Álgebra Lineal (R211 - CE9)
2024

2.4 - Coordenadas y Cambio de base

En un ev V finito dimensional, digamos $dimV = n$, si tenemos una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bastarán n escalares para determinar cualquier vector: si $v \in V$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Si consideramos la base con un *orden* entre sus n vectores, cada vector de V queda unívocamente determinado por una n-upla, esto es, un elemento de F^n.

Definición 1 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Una **base ordenada** es un subconjunto B de n vectores de V que es base y en el cual hemos fijado un orden sucesivo entre sus elementos. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $v \in V$ se escribe como $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, el vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ se llama **vector de coordenadas de** v y lo denotamos $[v]_B$.*

ATENCIÓN: ESTAREMOS DENOTANDO VECTORES FILA, Y EN LOS CASOS QUE PRECISEMOS EXPLÍCITAMENTE CONSIDERAR VECTORES COLUMNA PONDREMOS EL SUPRAÍNDICE ^{t}.

Ejemplos 1

1. *$V = \mathbb{R}_4[x]$, sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica. Si $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, ents $[p(x)]_B = (-1, 0, 3, 1)$. Si $B_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ base (cuál es la diferencia con la base canónica??), ents $[p(x)]_{B_1} = (1, 3, 0, -1)$. Observemos que es importante el orden que definamos en nuestra base.*
2. *$V = R^3$, B base canónica. Si $v = (1, 2, 3)$ ents $[v]_B = (1, 2, 3)$. Si $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ (verificar que B' es base), ¿cómo hallamos $[v]_{B'}$?*

Vamos a definir ahora un concepto fundamental: los ev isomorfos, que desde el punto de vista de la estructura algebraica, serán indistinguibles. Para nosotrxs será una noción de *igualdad*, y nos permitirá trabajar de igual manera con distintos ev's, aunque la naturaleza de sus elementos sea diferente.

Definición 2 *V, W F-ev se dicen **isomorfos** si existe $T : V \to W$ isomorfismo. Se anota $V \overset{T}{\simeq} W$.*

Ejercicio 1 *Probar la siguiente proposición:*

Proposición 1 *En la clase de los F-ev, el isomorfismo es una relación de equivalencia.*

El siguiente teorema es fundamental, nos dice lo que venimos anunciando: ¡¡¡todo es $\mathbb{R}^n$!!!

Very Important Theorem 1 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Ents. $V \simeq F^n$.*

Demostración:

Fijamos $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Definimos $T : V \to F^n$ como la función que a $v \in V$ le asigna su vector de coordenadas: $T(v) = [v]_B$. T es un isomorfimo. EJERCICIO!

□

Dadas dos bases en un F-ev V, cada vector $v \in V$ tiene asociado dos vectores de coordenadas. Veamos que ambos vectores se relacionan a través de una matriz.

Ejemplo 1 *$V = \mathbb{R}^3$, $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canónica, $B_2 = \{w_1 = (1, 1, 1,), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\}$. Sea $v = (3, 4, 5) = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$. Observemos que $e_1 = w_3$, $e_2 = w_2 - w_3$, $e_3 = w_1 - w_2$, o lo que es lo mismo, $[e_1]_{B_2} = (0, 0, 1)$, $[e_2]_{B_2} = (0, 1, -1)$ y $[e_3]_{B_2} = (1, -1, 0)$. Luego, $v = 3w_3 + 4(w_2 - w_3) + 5(w_1 - w_2) = 5w_1 - w_2 - w_3$. Así, $[v]_{B_1} = (3, 4, 5)$ y $[v]_{B_2} = (5, -1, 1)$. En general, si $v = (x, y, z)$, $[v]_{B_1} = (x, y, z)$ y $[v]_{B_2} = zw_1 + (y - z)w_2 + (x - y)w_3$.*

Pero veamos esto de otra forma: consideremos la matriz C cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los vectores de la base B_1 expresasdos en la base B_2:

$$C = \left([e_1]^t_{B_2}, [e_2]^t_{B_2}, [e_3]^t_{B_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si $v = (x, y, z)$,

$$C[v]^t_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix} = [v]^t_{B_1}.$$

El ejemplo anterior es bien general: es una definición y un teorema.

