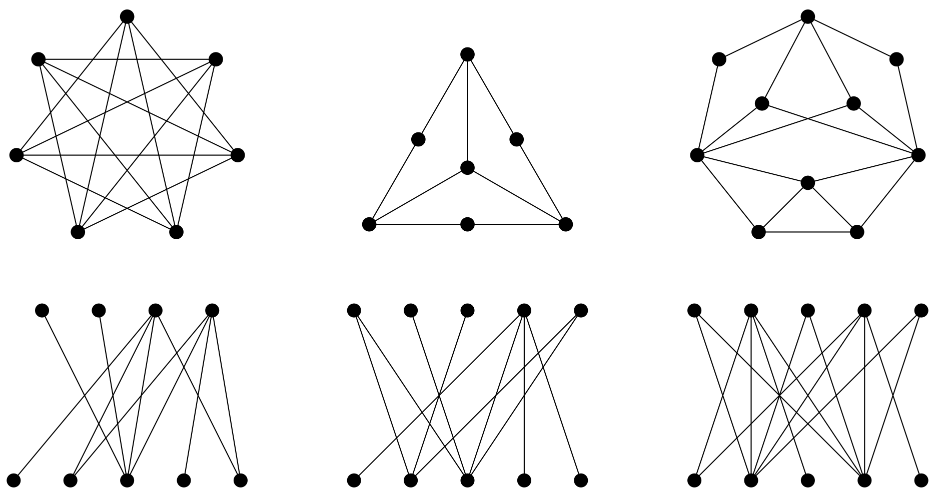
# Práctica 7 - Matching

1. Las personas A, B, C, D y E son integrantes de un grupo de investigación y presentarán 4 trabajos distintos en un congreso. A, C y D son autores del trabajo 1. C y E son autores del trabajo 2. A, D y E son autores del trabajo 3. Y A, B, C y E son autores del trabajo 4. Cada trabajo será expuesto por exactamente uno de sus autores y cada persona presentará a lo sumo un trabajo.

   Modelar esta situación como un problema de asignación y hallar la cantidad máxima de trabajos que podrá presentar este grupo de investigación.

2. