es proporciona una breu descripció de la formulació matemàtica i els conceptes físics necessaris per poder abordar el control d'orientació, i quin tipus de solucions han estat ja proposades en aquest camp ([Cap. 2](#)).

El control d'actitud o orientació d'un sòlid rígid es troba present en una gran varietat d'aplicacions; vehicles aeris o marítims, robòtica, sistemes d'entreteniment (videojocs, realitat virtual), etc. És però al sector aeroespacial on cobra una major rellevància, doncs és crucial pel control del moviment a l'espai tridimensional de tot tipus d'aeronaus, ja siguin amb control manual, remot o auto-pilotades. Alguns exemples poden ser: satèl·lits, coets, avions, helicòpters, etc. Un clar exemple de la importància d'un bon control d'actitud al sector aeroespacial és el cas dels satèl·lits, doncs la correcta orientació de les antenes o les plaques solars que equipen, es crucial pel funcionament òptim d'aquest tipus de dispositius aeris.

El controlador que es proposa en aquest treball s'ha desenvolupat per ser validat experimentalment en un UAV de tipus quad-rotor. Actualment existeix una gran controvèrsia entorn a la definició de UAV i el significat de les seves sigles. Segons L'institut Americà d'Aeronàutica i Astronàutica<sup>4</sup>, es defineix UAV com aquella aeronau que ha estat dissenyada o modificada per no haver de transportar un pilot humà al seu interior, i que es comandada per un sistema de navegació autònoma o bé a distància per un operador de vol. Dins d'aquesta categoria es poden incloure diferents tipus d'aeronaus: drons, coets, globus aerostàtics, míssils militars, etc. Si volem referir-nos únicament a les naus aèries controlables en les 3 dimensions de l'espai s'utilitza el terme UAS<sup>5</sup>, definit segons l'Agència Europea de Seguretat Aèria [2] com un sistema format pels següents elements individuals: aeronau no pilotada, estació de control i qualsevol altre element necessari per fer possible el vol.

---

<sup>4</sup>AIAA: <https://www.aiaa.org>.

<sup>5</sup>Unmanned Aircraft System.

Es important destacar, que gràcies al sector militar i els conflictes bèl·lics, la indústria aeronàutica va experimentar els principals avenços de la seva història ([Fig. 1-1b](#)). El primer vol d'una plataforma sense pilot a bord data del 1903 i es obra dels Germans Wright, i menys de 15 anys després, coincidint amb la primera Guerra Mundial, apareix registrat el primer vol d'una aeronau no tripulada, va rebre el nom de Hewitt-Sperry Automatic Airplane, basada en giroscopis i va volar 30 milles interrompidament ([Fig. 1-1a](#)).



Figura 1-1: Exemples de drons: a) Primer dron de la història, dissenyat per Sperry i Hewitt al 1917 [3]. b) Dron militar MQ-9 Reaper, utilitzat en tasques d'espionatge i combat [4]. c) Imatge del que s'entén com a dron en el context actual [5].

Totes les definicions donades són completament vàlides, però inclouen totes aquelles aplicacions de caràcter militar i que molt sovint es tracten d'evitar des del punt de vista educatiu i de la investigació, com és el cas d'aquest treball. Per aquest motiu apareix el terme MAV<sup>6</sup>, el qual fa referència a la subcategoria d'UAVs amb un massa inferior als 20 kg pel cas Mini, o per sota dels 5 kg si parlem de Micro. Aquesta terminologia és molt utilitzada avui en dia en l'àmbit acadèmic per fugir de les possibles aplicacions militars o armamentístiques.

En l'actualitat aquest tipus d'aeronaus són de gran interès en aplicacions molt diverses per la seva gran lleugeresa i maniobrabilitat, a més de per la quantitat d'informació que permeten recopilar gràcies als diferents sensors que poden equipar. En resum, aquest tipus de naus poden ser controlades (per un operari o un sistema de

---

<sup>6</sup>Micro-Mini Aerial Vehicles.

vol autònom) amb una gran precisió, en indrets hostils o perillosos per l'ésser humà, a l'hora que poden obtenir, processar i enviar dades de diferents tipus en funció de la tasca que desenvolupin.

A continuació es mencionen algunes àrees d'aplicació de gran interès tot i que se'n poden incloure moltes més [6]:

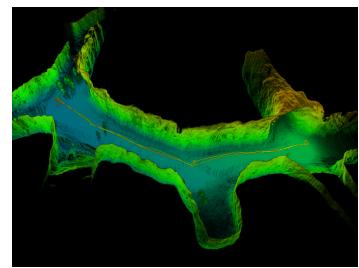
- Inspecció d'espais desconeguts i/o perillosos (edificis en perill de col·lapse, cañonades, coves, mines, etc) [7]
- Aplicacions derivades de la vigilància [8]
- Operacions de cerca i rescat [9]
- Entrega de paqueteria ([Fig. 1-2a](#))
- Treball agrícola ([Fig. 1-2b](#)) [10]
- Control mediambiental i meteorologia [11]
- Lluita contra incendis [12]
- Control i gestió del tràfic [13] [14]
- Elaboració de mapes ([Fig. 1-2c](#))
- Millora de les comunicacions [15]



(a)



(b)



(c)

Figura 1-2: a) Quad-rotor dissenyat per l'entrega de paqueteria, actualment utilitzat per l'empresa DHL [1]. b) Dron utilitzat pel control de plagues en agricultura de precisió [16]. c) Mapa 3D d'una mina elaborat amb l'ajut d'un MAV [17].

Totes els avantatges que caracteritzen els UAVs són possibles gràcies a la implementació de controladors d'actitud i posició suficientment sofisticats, i és per aquest motiu que parlem d'un àmbit d'estudi que es troba en constant desenvolupament i millora per part de les universitats i centres d'investigació.

A grans trets el control d'orientació d'un sòlid rígid es basa en escollir un sistema de representació per les orientacions i rotacions, definir una funció que expressi l'error o diferència entre l'orientació actual i una orientació final o desitjada, i per últim, definir una llei de control que proporcioni les comandes necessàries per tal de reduir l'error o diferència entre les orientacions desitjades i actuals. En les últimes dècades s'han proposat una gran varietat de mètodes o solucions pel control de l'orientació d'un sòlid rígid. Podem diferenciar o classificar les implementacions existents en funció de la parametrització triada per representar i tractar les orientacions i rotacions del cos.

En primer lloc trobem les solucions més intuïties, les quals utilitzen els angles d'Euler<sup>7</sup>, aquestes implementacions presenten els inconvenients propis d'aquest sistema de representació, com son les singularitats<sup>8</sup> [19]. D'altra banda podem trobar solucions basades en l'ús de quaternions per representar les rotacions, és en aquest grup on trobem la majoria d'implementacions existents en la bibliografia. Tot i que l'ús de quaternions no porta associades singularitats, si que podem parlar d'ambigüïtats en la representació d'orientacions, doncs cada configuració pot ser descrita per una parella de quaternions antipodals (+/-q). A la pràctica però això no representa un problema real [19].

En el cas d'aquest treball es proposa una solució basada en matrius de rotació com a sistema per parametrizar les orientacions i rotacions. Tot i que l'ús de matrius no representa una avantatge en lo referent al consum de memòria, la codificació de l'orientació mitjançant composició de rotacions és més eficient que l'ús de quaternions. Tot i que sota certes condicions inicials podem trobar limitacions o discontinuïtats, en posteriors apartats es donaran més detalls ([Sec. 3.1.3](#)).

---

<sup>7</sup>Sistema de tres coordenades angulares definit per Leonhard Euler, que serveixen per especificar l'orientació relativa entre dos eixos de referència [18].

<sup>8</sup>En física i matemàtiques, situació en la que un objecte o funció no queda completament definit.

## 1.2 Objectius

L'objectiu principal del projecte és la validació d'un controlador d'orientació basat en matrius de rotació, primer sobre un model simplificat, i posteriorment sobre un model que inclogui les dinàmiques d'una plataforma de vol real, concretament un quad-rotor. Com a objectiu secundari es planteja introduir en la solució proposada pel control d'orientació, la capacitat de predir i contrarestar la presencia d'incerteses i/o pertorbacions externes que afectin a la dinàmica d'orientació del quad-rotor. D'aquesta manera es pretén dotar el l'algoritme d'una major robustesa.

Per assolir l'objectiu principal de la proposta es plantegen les següents tasques o objectius secundaris:

1. Caldrà fer un estudi i recerca de diferents tòpics, principalment: dinàmica d'orientació d'un sòlid rígid, equacions dinàmiques pel cas d'un quad-rotor i models dinàmics dels motors, així com de referències sobre implementacions similars ja existents.
2. Una vegada feta la feina teòrica caldrà implementar una primera solució fent servir el software Matlab, i concretament l'eina Simulink per validar el correcte funcionament de l'algoritme plantejat, en primer lloc sobre un model simplificat d'un sòlid rígid.
3. El següent pas serà introduir en el model simplificat tot els elements necessaris per comprovar l'eficàcia de la solució en una plataforma de vol de tipus multi-rotor, similar a la que s'utilitzaria en un cas real.
4. Finalment, un cop demostrat el correcte funcionament del controlador d'orientació, s'afegiran els elements necessaris per predir i contrarestar incerteses i pertorbacions externes.

## 1.3 Estructura de la memòria

Després d'una primera introducció i plantejament d'objectius, en el segon capítol d'aquesta memòria és tracten d'una banda, els principals sistemes de representació de l'orientació, la dinàmica d'un sòlid rígid, així com les equacions que descriuen el comportament d'un quad-rotor i el model dinàmic dels seus motors. Al tercer capítol es descriu el funcionament general de l'algoritme proposat com a solució pel control d'orientació i s'expliquen les principals parts que el componen. D'altra banda es descriu també el sistema de control adaptatiu que permet ampliar l'algoritme ja implementat per contrarestar la presència d'incerteses i pertorbacions externes. En el quart capítol es presenten les simulacions realitzades amb Matlab per validar el funcionament dels mètodes de control prèviament descrits. A més es presenten els resultats obtinguts primer sobre un model simplificat i en segon lloc sobre un model més complet que inclou les dinàmiques d'una plataforma multi-rotor i dels seus actuadors. Finalment, al cinquè i últim capítol s'inclouen les conclusions que es poden extreure un cop evaluats els resultats de les simulacions i els objectius que s'havien definit al principi del projecte. A mes es proposen possibles millors o reptes de cara a futurs treballs.

# Capítol 2

## Fonaments teòrics

En aquest segon capítol es proporcionen les eines matemàtiques necessàries per descriure el moviment d'un quad-rotor. En primer lloc s'introduceix el concepte de matriu de rotació així com els principals sistemes de representació per les orientacions i els moviments angulars, a més de les seves principals característiques. En segon lloc es descriu el cas general de la dinàmica d'un sòlid rígid i més concretament l'evolució de la seva dinàmica d'orientació. Seguidament es detalla el model dinàmic d'un quad-rotor i com es relaciona amb el model d'un sòlid rígid a través de les forces i moments. Per últim es dóna també una descripció del model electromecànic dels motors que trobaríem a una plataforma de vol real, encarregats de generar les forces i moments sobre el multi-rotor.

### 2.1 Sistemes de representació de l'orientació. Angles d'Euler i Matrius de Rotació

Existeixen una gran quantitat de sistemes per parametritzar l'orientació d'un cos a l'espai. Tradicionalment s'han utilitzat els anomenats angles d'Euler [20], 3 angles que representen la rotació, en sentit antihorari, entorn a cada un dels eixos de coordenades d'un sistema ortogonal; *roll* ( $\phi$ ) es l'angle associat al gir entorn l'eix *X*, *pitch* ( $\theta$ ) està associat a la rotació entorn l'eix *Y* i *yaw* ( $\psi$ ) respecte a l'eix *Z*. Una

combinació d'aquests 3 angles permet expressar l'orientació de qualsevol sistema de coordenades ortogonals mòbil, respecte a un altre sistema de coordenades fix triat com a referència. A la figura Fig. 2-1a s'il·lustren els tres angles o rotacions d'Euler respecte a un sistema de coordenades fix. És important tenir present que s'utilitza la regla de la ma dreta (*right hand rule*) per definir l'orientació relativa de cada un dels eixos (Fig. 2-1b) i la regla del llevataps (*curl right hand rule*) per definir el sentit positiu de gir (Fig. 2-1c). Per referir-nos als eixos mòbil i fix es fan servir els superíndex  $b$  (*body reference frame*) i  $w$  (*world reference frame*) respectivament.

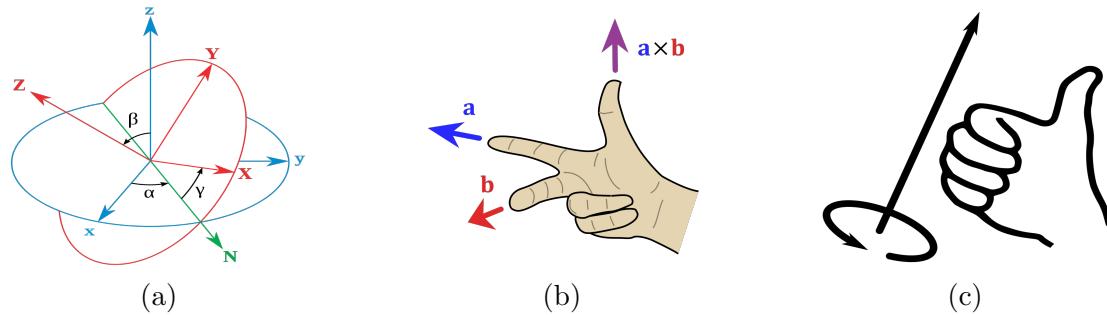


Figura 2-1: a) Representació dels tres angles d'Euler, font: Wikipedia. b) Conveni de la ma dreta per representar eixos de coordenades. c) Conveni o regla del llevataps per definir el sentit de gir positiu.

Qualsevol orientació pot ser descrita amb una combinació de 3 d'angles d'Euler diferents, aquestes combinacions però, no són úniques. Cada orientació pot ser descrita per varies combinacions d'angles d'Euler diferents i de la mateixa manera una única combinació pot descriure varies orientacions diferents en funció de l'ordre en que s'apliquin cada una de les rotacions o girs d'Euler. Aquest fenomen dificulta l'aplicació de lleis de control continues i úniques, a la secció Sec. 3.1.1 és determina l'ordre per les rotacions. Un altre fenomen a destacar és el que es coneix en anglès com a *Gimbal lock*<sup>1</sup> singularitat que dificulta el desenvolupament de lleis de control continues i globalment definides.

A l'hora de tractar o processar aquests angles per desenvolupar algoritmes de control o altres tasques es pot fer de diferents maneres; es pot treballar directament

<sup>1</sup>Pèrdua d'un grau de llibertat, es dóna quan s'alineen dos dels tres eixos de rotació, resultant en una rotació en un espai tridimensional degenerat.

amb els valors de cada un dels angles d'Euler o bé es pot optar per altres mètodes de parametrització de l'orientació com podrien ser els quaternions o les matrius de rotació [20].

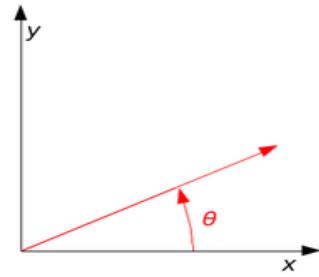
Els quaternions, matemàticament, són elements de 4 dimensions ( $a + bi + cj + dk$ ) que a priori poden ser poc intuïtius, però que a l'hora són molt útils per treballar, doncs ens permeten evitar les limitacions dels angles d'Euler. De les quatre components, tres representen la part imaginaria ( $b, c, d$ ) i inclouen en la seva expressió l'angle de l'eix de rotació i l'angle de rotació, i el terme independent ( $a$ ) representa la part real i inclou únicament l'angle de rotació. Aquests elements de 4 components representen cada orientació com una sola rotació partint d'un sistema de referència ortogonal fix. Aquest sistema permet evitar les singularitats dels angles d'Euler, però també presenta limitacions, doncs cada orientació està representada per un parell de quaternions antipodals [19]. Dit d'una altra manera, si cada orientació pot ser representada com una rotació d'un cert angle entorn a un cert eix, ha d'existir una rotació entorn al mateix eix però en sentit contrari que porti a la mateixa orientació. Igual que pel cas dels angles d'Euler aquest fet dificulta el desenvolupament de lleis de control contínues i globalment definides.

D'altra banda trobem les anomenades matrius de rotació, matrius que multiplicades per un vector, el roten un cert angle entorn un determinat eix sense modificar el seu modul. En 2 dimensions, la rotació representada a la figura Fig. 2-2b queda expressada amb una matriu de rotació  $R$ .

Aquesta matriu  $R$  representa un gir de  $\theta$  graus en sentit antihorari sobre el pla  $X-Y$ . D'altra banda aquestes matrius també ens permeten codificar l'orientació d'un sistema de coordenades móbil respecte a un sistema fix. En el cas de la figura Fig. 2-3b si rotem un angle  $\theta$  un sistema d'eixos móbilbinicialment coincident amb el sistema d'eixos fix  $w$ , un punt qualsevol  $P$  amb coordenades definides respecte al sistema d'eixos inicial  $P^w(x, y)$  pot ser expressat en el nou marc de referència resultant de la rotació  $P^b(x', y')$  fent ús de la matriu de rotació  $R$  invertida  $R^{-1} = R^T = R'$ .

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(a)

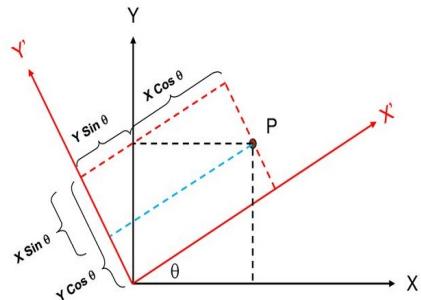


(b)

Figura 2-2: La matriu  $R$  representa la rotació d'un vector un angle  $\theta$  entorn a l'eix  $Z$  en sentit antihorari.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(a)



(b)

Figura 2-3: La matriu  $R'$  representa la rotació d'un sistema d'eixos mòbil respecte a un sistema d'eixos fix un angle  $\theta$  entorn a l'eix  $Z$  en sentit antihorari.

D'igual manera podem fer la transformació inversa i expressar  $P^w$  en funció de  $P^b$ :

$$P^b = R' P^w; P^w = R P^b \quad (2.1)$$

Aquest mateix concepte es pot aplicar en el cas de 3 dimensions. La diferència però, és que ara les rotacions es poden donar respecte a 3 eixos diferents o el que és el mateix en tres plans diferents:  $X-Y$ ,  $X-Z$  i  $Y-Z$ . Com que aquestes rotacions són necessàriament respecte un dels eixos de coordenades ortogonals, les components de l'eix entorn al qual es dóna la rotació han de romandre constants, i per tant les matrius de rotació en 3 dimensions entorn als eixos  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  respectivament tenen la següent forma:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} R_z = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Com ja s'ha vist els angles d'Euler expressen la rotació entorn a cada un dels 3 eixos de coordenades, així doncs un vector format per 3 angles d'Euler pot ser entès com 3 rotacions successives entorn a tres eixos diferents o repetint algun d'ells (mai però s'apliquen dos rotacions successives sobre el mateix eix, doncs seria equivalent a fer una única rotació més llarga), anomenem aquest vector com el vector d'Angles d'Euler . Qualsevol orientació pot ser representada com a resultat d'aquestes 3 rotacions successives. La matriu de rotació final que engloba les 3 rotacions successives, correspon a realitzar el producte de cada una de les matrius de rotació entorn a cada un dels eixos. Com que les matrius no compleixen la propietat commutativa del producte<sup>2</sup>, és evident que l'ordre en que es donin aquestes rotacions determinarà l'orientació final que s'està representant. En resum podríem dir que qualsevol orientació relativa entre dos sistemes d'eixos de referència pot ser representada per una única rotació que queda codificada en una matriu de transformació.

El conjunt de totes les matrius de rotació  $3 \times 3$  es coneix com el grup ortogonal especial, abreviat com  $\text{SO}(3)$ . Totes les matrius d'aquest conjunt compleixen dos condicions bàsiques, totes elles són ortogonals<sup>3</sup> i tenen determinant igual a 1, i.e.,  $\text{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det R = 1\}$ .

En aquest treball es proposa l'ús de matrius de rotació com a mètode per parametrizar l'orientació, amb l'objectiu de proporcionar un sistema de control continu que garanteixi l'estabilitat en presència d'erros inicials en l'orientació grans. A més, la implementació d'un sistema de control directament desenvolupat sobre el grup ortogonal especial permet evitar complexitats i ambigüïtats presents en altres representacions

---

<sup>2</sup>Essent A i B dos matrius quadrades:  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

<sup>3</sup>La seva transposada i la seva inversa són iguals.

angulars.

## 2.2 Dinàmica sòlid rígid

Per poder controlar i simular el moviment d'un quad-rotor és necessari disposar d'equacions matemàtiques que responguin al comportament del cos quan se li apliquen unes determinades forces i moments. Generalment podem considerar qualsevol aeronau com un cos sòlid no deformable i gens flexible, és a dir un sòlid rígid i podem descriure el moviment del seu centre de masses<sup>4</sup> (CoM) fent servir les equacions dinàmiques pròpies d'aquests tipus de cosos Eq.(2.3), Eq.(2.4) i Eq.(2.5). Aquestes equacions són valides per a qualsevol sòlid rígid independentment de la seva massa o geometria.

A l'equació Eq.(2.3)  $m$  representa la massa del sòlid,  $\dot{v}$  l'acceleració del cos,  $g$  és l'acceleració de la gravetat,  $R$  la matriu de rotació i  $f_{ext}$  el sumatori de forces externes. En Eq.(2.4)  $J$  és la matriu d'inèrcia,  $\Omega$  és la velocitat angular del sòlid i  $\tau_{ext}$  és refereix al conjunt de moments externs que actuen sobre el cos.

$$m\dot{v}^w = mg^w + Rf_{ext}^b \quad (2.3)$$

$$J\dot{\Omega}^b = -\Omega^b \times J\Omega^b + \tau_{ext}^b \quad (2.4)$$

$$\dot{R} = R\Omega^b \quad (2.5)$$

Es pot veure en alguns dels termes de les equacions presentades, l'ús de dos superíndex diferents:  $w$  i  $b$ . Aquests superíndex indiquen l'eix de coordenades respecte al qual s'està donant la magnitud en qüestió. La lletra  $b$  (*body*) fa referència al eix mòbil, el qual es troba fixat al centre de masses del cos i es mou solidàriament amb ell, en canvi el superíndex  $w$  (*world*) fa referència al sistema de coordenades fix, el qual ens permet avaluar el moviment i velocitats lineals del cos. La figura Fig. 2-4 mostra quina és l'orientació del sistema d'eixos fixes, amb l'eix  $+Z$  apuntant al centre de la terra. I d'altra banda es pot observar també com es situa respecte al cos el sistema

---

<sup>4</sup>Posició que tindria una partícula equivalent, que concentrés tota la massa del sòlid.

d'eixos mòbil, fent coincidir la part frontal de la nau amb l'eix  $+X$ , els eixos  $X$  i  $Y$  no queden representats, però es situen de manera que l'eix  $Z$  mòbil coincideixi amb el fix.

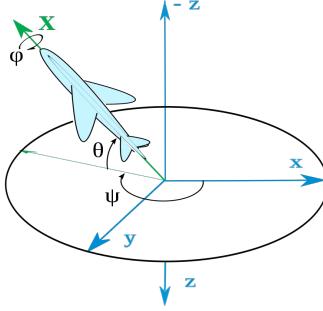


Figura 2-4: Orientació del sistema de referència fix en color blau i orientació del sistema mòbil en verd. El sistema d'eixos fix apunta amb l'eix  $+Z$  al centre de la terra. El sistema mòbil s'orienta respecte al cos fent coincidir la direcció d'avenç de la nau amb l'eix  $+X$  i l'eix  $+Z$  cap avall. Font: Wikipedia.

Per una banda la primera d'aquestes equacions Eq.(2.3) s'obté directament a partir de la segona Llei de Newton ( $F = m \cdot a$ ) i descriu el moviment translacional del cos respecte al sistema d'eixos fix, és per aquest motiu que tots els termes que apareguin han d'estar referenciats al sistema d'eixos fix  $w$ . En aquesta expressió trobem descrites totes les forces implicades en el sistema. El primer terme fa referencia a la força pes de l'aeronau, és a dir, l'efecte que la gravetat provoca sobre el cos pel fet de tenir massa. El segon terme fa referencia a les forces externes que afecten al sistema, com aquestes forces es donen respecte al sistema d'eixos mòbil  $b$ , el terme apareix multiplicat per una matriu de rotació  $R$ , que permet transformar del sistema d'eixos mòbil  $b$  al sistema fix  $w$ . Com que estem treballant en un espai tridimensional, tant la gravetat com les forces externes son vectors columna de tres dimensions, mentre que la massa és un escalar. El vector gravetat al estar expressat respecte al sistema d'eixos fix, situat a la superfície terrestre, és nul en totes direccions excepte en aquella que apunta al centre de la terra, és a dir, en  $+Z$  segons els sistema d'eixos de la figura Fig. 2-4. En canvi el vector corresponent a les forces externes està referenciat al sistema d'eixos fixat al cos, i donada la geometria de l'aeronau que es contempla, aquest vector tindrà una component dominant en la direcció  $-Z$ , aquestes forces an-

menades forces d'empenta o *thrust*, son les responsables de fer que el dron s'enlairi, i estan directament relacionades amb la velocitat de gir dels motors i la geometria de les hèlixs. En l'apartat Sec. 2.3 es donaran més detalls sobre aquestes magnituds.

La segona equació Eq.(2.4) és anàloga a la primera, però en aquest cas es descriu el moviment angular del cos, és a dir, la dinàmica del canvi d'orientació. Aquesta equació es coneix en mecànica clàssica com l'equació de moviment d'Euler i de nou, és anàloga a la Segona Llei de Newton però amb algunes diferencies. Si observem l'expressió per la quantitat de moment lineal Eq.(2.6) i moment angular Eq.(2.7) podem establir algunes analogies ( $L = r \times p$ ). En comptes de massa, en el calcul angular apareix el terme d'inèrcia  $J$  o matriu d'inèrcia, aquest terme correspon a una matriu simètrica formada per tots els moments d'inèrcia del sòlid rígid, i enllac de la velocitat lineal  $v$  trobem la velocitat angular  $\Omega$ . D'altra banda, la derivada temporal de la quantitat de moviment lineal ens permet obtenir el sumatori de forces que actuen sobre el cos ( $\frac{dP}{dt} = m \frac{dv}{dt} = \sum F$ ), d'igual manera i de forma general la derivada de la quantitat de moment angular d'un cos amb moment d'inèrcia  $I$  ens permet obtenir el sumatori de moments que actuen sobre ell ( $\frac{dL}{dt} = I \frac{d\Omega}{dt} = \sum M$ ). En el cas d'un sòlid rígid però, la inèrcia no acostuma a ser constant amb el temps i per tant respecte al sistema de referència inercial no existeix una analogia d'aquest terme a la segona Llei de Newton ( $\frac{dL}{dt} \neq J \frac{d\Omega}{dt} = J \dot{\Omega}$ ). Si es plantegen les equacions de moviment en un sistema no inercial format pels eixos principals d'inèrcia tenim que  $J = cte$ , i si afegim el terme per les forces d'inèrcia podem deduir l'equació Eq.(2.4) ( $\frac{dL}{dt} = J \frac{dw}{dt} + \Omega \times L\Omega$ ).

$$p = m \cdot v \quad (2.6)$$

$$L = J \cdot \Omega \quad (2.7)$$

Mentre en la primera equació Eq.(2.3) tenim un terme per les forces externes, en aquesta segona equació Eq.(2.4) apareix un terme pels moments o parells externs que afecten al sòlid, que igual que en el primer cas, es troba referenciat respecte a l'eix mòbil  $b$ . Són aquests dos termes els que engloben l'actuació externa sobre el sòlid

rígid. Per tant a l' hora de desenvolupar un sistema de control haurem de calcular i controlar aquestes magnituds per tal que el comportament resultant descrit per les equacions s'ajusti al moviment desitjat.

Per últim l'equació diferencial [Eq.\(2.5\)](#) ens dóna la relació entre la matriu de rotació del cos i la seva derivada temporal, a través de la velocitat angular expressada respecte als eixos mòbils.

En el següent apartat ([Sec. 2.3](#)) es descriu com calcular aquestes forces i moments externs pel cas d'un quad-rotor i com aquestes dos magnituds es relacionen entre elles.

## 2.3 Model quad-rotor

Quan pensem en aeronaus, si excloem aquelles que es troben en orbita, com podrien ser els satèl·lits o les estacions espacials, podem diferenciar entre dos gran grups. D'una banda trobem les naus d'ala fixa, com per exemple els avions i d'altra banda els helicòpters.

Podríem definir un quad-rotor, com un helicòpter multi-rotor dotat de 4 motors disposats en forma de X o de +. La principal diferencia mecànica entre un helicòpter i una aeronau d'ala fixa, roman en què els helicòpters s'enlairen i es sustenten gracies al moviment rotatori del rotor/s que incorpora, mentre que una nau d'ala fixa deu la seva sustentació a les forces aerodinàmiques derivades de la geometria del seu disseny mentre aquesta es troba en moviment. A la pràctica els helicòpters tenen la capacitat d'enlairar-se i volar mantenint-se en un punt fix, mentre que les naus d'ala fixa necessiten del moviment horitzontal per generar les forces aerodinàmiques necessàries. En el cas d'aquest treball els 4 motors i per tant les 4 hèlix del dron, mantenen la seva orientació fixa respecte a l'eix mòbil. Existeixen però, plataformes que poden variar l'orientació dels motors respecte a l'eix del dron, resultant en un model completament diferents al aquí presentat.

Un rotor amb una hèlix (amb un disseny adequat) acoblada al seu eix i que gira solidàriament amb aquest a una certa velocitat angular, genera una força en la mateixa direcció que l'eix i proporcional a la seva velocitat de gir. La suma de les 4 forces produïdes pels 4 motors que componen la nau, és el que es coneix amb el nom de *thrust* o força de sustentació Eq.(2.8). Com que l'orientació dels motors es fixa i pràcticament perpendicular a la nau, tants les forces individuals com la força total, seran majoritàriament perpendiculars al dron (Fig. 2-5a). Aquestes forces són per tant les encarregades de vèncer el pes del cos i enlairar el dron, obtenint així un moviment vertical. El moment en que la força de thrust iguala la força pes, l'acceleració resultant en l'eix vertical és nul·la i si la velocitat també ho és diem que l'aeronau es troba en estat de *hover* o flotació.

$$F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.8)$$

$$F_i = K_F w_i^2 \quad (2.9)$$

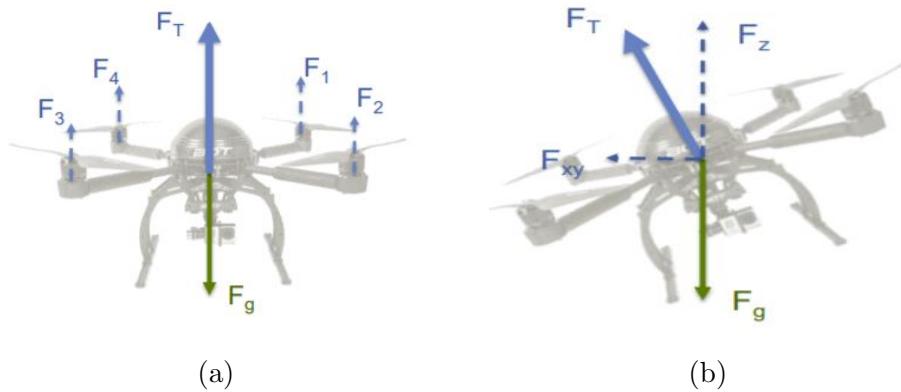


Figura 2-5: Representació de les forces principals que actuen sobre un quad-rotor. a) Sense moviment horitzontal, *thrust* completament sobre l'eix Z. b) Amb moviment horitzontal, *thrust* amb component no nul·la sobre l'eix X del pla, el dron es mourà en aquest eix.

Per relacionar la velocitat de gir del rotor amb la força vertical que genera s'utilitza l'expressió Eq.(2.9), aquesta equació representa una aproximació del que s'observa experimentalment i no sempre reflexa la realitat.  $K_f$  és una constant que depèn del disseny de l'hèlix i el motor utilitzat, i que pot ser estimada de forma experimental[21].

Si observem l'equació Eq.(2.3), la força de *thrust* correspon a la força externa que s'aplica sobre el sòlid rígid, i es pot deduir que per tal de generar un moviment transaccional de la nau, serà necessari que aquesta força tingui components no nul·les en el pla horitzontal de l'eix de referència fix  $w$ , això comportarà l'aparició d'una acceleració neta en aquest pla. Com ja s'ha comentat el vector de *thrust* és majoritàriament perpendicular a la nau, així doncs serà necessari inclinar la nau aplicant un cert parell o moment, per tal que aquest vector tingui components no nul·les en els eixos horitzontals respecte al sistema d'eixos fix (Fig. 2-5b).

Cada un dels motors girant a una certa velocitat angular, induceix el que es coneix com moment de les forces de *drag*, un torque o parell que apareix com a resposta al gir del rotor en sentit oposat i sobre el mateix eix (3<sup>a</sup> llei de Newton). Per calcular el moment de *drag* associat a cada rotor s'utilitza l'expressió Eq.(??), on de nou  $K_m$  és una constant que pot ser determinada experimentalment. Com que interessa poder compensar i controlar el moment o parell net sobre l'eix  $Z$  de la nau  $\tau_z$  Eq.(2.11), dos motors giren en un sentit i els altres 2 en sentit oposat, de forma que si tots els motors giren a la mateixa velocitat tots els parells queden cancel·lats i el moment resultant és nul (Fig. 2-6a). Si volem provocar una rotació entorn a l'eix  $Z$  caldrà doncs disminuir o augmentar la velocitat de gir d'un dels parells de motors, de forma que el moment total  $\tau_z$  no quedi compensat. Les constants  $K_m$  i  $K_f$  es poden relacionar a través de la constant  $\gamma$  Eq.(2.14).

