Matemática Discreta - Grafos

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

2024

Ejemplo

Sea $V = \{1,\ldots,40\}$ los alumnos del curso ordenados alfabéticamente. Definimos entre ustedes la relación i es amigo de j, para i y j estudiantes. Entonces, armamos los pares ij de amigos del curso.

Pizarra.

Definición

*Un **grafo** es un par ordenado $G = (V,E)$ donde V se llama el conjunto de vértices y E conjunto de aristas. Podemos pensar que hay una función ψ_G que asigna pares de vértices (no ordenados) a las aristas de G. $\psi(e) = \{i,j\}$, para $e \in E$ y $i,j \in V$.*

Ejemplo

$$G = (V(G), E(G))$$

where

$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$
$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

and ψ_G is defined by

$$\begin{array}{llll} \psi_G(a) = uv & \psi_G(b) = uu & \psi_G(c) = vw & \psi_G(d) = wx \\ \psi_G(e) = vx & \psi_G(f) = wx & \psi_G(g) = ux & \psi_G(h) = xy \end{array}$$

Ejemplo

$$H = (V(H), E(H))$$

where

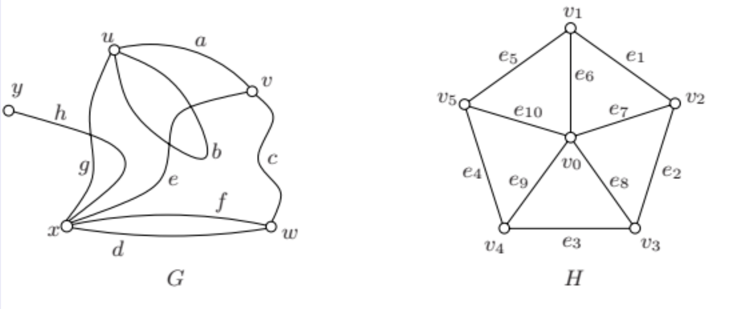
$$V(H) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

and ψ_H is defined by

$$\psi_H(e_1) = v_1v_2 \quad \psi_H(e_2) = v_2v_3 \quad \psi_H(e_3) = v_3v_4 \quad \psi_H(e_4) = v_4v_5 \quad \psi_H(e_5) = v_5v_1$$
$$\psi_H(e_6) = v_0v_1 \quad \psi_H(e_7) = v_0v_2 \quad \psi_H(e_8) = v_0v_3 \quad \psi_H(e_9) = v_0v_4 \quad \psi_H(e_{10}) = v_0v_5$$

- Más sencillo, evitar la función ψ y entonces $E \subset \{\{u, v\} : u \in V,\ v \in V\}$. Podemos simplificar, escribimos uv al elemento $\{u, v\}$.
- Si G está claro de contexto, simplemente $V = V(G)$ y $E = E(G)$.
- Representamos a los grafos...

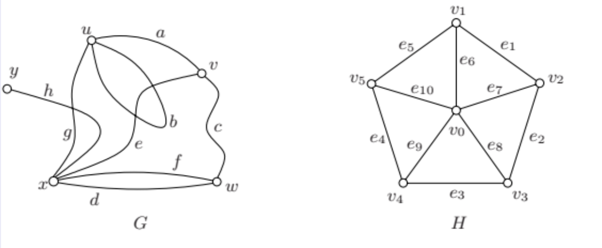
Ejemplo



Algunas convenciones:

