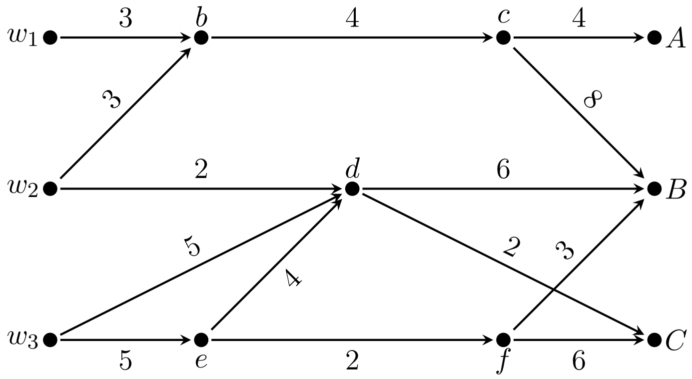
Ejercicios resueltos - Práctica 10

Resolución de los ejercicios 2, 5 (c) y 8 (para la red del ejercicio 2)

2. El siguiente grafo representa una red de bombeo por la que se entrega petróleo a tres refinerías, A, B y C, desde tres pozos w_1, w_2 y w_3. Las capacidades de los sistemas intermedios se indican en las aristas. Los vértices b, c, d, e y f representan las estaciones de bombeo intermedias.



a) Modelar este sistema como una red.

b) Modelar el sistema del item (a) como una red suponiendo que el pozo w_1 puede bombear a lo sumo 2 unidades, el pozo w_2 a lo sumo 4 unidades y el pozo w_3 a lo sumo 7 unidades.

c) Modelar el sistema del item (b) como una red suponiendo, además de las restricciones sobre los pozos, que la ciudad A puede recibir a lo sumo 4 unidades, la ciudad B 3 unidades y la ciudad C 4 unidades.

d) Modelar el sistema del item (c) como una red suponiendo que, además de las restricciones sobre los pozos y las ciudades, la estación de bombeo intermedia d puede bombear cuanto mucho 6 unidades.

Resolución:

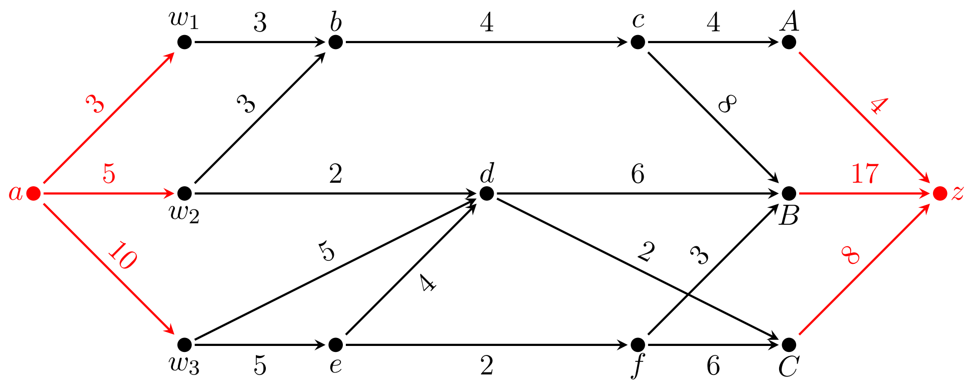
a) Sea G el grafo dirigido del enunciado. Observemos que G no es una red. Para modelar el sistema como una red de transporte, podemos agregar a G dos vértices ficticios a y z que cumplan el rol de *fuente* y *sumidero* respectivamente.

Asimismo, agregamos aristas desde el vértice a a cada uno de los vértices que representan los pozos. A estas aristas les podemos asignar como capacidad la capacidad total saliente del pozo respectivo, ya que el valor de un flujo que entre al pozo, no podrá superar esa cantidad. Es decir, a la arista aw_j le asignamos como capacidad el valor