Si tenim en compte que el parell o moment apareix quan una força s'aplica a una certa distància sobre un eix de rotació (Fig. 2-6b). Cada un dels motors al generar una força vertical a una certa distància  $d$  del centre de masses, a més del moment de drag sobre l'eix  $Z$ , induïxen també un moment sobre el cos en els eixos horitzontals Eq.(2.12), Eq.(2.13). La posició dels motors respecte els sistema d'eixos del dron determinarà quina es la contribució de cada un d'ells al parell generat en els eixos  $X$  i  $Y$ . La geometria triada en aquest treball rep el nom de configuració + (Fig. 2-6c), com que els motors 2 i 4 es troben fora de l'eix  $X$  seran els responsables del moment en aquest mateix eix ( $\tau_x$ ). D'igual manera els motors 1 i 3 al situar-se a una distància

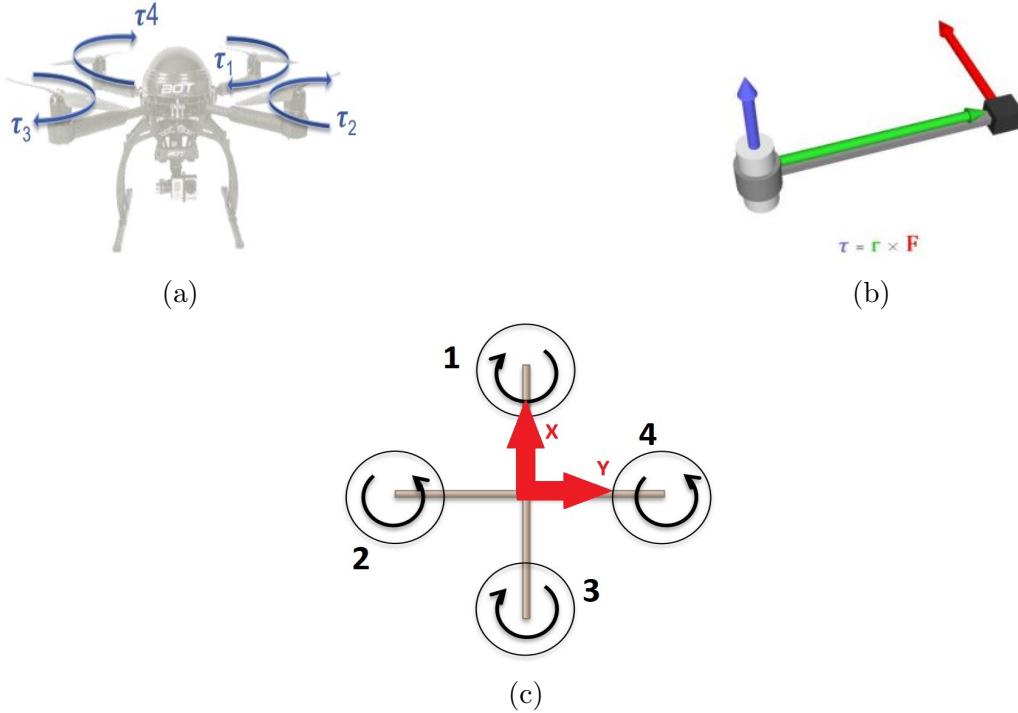


Figura 2-6: a) Moment de drag induït per cada un dels motors girant en el sentit oposat a l'indicat . b) Moment de drag induït per cada un dels motors girant en el sentit oposat a l'indicat. c) Esquema d'un quad-rotor amb configuració +, els motors apareixen numerats del 1 al 4

*d* a l'eix de rotació *y* seran els responsables del parell entorn aquest eix ( $\tau_y$ ).

$$\tau_i = K_M w_i^2 \quad (2.10)$$

$$\tau_z = -\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4 \quad (2.11)$$

$$\tau_x = (F_2 - F_4) \times d \quad (2.12)$$

$$\tau_y = (F_3 - F_1) \times d \quad (2.13)$$

$$\gamma = K_m / K_F \quad (2.14)$$

En resum podríem dir que el model d'actuació d'un quad-rotor, es caracteritza d'una banda per la força de *thrust*, la qual depèn únicament de la velocitat de gir dels motors i la geometria de les hèlix, i considerem que sempre serà perpendicular al pla de la nau. I d'altra banda el conjunt dels motors girant a una distància *d* del

CoM generen un moment amb components  $XYZ$ . Tant el parells o moments nets que actuen sobre la nau en cada eix  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$ , com la força de *thrust* total  $F_T$ , es poden expressar en forma matricial en funció de les forces i velocitats angulars de cada rotor  $w_i$  fent ús de les expressions següents:

$$\begin{pmatrix} F_T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ (F_2 - F_4) \times d \\ (F_3 - F_1) \times d \\ -\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d & 0 & -d \\ -d & 0 & d & 0 \\ -\gamma & +\gamma & -\gamma & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} F_T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_F & K_F & K_F & K_F \\ 0 & K_F d & 0 & -K_F d \\ -K_F d & 0 & K_F d & 0 \\ -K_M & K_M & -K_M & K_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Aquestes forces i moments són les magnituds que ens permet relacionar el model del quad-rotor amb la dinàmica d'un sólid rígid i corresponen als moments i forces externes de les equacions [Eq.\(2.3\)](#) i [Eq.\(2.4\)](#). En el cas en que no hi hagi cap actuació, es a dir, si els motors no giressin, les forces i els moments externs serien nuls i seria únicament la gravetat i la inèrcia els que determinarien la dinàmica del cos. Si unim les equacions [Eq.\(2.3\)](#) i [Eq.\(2.4\)](#) amb l'expressió per les forces i moments generats pels motors [Eq.\(2.15\)](#) obtenim les equacions [Eq.\(2.17\)](#) [Eq.\(2.18\)](#) que relacionen la dinàmica del cos directament amb la força que genera cada un dels motors.

$$m \cdot \dot{v}^w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + R_b^i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$J \cdot \dot{\Omega}^b = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & -d \\ -d & 0 & d & 0 \\ -\gamma & \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} - \Omega^b \times J \Omega^b \quad (2.18)$$

## 2.4 Model electromecànic motor DC

Els actuadors responsables de provocar les forces i moments sobre el quad-rotor son motors de corrent continua, amb una hèlix acoblada al seu eix, capaços de treballar a rangs de velocitats molt elevades (6000 - 7000 rpm o més). Els motors DC s'actuen aplicant un cert voltatge, el qual provoca que aquests girin a una certa velocitat. Per controlar la resposta d'un motor DC és necessari desenvolupar un model matemàtic que el descrigui.

La figura Fig. 2-7 mostra una representació dels elements més importants d'un motor DC. Es tracta d'un model electromecànic, doncs es combinen elements elèctrics i mecànics.

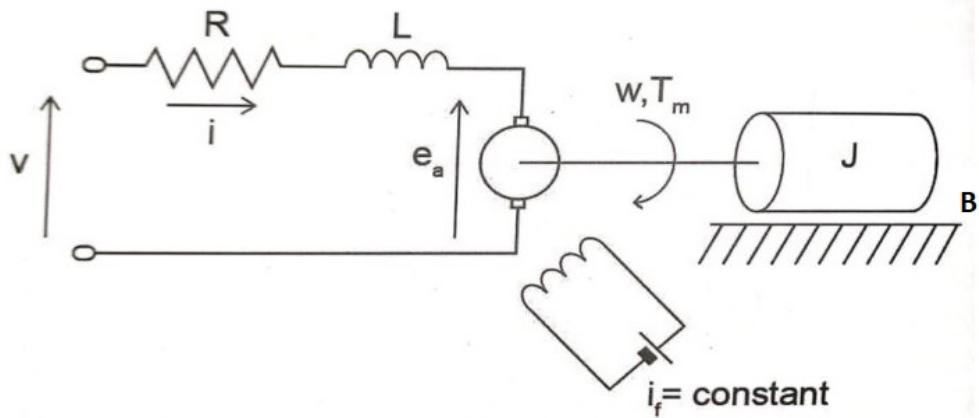


Figura 2-7: Esquema electromecànic d'un motor de corrent continua.  $R$ : resistència;  $L$ : inductància;  $V$ : voltatge d'entrada;  $e_a$ : força contraelectromotriu;  $i$ : intensitat;  $\omega$  (a l'esquema apareix com  $W$ ): velocitat angular eix motor;  $T_m$ : parell motor;  $J$ : inèrcia;  $B$ : coeficient de fricció.

A la part esquerra trobem els elements elèctrics del sistema, la resistència  $R$  de l'armadura, la bobina  $L$ , el voltatge  $V$  i circula una intensitat  $i$ . Mentre que a la dreta

trobem els components mecànics,  $e_a$  representa la força contraelectromotriu generada el motor,  $\omega$  es la velocitat de gir de l'eix,  $T_m$  correspon al parell,  $J$  representa la inèrcia de l'eix motor i  $B$  el coeficient de fricció.

La part elèctrica i mecànica del motor queden representades amb les equacions diferencials Eq.(2.19) i Eq.(2.20) respectivament. D'altra banda s'assumeix que existeix una relació proporcional entre el voltatge induït a la armadura  $e_a$  i la velocitat angular de l'eix del motor  $\omega$  Eq.(2.21). Anàlogament s'estableix també una relació electromecànica entre el parell  $T_m$  i la corrent que circula pel motor  $i$  Eq.(2.22).

$$L \frac{\partial i(t)}{\partial t} = V(t) - Ri(t) - E_a \quad (2.19)$$

$$J \frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = \tau_m(t) - B\omega(t) \quad (2.20)$$

$$e_a(t) = K_a \omega(t) \quad (2.21)$$

$$\tau_m(t) = K_m i(t) \quad (2.22)$$

Aplicant la transformada de Laplace sobre les equacions anteriors podem obtenir les funcions de transferència del motor DC. Aquestes funcions ens relacionen les diferents sortides del motor ( $e_a$ ,  $\omega$ ,  $i$ , etc) amb l'entrada  $V$ . En aquest cas ens interessa la funció de transferència que relaciona el voltatge d'entrada i la velocitat angular de sortida Eq.(2.23). Aquesta expressió reflexa la dinàmica de la velocitat de gir del motor en funció del voltatge aplicat. A la secció Sec. 4.2 es desenvolupa un model de controlador de velocitat (Fig. 4-5) utilitzant aquesta funció de transferència, per tal de comprovar com afecta la dinàmica del motor al funcionament del controlador d'orientació descrit en el pròxim capítol (Cap. 3).

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_mKa} \quad (2.23)$$

# Capítol 3

## Algoritme pel control d'orientació

En aquest capítol es presenta el mètode triat pel control d'orientació basat en matrius de rotació. Es descriuen els principals blocs que el componen, les equacions i relacions matemàtiques que el defineixen i com es relacionen entre elles les diferents parts per aconseguir el funcionament desitjat. D'altra banda es presenta un segon algoritme que amplia l'anterior, i permet contrarestar i estimar diferents incerteses i pertorbacions en la dinàmica de l'aeronau, i de les quals el sistema de control no té cap informació d'avantmà.

Es defineix el control d'orientació com el procés de controlar l'orientació a l'espai d'una aeronau respecte a un eix de referència. Dit d'una altra manera, l'objectiu d'un algoritme pel control d'orientació és aconseguir que l'orientació del cos que es pretén controlar coincideixi, en tot moment, amb l'orientació desitjada. La primera solució implementada en aquest treball es basa en una publicació de Taeyoung Lee [22], on es proposa un sistema pel control i seguiment de l'orientació, directament desenvolupat sobre el grup ortogonal especial  $SO(3)$ . Això implica que no es treballarà amb els angles d'Euler directament o amb quaternions com fan altres mètodes, sinó que per fugir de possibles singularitats i ambigüïtats, tant l'orientació actual com la desitjada quedaran codificades en matrius de rotació. Més endavant es definirà quin ha estat el conveni triat per construir les matrius.

L'estructura topològica del grup especial ortogonal  $\text{SO}(3)$  presenta limitacions en certes condicions, per exemple la situació que és dóna quan la diferència entre l'orientació desitjada i l'actual queda representada per una rotació de 180 graus entorn a un cert eix, i la velocitat angular és zero. Intuïtivament podem deduir que existiran dues possibles rotacions, de sentit oposat i entorn al mateix eix, que portaran el cos a l'orientació desitjada. Més endavant, quan es tracti la funció d'error i les seves derivades, es donaran més detalls sobre aquest fenomen i com limita el funcionament de l'algoritme.

Com ja s'ha vist al capítol anterior, la dinàmica de l'orientació d'un sòlid rígid queda resumida en les equacions [Eq.\(2.4\)](#) i [Eq.\(2.5\)](#). Es fàcilment deduïble que per actuar sobre el cos modificant la seva orientació, caldrà aplicar un cert moment o parell entorn a un cert eix. Així doncs, la tasca del controlador d'orientació serà calcular aquests parells o moments, que anomenarem d'ara en endavant comanda de control  $u$ , que aplicats sobre el cos el portaran a la orientació desitjada.

Per calcular aquesta comanda de control  $u$ , es defineix una funció  $\Psi$  que mesura l'error o diferència entre l'orientació actual  $R$  i la desitjada  $R_d$ .  $u$  es dissenya de manera que es redueixi el valor d'aquesta funció d'error, i per tant trobarem en la seva expressió termes directament relacionats amb les derivades de  $\Psi$ , direm per tant que  $u$  és proporcional a la funció d'error. Quan l'error arriba a 0, l'orientació actual  $R$  i l'orientació desitjada  $R_d$  coincideixen ( $R = R_d$ ), i en aquest moment direm que l'algoritme ha convergit. L'algoritme rep com a paràmetres d'entrada les següents magnituds: orientació desitjada  $R_d$ , orientació actual  $R$ , velocitat angular desitjada  $\Omega_d$ , velocitat angular actual  $\Omega$ , acceleració angular desitjada  $\dot{\Omega}_d$  i la matriu d'inèrcia  $J$ .

A la figura ([Fig. 3-1](#)) es mostra un diagrama que resumeix el funcionament de l'algoritme. Es diferencia entre el cas real o experimental i la simulació. En el cas real, la comanda de control  $u$  és utilitzada juntament amb l'equació [Eq.\(2.16\)](#) per calcular les velocitats de gir necessàries per a cada motor, i el quad-rotor s'actuarà a través d'aquestes velocitats de gir.

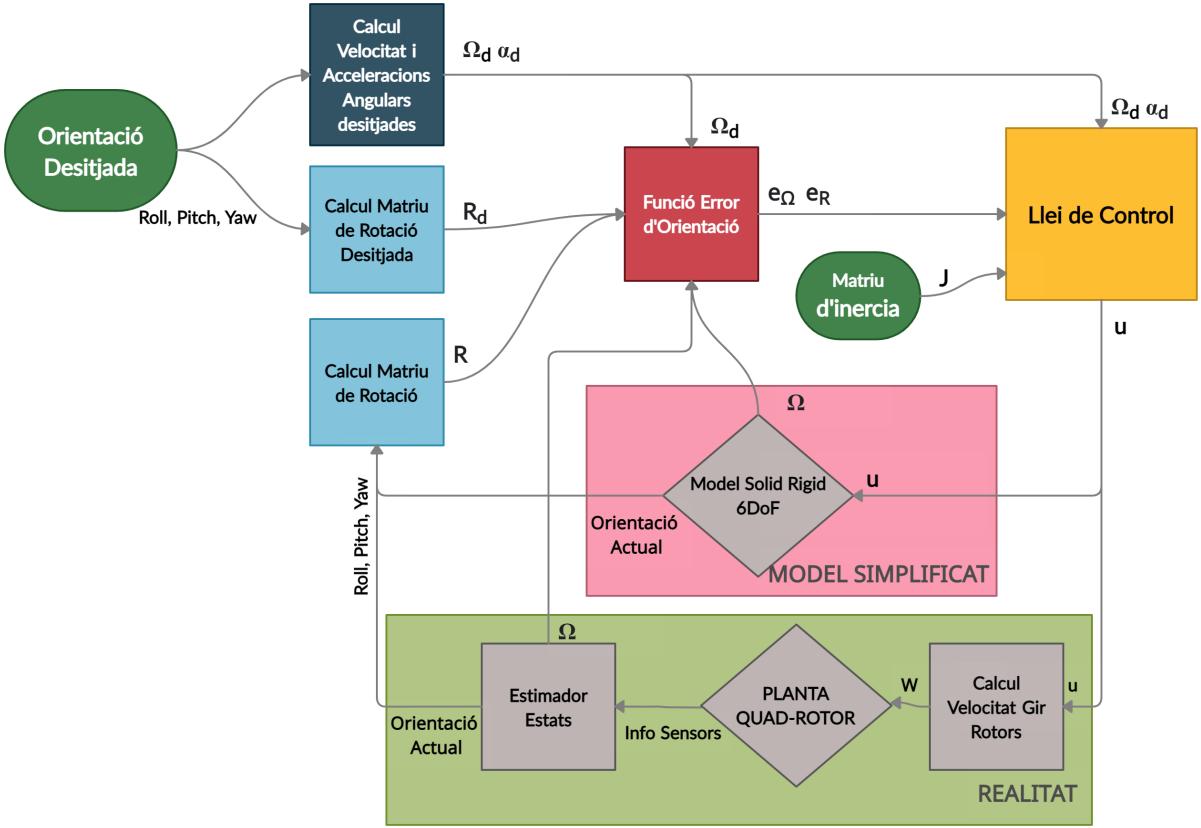


Figura 3-1: Diagrama que resumeix l'arquitectura de l'algoritme implementat.  $R_d$ : matriu de rotació desitjada.  $R$ : matriu d'orientació actual.  $\Omega_d, \alpha_d$ : velocitat i acceleració angular desitjades.  $\Omega$ : velocitat angular actual.  $u$ : moment de control.  $J$ : matriu d'inèrcia.  $W$ : velocitat de gir dels rotors.

D'altra banda en simulació, s'utilitza el model d'un solid rígid amb 6 graus de llibertat per representar el comportament de l'aeronau. Tal com s'ha explicat prèviament Eq.(2.3) Eq.(2.4) aquests cosos s'actuen a través de forces i moments. En aquest cas per tant, la comanda de control  $u$  actua directament sobre el sòlid rígid sense tenir en compte les dinàmiques pròpies d'un quad-rotor.

L'obtenció de l'orientació i velocitat angular actuals de l'aeronau ( $R, \Omega$ ) per tal de retroalimentar el controlador també varia entre el cas simulat i la realitat. En la primera situació és el propi model del solid rígid el que ens informa directament sobre l'orientació del cos, posició cartesiana o velocitats i acceleracions. En canvi en el cas real, l'estat actual s'obté gràcies a la presència de sensors (giroscopi, acceleròmetre, baròmetre, etc), que normalment van acompañats de la implementació d'un estimador

dor d'estats.

Abans de descriure matemàticament els diferents blocs que componen el sistema de control, és necessari definir un parell d'operadors que apareixeran en pròximes expressions: l'operador *hat* ( $\hat{a}$ ) i el seu oposat, l'operador *vee* ( $a^\vee$ ). L'operador *hat* transforma un vector en  $\mathbb{R}^3$  en una matriu antisimètrica  $3 \times 3 \in so(3)$  que compleix  $\hat{x}y = x \times y = -y \times x = -\hat{y}x$ , per a qualsevol  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . A mode d'exemple, per un vector  $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ , tenim que:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

D'altra banda l'operador *vee* fa exactament el contrari, transforma una matriu  $3 \times 3$  que pertany al grup  $so(3)$  en un vector  $\in \mathbb{R}^3$ .

En els pròxims subapartats es descriuran els càlculs i procediments efectuats en cada bloc del diagrama anterior ([Fig. 3-1](#)), amb l'intenció de proporcionar una explicació suficientment detallada sobre el funcionament general de l'algoritme pel control d'orientació.