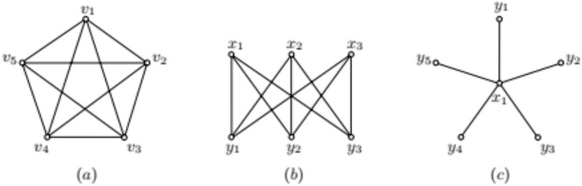
- los extremos de una arista u y v de la arista uv se dicen que inciden en la arista y reciprocamente.
- Dos vértices incidentes en una misma arista se llaman adyacentes, lo mismo para dos aristas que tienen un extremo en común.
- Dos vértices que son adyacentes se dicen vecinos.
- Vecindad (abierta) de v: $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$, si G está claro del contexto $N(v)$. Si hay aristas con mismos extremos, admitimos que $N(v)$ sea una lista no ordenada (o multiset).
- Una arista uu es un loop (o bucle). Si hay aristas con mismos extremos se llaman aristas paralelas.
- Vamos a trabajar con finitos.
- Un grafo es simple si no tiene loops ni aristas paralelas.
- Grafo nulo $G = (V, E)$ si $V = \emptyset$. Grafo trivial si $|V| = 1$
- En general, trabajaremos con grafos simples, no nulos y finitos.

EJEMPLO

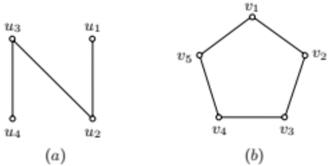


Que características tienen G y H?

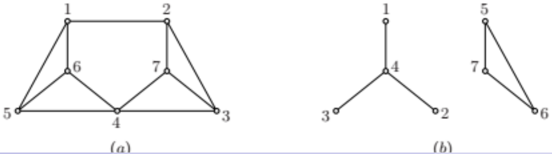
- Grafo completo K_n: grafo simple con n vértices donde todo par de vértices son adyacentes.
- Grafo vacío: Un grafo que no posee aristas.
- Grafo bipartito: $G = (X \cup Y, E)$ con $X \cap Y = \emptyset$. Toda arista de E tiene un extremo en X y otro en Y. Notación: $G[X, Y]$.
- Grafo bipartito completo $K_{n,m}$: Grafo bipartito $G[X, Y]$ con $|X| = n$, $|Y| = m$ tal que *todo* vértice de X es adyacente a *todo* vértice de Y.
- Grafo estrella (star): $G[X, Y]$ donde $|X| = 1$ o $|Y| = 1$.



- Camino P_n: grafo simple $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ únicas aristas $v_i v_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$. El número de aristas es $n-1$.
- Ciclo C_n: grafo simple $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ únicas aristas $v_i v_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $v_1 v_n$, $n \geq 2$. La longitud del ciclo (o del camino) es el número de aristas y k-ciclo o k-camino si posee k aristas.



- Grafo conexo: es una propiedad del grafo. $G = (V, E)$ es conexo si para toda partición de V en dos conjuntos existe una arista de uno de los conjuntos de la partición en el otro.
  Si no la cumple, es disconexo.



Definición

Un grafo se llama planar si puede ser representado en el plano de manera que sus aristas se intersecten sólo en vértices del grafo. Si el grafo es planar, una tal representación se llama una inmersión planar del mismo.

Ejemplo

Qué grafos de los ejemplos que vimos son planares? Por que?

Vamos a volver sobre este tema más adelante.

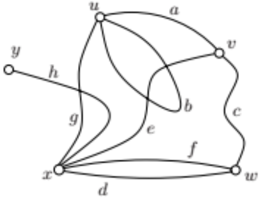
Definición

Dado $G = (V, E)$ con $|V| = n$ y $|E| = m$, la matriz de incidencia de G es la matriz $n \times m$, $M_G = (m_{ve})$ tal que $m_{ve} \in \{0, 1, 2\}$ cuenta el número de veces en que v y e son incidentes.

Pizarra

Definición

Dado $G = (V, E)$ con $|V| = n$, la matriz de adyacencia de G es la matriz $n \times n$, $A_G = (a_{uv})$ tal que $a_{uv} \in \{0, 1, 2, ..\}$ cuenta el número de aristas que unen los nodos u y v. Un bucle cuenta dos unidades.



	a	b	c	d	e	f	g	h
u	1	2	0	0	0	0	1	0
v	1	0	1	0	1	0	0	0
w	0	0	1	1	0	1	0	0
x	0	0	0	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	0	1

	u	v	w	x	y
u	2	1	0	1	0
v	1	0	1	1	0
w	0	1	0	2	0
x	1	1	2	0	1
y	0	0	0	1	0

- En general, los grafos tienen menos vértices que aristas. Por ello la matriz de adyacencia requiere menos espacio de almacenamiento.
- También una lista de adyacencia se puede usar: $(N(v) : v \in V)$, donde en $N(v)$ podemos tener multisets, es decir listas no ordenadas de vértices, y asi representar grafos no simples.
- Que podemos hacer en un grafo bipartito para ahorrar almacenamiento?