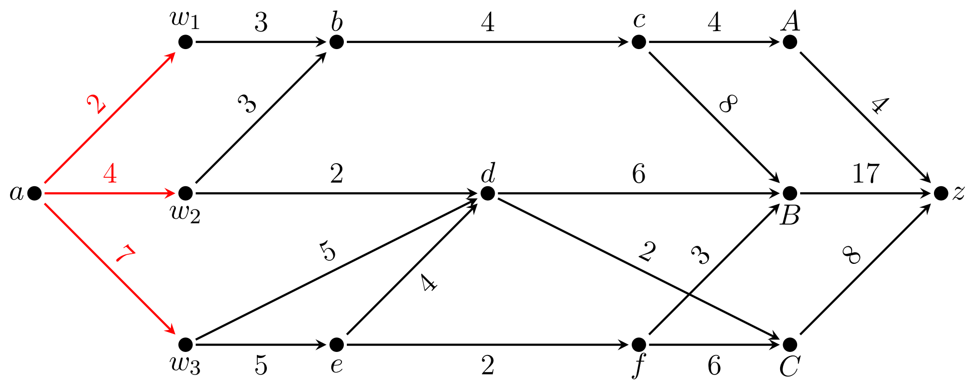
$$c(a, w_j) = \sum_{u \in V(G)} c(w_j, u)$$

También agregamos aristas hacia z desde cada uno de los vértices que representan a las ciudades. De manera similar a lo hecho para los pozos, a cada arista Xz le asignamos como capacidad el valor

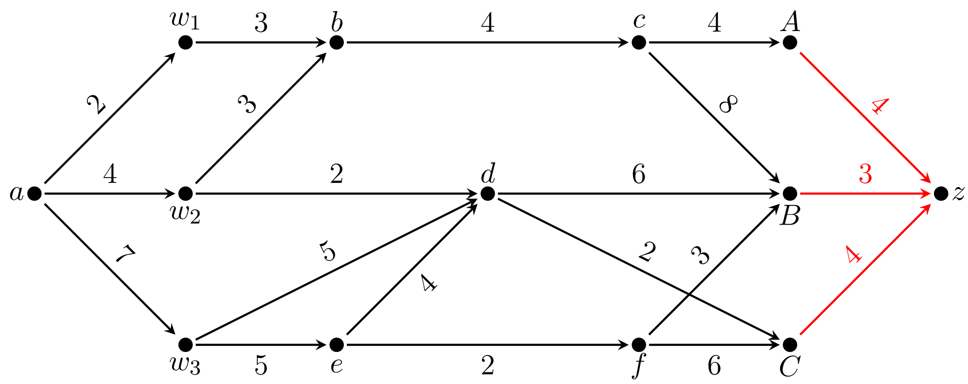
$$c(X, z) = \sum_{u \in V(G)} c(u, X)$$



b) Modificamos las capacidades de las aristas aw_j para imponer las restricciones sobre los pozos. De esta manera, obtenemos:

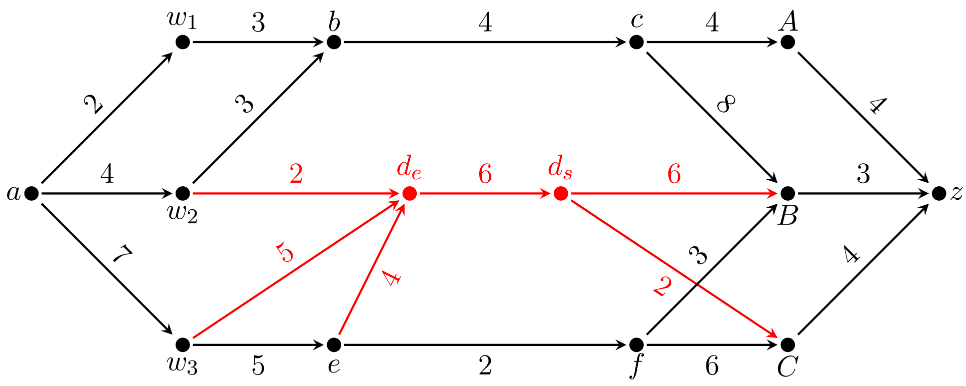


c) Modificamos las capacidades de las aristas Xz para imponer las restricciones sobre las ciudades. De esta manera, obtenemos:



d) Supongamos ahora que la estación de bombeo intermedia d puede bombear cuanto mucho 6 unidades. Podemos representar esto en la red eliminando el vértice d y agregando dos nuevos vértices d_e y d_s. Por cada arista de la forma ud, agregamos la arista ud_e con la misma capacidad, y por cada arista de la forma du, agregamos la arista d_su con la misma capacidad. Además, agregamos la arista d_ed_s con capacidad igual a 6. De esta manera, garantizamos que cualquier flujo sobre la red tendrá un valor de entrada a d_e de cuanto mucho 6 unidades que es la restricción que necesitamos imponer sobre la estación de bombeo d.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



5. En cada una de las siguientes redes, utilizar el algoritmo de *Ford-Fulkerson* para encontrar un flujo máximo.

   c) La red del Ejercicio 2, item (d).