## 3.1 Descripció de l'algoritme

### 3.1.1 Conversió del sistema de representació de l'orientació (Angles d'Euler $\Rightarrow$ Matriu de Rotació)

El mètode pel control d'orientació triat treballa directament en el grup SO(3), per tant és necessari parametritzar l'orientació fent ús de les matrius de rotació. Tant la comanda de l'usuari, és a dir l'orientació desitjada  $R_d$ , com l'orientació actual del cos  $R$ , es troben expressades fent servir els angles d'Euler, doncs són més intuïtius i fàcils d'interpretar que una matriu de rotació. Per transformar d'angles d'Euler a

matriu de rotació s'ha triat l'ordre 1-2-3 per les rotacions entorn a cada eix, aquesta parametrització rep el nom d'angles de Cardan (figura 3-2) [20]. En primer lloc es defineix una rotació entorn a l'eix  $Z$  un angle  $\psi$ , en segon lloc es roten els eixos resultants un angle  $\theta$  entorn l'eix  $Y$  i finalment entorn l'eix  $X$  un angle  $\phi$ . Com ja s'ha vist cada una d' aquestes 3 rotacions pot ser representada per una matriu, el conjunt de les tres rotacions successives ve donat per la matriu de rotació  $R'$  Eq.(3.2) que ens permet transformar des dels eixos fixes als eixos mòbils. Es treballa però amb la matriu inversa  $R$ , la qual realitza la transformació contraria:  $R = (R')^{-1} = (R')^T = [R_x(\phi)R_y](\theta)R_z(\psi)]^T = R_z(\psi)^T R_y(\theta)^T R_x(\phi)^T$ .

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

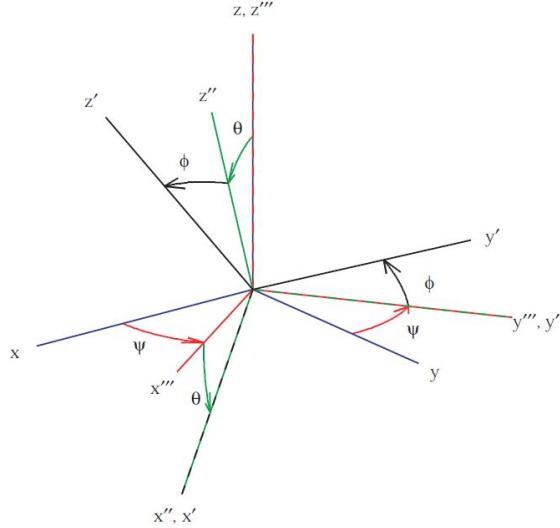


Figura 3-2: Seqüència (1,2,3) pels angles d'Euler [20].

### 3.1.2 Càcul de la velocitat i acceleració angular desitjades $(\Omega_d, \dot{\Omega}_d)$

Per calcular de forma analítica la velocitat angular desitjada  $\Omega_d$  a partir de la comanda d'orientació expressada amb angles d'Euler, seran necessaris dos elements: la derivada

respecte el temps de cada un dels angles d'Euler, en anglès aquest vector es coneix com *Euler Angles Rates* [20], i d'altra banda cal utilitzar la matriu anomenada també en anglès *Conjugate Euler Angles Rates Matrix* [20]. Aquesta matriu ens dóna la relació entre la raó de canvi temporal dels angles d'Euler i la velocitat angular. Per tant, realitzant la següent multiplicació obtenim la velocitat angular del cos respecte el seu propi eix (b):

$$\Omega^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

El calcul de l'acceleració angular desitjada  $\ddot{\Omega}_d$  un cop coneixem l'expressió per la velocitat angular desitjada  $\Omega_d$ , s'obté de forma directa a través de la seva derivada temporal:

$$\dot{\Omega}^b = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} - \ddot{\psi}s\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ \ddot{\theta}c\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}s\phi + \ddot{\psi}s\phi c\theta + \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta c\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s\phi s\theta \\ -\ddot{\theta}s\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c\phi + \ddot{\psi}c\phi c\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}c\theta s\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}c\phi s\theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En les expressions Eq.(3.3) i Eq.(3.4) no s'inclou el subíndex  $d$  doncs es tracta d'expressions generals que ens permeten obtenir tant les velocitats i acceleracions angulars desitjades ( $\Omega_d, \dot{\Omega}_d$ ) com les actuals ( $\Omega, \dot{\Omega}$ ).

### 3.1.3 Funció i vectors d'error $(\Psi, e_R, e_\Omega)$

Una de les parts més critiques a l'hora de desenvolupar un sistema de control és l'elegció d'una funció d'error  $\Psi$  adequada.  $\Psi$  és una funció que mesura l'error entre dos configuracions diferents, en aquest cas l'orientació actual  $R$  i la desitjada  $R_d$ . Una vegada triada la funció d'error cal definir un vector d'error de velocitat  $e_\Omega$  i un vector d'error de configuració o orientació  $e_R$ , els quals són obtinguts a través de les derivades de la funció d'error [23]. Si ens acollim a la definició formal de la derivada, aquests vectors d'error es troben a l'espai tangent de la funció  $\Psi$ . El disseny de la comanda de control  $u$  es realitza de forma similar a com es fa en altres sistemes de

control no-lineals en espais Euclidians<sup>1</sup>: s'escriu en base als vectors d'error de velocitat i orientació  $e_\Omega$ ,  $e_R$  i a través d'un anàlisi d'estabilitat de Lyapunov<sup>2</sup>, que inclou la dinàmica del sistema, es garanteix que l'error  $\Psi$  tendeix a zero i que el sistema és exponencialment estable [22]. Per tant el rendiment i l'efectivitat de l'algoritme estan directament relacionats amb la correcta elecció de la funció d'error  $\Psi$ .

En algunes implementacions ja existents que busquen l'estabilització del sistema, no es dóna tanta importància a l'elecció de la funció d'error. En [23][24] s'utilitza la funció de l'equació Eq.(3.5), on  $I$  (matriu identitat) representa l'orientació desitjada ( $roll = 0$ ,  $pitch = 0$ ,  $yaw = 0$ ),  $e'_\Omega = \Omega$  i  $e'_R = (R - R^T)^\vee$ . En aquest cas la comanda de control  $u$  es dissenya seguint l'estructura d'un controlador PD convencional Eq.(3.6).

$$\Psi'(I, R) = \frac{1}{2} \text{tr}[I - R] \quad (3.5)$$

$$u' = -K_R e'_R - K_\Omega e'_\Omega \quad (3.6)$$

En controladors d'aquests tipus,  $e'_R$  no és proporcional a l'angle de rotació entre l'orientació actual  $R$  i la desitjada  $R_d$ , de manera que quan l'orientació actual s'apropa a l'oposada de la identitat ( $180^\circ$  de rotació respecte  $I$ ), la magnitud de l'error d'orientació  $\|e'_R\|$  tendeix a 0. Aquest tipus de controladors doncs, perden eficàcia a mesura que l'error inicial és va fent gran. La solució proposada en aquest treball basada en [22] busca evitar aquestes limitacions.

A continuació es mostren les expressions per la funció d'error  $\Psi$  Eq.(3.7), el vector d'error de configuració  $e_R$  Eq.(3.8) i el vector d'error de velocitat  $e_\Omega$  Eq.(3.9) implementats en aquest treball:

$$\Psi(R, R_d) = 2 - \sqrt{1 + \text{tr}[R_d^T R]} \quad (3.7)$$

---

<sup>1</sup>Espai fonamental de la geometria clàssica.

<sup>2</sup>Forma genèrica per analitzar l'estabilitat d'un sistema a través de la construcció d'una funció de Lyapunov.

$$e_R(R, R_d) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}[R_d^T R]}} (R_d^T R - R^T R_d)^\vee \quad (3.8)$$

$$e_\Omega(R, \Omega, R_d, \Omega_d) = \Omega - R^T R_d \Omega_d \quad (3.9)$$

Com ja s'ha comentat, la derivació de les equacions Eq.(3.8) i Eq.(3.9) no és evident, i cal recórrer a les derivades de  $\Psi$ . No és l'objectiu d'aquest treball proporcionar una explicació detallada sobre el calcul d'aquestes magnituds, a la publicació de referència [22] es dóna més informació sobre l'obtenció d'aquestes expressions.

A diferència del que s'ha vist per Eq.(3.5), en aquest cas  $e_R$  Eq.(3.8) sí que és proporcional a la rotació entorn a l'eix d'Euler entre l'orientació actual  $R$  i desitjada  $R_d$ . Això implica una millora del rendiment quan l'error inicial creix.

Inicialment  $R_d$  però, no pot tenir qualsevol valor sinó que existeixen certes limitacions pel que fa a les condicions inicials, el que implica que la funció  $\Psi$  no sigui diferenciable en certs punts. Concretament quan la diferencia entre  $R_d$  i  $R$  està representada per una rotació de  $180^\circ$ , succeïx que  $\text{tr}[R_d^T R] = -1$ . Al avaluar la funció d'error sota aquesta condició obtenim  $\Psi = 2$ . D'altra banda quan  $R_d = R$ , és a dir quan l'orientació actual coincideix amb la desitjada, succeïx que  $\text{tr}[R_d^T R] = 3$ , i al avaluar aquesta condició a la funció d'error obtenim  $\Psi = 0$ . Per tant podem deduir que  $\Psi$  es troba delimitada entre 2 i 0 ( $0 \leq \Psi < 2$ ), i la funció serà diferenciable per errors inicials entre  $0^\circ$  (inclòs) i  $180^\circ$  (no inclòs). Podem establir doncs, que les orientacions desitjada  $R_d$  i actual  $R$ , pertanyen a un subconjunt que anomenem  $L_2$  i que podem definir de la següent manera:

$$L_2 = \{R, R_d \in SO(3) | \Psi(R, R_d) < 2\} \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Llei de control ( $u$ )

El disseny de la comanda de control  $u$  està directament lligat amb la dinàmica de l'error entre l'estat actual i desitjat, o dit d'una altra manera, amb l'evolució temporal de  $\Psi$ . La dinàmica de l'error d'orientació queda resumida amb les equacions Eq.(3.11)

i Eq.(3.12).

$$\frac{d}{dt}(\Psi(R, R_d)) = e_R e_\Omega \quad (3.11)$$

$$J\dot{e}_\Omega = (Je_\Omega + d)^\vee e_\Omega - (R^T R_d \Omega_d)^\vee J R^T R_d \Omega_d - J R^T R_d \dot{\Omega}_d + u \quad (3.12)$$

$$d = (2J - \text{tr}[J]I)R^T R_d \Omega_d \quad (3.13)$$

Com ja s'ha comentat  $u$  es construeix de manera que es garanteixi l'estabilitat de Lyapunov i per tant la funció  $\Psi$  i els corresponents vectors d'error  $e_R$  i  $e_\Omega$  acabin decaient a zero. L'expressió pel moment o parell de control  $u$  ens permet actuar sobre el cos de manera que aquest segueixi la comanda d'orientació  $R_d$ . Utilitzant les constants  $k_R$  i  $k_\Omega$  definides positivament, podem expressar la comanda o llei de control  $u \in \mathbb{R}^3$  com:

$$u = -k_R e_R - k_\Omega e_\Omega + (R^T R_d \Omega_d)^\vee J R^T R_d \Omega_d + J R^T R_d \dot{\Omega}_d \quad (3.14)$$

Si substituïm Eq.(3.14) a Eq.(3.12) es pot deduir com la velocitat actual tendeix a la desitjada ( $\Omega \rightarrow \Omega_d$ ). A la publicació de referència [22] és demostra l'estabilitat del sistema per mitjà d'un anàlisis de Lyapunov.

## 3.2 Sistema de control adaptatiu

El correcte funcionament del controlador prèviament exposat, depèn completament del model i les seves dinàmiques, tal i com es pot veure a Eq.(3.14) la comanda de control  $u$  incorpora el terme d'inèrcia  $J$ . Aquest terme és molt difícil de conèixer amb exactitud en un quad-rotor real on hi trobem cables, unions de peces i altres elements que habitualment sofreixen modificacions i per tant introduceixen incerteses en el calcul d'inèrcia. A més un canvi en la massa de la nau, per exemple posant una bateria més gran, també afegiria incerteses. És per aquest motiu que seria erroni assumir que la tècnica de control desenvolupada serà valida per tots els casos. D'altra banda, també és important entendre que no tot els moments de la comanda de control

$u$  seran reproduïbles a l'instant, doncs les limitacions físiques dels actuadors i les seves dinàmiques limitaran l'acció de control.

L'objectiu d'aquest apartat és ampliar el sistema de control ja implementat, per tal que pugui estimar i contrarestar pertorbacions i incerteses, dotant-lo així d'una major robustesa. Aquest tipus d'estrategies de control reben el nom de control adaptatiu.

El funcionament d'aquest tipus d'algoritmes es basa en simular un model de referència ideal, sense pertorbacions ni incerteses, i a partir de les diferències entre el sistema real i el de referència es fa una predicción i correcció de les pertorbacions que afecten al sistema. Cal a més diferenciar entre l'adaptació i el control. L'adaptació serveix per alimentar el model de referència amb la predicción de la pertorbació, per tal que aquest es comporti el més similar possible al sistema real. D'altra banda el control pretén contrarestar la pertorbació, i per tant actuarà tant sobre la referència com sobre el sistema real. Si les accions de control es realitzen a la mateixa freqüència que l'adaptació, es possible que el sistema es desestabilitzi, per aquest motiu el control i l'adaptació es desacoblen per mitjà d'un filtre passa-baixos. D'aquesta manera eliminem de l'acció de control les components amb freqüència elevada provinents de l'adaptació. Aquests són els principis del treball triat com a referència [25], on s'utilitza la teoria del control adaptatiu L1 per derivar les accions de control.

La figura Fig. 3-3 mostra un diagrama que resumeix l'estructura i funcionament del controlador adaptatiu.

Els dos primers blocs A i B s'encarreguen de generar les comandes de control necessàries per tal de seguir l'orientació desitjada  $R_d$ . El bloc C representa la part de l'algoritme on es compara el model de referència i el sistema real, es defineix una funció d'error i es realitza la predicción de la pertorbació. Per diferenciar els termes de cada bloc es fan servir els següents superíndex: "r" per la referència, "a" pel bloc on es realitza la predicción i els termes sense superíndex fan referència al sistema real.

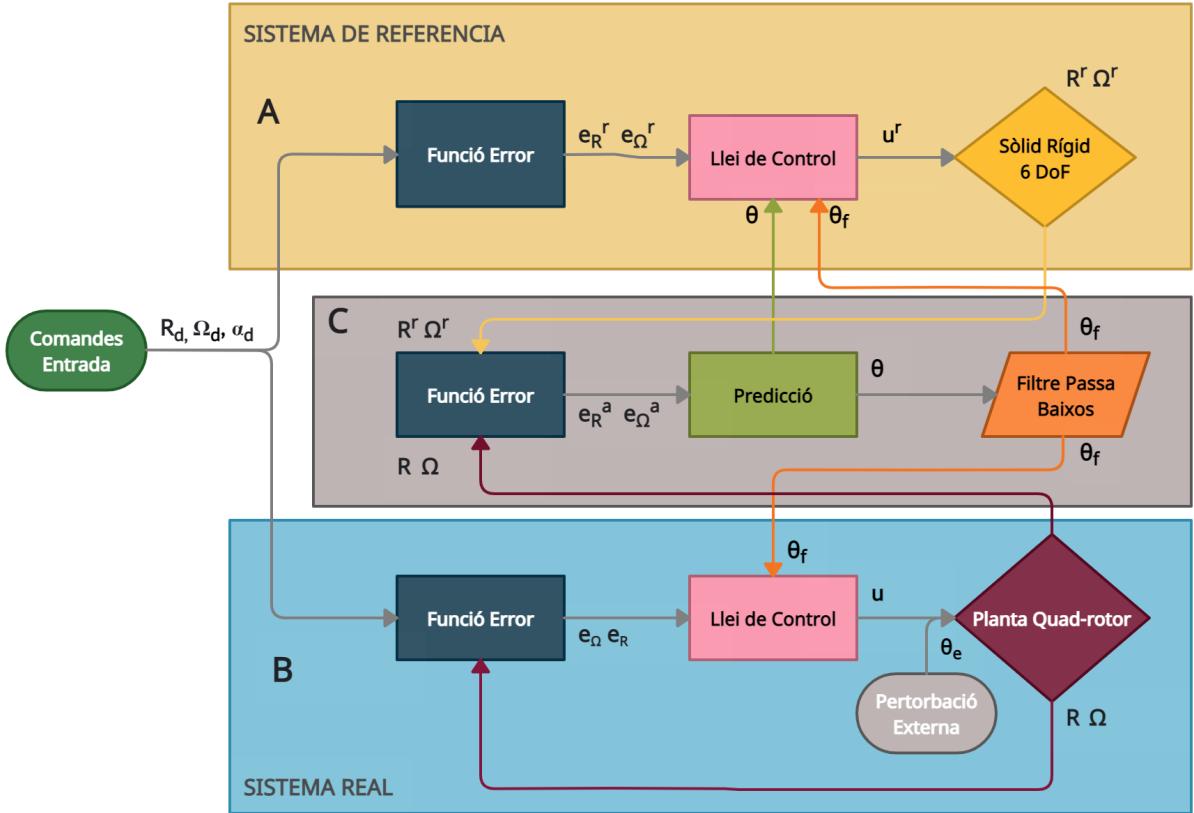


Figura 3-3: Diagrama que resumeix l'arquitectura del controlador adaptatiu.  $R_d$ : matriu de rotació desitjada.  $\Omega_d$ ,  $\alpha_d$ : velocitat i acceleració angular desitjades.  $\Omega$ : velocitat angular actual.  $u$ : moment de control.  $w$ : velocitat de gir dels rotors.  $\theta$ : predicció de la pertorbació.  $\theta_f$ : predicció de la perturbació filtrada.