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. El grado de v es el número de aristas incidentes en v (un bucle cuenta dos al grado de cada vértice) y se lo nota $d_G(v)$ (o $d(v)$ si G está claro del contexto).
Si permitimos multiset para las vecindades de los nodos, $d(v) = |N(v)|$.
Un vértice con $N(v) = \emptyset$ se llama aislado y tiene grado 0.

- $\delta(G)$ mínimo grado de los vértices de G.
- $\Delta(G)$ máximo grado de los vértices de G.
- $d(G)$ grado promedio de los vértices de G

Teorema

Para todo grafo $G = (V, E)$, con $|E| = m$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \qquad (1)$$

Proof.

Consideremos la matriz de incidencia de G, M. La suma de las entradas de la fila correspondiente al vértice v es justamente $d(v)$. Además, en cada columna las entradas suman 2.Por lo tanto, la suma de todas las entradas de M corresponde, tanto a $\sum_{v \in V} d(v)$ como a $2m$ (si lo miramos por filas o por columnas), probando asi el resultado. $\square$

Corolario

En cualquier grafo, el número de vértices de grado impar, es par.

Proof.

Consideremos la ecuación anterior usando la aritmética modulo 2.

$$d(v) = \begin{cases} 1 & \mod 2 \quad \text{si } d(v) \text{ impar} \\ 0 & \mod 2 \quad \text{si } d(v) \text{ par} \end{cases}$$

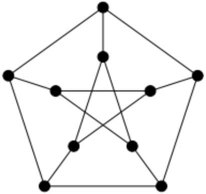
Por lo tanto, módulo 2, el lado izquierdo de (**??**) es el número de vértices de grado impar mientras que el lado derecho es 0. De manera que el número de vértices de grado impar debe ser par. $\square$

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es k-regular si $d(v) = k$ para todo $v \in V$ y k entero positivo fijo.

El grafo K_n es $n-1$-regular y el grafo completo bipartito $K_{k,k}$ es k-regular.

Los grafos $0, 1, 2$-regulares son simples de caracterizar, sin embargo no es así con los grafos *cúbicos* o 3-regulares. Por ejemplo, el grafo de Petersen, es 3-regular.



Grafo de Petersen
Conexo

Definición

Un grafo dirigido o digrafo es un par ordenado $D = (V, A)$ donde V son los vértices y A el conjunto de sus arcos 0 aristas dirigidas. Podemos pensar que hay una función ψ_G que asigna pares de vértices (ordenados) a los arcos de G. $\psi(e) = \{i, j\}$, para $e \in A$ y $i, j \in V$.

Con las convenciones anteriores, simplemente escribimos los elementos de A con sus extremos en V, $A \subset V \times V$. Definimos además, la vecindad de salida y de entrada de un vétice $N^{-}(v)$ y $N^{+}(v)$.
Para el grado de un vértice de un digrafo, distinguimos el grado de salida y el grado de entrada del vértice. $d^{-}(v) = |\{u : (v, u) \in A\}|$ y $d^{+}(v) = |\{u : (u, v) \in A\}|$.

Dado un digrafo, el grafo obtenido manteniendo el conjunto de vértices pero quitando el orden en sus vértices, es llamado el *grafo subyacente* del digrafo D.

Los conceptos asociados a grafos se aplican a digrafos (por ejemplo conexidad, el digrafo es conexo si lo es el grafo subyacente).