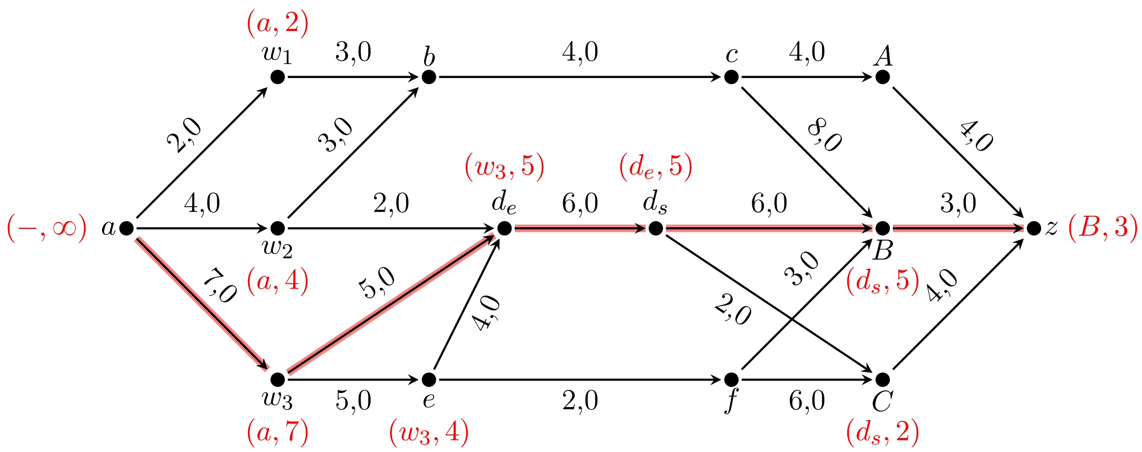
   Resolución:

   Comenzamos con la red del ejercicio 2 (d), con flujo $f(u, v) = 0$ para cada arista uv.

   En cada copia de la red se representan las distintas iteraciones con las respectivas etiquetas de los vértices, y cómo se va modificando el flujo sobre la red en cada una de ellas.

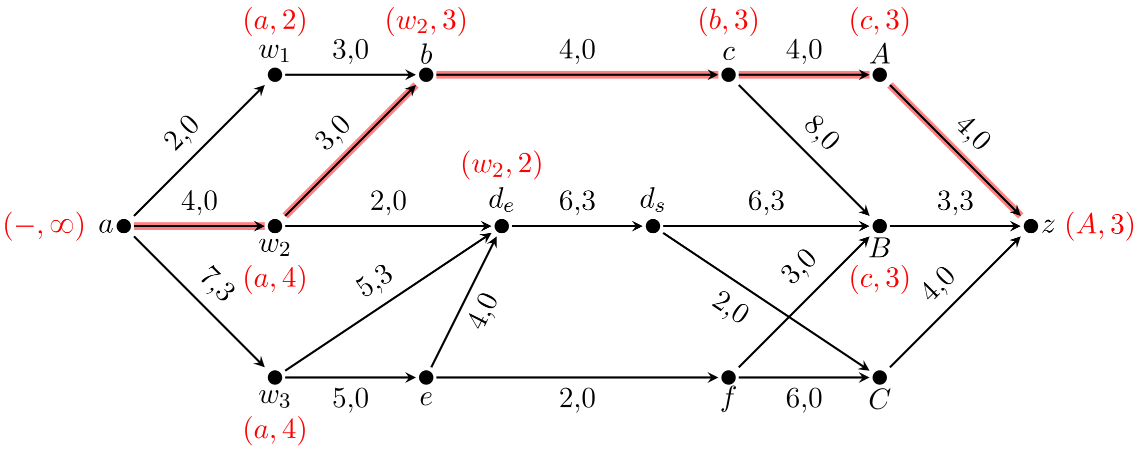
   Iteración 1:

   El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: a, w_3, d_e, d_s, B.



