Práctica 6: Árboles

Ejercicio 11:

11) a) *Probar que todo grafo conexo G tiene un árbol recubridor.*
b) *¿En qué condiciones una arista en un grafo conexo G está contenida en todo árbol recubridor de G?*

Demostración.

Sea G un grafo conexo. Por lo hecho en el ejercicio 5 (si $|E(G)| < |V(G)| - 1$ entonces G no es conexo), resulta que $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. Si $|E(G)| = |V(G)| - 1$, entonces por el teorema de caracterización de árboles, resulta que G es un árbol, y es él mismo su árbol recubridor.
Si no, es decir, si $|E(G)| > |V(G)| - 1$, resulta que G no es acíclico. Pues de lo contrario, G sería un árbol y en consecuencia $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
Luego G tiene un ciclo. Sea e una arista de este ciclo. Como e está contenida en un ciclo, resulta que e no es una arista de corte. Luego, el grafo $G_1 = G \setminus e$ es un grafo conexo que tiene exactamente una arista menos que G, y el mismo conjunto de vértices. $|E(G_1)| = |E(G)| - 1 \geq |V(G)| - 1 = |V(G_1)| - 1$. $\square$

Ejercicio 11:

Demostración.

Si $|E(G_1)| = |V(G)| - 1$, entonces G_1 es un árbol, y como es subgrafo de G con el mismo conjunto de vértices, es un árbol recubridor.

Si no, G_1 resulta no acíclico y podemos encontrar una arista de corte y al borrarla obtener un grafo G_2 con exactamente una arista menos que G_1, para el cual vale $|E(G_1)| \geq |V(G_2)| - 1$, y $V(G_2) = V(G)$. Repetimos este proceso hasta que en algún punto G_k verifica $|E(G_k)| \geq |V(G)| - 1$. G_k resulta conexo y acíclico y por lo tanto es un árbol. Como se obtuvo a partir de G borrando aristas, es un subgrafo de G y como $V(G_k) = V(G)$ resulta que G_k es un árbol recubridor de G.

Por lo tanto, todo grafo conexo tiene un árbol recubridor.

$\square$

Ejercicio 11 b):

Sea G un grafo conexo. Vamos a probar que una arista $e \in E(G)$ está contenida en todo árbol recubridor si y solo si e es una arista de corte.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea e una arista de G que está contenida en todo árbol recubridor. Supongamos que e no es una arista de corte. Entonces tenemos que $G\ e$ es un grafo conexo, y por lo hecho en el ítem anterior, tiene un árbol recubridor T que, al ser subgrafo de $G\ e$, no contiene a la arista e. Además, notemos que T es también un árbol recubridor de G. Luego, encontramos un árbol recubridor de G que no contiene a la arista e. Llegamos a una contradicción. Por lo tanto, e es una arista de corte.

($\Leftarrow$) Sea e una arista de corte de G. Supongamos que existe un árbol recubridor T de G que no contiene a la arista e.

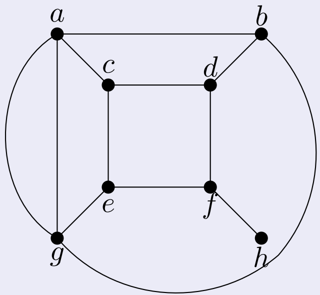
Consideremos el grafo $G_1 = G \setminus e$. Como T no contiene a la arista e, resulta que T es también un árbol recubridor de G_1.

Tenemos entonces que G_1 es conexo, pues entre cada par de vértices u y v de G_1 (que son todos los vértices de G), existe un u, v-camino simple, que es el u, v-camino simple que existe en T al ser un árbol.

Luego, $G_1 = G \setminus e$ es conexo y llegamos a una contradicción ya que e es una arista de corte. Por lo tanto, todo árbol recubridor de G contiene a la arista e. $\square$

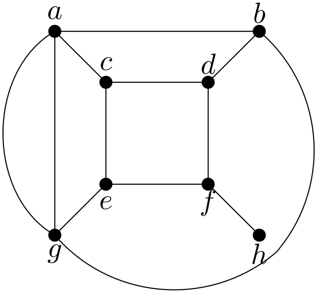
Ejercicio 14:

Considerar el siguiente grafo G.



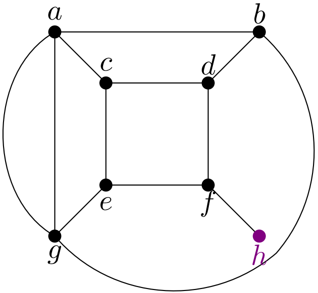
1. *Usar el algoritmo de búsqueda en anchura (BFS) para dar un árbol recubridor de G con el orden de vértices dado en cada caso.*
    1. $hgfedcba$
    2. $hfdbgeca$

Ejercicio 14:



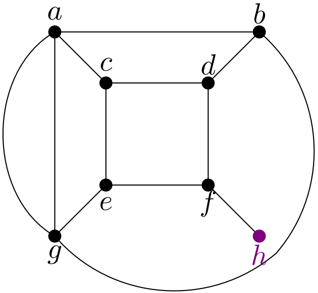
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

Ejercicio 14:



Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$
$Q = \{h\}$, $R = \{h\}$ y $d(h, h) = 0$.

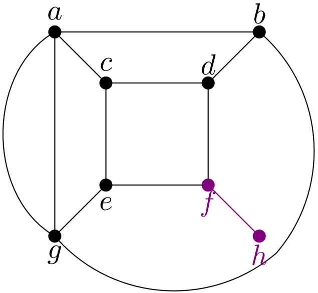
Ejercicio 14:



Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{h, f\}$, $R = \{h, f\}$ y $d(h, f) = 0 + 1 = 1$.

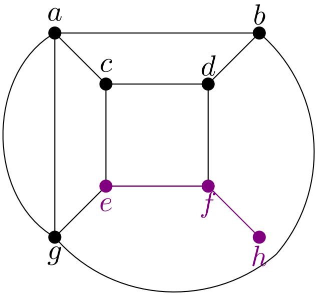
Ejercicio 14:



Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{f\}$, $R = \{h, f\}$ y $d(h, f) = 0 + 1 = 1$.

Ejercicio 14:



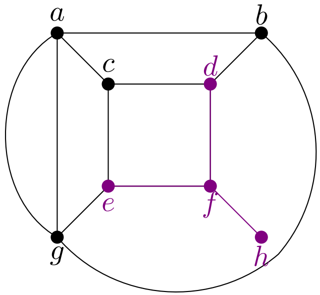
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{f, e\}$, $R = \{h, f, e\}$

$p(e) = f$

y $d(h, e) = 1 + 1 = 2.$

Ejercicio 14:



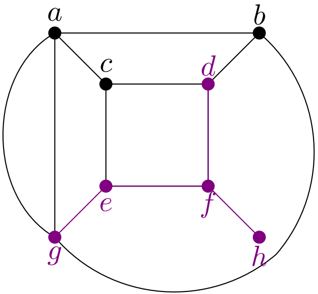
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{f, e, d\}$, $R = \{h, f, e, d\}$

$p(d) = f$

y $d(h, d) = 1 + 1 = 2$.

Ejercicio 14:



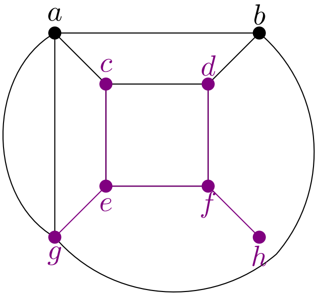
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$$Q = \{e, d, g\},\ R = \{h, f, e, d, g\}$$

$$p(g) = e$$

y $d(h, g) = 2 + 1 = 3.$

Ejercicio 14:



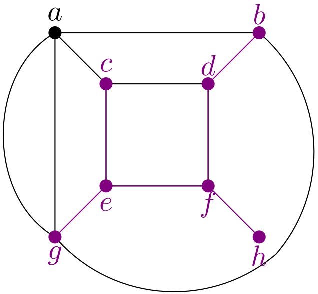
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{e, d, g, c\}$, $R = \{h, f, e, d, g, c\}$

$p(c) = e$

y $d(h, c) = 2 + 1 = 3.$

Ejercicio 14:



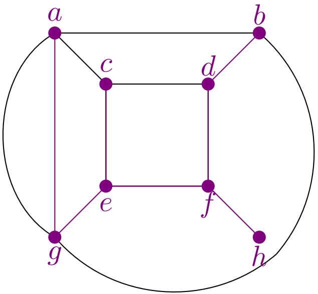
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{d, g, c, b\}$, $R = \{h, f, e, d, g, c, b\}$

$p(b) = d$

y $d(h, b) = 2 + 1 = 3.$

Ejercicio 14:



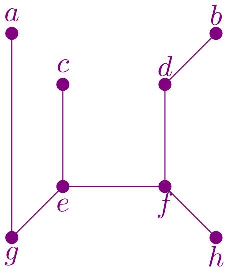
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

$Q = \{g, c, b, a\}$, $R = \{h, f, e, d, g, c, b, a\}$

$p(a) = g$

y $d(h, a) = 3 + 1 = 4.$

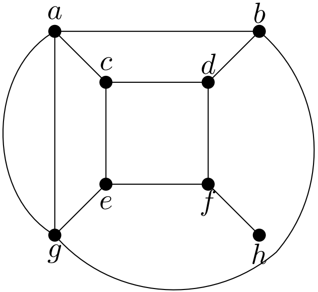
Ejercicio 14:



Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

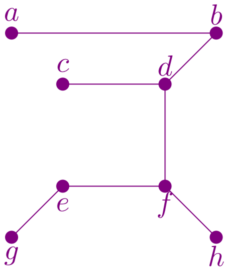
$Q = \{\}$, $R = \{h, f, e, d, g, c, b, a\}$

Ejercicio 14:



Orden: $\{h, f, d, b, g, e, c, a\}$

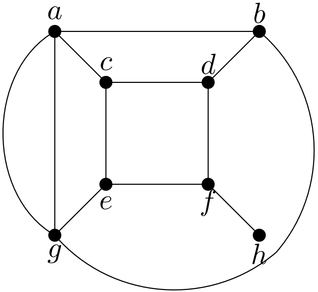
Ejercicio 14:



Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

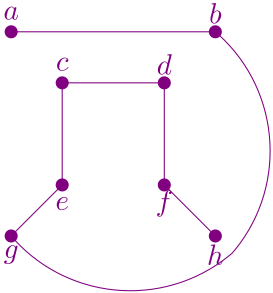
Ejercicio 14:

Usamos el algoritmo DFS para obtener un árbol recubridor para G:



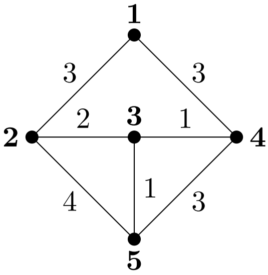
Orden: $\{h, g, f, e, d, c, b, a\}$

Ejercicio 14:



Ejercicio 15:

Dar un árbol recubridor de peso mínimo para el siguiente grafo, mediante el algoritmo de Kruskal.



Ordenamos las aristas de G según su peso. De esta manera, será más fácil identificar que arista debemos agregar en cada iteración.
$\{\{3,5\},\{3,4\},\{3,2\},\{1,2\},\{1,4\},\{4,5\},\{2,5\}\}$

Ejercicio 15:

$\{\{3,5\},\{3,4\},\{3,2\},\{1,2\},\{1,4\},\{4,5\},\{2,5\}\}$ Aristas
$\{1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 4\}$ Pesos

Ahora comenzando con todos los vértices de G, vamos agregando aristas siempre que no se generen ciclos.