### 3.2.1 Efecte de les perturbacions i incerteses del model sobre la dinàmica de l'orientació

Les incerteses amb les que ens podem trobar al treballar amb el model d'un quadroto es concentren en la matriu d'inèrcia i la massa. Quan es desenvolupa un sistema de control que necessita de la inèrcia per generar la comanda de control, es necessari estimar amb la major precisió possible aquesta magnitud. Tot i així es impossible conèixer de manera exacta el valor del tensor d'inèrcia, i això es tradueix en la presència d'una incertesa en el sistema, que en alguns casos pot arribar a comprometre el seu funcionament. D'altra banda la presència de perturbacions externes fa referència a tots aquells factors que poden induir un cert moment sobre el cos, per

exemple una rafega de vent, o la presència d'una massa puntual situada fora del CoM (aquest cas a més també modificaria la inèrcia del cos).

Les pertorbacions i incerteses es poden introduir en l'equació (2.5) de la dinàmica d'orientació de la següent manera:

$$\bar{J}\dot{\Omega}^b = -\Omega^b \times \bar{J}\Omega^b + \tau_{ext}^b + \theta_e \quad (3.15)$$

On  $\theta_e$  és el terme que inclou tant la pertorbació de moment externa com els errors del model, i  $\bar{J}$  és la matriu d'inèrcia real de valor desconegut.

### 3.2.2 Model de referència

Els mètodes de control adaptatiu utilitzen el model de referència per predir la pertorbació, aquest no rep cap tipus de pertorbació externa i genera les comandes de control necessàries per fer que el model del sòlid rígid segueixi la comanda d'orientació desitjada  $R_d$ . La funció d'error  $\Psi^r$  i els vectors d'error de velocitat  $e_\Omega^r$  i orientació  $e_R^r$  es calculen a partir de les equacions descrites en apartats previs en aquest mateix capítol Eq.(3.7), Eq.(3.8), Eq.(3.9).

La comanda de control  $u^r$  generada en aquest bloc ve donada per les equacions següents:

$$u^r = \mu^r + (\Omega^r \times J\Omega^r) - J(\hat{\Omega}^r(R^r)^T R_d \Omega_d - (R^r)^T R_d \dot{\Omega}_d) \quad (3.16)$$

$$\mu^r = \mu_1^r + \mu_2^r \quad (3.17)$$

$$\mu_1^r = -k_R^r e_R^r - k_\Omega^r e_\Omega^r \quad (3.18)$$

$$\mu_2^r = J(R^r)^T R J^{-1} R^T R^r \theta - C(s) \theta \quad (3.19)$$

Aquesta comanda de control  $u^r$  està dissenyada per fer que el model de referència segueixi l'orientació desitjada ( $e_R^r, e_\Omega^r \rightarrow 0$ ).  $u^r$  inclou a més, d'una banda la predicció sense filtrar  $\theta$  per tenir en compte la pertorbació que pateix el model real (adaptació), i

d'altra banda la predicción filtrada  $C(s)\theta$  per contrarestar aquesta mateixa perturbació Eq.(3.19) (control). L'objectiu per tant d'aquest bloc és simular amb el menor error possible el comportament del model real.

### 3.2.3 Error entre model real i model de referència

El bloc C és el més característic dels sistemes de control adaptatiu. Mentre que el model de referència s'encarrega de generar les comandes per seguir l'orientació desitjada, el control adaptatiu busca reduir les diferencies entre la referència i el model real, per tal que aquest segueixi l'orientació desitjada gràcies a imitar la referència amb el menor error possible.

Per capturar les diferencies entre els dos models es defineix d'una banda una nova funció d'error  $\Psi^a$  Eq.(3.20) i d'altra banda, a partir de les seves derivades, es defineixen també els vectors d'error de velocitat  $e_\Omega^a$  Eq.(3.21) i orientació  $e_R^a$  (3.22). L'objectiu del control adaptatiu es disminuir el màxim possible el valor d'aquests vectors d'error.

$$\Psi^a = \frac{1}{2} \text{Trace}[I - R^T R^r] \quad (3.20)$$

$$e_\Omega^a = \Omega^r - (R^r)^T R \Omega \quad (3.21)$$

$$e_R^a = \frac{1}{2}(R^T R^r - (R^r)^T R)^\vee \quad (3.22)$$

En aquest mateix bloc s'estima també el valor de la perturbació externa  $\theta_e$ . Per realitzar la predicción d'aquesta magnitud es fa ús de l'operador projecció [26], aquest operador d'una manera simplificada s'encarrega de mantenir el valor d'un cert paràmetre  $\theta$  que es pretén estimar dins d'uns certs límits  $\theta_{max}$ .

L'expressió per l'operador projecció en aquest cas és la següent:

$$Proj_\Gamma = \begin{cases} \Gamma y - \Gamma \frac{\nabla f(\theta)(\nabla f(\theta))^T}{(\nabla f(\theta))^T (\nabla f(\theta))} \Gamma y f(\theta) & si \quad f(\theta) > 0 \wedge y^T \Gamma \nabla f(\theta) > 0 \\ \Gamma y & resta \end{cases} \quad (3.23)$$

$$f(\theta) = \frac{\|\theta\|^2 - (\theta_{max} - \epsilon)^2}{2\epsilon\theta_{max} - \epsilon^2} \quad (3.24)$$

$f(\theta) : R^3 \rightarrow R$  és una funció convexa,  $\Gamma$  és una constant i  $y$  és una funció que queda definida de la següent manera:

$$y = -(P^T e_\Omega^a + c P^T J^{-1} e_R^a) \quad (3.25)$$

$$P = J(R^r)^T R J^{-1} R^T R^r \quad (3.26)$$

Fent ús doncs de l'operador projecció obtenim una predicció  $\theta$  de la pertorbació externa  $\theta_e$ .

L'últim pas d'aquest bloc és l'aplicació d'un filtre passa-baixos de primer ordre amb  $\|C(0)\| = 1$  i definit amb la següent expressió:

$$C(s) = \frac{a}{s + a} \quad (3.27)$$

La presència d'aquest filtre és clau per obtenir un equilibri entre rendiment i robustesa.

### 3.2.4 Model real

En el model real (B) es defineixen una funció  $\Psi$  i vectors d'error  $e_R$   $e_\Omega$  respecte a l'orientació desitjada, que de nou, venen donats per les equacions (3.7), (3.8) i (3.9). En aquest cas però, la comanda de control  $u$  es dissenya per tal de que el model real segueixi el model de referència ( $e_R^a, e_\Omega^a \rightarrow 0$ ). Per aquest motiu veurem com en l'expressió de  $u$  apareixen els vectors d'error  $e_\Omega^a$  i  $e_R^a$  entre el model real i la referència.

$$u = \mu + (\Omega \times J\Omega) - J(\hat{\Omega}R^T R_d \Omega_d - R^T R_d \dot{\Omega}_d) \quad (3.28)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad (3.29)$$

$$\mu_1 = JR^T R^r J^{-1}(\mu_1^r - C(s)\theta + K_R^a e_R^a + k_\Omega^a e_\Omega^a) \quad (3.30)$$

$$\mu_2 = JR^T R^r \hat{e}_\Omega^a (R^r)^T R e_\Omega \quad (3.31)$$

Igual que al model de referència, apareix el terme per la predicció filtrada  $C(s)\theta$ , aquest s'inclou per contrarestar la pertorbació de moment  $\theta_e$ , que en aquest cas prové d'un factor extern desconegut pel controlador, i com ja s'ha vist afecta a la dinàmica del sistema com es mostra l'equació (3.15).

En el pròxim capítol es valida i comprova experimentalment el correcte funcionament dels algoritmes descrits per mitja de diferents simulacions, utilitzant diferents senyals per a l'orientació desitjada i diferents tipus de perturbacions i incerteses pel cas del control adaptatiu.

# Capítol 4

## Resultats i validació numèrica

En aquest quart capítol es proporcionen exemples numèrics i les pertinents simulacions, per tal de validar el correcte funcionament dels algoritmes prèviament exposats.

En primer lloc es mostra el funcionament del controlador en un escenari de simulació simplificat on no és consideren les dinàmiques del quad-rotor. Seguidament un segon bloc de simulacions on sí que s'ha introduït el model i dinàmiques del quad-rotor, per tal d'apropar-se al màxim possible al cas real. I per acabar es validarà també sobre un model simplificat l'algoritme de control adaptatiu, i es mostraran alguns exemples del seu funcionament i limitacions sobre un model complet amb diferents tipus de pertorbacions.

Els paràmetres del quad-rotor són els següents: massa = 1.129 kg,  $d = 17.5$  cm,  $J = diag[6.968, 6.211, 10.34] \times 10^{-3} Kg \cdot m^2$ , corresponents al model *Autel X-star* utilitzat a [25]. Les constants per les comandes de control són:  $k_\Omega = 8.4$ ,  $k_R = 12$ . I pel cas del control adaptatiu les constants són:  $k_R^r = k_R^a = k_R = 2$ ,  $k_\Omega^r = k_\Omega^a = k_\Omega = 0.25$ . Pel filtre passa-baixos s'estableix  $a = 2$ .

Per realitzar les simulacions s'ha fet servir el software Matlab, i més concretament l'eina Simulink, que ens permet treballar de forma esquemàtica i visual, facilitant el disseny i implementació dels algoritmes.

## 4.1 Model simplificat

Per tal de comparar els resultats amb el que es mostra a [22] i comprovar que l'algoritme implementat funciona correctament calculant els moment necessaris per seguir la trajectòria desitjada, es fa servir un model simplificat on l'aeronau i les seves dinàmiques queden representades per un sòlid rígid amb 6 graus de llibertat. Matlab inclou un bloc anomenat *6DOF* que pertany a la llibreria *Aerospace Blockset* que ens permet directament simular les dinàmiques d'un sòlid rígid. El bloc rep com a paràmetres d'entrada el sumatori de forces i moments que s'apliquen al centre de masses. En aquest cas per tant, la comanda de control  $u$  servirà com a entrada per aquest bloc. A la sortida, el bloc proporciona totes les variables d'estat que caracteritzen el cos i ens permeten retroalimentar l'algoritme (orientació, posició, velocitats, acceleracions, etc). La figura Fig. 4-1 mostra com s'ha fet la implementació d'aquest model en Simulink.

**Comanda d'Orientació      Controlador d'Orientació**

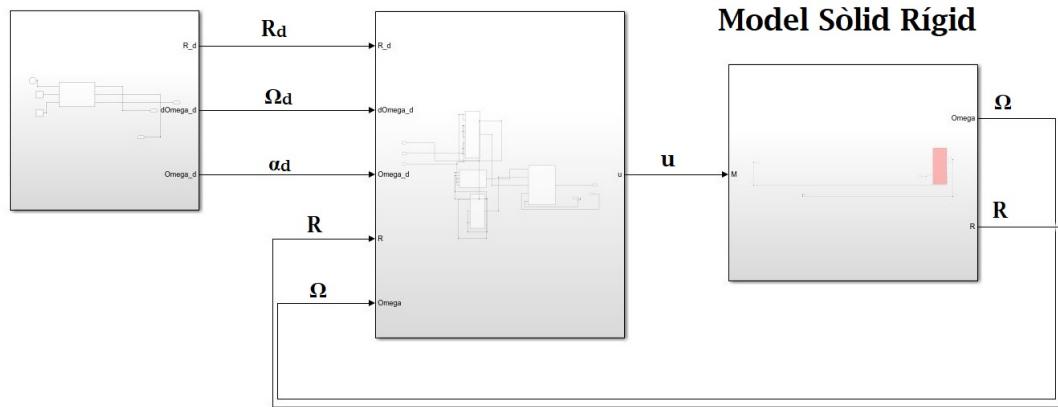


Figura 4-1: Model sense dinàmiques de quad-rotor, implementat a Simulink per validar el funcionament del controlador d'orientació.

Per realitzar les simulacions s'han triat diferents tipus de comandes d'entrada per l'orientació desitjada. S'han escollit comandes fixes, és a dir, que no varien amb el temps i altres que sí tenen una dependència temporal. Es tria com a orientació inicial

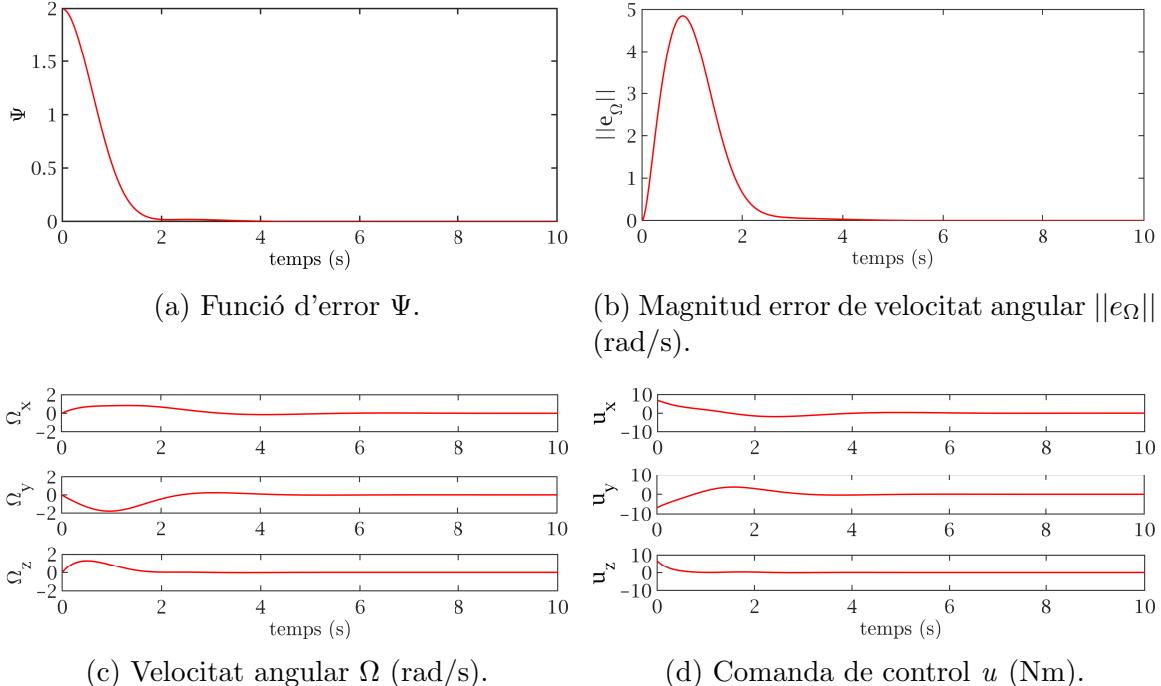


Figura 4-2: Resposta de l'algoritme sobre el model d'un sòlid rígid, amb una comanda d'orientació fixa.

del sòlid:  $\phi(0) = \theta(0) = \psi(0) = 0$  ( $R_d = I$ ), per tant una comanda d'orientació fixa no nul·la, implicarà que el controlador haurà de corregir un cert error inicial. El parell calculat serà proporcional a aquest error, i portarà el cos a la orientació desitjada, disminuint així el valor de la funció d'error fins a 0. Com ja s'ha comentat en el capítol anterior, aquest error inicial no podrà ser igual o superior a 2 (diferència de  $180^\circ$ ). La velocitat i acceleració angular inicials del cos són nul·les.

Com a comanda fixa es tria la mateixa que s'utilitza a la referència [22], la qual implica un error inicial equivalent a una rotació de  $179.82^\circ$ . L'expressió per aquesta orientació desitjada queda definida de la següent manera:

$$R_d = \exp(0.999\pi\hat{s}), s = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1] \quad (4.1)$$

A la figura Fig. 4-2 es mostren els resultats de les simulacions per aquesta comanda. En aquest cas, al no existir una dependència temporal ( $R_d(t) = \text{constant}$ ), la velocitat

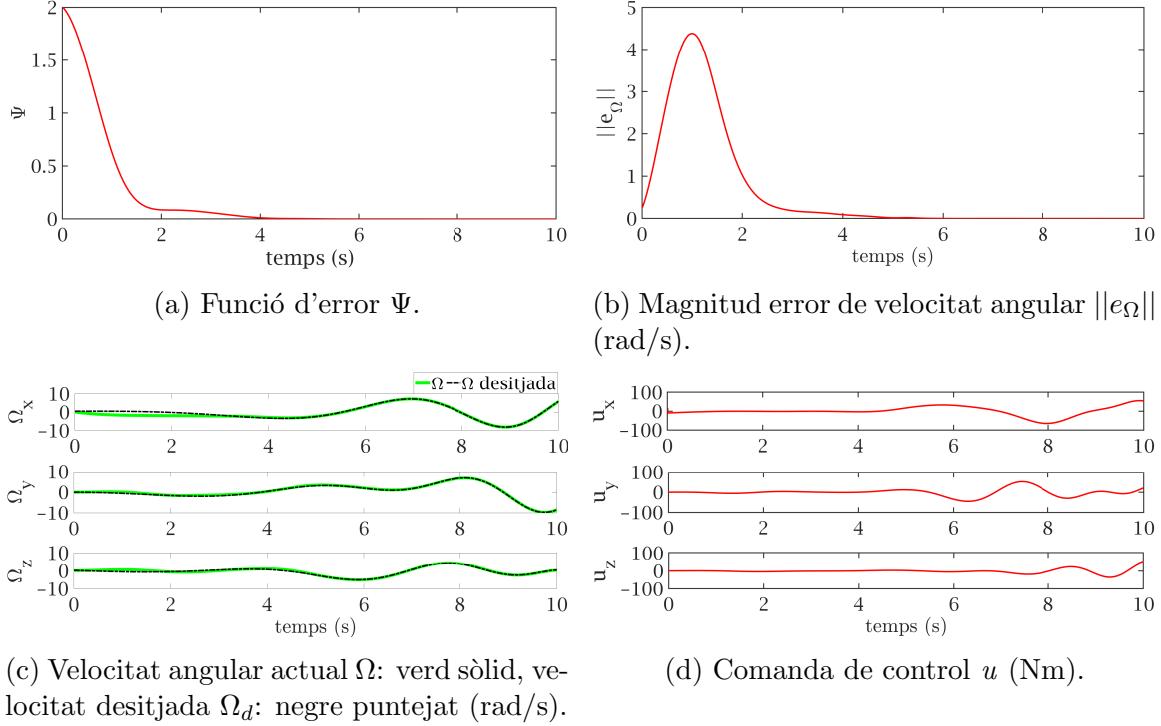


Figura 4-3: Resposta de l'algoritme sobre el model d'un sòlid rígid amb una comanda d'orientació variable.

