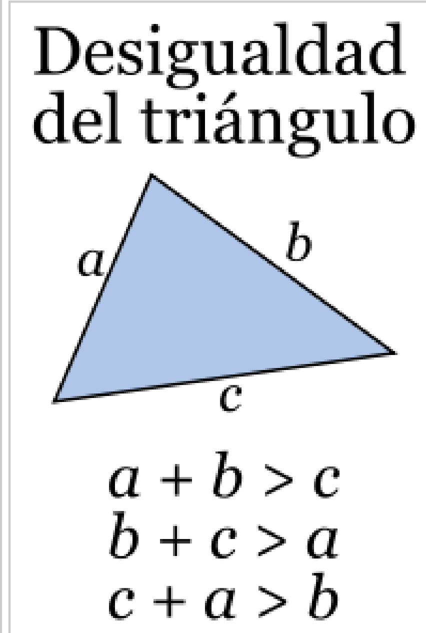
Desigualdad triangular

De Wikipedia, la enciclopedia libre

La **desigualdad del triángulo** es un teorema de geometría euclidiana que establece:

> En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante. [1]



Desigualdad del triángulo.

Este resultado ha sido generalizado a otros contextos más sofisticados como espacios vectoriales. Definido matemáticamente, cualquier triángulo cumple la siguiente propiedad:

$$a < (b+c), \qquad b < (a+c), \qquad c < (a+b)$$

donde *a*, *b* y *c* son los lados.

Índice

Espacios vectoriales normados

El teorema puede generalizarse a espacios vectoriales normados, obteniéndose la siguiente versión de la desigualdad triangular:

> En todo espacio vectorial normado $V, \forall x, y \in V, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es decir, que *La norma de la suma de dos vectores es siempre menor o igual a la suma de las normas de los dos vectores*.

En el caso particular de considerar la recta real como espacio vectorial normado con el valor absoluto como norma obtenemos la siguiente versión del teorema:

Para cualquiera dos números a y b se cumple: $|a+b| \leq |a| + |b|$

cuya demostración es:

Demostración

(Ámbito → ℝ). Haciendo uso de las propiedades del valor absoluto, es posible escribir:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Sumando ambas inecuaciones:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

A su vez, usando la propiedad de valor absoluto $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$ en la línea de arriba queda:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Generalización de la desigualdad triangular

La desigualdad triangular puede generalizarse a un número arbitrario de sumandos:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

es decir:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

donde *n* es un número natural, y los x_i son números reales.

Demostración

Véase también

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Notas

1. Weisstein, Eric W. «Triangle Inequality.» (http://mathworld.wolfram.com/TriangleInequality.html) (en inglés). Consultado el 2 de enero de 2015.

Holiuc: