

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)

2024

5.2 Forma de Jordan de una transformación lineal general

Vamos a generalizar el caso anterior, y para esto empezamos pensando en el caso en que el polinomio minimal tenga una sola raíz. Más precisamente, la situación que consideraremos primero es la siguiente:

V F -ev, $\dim(V) = n$, $T \in L(V)$ con $m_T(X) = (X - \lambda)^k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in F$.

Entonces $m_T(T) = (T - \lambda id_V)^k = 0(X)$ y $(T - \lambda id_V)^{k-1} \neq 0(X)$.

Esto nos dice que $T - \lambda id_V \in L(V)$ es un endomorfismo k pasos nilpotente. Luego podemos aplicar lo estudiado en la sección anterior para asegurar que existe una base B de V tq $[T - \lambda id_V]_B \in F^{n \times n}$ es una forma de Jordan nilpotente:

$$[T - \lambda id_V]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \in F^{n \times n},$$

con $J_i \in F^{n_i \times n_i}$ bloque de Jordan nilpotente, $1 \leq i \leq r$, y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Observemos que $[T + S]_B = [T]_B + [S]_B$ (EJERCICIO!). Luego,

$$[T]_B = [T - \lambda id_V]_B + [\lambda id_V]_B,$$

con lo cual

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda, n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix} \in F^{n \times n},$$

con $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ y para cada $1 \leq i \leq r$,

$$J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 1 $\lambda \in F$, $n \in \mathbb{N}$. La matriz

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

se llama bloque de Jordan asociado al autovalor λ de tamaño n .

Observaciones 1 $J(0, n)$ es un bloque de Jordan nilpotente como los que hemos definido en la sección anterior.

Buscamos una base donde la matriz del endomorfismo sea una matriz diagonal por bloques, con bloques de Jordan en la diagonal. Para ver la existencia usamos un lema técnico: descomponemos el espacio en suma directa de sev invariantes, en cada uno de los cuales el endomorfismo tiene sólo un autovalor.

Más precisamente, tenemos el siguiente Lema:

Lema 1 V F -ev, $\dim(V) = n$, $T \in L(V)$ tq $m_T(X) = p(X)q(X)$ con $(p(X), q(X)) = 1$. Entonces:

1. $\ker(p(T))$ y $\ker(q(T))$ son sev T -invariantes.
2. $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$
3. $m_{T|_{\ker(p(T))}}(X) = p(X)$ y $m_{T|_{\ker(q(T))}}(X) = q(X)$.

Demostración.

1. Veamos que $\ker(p(T))$ es T -invariante, el otro es análogo. $p(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$, $v \in \ker(p(T))$. Luego $p(T)v = a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv = \bar{0}$, de donde $T(p(T)v) = \bar{0}$. Veamos que $Tv \in \ker(p(T))$. En efecto,

$$\begin{aligned} \bar{0} &= T(p(T)v) = T(a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv) \\ &= a_0Tv + a_1TTv + \dots + a_rTT^rv \\ &= a_0Tv + a_1T(Tv) + \dots + a_rT^r(Tv) = p(T)Tv, \end{aligned}$$

de donde $Tv \in \ker(p(T))$, luego $\ker(p(T))$ es T -invariante.

2. Veamos que $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$, para esto veamos que $\ker(p(T))$ y $\ker(q(T))$ son disjuntos y que todo $v \in V$ se escribe como suma de vectores de $\ker(p(T))$ y $\ker(q(T))$. Como $(p(X), q(X)) = 1$, existen $r(X), s(X) \in F[X]$ t.q. $1 \equiv r(X)p(X) + s(X)q(X)$.

Entonces $id_V = r(T) \circ p(T) + s(T) \circ q(T)$.

- $v \in \ker(p(T)) \cap \ker(q(T))$, luego $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v) = \bar{0}$.

- $v \in V$, luego $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v)$. Veamos que $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$, y análogam. será $s(T)(q(T)v) \in \ker(p(T))$.

—> Recordemos que en general

$$---> (pq)(Tv) = p(T)(q(T)v) = (p(T) \circ q(T))v.$$

$$\begin{aligned} q(T)(r(T)(p(T)v)) &= (qrp)(Tv) = (rpq)(Tv) = r(T)((pq)(Tv)) \\ &= (r(T) \circ (pq)(T))v = (r(T) \circ m_T(T))v = \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Así, $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$, de modo que $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$. Análog. $s(T)(q(T)v) \in \ker(p(T))$.