$\Omega_d$  i acceleració  $\dot{\Omega}_d$  desitjades són nul·les i per tant tots els termes de la comanda  $u$  (Eq.(3.14)) que inclouen la matriu d'inèrcia, queden cancel·lats.

El cas més interessant i on es troben la majoria d'aplicacions, correspon a una comanda variable en el temps. De nou, es tria com a orientació desitjada la mateixa que s'utilitza a la referència [22] Eq.(4.2). Aquesta comanda inclou, a més d'una dependència temporal, un error inicial equivalent a una rotació de  $179.82^\circ$ , igual que pel cas anterior. A les figura Fig. 4-3 es mostren els resultats d'aquesta simulació.

$$R_d(t) = R_d(\phi(t), \theta(t), \psi(t)) = (0.999\pi + 0.5t, 0.1t^2, -0.2t + 0.5t^2) \quad (4.2)$$

Si observem els resultats de les simulacions anteriors podem veure que, tant per la comanda d'orientació fixa (Fig. 4-2), com per la comanda amb dependència temporal (Fig. 4-3), la funció d'error  $\Psi$  inicialment es troba al seu valor màxim i disminueix fins arribar a 0 corregint així l'error inicial. De manera similar, l'error en velocitat  $e_\Omega$

començà a 0 ( $\Omega(0)_d = \Omega(0) = 0$ ) i augmenta fins a un valor màxim i a mesura que  $\Psi$  disminueix  $e_\Omega$  acaba també tendint a 0. Pel cas amb dependència temporal, un cop corregit l'error inicial, l'algoritme és capaç de fer que el cos segueixi en tot moment la comanda d'orientació ( $R \rightarrow R_d$ ), mantenint l'error  $\Psi$  a 0 i imitant la velocitat angular desitjada ( $\Omega \rightarrow \Omega_d$ ) (Fig. 4-3c i Fig. 4-3b).

Si es comparen els resultats mostrats en aquest primer bloc de simulacions amb els que es mostren a [22], es pot veure que coincideixen i per tant podem confirmar que la implantació feta és valida.

## 4.2 Model amb dinàmiques de quad-rotor

En aquest segon bloc de simulacions s'afegeix sobre el model anterior Fig. 4-1, el càlcul de velocitat dels motors, el controlador de velocitat i la resposta dels motors Fig. 4-4. D'aquesta manera es pretén demostrar l'eficàcia del controlador proposat introduint les dinàmiques d'un quad-rotor. És important mencionar que els paràmetres i models afegits no tenen perquè coincidir amb els de la plataforma real, tot i això ens permeten validar el funcionament de l'algoritme respecte al model simplificat previ.

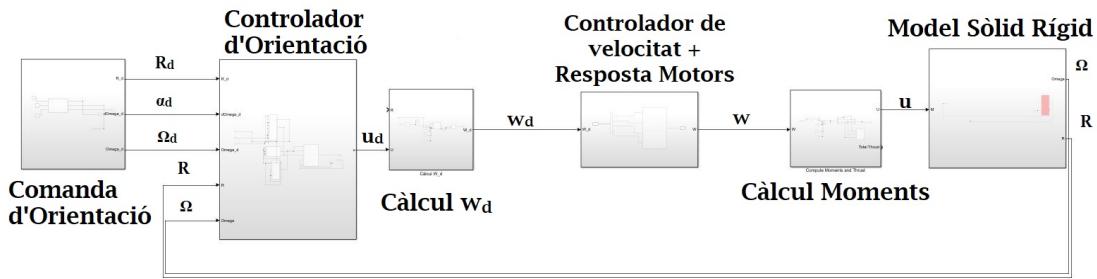


Figura 4-4: Implementació en Simulink del controlador d'orientació, introduint dinàmiques de quad-rotor amb control i resposta dels motors. El calcul de  $\omega_d$  ( $W$  a la figura) ve donat per Eq.(4.3), el control i resposta dels motors correspon a Fig. 4-5 i el càlcul de moments ve donat per Eq.(2.16).

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_F & K_F & K_F & K_F \\ 0 & K_F r & 0 & -K_F r \\ -K_F r & 0 & K_F r & 0 \\ -K_M & K_M & -K_M & K_M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Per calcular la velocitat de gir desitjada pels motors es fa servir l'equació Eq.(2.16) i s'aïlla el vector de velocitats angulars, quedant així l'expressió Eq.(4.3). Per construir el vector d'entrada de l'equació anterior, a més dels moments entorn a cada eix, que venen donats per la comanda de control  $u$ , és necessari definir també el valor de *thrust* total generat pels 4 motors ( $F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ ). Com que no s'ha implementat una estratègia pel control d'altitud, es decideix que el quad-rotor es mantingui en una altura constant, per tant la força generada pels 4 motors haurà de compensar el pes de l'aeronau. El vector de *thrust* es calcula de tal manera que la seva projecció sobre l'eix vertical de referència iguali la magnitud del pes del dron ( $m \cdot g$ ). Un cop s'han calculat les velocitat de gir desitjades  $\omega_d$ , aquestes serviran com a entrada pel controlador de velocitat de cada motor. Fent ús de la funció de transferència Eq.(2.23) per retroalimentar un controlador PID, es calcula el voltatge que cal aplicar al motor en tot moment per tal que aquests giri a la velocitat d'desitjada Eq.(4.3). La següent figura mostra com s'ha fet la implementació del controlador de velocitat descrit:

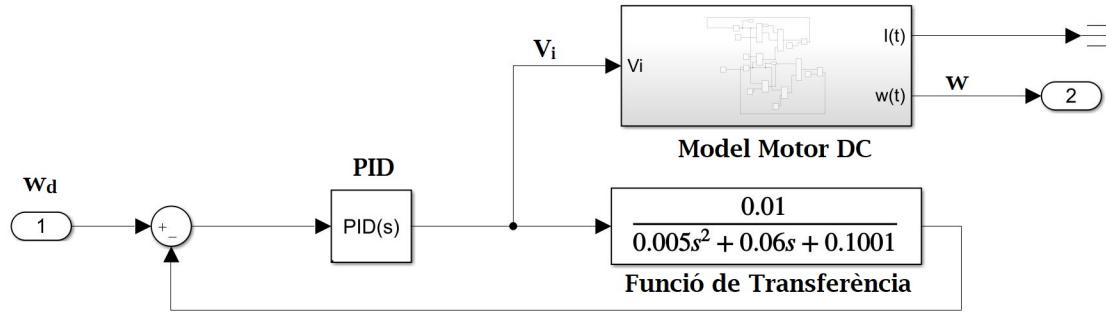
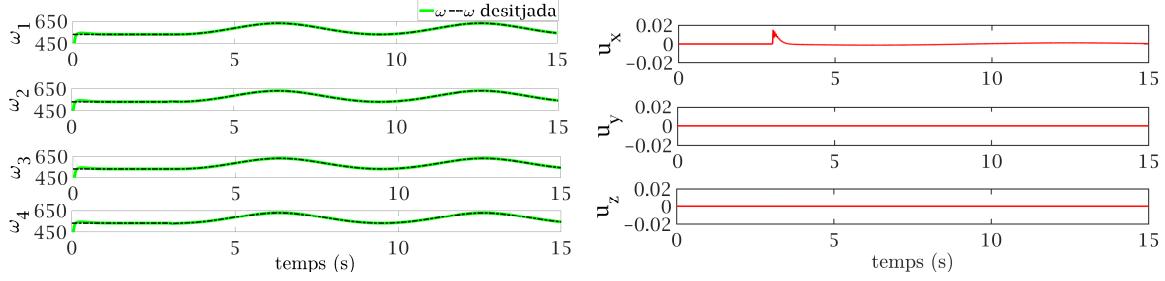
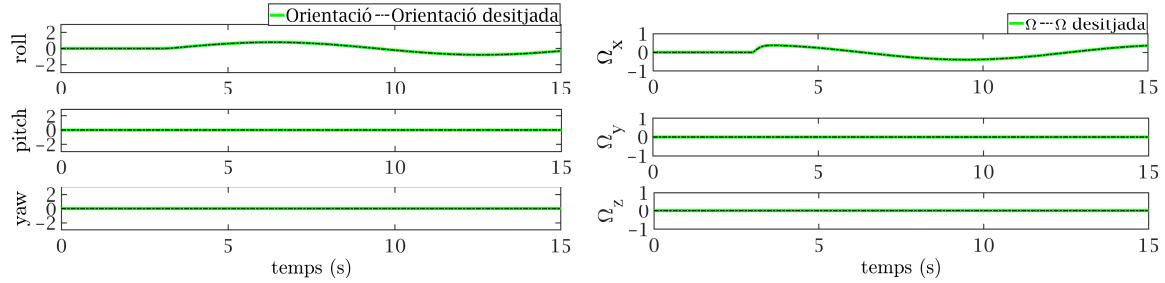


Figura 4-5: Implementació en Simulink del controlador de velocitat.  $\omega_d$  ( $W_d$  a la figura): velocitat del motor desitjada.  $\omega$  ( $W$  a la figura): velocitat actual de motor.  $V_i$ : Voltatge instantani aplicat.



(a) Velocitat de gir de cada motor, valor actual: verd sòlid, valor desitjat: negre puntejat (rad/s).

(b) Comanda de control  $u$  (Nm).



(c) Valor de  $roll$   $pitch$  i  $yaw$  actual: verd sòlid, desitjat: negre puntejat (rad).

(d) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).

Figura 4-6: Simulació per validar el correcte funcionament del model incloent les dinàmiques d'un quad-rotor i dels motors.

Amb la resposta de velocitat dels motors, tornem a utilitzar l'equació Eq.(2.16), aquest cop de forma directa, per calcular els moments entorn a cada eix ( $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$ ), i seran aquests parells els que serviran com a senyal d'entrada pel model del sòlid rígid que simula el comportament de l'aeronau. El comportament del model del motor no és ideal i la velocitat obtinguda a cada moment  $\omega$  no sempre coincideix amb la demandada  $\omega_d$ , a la figura Fig. 4-7 és pot veure com en alguns moments les velocitats calculades i actuals no coincideixen. Per aquest mateix motiu els moments calculats amb les velocitats de sortida del motors, no sempre coincidiran amb els moments calculats pel controlador. Aquest fet introduceix uns errors en el sistema similars als que trobaríem en una plataforma real. Per mostrar el correcte funcionament del model del quad-rotor i dels motors, així com del controlador de velocitat implementat, es tria una comanda d'orientació  $R_d$  nul·la, es a dir es pretén mantenir el dron en estat de *hover* durant 3 segons, i passat aquest temps la comanda d'orientació avança en  $\phi$  fins a  $45^\circ$  i torna a 0 descrivint una funció sinusoidal Eq.(4.4), mentre que es

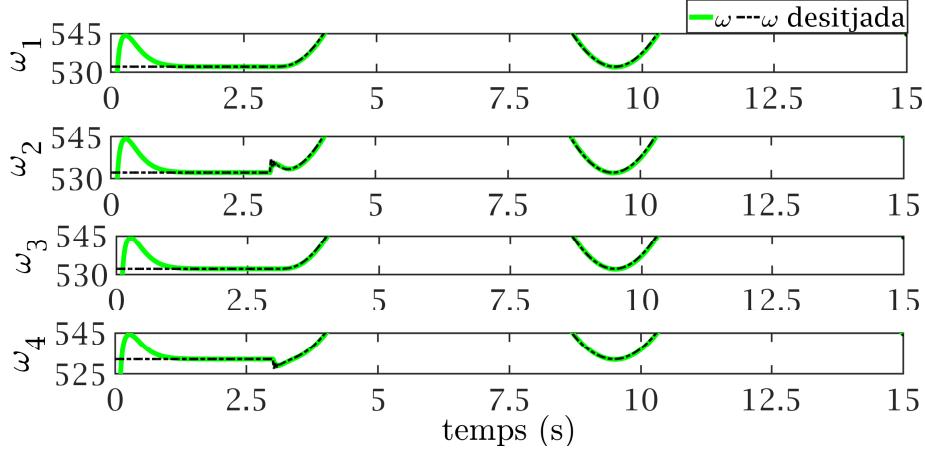


Figura 4-7: Ampliació de la figura Fig. 4-6a on és pot observar com a l'instant  $t=3s$  el motor 2 accelera i el 4 desaccelera per generar un moment sobre l'eix  $X$ .

manté a  $0^\circ$  per *pitch* i *yaw* ( $\theta(t) = \psi(t) = 0$ ). Per construir la matriu de rotació desitjada  $R_d$  s'utilitza Eq.(3.2).

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ 45(2\pi/360)\sin(0.5(t - 3)) & \text{si } t > 3 \end{cases} \quad (4.4)$$

Com es pot veure a la figura Fig. 4-6a, la velocitat calculada per a cada motor en *hover* és idèntica i la resposta dels motors s'ajusta al comportament desitjat, el que resulta en un moment nul per a cada eix, mantenint així l'orientació del dron fixa i coincident amb l'orientació desitjada (Fig. 4-6c), es manté doncs l'error  $\Psi$  a 0. Un cop passats 3 segons, la comanda avança positivament en  $\phi$ , i segons l'equació Eq.(2.12) per generar un moment sobre l'eix  $X$  el motor 2 ha de generar més força que el 4. Al gràfic Fig. 4-7 es pot observar amb més detall com a l'instant  $t = 3s$ , de manera puntual, el segon motor augmenta la seva velocitat i el quart motor la disminueix, generant un petit moment en  $X$  (Fig. 4-6b) aconseguint així un moviment de *roll* positiu que segueix la comanda d'orientació i de velocitat (Fig. 4-6c i Fig. 4-6d).

La següent comanda d'orientació és similar a l'anterior, però ara el moviment serà en *roll*, *pitch* i *yaw* simultàniament i des del primer instant Eq.(4.5). En aquest cas però, l'orientació inicial del dron es troba rotada en *roll* respecte a l'origen ( $R_d(0) =$

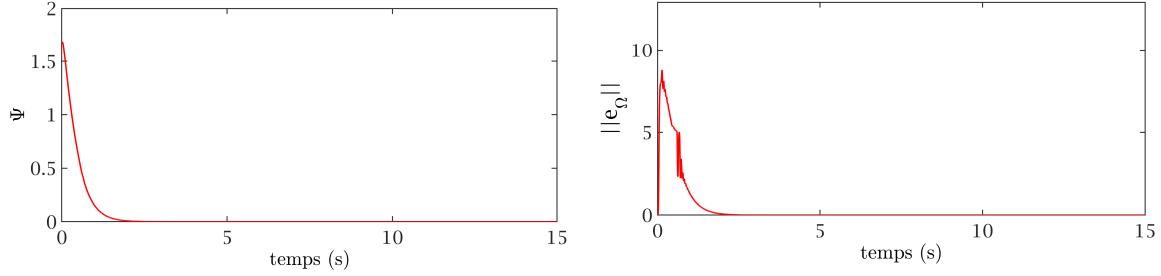
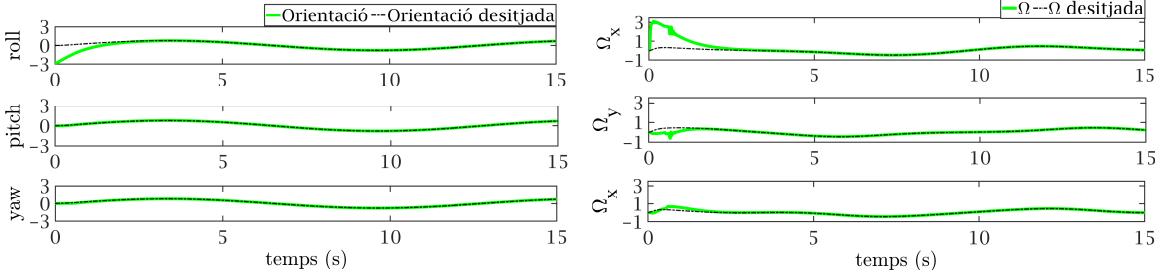
(a) Funció d'error  $\Psi$ .(b) Magnitud error de velocitat angular  $\|e_\Omega\|$  (rad/s).(c) Valor de *roll*, *pitch* i *yaw* actual: verd sòlid, desitjat: negre puntejat (rad).(d) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).

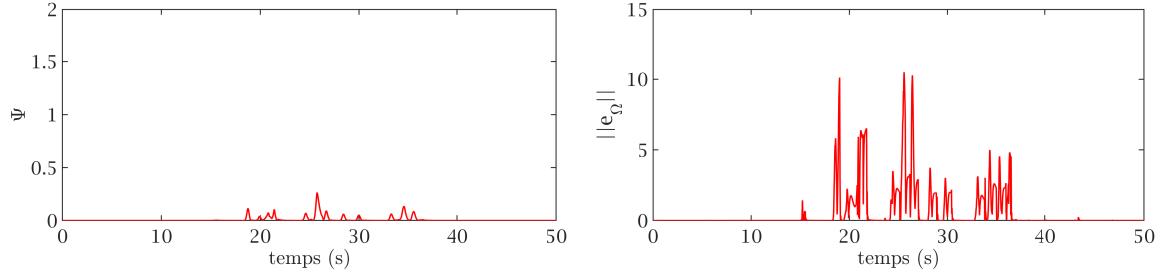
Figura 4-8: Simulació sobre model de quad-rotor, amb una comanda d'orientació de tipus sinusoïdal pels 3 eixos Eq.(4.5).

