Examen Final - 22/07/2024

Apellido y nombre:

Legajo: Carrera:

Parte práctica regulares

1. Considere el conjunto
$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 0\}.$$
   (a) Pruebe que W es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calcule una base $\mathfrak{B}_2$ y la dimensión de W.
   (c) Explique por qué existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_1[x] \to W$ tal que
$$T(1-x) = (2,1,0) \text{ y } T(1+x) = (0,0,0).$$
   Dé explícitamente la ley de T para $p(x) = ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$.
   (d) Calcule la matriz de la transformación T en las bases $\mathfrak{B}_1 = \{1, 1+x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathfrak{B}_2$ (del ítem 1b) de W.

2. En $\mathbb{R}^3$, considere la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$
   (a) Pruebe que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.
   (b) Sea $W = \operatorname{span}\{(1,0,0), (1,1,0)\}$. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales de W y $W^\perp$.
   (c) Sea $v = (4, 2, 1)$. Calcule $\operatorname{proy}_W v$.

3. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcule los autovalores y autovectores de A.
   (b) Determine si A es diagonalizable. Justifique adecuadamente.
      i. En caso afirmativo, halle dos matrices P y D tales que $D = PAP^{-1}$ siendo D una matriz diagonal e indique qué matriz de cambio de base es P, identificando las bases correspondientes.
      ii. Si A no es diagonalizable, halle una forma de Jordan semejante a A.

4. Determine si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   (a) Si U_1, U_2, W son subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$, entonces $U_1 = U_2$.
   (b) La función $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (2x_1 + x_2)(2y_1 + y_2)$ es una forma bilineal simétrica y no degenerada.
   (c) Sea $H = \operatorname{span}\{(-1, 3)\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)$ es una simetría respecto de H.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal

Examen Final - 22/07/2024

Apellido y nombre:

Legajo: Carrera:

Parte teórica

1. Sea V un F-espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Complete las siguientes proposiciones para que sean verdaderas y de una prueba de cada una de ellas:
   (a) span $(S) = \bigcap\{$..$\}$
   (b) S es un subespacio vectorial de V sii ....
2. Defina el concepto de matriz de una transformación lineal. Enuncie y demuestre el teorema que explica su utilidad. De un ejemplo no trivial (puede inspirarse en la parte práctica).
3. Considere la siguiente proposición. Si es verdadera, de una prueba. Si es falsa, de un contraejemplo y corríjala de modo que sea verdadera, y de una prueba.

   Sea V un F-espacio vectorial con producto interno y sea $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un subconjunto ortogonal de V. Entonces S es linealmente independiente.
4. Enuncie y demuestre el teorema de Cayley-Hamilton.
5. Pruebe al menos dos de las siguientes afirmaciones.
   (a) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno, y sea $T \in L(V)$ un endomorfismo para el cual existe una base ortonormal B de V tal que $T(B)$ también es base ortonormal de V. Entonces T es una isometría (recordar: isometría significa que preserva la norma).
   (b) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, sea $T \in L(V)$ un endomorfismo ortogonal y $U \subset V$ un subespacio vectorial que es T-invariante. Entonces $U^\perp$ también es $T-$invariante.
   (c) Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, sea B una base ortonormal y sea $T \in L(V)$ un endomorfismo. Entonces $[T^*]_B = ([T]^*)_B$.