3. Veamos finalmente que $m_{T|_{\ker(p(T))}}(X) = p(X)$ y $m_{T|_{\ker(q(T))}}(X) = q(X)$.

Definimos $T_1 = m_{T|_{\ker(p(T))}}$ y $T_2 = m_{T|_{\ker(q(T))}}$. Como $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$, $m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\}$.

$p(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$, $v \in \ker(p(T))$, luego

$$p(T_1)v = a_0v + a_1T_1v + \dots + a_rT_1^rv = a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv = \bar{0}.$$

Sigue que $m_{T_1}|_p$. Análogamente $m_{T_2}|_q$. Como p, q coprimos, m_{T_1} y m_{T_2} coprimos, de donde $pq = m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\} = m_{T_1}m_{T_2}$ y más aún, $p = m_{T_1}$ y $q = m_{T_2}$.

□

Definición 2 $J \in F^{n \times n}$ es una **matriz de Jordan** o una **forma de Jordan** si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde p.c. $1 \leq i \leq r$, J_i es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix},$$

con $n_1^{(i)} \geq \dots \geq n_{r_i}^{(i)}$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Esto es, cada J_i está formado por (varios) bloques de Jordan de autovalor λ_i sobre la diagonal.

El siguiente teorema es el resultado de existencia de forma de Jordan.

Teorema 1 V F -ev, $\dim(V) = n$, $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente sobre F . Entonces existe B base de V t.q. $[T]_B$ es una forma de Jordan.

En tal caso B se dice **base de Jordan para T** y la matriz $[T]_B$ una **forma de Jordan para T** .

Demostración.

Realizaremos la prueba por inducción sobre n .

$n = 1$ es trivial.

Supongamos que el teorema es verdadero para todo V con $\dim(V) = m < n$. Sea V F -ev con $\dim(V) = n$ y sea $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente en F .

Si $m_T(X) = (X - \lambda)^k$ ya vimos que en este caso el teorema se verifica.

Supongamos que T tiene al menos dos autovalores distintos y sea $\lambda = \lambda_1 \in F$ uno de los autovalores.

Entonces $m_T(X) = (X - \lambda)^k q(X)$, con $gr(q) \geq 1$ y $((X - \lambda)^k, q(X)) = 1$.

Por el lema anterior, tenemos que $V = \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) \oplus \ker(q(T))$, y cada uno de estos sumandos es un sev T -invariante.

Además, como λ es autovalor (y no el único),

$$\bar{0} \subsetneq \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) \subsetneq V.$$

Luego, $0 < \dim(\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)) < n$ y $0 < \dim(\ker(q(T))) < n$.

Considerando las restricciones $T_1 : \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) \rightarrow \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)$ y $T_2 : \ker(q(T)) \rightarrow \ker(q(T))$ sigue que, por hipótesis de inducción, existe una base B_1 de $\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)$ y una base B_2 de $\ker(q(T))$ t.q. $[T_1]_{B_1} = J_1$ y $[T_2]_{B_2} = J_2$ son formas de Jordan.

Entonces, tomando $B = B_1 \cup B_2$ base de V , sigue que $[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$.

Como λ es raíz del polinomio minimal m_{T_1} y no es raíz de m_{T_2} , no es raíz de $q(X)$, luego J_2 no tiene bloques de Jordan asociados al autovalor λ .

Así, resulta $[T]_B = J$ forma de Jordan.

□

En general, la construcción general la hacemos como sigue: si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de T , y $m_T(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$, tenemos que

$$V = \ker((T - \lambda_1 \text{id}_V)^{k_1}) \oplus \dots \oplus \ker((T - \lambda_r \text{id}_V)^{k_r}).$$

Podemos obtener una forma de Jordan p.c. una de las restricciones T_1, \dots, T_r a los sev invariantes $\ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i})$, y obtener asimismo las bases de Jordan B_i correspondientes. Entonces $B = B_1 \cup B_r$ es una base de Jordan de V y $[T]_B$ es una forma de Jordan de T .

Para matrices complejas, el resultado de existencia se traduce en:

Teorema 2 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces $A \sim J$, J forma de Jordan.