( $-0.9\pi, 0, 0$ )), el que significa un cert error inicial a corregir. La figura Fig. 4-8 mostra els resultats de la simulació.

$$\phi(t) = \theta(t) = \psi(t) = 45(2\pi/360)\sin(0.5 \cdot t) \quad (4.5)$$

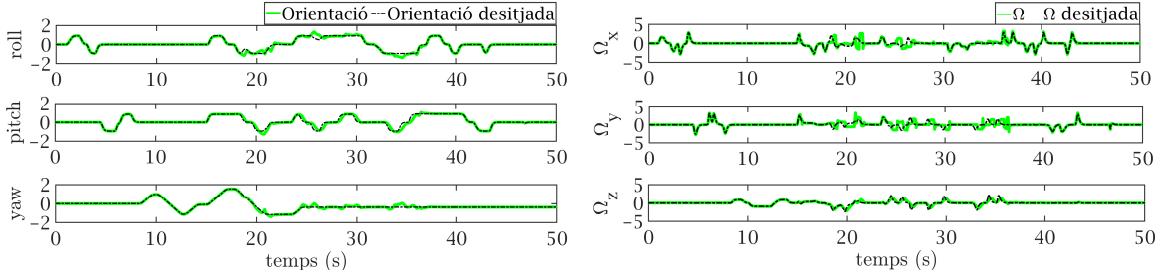
L'última comanda triada per aquest bloc correspon a la senyal d'una emissora de radio generant consignes d'orientació a temps real (Fig. 4-10). A la figura Fig. 4-9 es pot veure la resposta del model a aquesta comanda d'orientació. El controlador segueix l'orientació i velocitat desitjades en tot moment ( $R_d, \Omega_d \rightarrow R, \Omega$ ), mantenint la funció d'error  $\Psi$  pràcticament sempre a 0. És només quan la comanda es mou en els 3 eixos a l'hora, que la funció d'error  $\Psi$  i l'error en velocitat  $e_\Omega$  augmenten, tot i que ràpidament els errors són corregits.

En general es pot observar com la resposta a les comandes de control del model ampliat amb les dinàmiques del dron i del motors, s'ajusta al comportament desitjat. La funció d'error convergeix a 0 en tots els casos inclús quan existeix un error inicial,



(a) Funció d'error  $\Psi$ .

(b) Magnitud error de velocitat angular  $\|e_\Omega\|$  (rad/s).



(c) Valor de *roll*, *pitch* i *yaw* actual: verd sòlid, desitjat: negre puntejat (rad).

(d) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).

Figura 4-9: Simulació sobre model de quad-rotor, amb una comanda d'orientació provenint d'una emissora de radio (figura Fig. 4-10).

i el model del sòlid rígid segueix en tot moment l'orientació i la velocitat angular desitjades sense cap tipus de retràs evident.



Figura 4-10: Emissora de radio model FlySky-i6.

## 4.3 Resultats sistema de control adaptatiu

Igual que s'ha fet prèviament, per demostrar el correcte funcionament de l'algoritme de control adaptatiu, en primer lloc es treballa amb un model simplificat on no es tenen en compte les dinàmiques del dron. Posteriorment es valida el seu funcionament sobre un model que inclou les dinàmiques del quad-rotor, i amb diferents tipus d'incerteses i pertorbacions. La figura Fig. 4-11 mostra els blocs que s'han afegit al model previ per tal d'incloure la predicció i resposta a la presència d'incertes i pertorbacions externes. Els blocs *A*, *B*, *C* són anàlegs als de la figura Fig. 3-3.

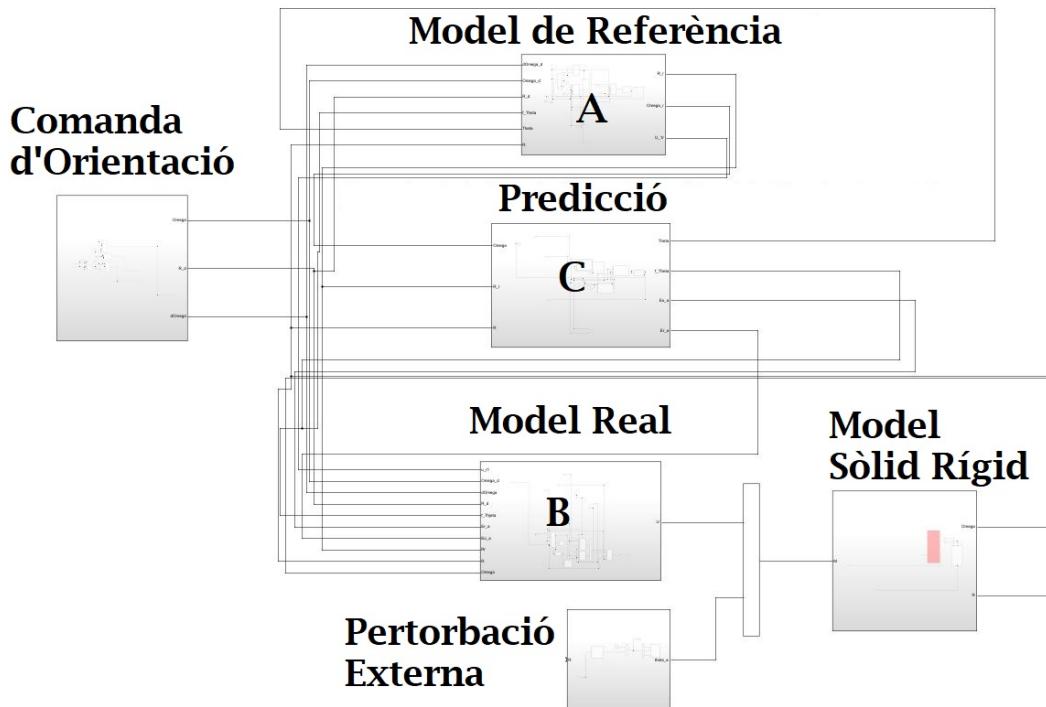


Figura 4-11: Implementació del controlador d'orientació adaptatiu en Simulink, cas simplificat sense dinàmiques de quad-rotor. Els blocs *A*, *B*, *C* corresponent als de la figura Fig. 3-3.

### 4.3.1 Model simplificat

En aquest primer cas simplificat on no es tenen en compte les dinàmiques del quad-rotor, s'introduceix en el sistema una incertesa en la inèrcia i una pertorbació externa resultant de sumar un moment constant i un altre que depèn de l'orientació actual

del cos Eq.(4.6). Es comprova si el controlador es capaç d'estimar la pertorbació i corregir els seus efectes. Aquestes incerteses i pertorbacions són les mateixes que es proposen a la referència [25].

La pertorbació fixa ve donada per la constant  $\theta_{ef} = [0.95, 0.25, -0.5]^T \text{N}\cdot\text{m}$ . La pertorbació variable  $\theta_{ev}$  (4.7) correspon a situar una certa massa  $m_a = 0.5 \text{ kg}$ , a una certa distància  $r = [0.2, 0.2, 0.2]^T \text{m}$  del CoM del cos. Això genera un moment sobre el sòlid que depèn de l'orientació d'aquest, i modifica la seva inèrcia segons l'equació (4.8), on  $J$  representa la inèrcia nominal definida al principi del capítol i  $\bar{J}$  representa la inèrcia real del dron. Aquesta diferència entre la inèrcia nominal i real representa una incertesa pel sistema de control.

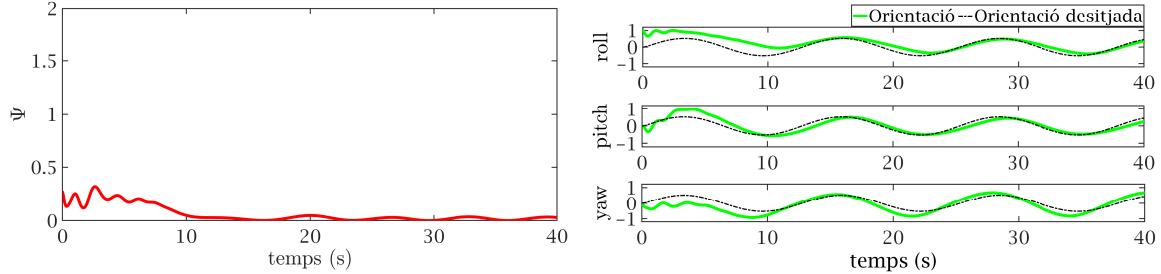
$$\theta_e = \theta_{ef} + \theta_{ev} \quad (4.6)$$

$$\theta_{ev} = m_a g (r \times R^T e_3) \quad (4.7)$$

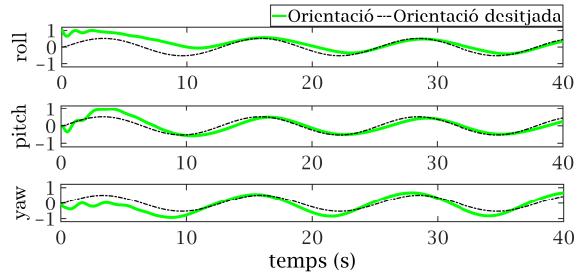
$$\bar{J} = J - m_a (\hat{r})^2 \quad (4.8)$$

La comanda d'orientació triada en aquest cas, ve donada de nou per l'expressió Eq.(4.5), una comanda que avança en  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$  seguint una funció sinusoïdal en aquest cas fins a  $30^\circ$  i l'orientació inicial presenta un error de  $+60^\circ$  en *roll* que cal corregir. Els resultats d'aquesta simulació es poden veure a la figura Fig. 4-12.

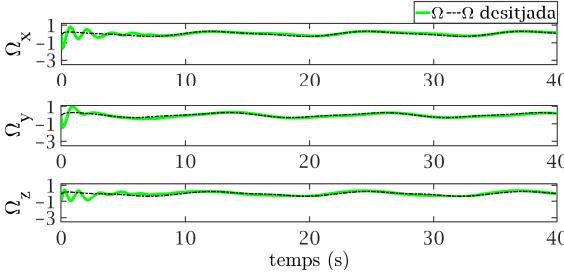
El valor inicial de l'error  $\Psi$  entre el sistema real i la comanda d'orientació correspon a la rotació en *roll* inicial del cos, però a diferencia del que passava en el cas sense pertorbacions, aquest no és el punt màxim de  $\Psi$  sinó que augmenta per l'acció de la pertorbació externa  $\theta_e$ . A mesura que la predicció de la pertorbació  $\theta$  s'apropa al valor de  $\theta_e$  la comanda de control generada comença a contrarestar la pertorbació, i conseqüentment l'error  $\Psi$  comença també a disminuir fins arribar a un punt on és manté proper a 0. El sistema acaba seguint l'orientació i la velocitat angular desitjades amb un cert marge d'error i amb un petit retràs, havent a més corregit la diferència inicial en *roll* (Fig. 4-12b i Fig. 4-12c). Es pot observar també com la



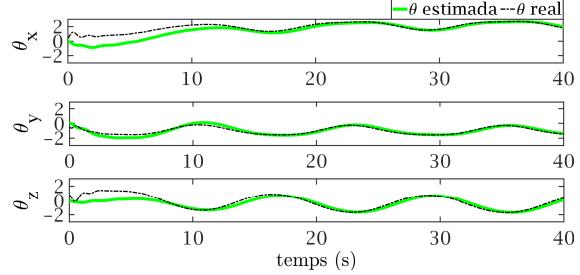
(a) Funció d'error  $\Psi$  entre el model real i la comanda d'orientació  $R_d$ .



(b) Valor de *roll*, *pitch* i *yaw* actual: verd sòlid, desitjada: negre puntejat (rad).



(c) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).



(d) Pertorbació estimada  $\theta$ : verd sòlid, pertorbació intruïda al sistema real  $\theta_e$ : negre puntejat (Nm).

Figura 4-12: Simulació control adaptatiu sobre un model simplificat en presència d'incertesa en la inèrcia i pertorbacions externes fixes i variables.

predicció de la pertorbació va millorant a mesura que avança el temps de simulació i cada cop s'apropa més al seu valor real ( $\theta \rightarrow \theta_e$ ) (Fig. 4-12d).

Les pertorbacions introduïdes en aquest cas simplificat són força exígents, i queden fora del que caldia esperar en un cas real. La massa que es situa fora del CoM té un valor de 0.5 kg el que representa pràcticament la meitat del pes total de l'aeronau, els motors probablement tindrien problemes per suportar tot el pes del conjunt i generar els moments necessaris. D'altra banda la pertorbació fixa té component no nul·la en l'eix  $Z$ , tot i que això en un cas real seria difícil de contrarestar, doncs el moment en aquest eix que ve donat per Eq.(2.10) on la constant  $K_M$  té un valor molt petit, per tant els motors haurien de girar a velocitats superiors al seu límit físic per contrarestar moments en l'eix  $Z$ .

Comparant els resultats d'aquest bloc amb els de la referència [25], tot i no haver

fet exactament la mateixa implementació i que les comandes d'orientació són força diferents, sí que podem afirmar que la predicció de la pertorbació té un comportament molt similar en ambdós casos. En un principi la predicció  $\theta$  està lluny de ser semblant a la realitat, però a mesura que avança el temps  $\theta$  s'aproxima més a  $\theta_e$  corregint de forma eficaç la pertorbació.

### 4.3.2 Model amb dinàmiques de quad-rotor

Per tal de comprovar el correcte funcionament del controlador adaptatiu sobre el model d'una plataforma multi-rotor, en aquest bloc de simulacions s'introdueixen les dinàmiques d'un quad-copter (Eq.(4.3)) i dels seus actuadors, tal i com ja s'ha fet en apartats anteriors. En tots els casos la comanda d'orientació vindrà donada per Eq.(4.5) però l'angle serà de  $30^\circ$  i l'error inicial serà de  $+10^\circ$  en *roll*.

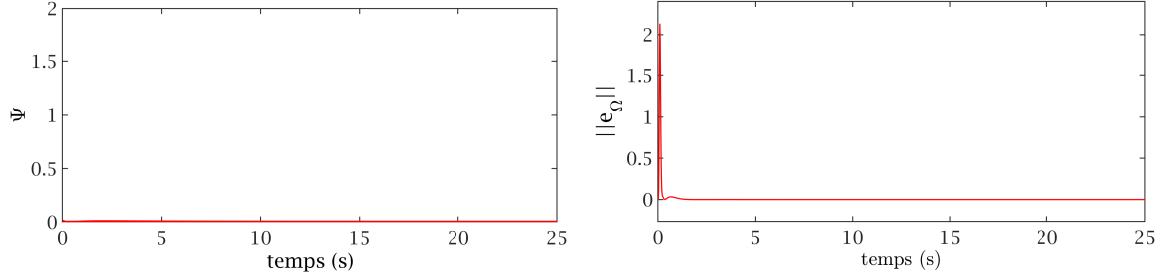
En primer lloc es comprova l'eficàcia del controlador davant d'una incertesa en la inèrcia únicament. El controlador coneix el valor d'inèrcia nominal, definit al principi d'aquest capítol com una matriu diagonal. En canvi, el model que simula les dinàmiques del sòlid rígid, és defineix amb una matriu d'inèrcia different Eq.(4.9), que inclou termes creuats i s'aproxima molt més a la seva forma real.

$$J = \begin{pmatrix} 6.968 & -0.02909 & -0.2456 \\ -0.02909 & 6.211 & 0.3871 \\ -0.2456 & 0.871 & 10.34 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.9)$$

Els resultats d'aquesta simulació (Fig. 4-13) demostren que el controlador es capaç de seguir la comanda d'orientació i de velocitat ( $R_d, \Omega_d \rightarrow R, \Omega$ ) tot i la presència d'una incertesa en la inèrcia, mantenint els corresponents errors d'orientació  $\Psi$  i velocitat  $e_\Omega$  a 0.

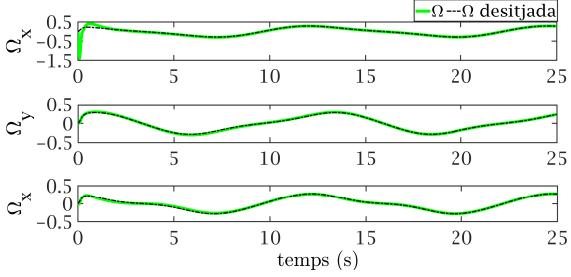
La segona situació plantejada continua amb la incertesa en la inèrcia, i a més afegeix la presència d'una pertorbació externa constant  $\theta_{ef} = [0.6, 0.4, 0]^T \text{Nm}$  que afecta als eixos *X* i *Y*.

L'últim escenari que es planteja combina, igual que s'ha fet prèviament, una incertesa en la inèrcia i un perturbació externa. En aquest cas però, no és una perturbació

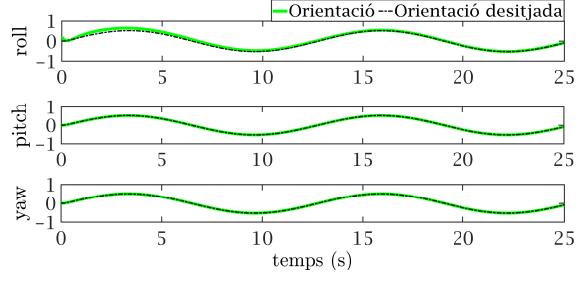


(a) Funció d'error  $\Psi$  entre el model real i la comanda d'orientació  $R_d$ .

(b) Magnitud error de velocitat angular  $\|e_\Omega\|$  (rad/s).



(c) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, ve-  
locitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).



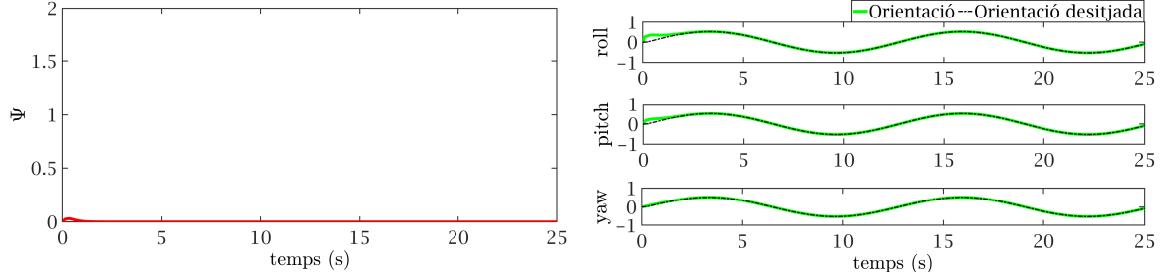
(d) Valor de *roll* *pitch* i *yaw* actual: verd  
sòlid, desitjat: negre puntejat (rad).