Isomorfismo

Definición

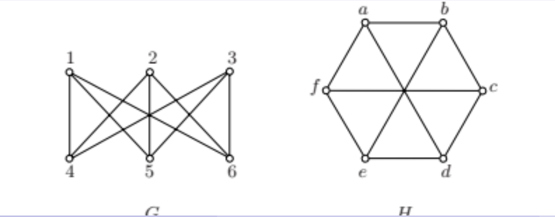
Dos grafos simples G y H son isomorfos (y escribimos $G \equiv H$) si existe una función biyectiva $\theta : V(G) \to V(H)$ tal que

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H).$$

Una tal función (que prueba que los grafos son isomorfos) es un isomorfismo.

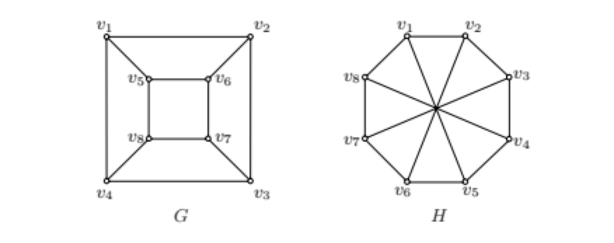
Ejemplo

Grafos isomorfos. Por qué?



EJEMPLO

Grafos no isomorfos. Por qué?



La relación " es isomorfo a " define una relación de equivalencia en la familia de los grafos simples finitos. Cuando representamos un grafo, tomamos un representante de la clase de todos los grafos de su clase, bajo esta relación.

C_n, K_n, $K_{n,m}$, etc.

Chequear isomorfismo...n! funciones biyectivas entre dos pares de conjuntos de n elementos.

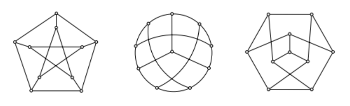
DEFINICIÓN

Un automorfismo es un isomorfismo de un grafo en si mismo. O bien, en un grafo simple, es una permutación de los vértices que preserva adyacencias.

Observaciones:

- Los automorfismos reflejan las simetrías entre los vértices. Dos vértices u y v para los cuales existe un automorfismo que lleva a u en v, son *similares*.
- Si todos los vértices son similares, el grafo se llama vértice transitivo.(K_n, $K_{n,n}$, Q_n (n-cubo)).

EJEMPLO (GRAFO DE PETERSEN)



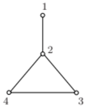
Construyendo grafos a partir de otros

Grafo de intersección Dado $(V, \mathscr{F})$ donde $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos de V. Este concepto generaliza el grafos simples (hipergrafos).

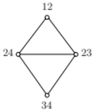
Definición

Dado $(V, \mathscr{F})$ donde $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos de V, el grafo de intersección de $\mathscr{F}$ es un grafo que tiene un vértice por cada elemento de $\mathscr{F}$ y están conectados cuando estos elementos correspondientes tienen intersección no vacía.

- Si $(V, \mathscr{F}) = (V, E)$ tenemos que su grafo de intersección es llamado grafo de línea de $G = (V, E)$, $L(G)$ y tiene por vértices las aristas y conecta dos "aristas" cuando tienen un extremo en común.

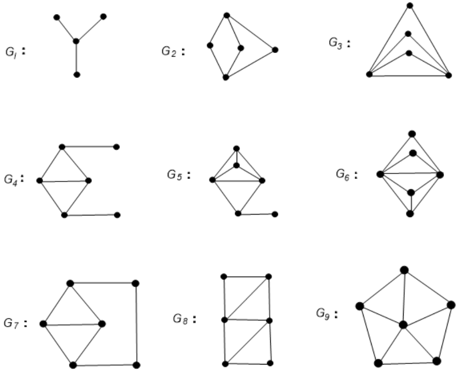


G



$L(G)$

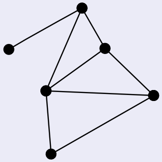
- Si $(V, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, I_R)$ donde I_R es un conjunto de intervalos cerrados de la recta real, tenemos que su grafo de intersección es llamado *grafo de intervalos* y tiene por vértices las intervalos y conecta dos "intervalos" cuando tienen algún elemento en común. Pizarra.
- Cualquier grafo es de intersección?
- Cualquier grafo es grafo de línea?
  No...grafos prohibidos para grafos de linea...