Teorema 1 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V. Sea $C = (c_{ij})$ la matriz cuyas entradas c_{ij} están definidas por: para cada $j = 1, \dots, n$ sean $c_{1j}, \dots, c_{nj} \in F$ tales que $v_j = c_{1j}w_1 + \dots + c_{nj}w_n$. Es decir, $[v_j]_{B_2} = (c_{1j}, \dots, c_{nj})$ y*

$$C = \left([v_1]^t_{B_2}, \dots, [v_n]^t_{B_2}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ents. pc $v \in V$,

$$C[v]^t_{B_1} = [v]^t_{B_2}. \tag{1}$$

*C se llama **matriz de cambio de base de** B_1 **a** B_2.*

Demostración: Sea $v \in V$ con $[v]_{B_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Veamos que $\beta_i := \left(C \cdot [v]^t_{B_1}\right)_i$, $i = 1, \dots, n$ son los escalares tq $[v]_{B_2} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. En efecto, $\beta_i = \left(C \cdot [v]^t_{B_1}\right)_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = c_{i1}\alpha_1 + \dots + c_{in}\alpha_n$, luego

$$\begin{aligned} \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n =& (c_{11}\alpha_1 + \dots + c_{1n}\alpha_n)w_1 + \dots + (c_{n1}\alpha_1 + \dots + c_{nn}\alpha_n)w_n \\ =& \alpha_1(c_{11}w_1 + \dots + c_{n1}w_n) + \dots + \alpha_n(c_{1n}w_1 + \dots + c_{nn}w_n) \\ =& \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = v, \end{aligned}$$

de donde por unicidad de escritura tenemos que $[v]_{B_2} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

□

De la siguiente proposición un poco más general se deducirá la unicidad de la matriz de cambio de base:

Proposición 2 *$A, A' \in F^{n \times n}$ tq $Ax = A'x$ pt $x \in F^n$. Ents. $A = A'$.*

Demostración: Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica de F^n. Ents.

$$(Ae_j)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(e_j)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij},$$

y análogamente $(A'e_j)_i = A'_{ij}$, luego $A_{ij} = A'_{ij}$ pt i pt j.

□

Corolario 1 *La matriz de cambio de base es la única matriz que verifica* (1).

Cuando sea necesario referenciar a las bases involucradas, anotaremos $C_{B_1B_2}$ o $C_{B_1\to B_2}$.

Corolario 2 *V F-ev. B_1, B_2, B_3 bases de V. Ents:*

1. $C_{B_1\to B_3} = C_{B_2\to B_3}C_{B_1\to B_2}$.
2. $C_{B_2\to B_1} = (C_{B_1\to B_2})^{-1}$.

Demostración:

1. **Desafío 1** *Completar esta prueba. Ayuda: unicidad.*
2. **Desafío 2** *Completar esta prueba. Probar primero que $C_{B_1\to B_2}$ es invertible y luego ver la igualdad. Ayuda: la matriz $C_{B_1\to B_2}$ es invertible pues si no lo fuera el sistema $C_{B_1\to B_2}X = 0$ tendría soluciones no triviales (concluír de aquí).*

□

Veamos dos proposiciones más.

La primera nos dice que toda matriz invertible es un cambio de base.

Proposición 3 *Si $A \in F^{n\times n}$ invertible existen bases B_1 y B_2 de F^n tq $A = C_{B_1B_2}$.*

Desafío 3 *Completar la demostración:* ***Demostración:*** *Sean $A = (a_{ij})$, B_1 la base canónica de F^n y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ con $w_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$. B_2 es base y $A = C_{B_1B_2}$........................*

□

La segunda nos dice que si tenemos una base y una matriz invertible, existen sendas bases B_1 y B_2 de modo tal que A cambia B_1 a nuestra base B y que A cambia nuestra base B a B_2, respectivamente.

Proposición 4 *Si $A \in F^{n\times n}$ invertible y B base de F^n entonces:*

1. $\exists B_1$ *base de* F^n *tq* $A = C_{B_1B}$.
2. $\exists B_2$ *base de* F^n *tq* $A = C_{BB_2}$.

Demostración:

1. **Desafío 4** *Completar esta demostración. Ayuda: idem proposición anterior poniendo B en lugar de la base canónica.*
2. **Desafío 5** *Ayuda: del item anterior, usar proposición para A^{-1} y B, existe B_2 tq $A^{-1} = C_{B_2B_1}$ luego $A = (C_{B_2B})^{-1} = C_{BB_2}$.*

□

Veremos mil ejemplos en el laboratorio y en el práctico!