Observaciones 2 Si B base de F^n t.q. $[T]_B$ forma de Jordan, llamamos a B **base de Jordan para** A y a $[T]_B$ **forma de Jordan para** A .

Ejemplo 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. Hallar una forma de Jordan semejante a A y una base

de Jordan.

Veamos ahora la *unicidad* de la forma de Jordan, que entenderemos siempre *unicidad salvo el orden en el que aparecen los bloques de Jordan con respecto a autovalores distintos*.

Teorema 3 V F -ev, $\dim(V) = n$, $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente sobre F . Entonces existe una única forma de Jordan $J \in F^{n \times n}$, salvo por el orden de sus bloques, t.q. para alguna base B de V , $[T]_B = J$.

Demostración.

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tq $[T]_B = J \in F^{n \times n}$ forma de Jordan:

$$[T]_B = J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

donde p.c. $1 \leq i \leq s$, $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$ denota la matriz formada por todos los bloques de Jordan de autovalor λ_i que aparecen en J , y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Tenemos que $\chi_T(X) = \chi_J(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{d_i}$. Entonces $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los autovalores de T y p.c. $1 \leq i \leq s$, $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_T)$.

P.c. $1 \leq i \leq s$, $m_{J_i(\lambda_i)}(X) = (X - \lambda_i)^{k_i}$ p.a. $1 \leq k_i \leq d_i$. Entonces $m_T(X) = m_J(X) \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{k_i}$, con lo que p.c. $1 \leq i \leq s$, $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_T)$.

Sea λ uno de los autovalores de T y sea $k = \text{mult}(\lambda, m_T)$. S.p.g. supongamos que $\lambda = \lambda_1$. Observemos que

$$J - \lambda I_n = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s - \lambda) \end{pmatrix},$$

de donde

$$(J - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (J_2(\lambda_2 - \lambda))^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (J_s(\lambda_s - \lambda))^k \end{pmatrix}.$$

Puesto que $(J_i(\lambda_i - \lambda))^k$ es inversible p.c. $2 \leq i \leq s$, tenemos que $\ker((J_i(\lambda_i - \lambda))^k) = \text{span}\{e_1, \dots, e_{d_1}\}$.

Teniendo en cuenta que $J = [T]_B$, resulta que $J - \lambda I_n = [T - \lambda \text{id}_V]_B$.

Luego, $\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) = \text{span}\{v_1, \dots, v_{d_1}\}$.

La restricción $T_1 = (T - \lambda \text{id}_V)|_{\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) : \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) \rightarrow \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)}$ es una tl nilpotente, luego tiene una única forma de Jordan nilpotente J_1 asociada.

Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_{d_1}\}$ base de $\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)$. Observemos que

$$[T_1]_{B_1} = [T]_{\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)}|_{B_1} - \lambda I_{d_1} = J_1(0).$$

Como $J_1(0)$ es una forma de Jordan nilpotente, debe ser la forma de Jordan J_1 de T_1 .

Así, $J_1(\lambda_1) = J_1 + \lambda I_{d_1}$ está unívocamente determinada por T (pues ambos sev invariante y t.l. restricción sólo dependen de T y no de la base).

Haciendo lo mismo p.c. λ_i , $1 \leq i \leq s$, resulta que $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$ satisface $J_i(\lambda_i) = J_i + \lambda I_{d_i}$, donde $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_T)$ y si $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_T)$ entonces J_i es la forma de Jordan nilpotente de la restricción $T_i = (T - \lambda_i \text{id}_V)|_{\ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i}) : \ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i}) \rightarrow \ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i})}$.

Por lo tanto la forma de Jordan de T está unívocamente determinada por T , salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores de T .

□

Matricialmente, como todo polinomio se factoriza linealmente en $\mathbb{C}[X]$, tenemos

Teorema 4 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, J_A y J_B formas de Jordan de A y B , respectivamente. Entonces $A \sim B$ sii $J_A = J_B$ (salvo el orden de los bloques).

Demostración: EJERCICIO.

□

Ejemplo 2 $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Veamos que $A \sim B$ sii $\chi_A = \chi_B$ y $m_A = m_B$. Veamos también que esto es falso en $\mathbb{C}^{4 \times 4}$.