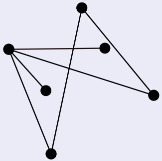
- Grafo complemento: Dado $G = (V, E)$ simple, $\overline{G} = (V, \overline{E})$ grafo simple donde $\overline{E}$ conjunto de pares de vértices no adyacentes en G.

Ejemplo

Dado el grafo G,



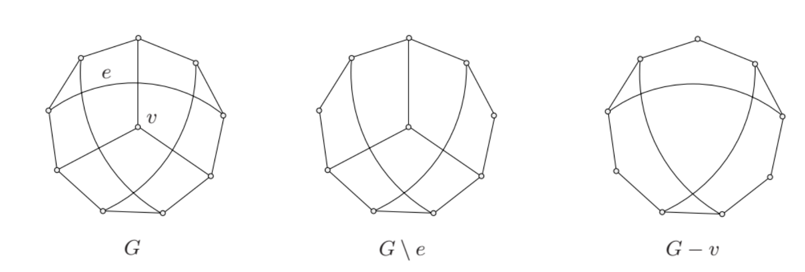
su complemento es $\overline{G}$



Dado $G = (V, E)$

- Borrado de arista $e \in E$: $G \setminus e$ es el grafo con V como conjunto de vértices y $E \setminus \{e\}$ como conjunto de aristas.
- Borrado de vértice $v \in V$: $G - v$ es el grafo con conjunto de vértices $V \setminus \{v\}$ y como conjunto de aristas, todas las de E en las que v no es un extremo.

EJEMPLO



Subgrafos

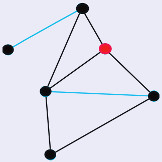
Definición

Un subgrafo *H de un grafo G es un grafo que puede obtenerse por borrado de un conjunto de vértices y/o de aristas del grafo dado. Escribimos $H \subseteq G$.*

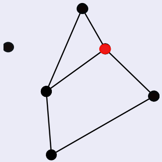
Convenimos en que $G \subseteq G$.

Ejemplo

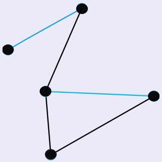
- *P_3 subgrafo de C_7.*
- G



$G \setminus \{e_1, e_2\}$



$G - v$



Definición

Dado $G = (V, E)$ y $U \subseteq V$, el subgrafo inducido por U, $G[U]$ es $G - (V \setminus U)$.

Pizarra

Definición

Dado $G = (V, E)$ decimos que H es subgrafo inducido de G si existe $U \subseteq V$ tal que $H = G[U]$.

Ejemplo

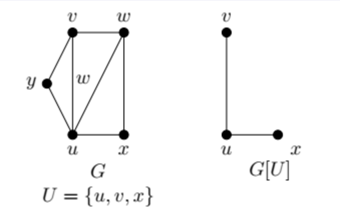
- $C_3 \subseteq K_5$
- $P4 \subseteq \ldots$
- $\cdots \subseteq G$ *para G Petersen.*

Definición

Dado G decimos que H es supergrafo de G si G se obtiene de H por borrado de un conjunto de sus vértices y/o aristas. $H \supseteq G$.

Ejemplo

Dado G



- $K_4 \subseteq G$?
- $P_3 \subseteq G$?
- $P_5 \subseteq G$?
- *Algún supergrafo de G?*

Ya vimos borrado de aristas y vértices.

DEFINICIÓN

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$,
$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, *y se llama unión disjunta de* G_1 *y* G_2.