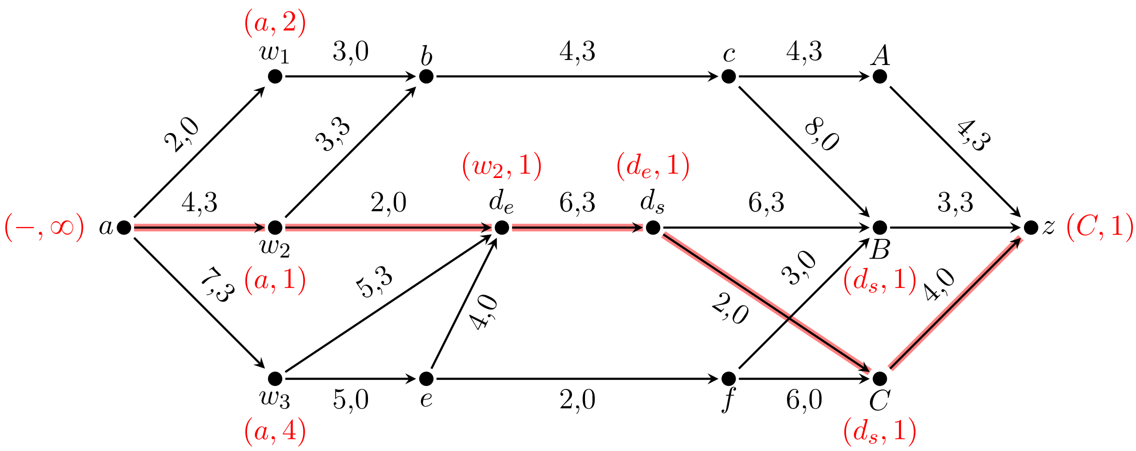
Iteración 2:

El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: a, w_2, b, c, A.

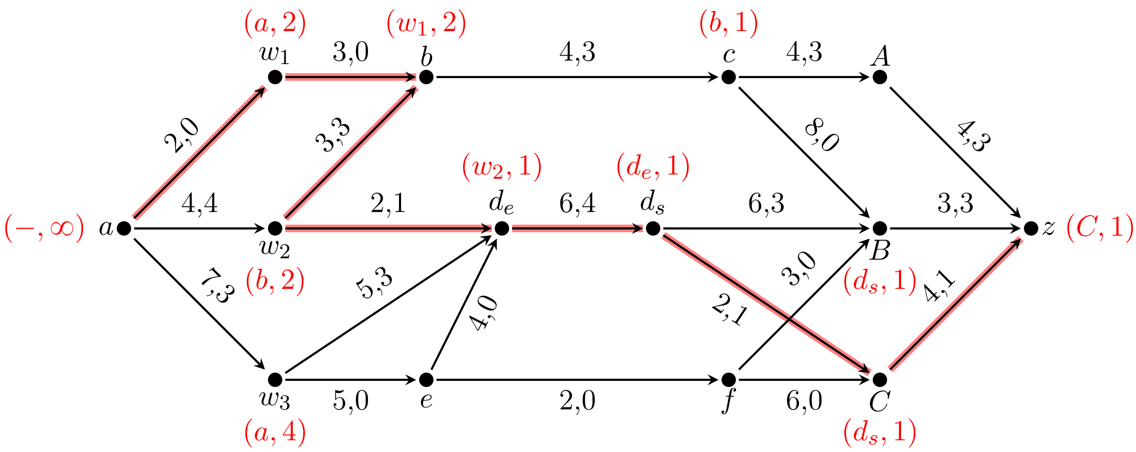


Iteración 3:

El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: a, w_2, d_e, d_s, C.



