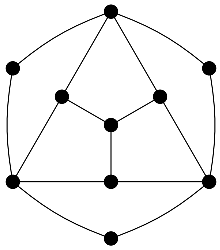
Resolución - Segundo Examen Parcial

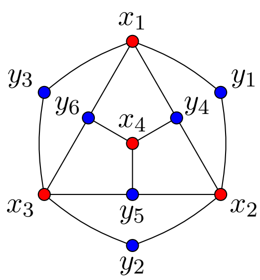
1. Sea G el grafo de la figura:



   a) Calcular $\alpha'(G)$, el máximo cardinal de un matching en G.
   b) Calcular $\beta(G)$, el mínimo cardinal de un cubrimiento de aristas por vértices de G.
   c) Calcular $\alpha(G)$, el máximo cardinal de un conjunto estable de G.
   d) Determinar si G es hamiltoniano. En caso de que no lo sea, determinar si G admite un camino hamiltoniano.

Resolución:

a) Observemos que G es un grafo bipartito, con bipartición (X, Y), donde $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$.

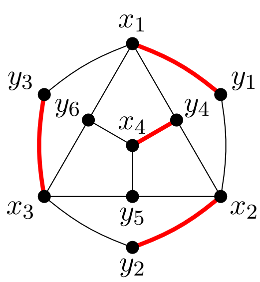


Notemos que toda arista en un matching de G tiene un extremo en X y otro en Y. Luego, un matching en G tiene a lo sumo $\min\{|X|, |Y|\}$ aristas. Luego,

$$\alpha'(G) \leqslant \min\{|X|, |Y|\} = 4 \tag{1}$$

Por otro lado, tenemos que $M = \{x_i y_i : i \in [4]\}$ es un matching de G, y resulta

$$\alpha'(G) \geqslant |M| = 4 \tag{2}$$



Por lo tanto, de (1) y (2) tenemos $\alpha'(G) = 4$.

b) Como ya hemos mencionado en el ítem anterior, G es bipartito. Luego, por el teorema de König-Egerváry, $\beta(G) = \alpha'(G)$. Luego, $\beta(G) = 4$.

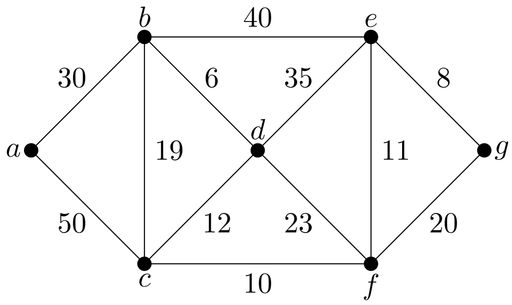
c) Para todo grafo G vale que $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$. En particular, para el grafo del ejercicio tenemos que $|V(G)| = 10$ y, por lo hecho en el ítem anterior, $\beta(G) = 4$. Luego, $\alpha(G) = |V(G)| - \beta(G) = 10 - 4 = 6$ y resulta $\alpha(G) = 6$.

d) Como G es bipartito con bipartición (X, Y) dada en el ítem (a), por el primer ítem ejercicio 7 de la práctica 5, tenemos que si G fuese hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$. Pero como $|X| = 4 \neq 6 = |Y|$, concluimos que G no es hamiltoniano.

Por otro lado, por el segundo ítem del mismo ejercicio, si G admite un camino hamiltoniano, entonces $||X| - |Y|| \leqslant 1$. Pero como $||X| - |Y|| = 2$, G no tiene camino hamiltoniano.

Por lo tanto, el grafo G no tiene ciclo ni camino hamiltoniano.

2. En el siguiente grafo G cada vértice representa el aeropuerto de una ciudad y las aristas indican las posibles rutas aéreas entre dos ciudades. El peso de cada arista representa el costo del viaje respectivo.



a) Determinar una ruta (posiblemente con escalas) con costo mínimo desde el aeropuerto a a cada uno de los restantes.

b) Por recortes presupuestarios, se decide cancelar algunas de las rutas aéreas, pero garantizando que entre dos ciudades cualesquiera, exista una ruta que las conecte (posiblemente con escalas). El costo de mantenimiento de cada tramo es proporcional al costo del viaje correspondiente. ¿Cuál es el mínimo costo de mantenimiento de la red de aeropuertos resultante?

