Universidad de San Andrés
Práctica 3: Optimización y estudio de funciones

1. Para cada una de las siguientes funciones determinar sus puntos críticos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. De acuerdo a esto, clasificar los puntos críticos hallados.

   (a) $f(x) = x^3 + x - 2$.
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.
   (c) $f(x) = x^2 \ln(x)$.
   (d) $f(x) = x^2 e^{-x}$.
   (e) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
   (f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 1)$.
   (g) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
   (h) $f(x) = 9 - \frac{8}{x} - 2\sqrt{x}$.
   (i) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$.
   (j) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. Hallar los extremos de las siguientes funciones y decidir si son locales o absolutos.

   (a) $f(x) = x^2 + x + 1$,
   (b) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-8)}{x^2}$,
   (c) $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$,
   (d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

3. Para cada una de las siguientes funciones hallar, si existen, el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo dado. Hacer un gráfico aproximado de la función en ese intervalo.

   (a) $f(x) = x^3 + x - 2$, en $[-1, 1]$.
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, en $[-1, 2)$.
   (c) $f(x) = x^2 \ln(x)$, en $[e^{-4}, 1]$.
   (d) $f(x) = x^2 e^{-x}$, en $[-1, 4]$.
   (e) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, en $[0, \sqrt{8}]$.
   (f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 1)$, en $[-1, 1]$.
   (g) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, en $[\frac{1}{10}, 10]$.
   (h) $f(x) = 9 - \frac{8}{x} - 2\sqrt{x}$, en $[\frac{1}{4}, 9]$.
   (i) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, en $[-2, 0]$.
   (j) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, en $[0, 2]$.
   (k) $f(x) = x^2 + |x|$, en $[-1, 1]$.

4. Mostrar que las siguientes funciones son o bien crecientes o bien decrecientes en el conjunto indicado.

   (a) $f(x) = x + 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$, en $\mathbb{R}_{>0}$.
   (b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, en $\mathbb{R}_{<0}$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$, en $\mathrm{Dom}(f)$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones:

   (i) $C_0(f') = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\}$.

   (ii) $C_+(f') = (-\infty; -1) \cup (0, \frac{3}{2})$

   (iii) $C_-(f') = (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

   A partir de estos datos determinar todos los máximos y mínimos locales de la función f. Justficar cada afirmación hecha. Graficar una función que cumpla con estas condiciones.

6. Mostrar que valen las siguientes desigualdades:

   (a) $x^3 \geq x + 6$ para $x \geq 2$,

   (b) $e^{2x} - 2e^x > -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

   (c) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{3}{4}x \leq \frac{1}{4}$ para $x < 1$,

   (d) $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ para $x > 0$,

   (e) $\frac{\ln(x-1)}{x-1} \leq \frac{1}{e}$ para $x > 1$.

7. Sea $f(x) = x^2 + px + q$.

   (a) Hallar todos los $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$.

   (b) Para cada uno de los valores $p, q \in \mathbb{R}$ hallados en el item anterior, decidir si $x = 1$ es un máximo o un mínimo global.

8. Sea $f(x) = \frac{1}{e^x(e^x-4)}$. Hallar dominio y calcular la imagen de f.

9. Sea $f(x) = \sqrt{x}e^{-36x^2+2}$. Hallar dominio e imagen de f.

10. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+1}}{x-2}$ tenga un punto crítico en $x = -\frac{1}{4}$. Para el valor de a hallado estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y determinar si en $x = -\frac{1}{4}$ f alcanza un máximo o un mínimo.

11. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = (5x-4)\ln(5x-4) - 5x + k$ cumpla que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (\frac{4}{5}, +\infty)$.

12. Hallar y clasificar los extremos locales de las siguientes funciones. Graficar.

    (a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$,

    (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

13. Determinar los intervalos de concavidad/convexidad y los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones del Ejercicio 1.

14. Calcular las asíntotas verticales y no verticales (horizontales y oblicuas) de las siguientes funciones

    (a) $f(x) = \dfrac{7x+2}{3x-2}$.
    (b) $f(x) = \ln(5x-3)$.
    (c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$.
    (d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
    (e) $f(x) = e^{-2x}$.
    (f) $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.
    (g) $f(x) = (1+3x)^{\frac{1}{x}}$.
    (h) $f(x) = \sqrt[5]{x}e^x + \dfrac{2x^2-3x-7}{x+1}$.
    (i) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)-x^2}{x^3} + 3e^{2x}$.

15. Trazar los gráficos de las siguientes funciones, haciendo el estudio de f', f'', buscando extremos, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, asíntotas, etc. En los casos en que no está aclarado, considerar el dominio natural de la función.

    (a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$.
    (b) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-1}$.
    (c) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 3$.
    (d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$.
    (e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.
    (f) $f(x) = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})$, $x \in (-1,1)$.
    (g) $f(x) = x(\ln(x))^2$.
    (h) $f(x) = x - e^x$.
    (i) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
    (j) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.