Pizarra

DEFINICIÓN

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$, *el grafo join de* G_1 *y* G_2, $G_1 \vee G_2$ *es tal que*

$$V(G_1 \vee G_2) = V_1 \cup V_2$$

y

$$E(G_1 \vee G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}.$$

EJEMPLO

Operaciones en grafos

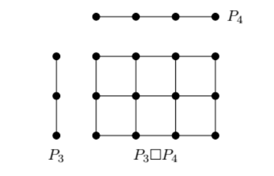
Definición

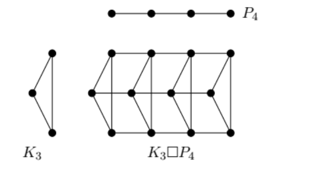
Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, el grafo producto cartesiano de G_1 y G_2, $G_1 \square G_2$ es tal que

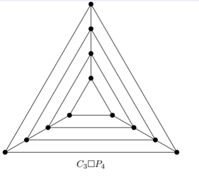
$$V(G_1 \square G_2) = V_1 \times V_2 \qquad y$$

$$E(G_1 \square G_2) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : (u_1 = v_1 \text{ y } u_2 v_2 \in E_2) \text{ o } (u_1 v_1 \in E_1 \text{ y } u_2 = v_2)\}.$$

Ejemplo







DEFINICIÓN

Dado un grafo $G = (V, E)$, una clique en G es un subconjunto de vértices adyacentes dos a dos en G.

Es decir, $W \subseteq V$ es una clique si y sólo si $G[W]$ es un subgrafo completo de G.

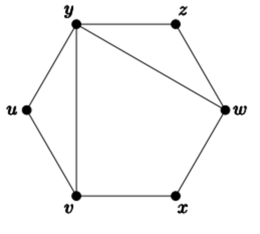
DEFINICIÓN

El número de clique de un grafo G es el cardinal de una clique de máximo cardinal en G y se lo nota $\omega(G)$.

Es decir,

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \text{ clique en } G\}.$$

EJEMPLO



$\{z, w\}$ es una clique (no máxima)

$\{z, y, w\}$ es una clique máxima

$\omega(G) = 3$

DEFINICIÓN

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto estable (independiente) en G es un subconjunto de vértices no adyacentes dos a dos en G.

Es decir, $S \subseteq V$ es un conjunto estable si y sólo si $G[S]$ es un subgrafo nulo de G.

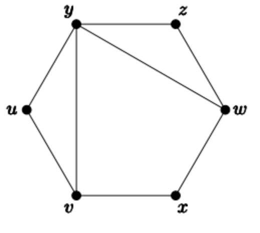
DEFINICIÓN

El número de estabilidad de un grafo G es el cardinal de un conjunto estable de máximo cardinal en G y se lo nota $\alpha(G)$.

Es decir,

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ estable en } G\}.$$

Ejemplo



$\{z, v\}$ es un conjunto estable (no máximo)
$\{z, v, x\}$ es conjunto estable máximo
$\alpha(G) = 3$

ALGUNOS PARÁMETROS COMNBINATORIOS IMPORTANTES

EJEMPLO

- $\omega(K_n) = n, \qquad \alpha(K_n) = 1.$
- $\omega(K_{n,m}) = 2, \qquad \alpha(K_{n,m}) = \max\{n, m\}.$
- $\omega(C_n) = 2, \qquad \alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *si* $n \geq 4.$
- $\omega(P_n) = 2, \qquad \alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$
- $\omega(W_n) = 3, \qquad \alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *si* $n \geq 4.$

Relación entre los parámetros de estabilidad entre:

- H y G para $H \subseteq G$?
- G y $\overline{G}$?

Relación entre los parámetros combinatorios y las operaciones

Dados los grafos G y H,

- $\omega(G+H) = \max\{\omega(G), \omega(H)\}, \quad \alpha(G+H) = \alpha(G) + \alpha(H)$. Por qué?
- $\omega(G \vee H) = \omega(G) + \omega(H), \quad \alpha(G \vee H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$. Por qué?

Teorema

Dados los grafos G y H,

$$\omega(G \square H) = \max\{\omega(G), \omega(H)\}.$$

Proof.

Pizarra. $\square$