Figura 4-13: Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia.

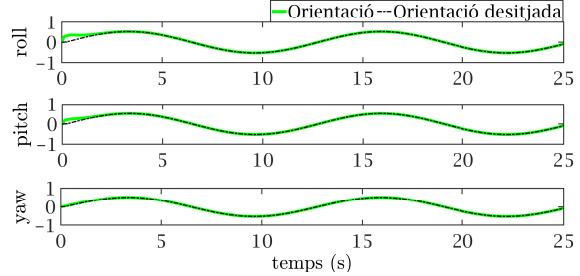
fixa, sinó que novament correspon a una massa puntual situada a una certa distància del CoM Eq.(4.7). Com ja s'ha comentat la presència d'aquesta massa modifica la inèrcia real del cos Eq.(4.8). Els paràmetres que defineixen aquesta pertorbació són:  $m_a = 0.1$  kg i  $r = [0.032, 0.032, 0.032]^T$  m.

Les figures Fig. 4-14 i Fig. 4-15 mostren com el model és capaç de predir els dos tipus de pertorbacions i corregir-les de forma que el cos segueixi l'orientació i velocitats angulars desitjades portant la funció d'error a 0.

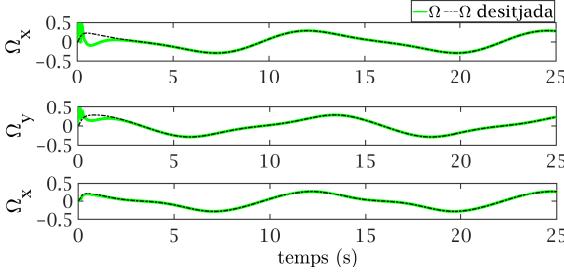
Com en aquest cas el model del sòlid rígid s'actua a través dels seus motors, la capacitat per realitzar la predicció de la pertorbació  $\theta$  per part del controlador adaptatiu s'ha vist limitada a mesura que la magnitud de  $\theta_e$  augmentava. Per comandes d'orientació més agressives a les mostrades, la velocitat de gir calculada amb Eq.(4.3) no és derivable en alguns punts i això implica que el controlador de velocitat no pugui resoldre les equacions diferencials que porta implícita la funció de transferència Eq.(2.23), això provoca per tant que el motor no pugui respondre com es desitja i l'algoritme falli als pocs instants d'haver començat la simulació. A la figura Fig. 4-16



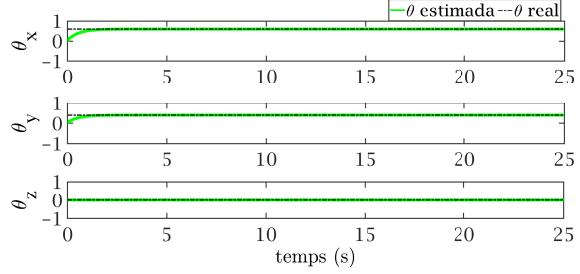
(a) Funció d'error  $\Psi$  entre el model real i la comanda d'orientació  $R_d$ .



(b) Valor de *roll*, *pitch* i *yaw* actual: verd sòlid, desitjada: negre puntejat (rad).



(c) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).

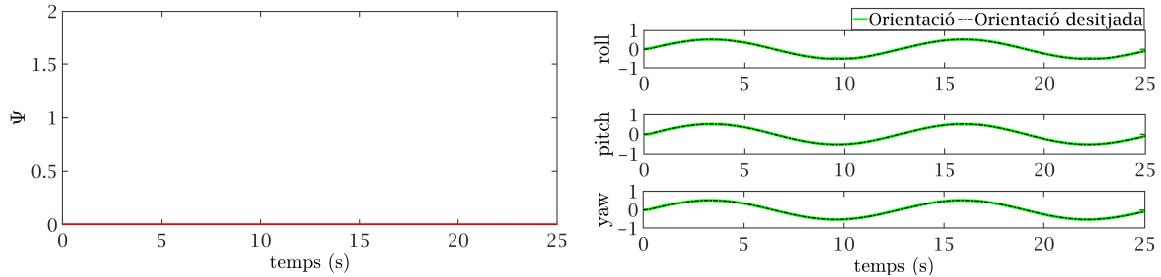


(d) Pertorbació estimada  $\theta$ : verd sòlid, pertorbació intruïda al sistema real  $\theta_e$ : negre puntejat (Nm).

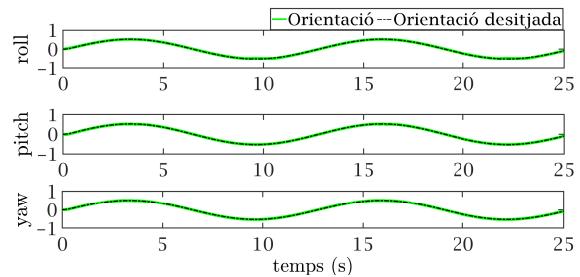
Figura 4-14: Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia i pertorbació externa de moment constant.

es mostra la velocitat de gir  $\omega_d$  calculada amb la mateix pertorbació que en el cas previ Fig. 4-15, però amb una comanda més exigent (funció sinusoïdal fins a  $45^\circ$  amb el mateix període). Es pot observar com per  $\omega_1$  aproximadament a l'instant  $t = 0.09s$  apareix una singularitat, és a dir la funció es continua però la derivada no ho és (les derivades laterals existeixen però no coincideixen), en aquest punt el controlador de velocitat no pot trobar una solució i la simulació és avortada.

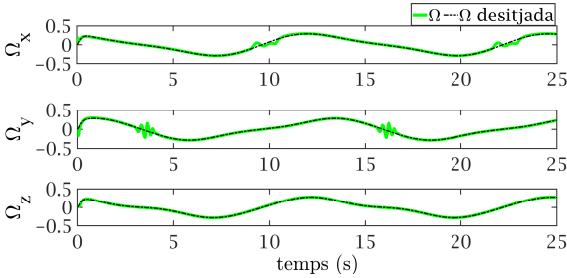
Per aquest motiu la comanda d'orientació triada  $R_d$  s'ha hagut d'escol·lir menys exigent que pel cas sense pertorbacions per assegurar un correcte funcionament de l'algoritme. Així doncs es pot arribar a la conclusió de que la presència d'incerteses i pertorbacions en el model limita l'agressivitat de la comanda d'orientació permesa.



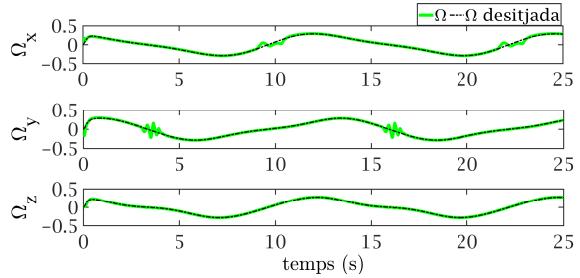
(a) Funció d'error  $\Psi$  entre el model real i la comanda d'orientació  $R_d$ .



(b) Valor de *roll* *pitch* i *yaw* actual: verd sòlid, desitjat: negre puntejat (rad).



(c) Velocitat angular actual  $\Omega$ : verd sòlid, velocitat desitjada  $\Omega_d$ : negre puntejat (rad/s).



(d) Perturbació estimada  $\theta$ : verd sòlid, perturbació intruïda al sistema real  $\theta_e$ : negre puntejat (Nm).

Figura 4-15: Simulació control adaptatiu sobre model de quad-rotor amb incertesa en la inèrcia i perturbació externa de moment variable.

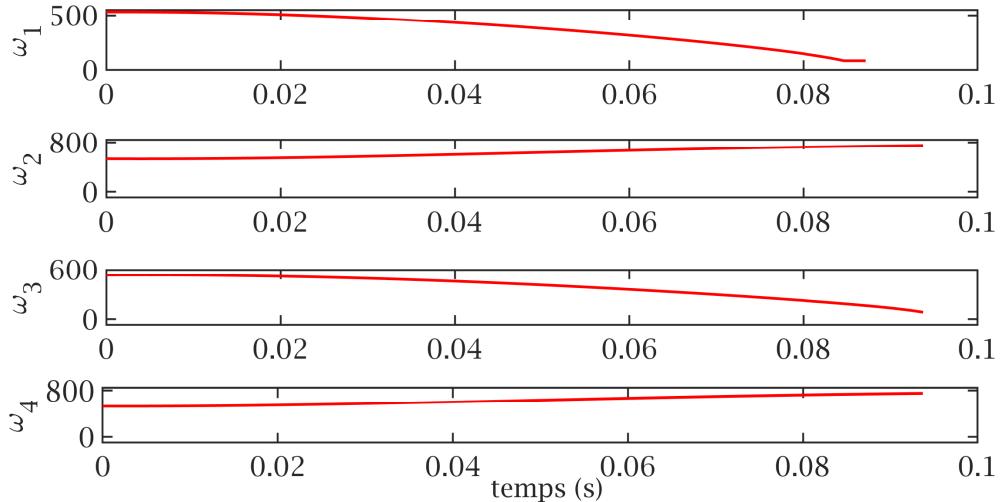


Figura 4-16: Calcul de la velocitat de gir del motors  $\omega_d$  (rad/s) amb una perturbació variable i incertesa en la inèrcia on apareix una singularitat a  $t = 0.09s$  aproximadament.

# Capítol 5

## Conclusions

Al principi d'aquest document s'ha descrit un objectiu principal i un objectiu secundari, un cop acabat el projecte podem afirmar que els dos objectius han estat assolits de forma satisfactòria.

L'objectiu principal del treball era la implementació d'un controlador d'actitud o orientació basat en matrius de rotació ( $R \in SO(3)$ ), sobre una plataforma de vol multi-rotor. Les simulacions realitzades mostren com l'algoritme triat és capaç de controlar l'orientació d'un sòlid rígid a l'espai, a l'hora que corregeix un error inicial diferent a  $180^\circ$ . La funció d'error  $\Psi$  escollida dota el sistema d'un ritme de convergència major al mostrat per altres controladors desenvolupats en el grup ortogonal especial  $SO(3)$ , concretament quan l'error inicial és gran. El sistema de control a més, evita les singularitats i ambigüïtats que apareixen quan es fan servir els angles d'Euler o els quaternions per representar l'orientació. S'ha validat el correcte funcionament del sistema primer sobre un model simplificat i després sobre el model d'una plataforma quadri-rotor que inclou a més el model i actuació del motors hèlixs.

Es va proposar també com a objectiu secundari, dotar el controlador prèviament implementat de la robustesa suficient per seguir una orientació desitjada tot i la presència d'incerteses o pertorbacions externes. Per fer-ho s'ha afegit un sistema de

control adaptatiu que permet estimar la pertorbació i contraresta-la. De nou es valida el correcte funcionament del controlador sobre un model simplificat i posteriorment sobre un model més complert. S'ha vist però, que aquest sistema presenta limitacions en la seva capacitat d'estimar la pertorbació a mesura que la seva magnitud creix. Aquestes limitacions restringeixen a més la comanda d'orientació que podem introduir al controlador.

Un cop finalitzat el projecte podem plantejar millores i nous reptes de cara al futur. Per una banda seria interessant estudiar com els diferents paràmetres del controlador adaptatiu poden afectar al funcionament del sistema i la seva capacitat de predir i contrarestar incerteses i pertorbacions. D'aquesta manera seria doncs possible comprovar els límits reals del controlador adaptatiu. Per últim seria també necessari i interessant comprovar i validar experimentalment el funcionament dels algoritmes estudiats sobre una plataforma multi-rotor real. Això permetria a més, millorar i perfeccionar el model utilitzat en les simulacions de cara a futures implementacions i validacions.

# Bibliografia

- [1] *Entrega de paqueteria de DHL*. 2018. URL: <https://www.dhl.com/global-en/home/press/press-archive/2019/dhl-express-launches-its-first-regular-fully-automated-and-intelligent-urban-drone-delivery-service.html> (cons. 08-09-2020).
- [2] AESA. 2018. URL: <https://www.seguridadaerea.gob.es/es/ambitos/drones/normativa-europea-de-uas-drones> (cons. 08-09-2020).
- [3] Autor desconegut. *Avió automàtic Sperry*. 1918. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hewitt-Sperry-Automatic-Airplane-1918.jpg> (cons. 10-09-2020).
- [4] U.S. Air Force Photo / Lt. Col. Leslie. *Dron militar Reaper*. 2018. URL: <http://www.afrc.af.mil/shared/media/photodb/photos/090127-F-7383P-002.JPG> (cons. 10-09-2020).
- [5] U.S. Air Force Photo / Alejandro Pena. *Hexa-còpter*. 2019. URL: <https://www.defense.gov/observe/photo-gallery/igphoto/2002195961/> (cons. 10-09-2020).
- [6] Kimon Valavanis George Vachtsevanos. *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. First. Springer Netherlands, gen. de 2015. ISBN: 978-90-481-9706-4. DOI: [10.1007/978-90-481-9707-1\\_96](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_96).
- [7] Giovanni Muscato Carmelo Donato Melita Domenico Longo. “Measurement and Exploration in Volcanic Environments”. A: gen. de 2015, pàg. 2667 - 2692. ISBN: 978-90-481-9706-4. DOI: [10.1007/978-90-481-9707-1\\_76](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_76).

- [8] Bhavani Rao Raj Mohan Vipin Raj C. P. Aswathi. “UAV based security system for prevention of harassment against woman”. A: jul. de 2017, pàg. 874- 879. DOI: [10.1109/ICICICT1.2017.8342680](https://doi.org/10.1109/ICICICT1.2017.8342680).
- [9] A. Lessard-Fontaine Denise Soesilo Patrick Meier. “Drones in Humanitarian Action”. A: (2014).
- [10] Deepak B. Mogili Umamaheswara. “Review on Application of Drone Systems in Precision Agriculture”. A: *Procedia Computer Science* 133 (gen. de 2018), pàg. 502 - 509. DOI: [10.1016/j.procs.2018.07.063](https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.07.063).
- [11] Salah Sukkarieh Ali Göktoğan. “Autonomous Remote Sensing of Invasive Species from Robotic Aircraft”. A: ag. de 2014, pàg. 2813 - 2834. ISBN: 978-90-481-9706-4. DOI: [10.1007/978-90-481-9707-1\\_72](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_72).
- [12] Anibal Romero Ollero Luis Merino J. Martinez-de Dios. “Cooperative Unmanned Aerial Systems for Fire Detection, Monitoring, and Extinguishing”. A: gen. de 2015, pàg. 2693 - 2722. ISBN: 978-90-481-9706-4. DOI: [10.1007/978-90-481-9707-1\\_74](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_74).
- [13] Matthew J. Rutherford Konstantinos Kanistras Goncalo Martins. “A survey of unmanned aerial vehicles (UAVs) for traffic monitoring”. A: maig de 2013, pàg. 221 - 234. ISBN: 978-1-4799-0815-8. DOI: [10.1109/ICUAS.2013.6564694](https://doi.org/10.1109/ICUAS.2013.6564694).
- [14] Pere Molina Ismael Colomina. “Unmanned aerial systems for photogrammetry and remote sensing: A review”. A: *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 92 (juny de 2014), pàg. 79- 97. DOI: [10.1016/j.isprsjprs.2014.02.013](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2014.02.013).
- [15] Miss PrachiZodpe Prof.Mrs.A.G.Andurkar. “A Review Paper on Project “LOONS””. A: *International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering* 5 (2016), pàg. 502 - 509.
- [16] Autor desconegut. *Dron per agricultura de precisió*. URL: <https://www.agrosintesis.com/uso-drones-la-agricultura/> (cons. 10-09-2020).

- [17] Imatge de DJI. *Dron per elaboració de mapes*. 2. URL: <https://www.dji.com/mx/newsroom/news/explorando-minas-con-drones-autonomos> (cons. 10-09-2020).
- [18] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Second. Versió en Castellà per Dr. Julián Fernandez Ferrer. *Mecànica Clàssica*. Universitat Politècnica de Barcelona: Editorial Reverté. 1987. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1973c1951. ISBN: 978-84-291-4306-5.
- [19] N.H. Mcclamroch Nalin A. Chaturvedi Sanyal Amitersity. “Rigid-Body Attitude Control”. A: *Control Systems, IEEE* 31 (jul. de 2011), pàg. 30-51. DOI: [10.1109/MCS.2011.940459](https://doi.org/10.1109/MCS.2011.940459).
- [20] James Diebel. “Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors”. A: *Matrix* 58 (gen. de 2006).
- [21] Andy Swift Ricardo Castillo Suhas Pol. “A simplified model for turbine thrust coefficient and experimental comparison”. A: *Journal of Physics Conference Series* 1452 (març de 2020), pàg. 012005. DOI: [10.1088/1742-6596/1452/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1452/1/012005).
- [22] Taeyoung Lee. “Exponential stability of an attitude tracking control system on SO(3) for large-angle rotational maneuvers”. A: *Systems Control Letters* 61 (gen. de 2012), pàg. 231-237. DOI: [10.1016/j.sysconle.2011.10.017](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.10.017).
- [23] Andrew D. Lewis Francesco Bullo. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Vol. 49. Gen. de 2004. DOI: [10.1007/978-1-4899-7276-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7276-7).
- [24] Dennis S. Bernstein Nalin A. Chaturvedi N.H. Mcclamroch. “Asymptotic Smooth Stabilization of the Inverted 3-D Pendulum”. A: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 54 (jul. de 2009), pàg. 1204-1215. DOI: [10.1109/TAC.2009.2019792](https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2019792).
- [25] K. Sreenath P. Kotaru R. Edmonson. “Geometric L1 Adaptative Attitude Control for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle”. A: *Journal of Dynamics Systems, Measurements, and Control* 142 (març de 2020).

- [26] A. M. Annaswamy E. Lavretsky Travis E. Gibson. “Projection Operator in Adaptative Systems”. A: (oct. de 2012).