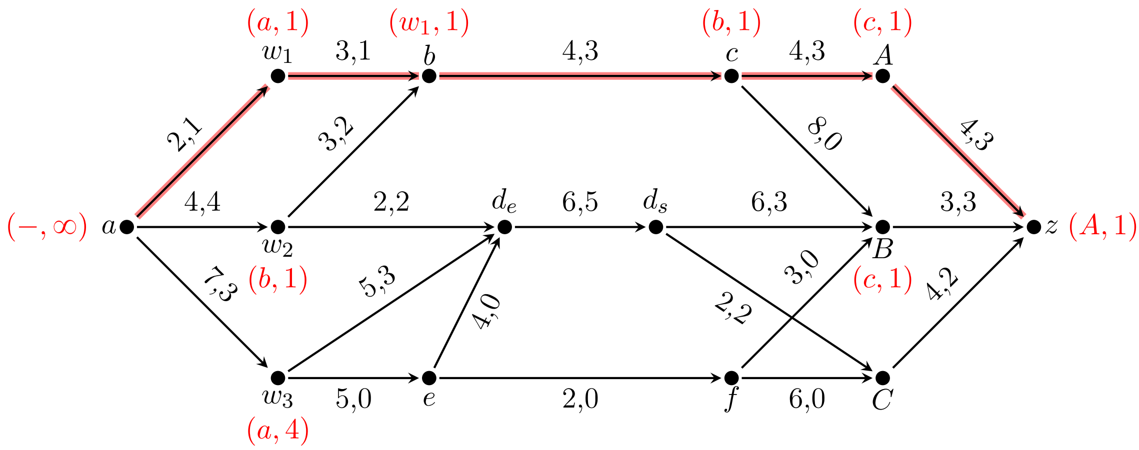
Iteración 4: El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: $a, w_1, b, w_2, d_e, d_s, C$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

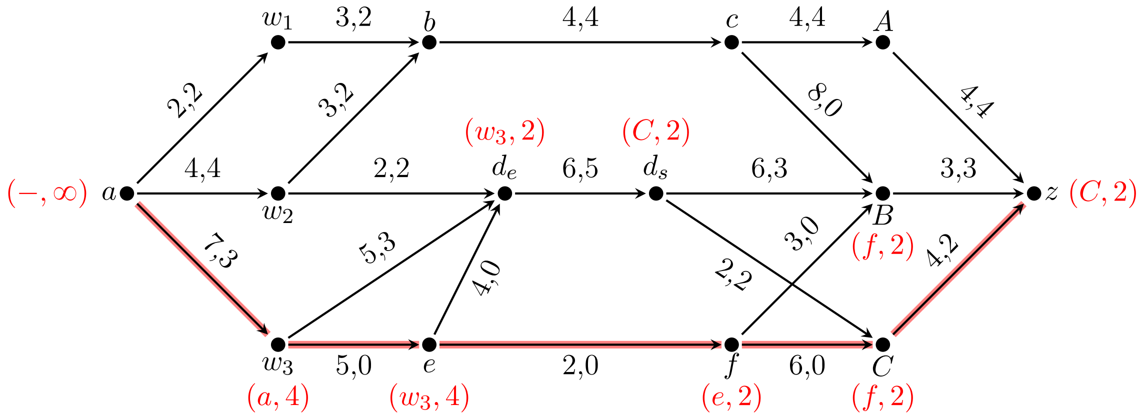
Iteración 5:

El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: a, w_1, b, c, A.



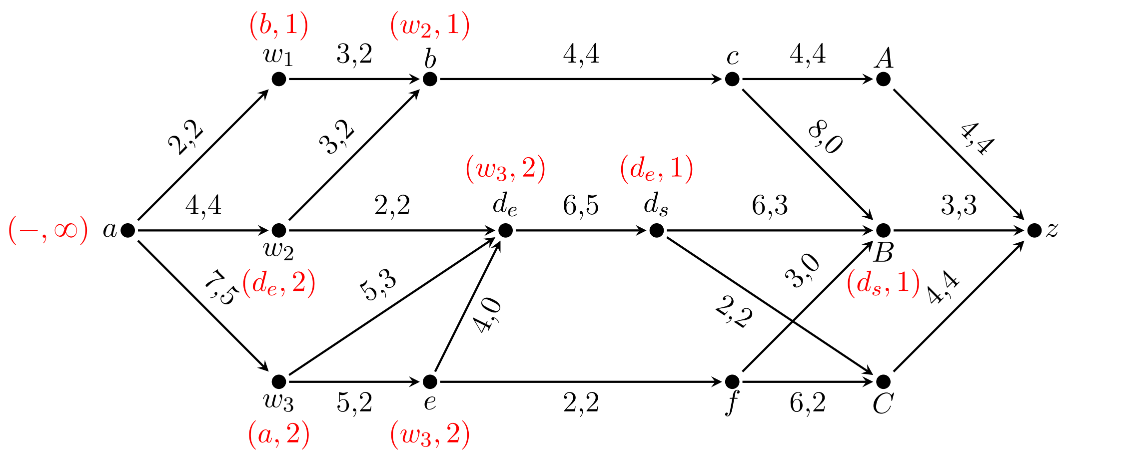
Iteración 6:

El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: a, w_3, e, f, C.



Iteración 7:

El orden en que fueron elegidos los vértices para ser analizados es: $a, w_3, e, d_e, d_s, B, w_2, b, w_1$.



Terminamos de examinar todos los vértices etiquetados pero no hemos etiquetado al vértice z. Entonces el algoritmo termina y el que obtuvimos es un flujo máximo.

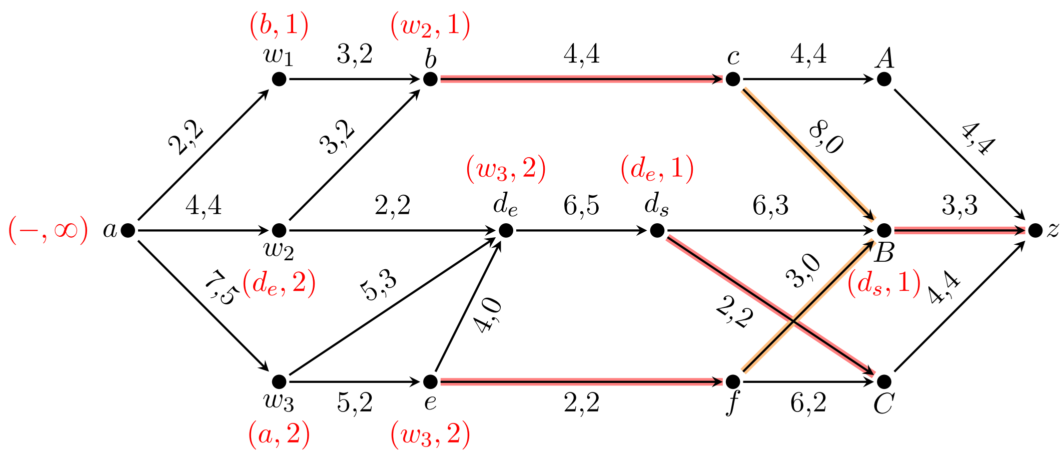
El valor máximo de un flujo para esta red es

$$f(a, w_1) + f(a, w_2) + f(a, w_3) = f(A, z) + f(B, z) + f(C, z) = 11$$

8. Encontrar un corte mínimo en cada una de las redes de los ejercicios 1 y 5.

Resolución:

Recordemos que al finalizar el algoritmo de Ford-Fulkerson, si notamos como S al conjunto de vértices etiquetados en la última iteración, resulta que $(S, \overline{S})$ es un corte para la red. Más aún, es un corte mínimo. En efecto, tenemos:



$S = \{a, w_1, w_2, w_3, b, d_e, d_s, e, B\}$ y la capacidad del corte $(S, \overline{S})$ es

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \notin S} c(u, v) = c(b, c) + c(e, f) + c(d_s, C) + c(B, z) = 4 + 2 + 2 + 3 = 11$$

que coincide con el valor del flujo máximo. Luego, se trata de un corte mínimo.

Notemos que todas las aristas de la forma uv con $u \in S$ y $v \notin S$ están saturadas por el flujo f dado. Es decir, verifican $c(u, v) = f(u, v)$, mientras que todas las aristas de la forma uv con $u \notin S$ y $v \in S$ verifican $f(u, v) = 0$. Recordemos que ésta era una condición necesaria y suficiente para que el corte sea un corte mínimo y el flujo un flujo máximo.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119