Resolución:

a) Observemos que determinar la ruta aérea de costo mínimo desde el aeropuerto a a los restantes es determinar, en el grafo ponderado G, un camino de longitud mínima entre el vértice a y cada uno de los restantes. (Las escalas son los vértices internos de estos caminos)

Lo haremos mediante el algoritmo de Dijkstra. En la siguiente tabla, resumimos las iteraciones realizadas.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a	b	c	d	e	f	g
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
	$(30,a)$	$(50,a)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
		$(49,b)$	$(36,b)$	$(70,b)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
		$(48,d)$		$(70,b)$	$(59,d)$	$(\infty,-)$
				$(70,b)$	$(58,c)$	$(\infty,-)$
				$(69,f)$		$(78,f)$
						$(77,e)$

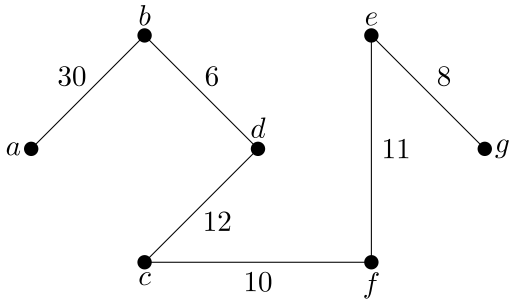
Las rutas obtenidas desde a a cada uno de los aeropuertos restantes son las siguientes:

Aeropuerto	Ruta	Costo
b	$a-b$	30
c	$a-b-d-c$	48
d	$a-b-d$	36
e	$a-b-d-c-f-e$	69
f	$a-b-d-c-f$	58
g	$a-b-d-c-f-e-g$	77

b) Notemos que queremos elegir un conjunto de viajes directos (aristas) entre aeropuertos, de manera que entre dos aeropuertos cualesquiera, exista una ruta que los conecte. Es decir, queremos obtener un subgrafo recubridor de G que sea conexo. Además, como queremos que tenga el menor costo de mantenimiento posible, el subgrafo resultante va a ser acíclico, ya que si hay un ciclo hay al menos una arista que no es de corte que, al eliminarla, el grafo sigue siendo conexo y de costo menor. Es decir, el subgrafo que buscamos es un árbol.

Luego, la pregunta del enunciado se puede traducir a encontrar el peso mínimo de un árbol recubridor para G.

Usaremos el algoritmo de Kruskal, que devuelve un árbol recubridor de peso mínimo. El orden en que agregamos las aristas es: bd (de peso 6), eg (de peso 8), cf (de peso 10), ef (de peso 11), cd (de peso 12), ab (de peso 30). El árbol obtenido es



y tiene peso 77.

Por lo tanto, el costo mínimo de mantenimiento de la red de aeropuertos es el costo de mantener las rutas indicadas.

3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si G es un grafo hamiltoniano, entonces admite un matching perfecto.

b) Sea T un árbol de n vértices y sea k el tamaño máximo de un conjunto estable de T. Luego $\alpha'(T) = n - k$.

c) Si G es un grafo con $|E(G)| > |V(G)| - 1$, entonces G tiene al menos un ciclo.

d) Si T es un árbol binario completo con 32 hojas, entonces $|E(T)| = 63$.

Resolución:

a) Consideremos el ciclo C_n con n impar. C_n es hamiltoniano pero no tiene matching perfecto ya que tiene una cantidad impar de vértices.

Por lo tanto, el enunciado es **FALSO**.

b) Sea T un árbol con $|V(T)| = n$ y $\alpha(T) = k$. Como T es un árbol, por el ejercicio 3 de la práctica 6, T es bipartito. Luego, por el teorema de König-Egerváry,

$$\alpha'(T) = \beta(T).$$

Por otro lado, como para todo grafo G vale $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$, resulta que

$$\beta(T) = |V(T)| - \alpha(T) = n - k.$$

Luego, tenemos que $\alpha'(T) = \beta(T) = n - k$.

Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

c) Sea G un grafo con $|E(G)| > |V(G)| - 1$. Supongamos que G es acíclico. Luego, por el teorema de caracterización de árboles, resulta que G no es conexo. (de lo contrario G es un árbol y $|E(G)| = |V(G)| - 1$)

Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G, con $k \geqslant 2$. Como G es acíclico, G_i es acíclico para cada $i \in [k]$. Luego, G_i es un árbol para cada $i \in [k]$, y nuevamente por el teorema de caracterización de árboles resulta que $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$ para cada $i \in [k]$.

Por otro lado, notemos que $|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)|$ y $|V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)|$. Luego, tenemos que

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| - k = |V(G)| - k \leqslant |V(G)| - 2.$$

Luego, tenemos que $|V(G)| - 1 < |E(G)| \leqslant |V(G)| - 2$, y llegamos a una contradicción ya que $|V(G)| - 2 < |V(G)| - 1$.

La contradicción surge de suponer que G es acíclico. Concluimos entonces que G tiene al menos un ciclo.

Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

d) Sea T un árbol binario completo con $l = 32$ hojas. Sabemos que la cantidad de vértices internos i de T es $i = l - 1 = 31$. Luego T tiene $|V(T)| = i + l = 63$ vértices, y como T en un árbol, la cantidad de aristas de T es $|E(T)| = |V(T)| - 1 = 62$.

Por lo tanto, el enunciado es **FALSO**.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

4. Sea H un subgrafo de $K_{n,n}$ con más de $(k-1)n$ aristas. Probar que $\alpha'(H) \geqslant k$.

Resolución (1):

Sea H un subgrafo del grafo bipartito completo $K_{n,n}$ con más de $(k-1)n$ aristas. Notemos que, al ser subgrafo de un grafo bipartito, H es bipartito. Además, $\Delta(H) \leqslant \Delta(K_{n,n}) = n$.

Como H es bipartito, por el teorema de König-Egerváry, tenemos que $\alpha'(H) = \beta(H)$.

Por otro lado, sea C un cubrimiento de aristas por vértices de G con cardinal mínimo. Es decir, con $|C| = \beta(H)$. Notemos que cada vértice $u \in C$ "cubre" a lo sumo $d(u)$ aristas, las que inciden en u. Como C cubre a todas las aristas de H, resulta que $\sum_{u\in C} d(u) \geqslant |E(H)|$. Entonces, tenemos que

$$|E(H)| \leqslant \sum_{u\in C} d(u) \leqslant \sum_{u\in C} \Delta(H) = |C|\Delta(H) \leqslant |C|n = \beta(H)n = \alpha'(H)n.$$

Luego, como $|E(H)| > (k-1)n$, tenemos que $\alpha'(H)n > (k-1)n$, y resulta $\alpha'(H) > k-1$.

Como $\alpha'(H)$ es un número natural, tenemos que $\alpha'(H) \geqslant k$, como queríamos probar.

Resolución (2):

Probaremos el enunciado por inducción sobre k.

En primer lugar, consideremos $k = 1$. Sea H un subgrafo de $K_{n,n}$ con más de $(k-1)n = 0$ aristas. Luego, H tiene al menos una arista e. $M = \{e\}$ es un matching de H, luego $\alpha'(H) \geqslant |M| = 1 = k$. Por lo tanto, queda probado el caso base.

Supongamos que el enunciado es válido para un cierto valor k. Es decir que si H es un subgrafo de $K_{n,n}$ con más de $(k-1)n$ aristas, entonces $\alpha'(H) \geqslant k$.

Sea ahora $H'[X,Y]$ un subgrafo de $K_{n,n}$ (con $|X| \leqslant n$ y $|Y| \leqslant n$) con más de $((k+1)-1)n = kn$ aristas. Queremos probar que $\alpha'(H') \geqslant k+1$.

Notemos que $\Delta(H') \leqslant \Delta(K_{n,n}) = n$, y además H' tiene al menos un vértice $w \in X$ con grado $d(w) \geqslant k+1$. De lo contrario, si para todo $v \in X$ vale $d(v) \leqslant k$, entonces

$$kn < |E(H')| = \sum_{v\in X} d(v) \leqslant \sum_{v\in X} k \leqslant |X|k \leqslant kn,$$

y llegamos a que $kn < kn$, que es absurdo.

Luego, existe un vértice $w \in V(H')$ con $k+1 \leqslant d(w) \leqslant n$. Consideremos el grafo $H'-w$. $H'-w$ es subgrafo de $K_{n,n}$ y $|E(H'-w)| = |E(H')| - d(w) \geqslant |E(H')| - n > kn - n = (k-1)n$. Es decir, tiene más de $(k-1)n$ aristas. Luego, por hipótesis inductiva, $\alpha'(H'-w) \geqslant k$.

Sea M un matching de $H'-w$ de cardinal $|M| = k$. Notemos que como M es un matching de $H'-w$, ninguna arista de M incide en w. Además, como cada arista del matching tiene un extremo en X y otro en Y, hay exactamente k vértices de Y saturados por M. Como $d(w) \geqslant k+1$, y todos los vecinos de w están en Y, existe al menos un vértice u vecino de w que no está saturado por M. Luego, $M' = M \cup \{wu\}$ es un matching de H' de cardinal $k+1$, y resulta que $\alpha'(H') \geqslant k+1$.

Por lo tanto, hemos probado por inducción el enunciado.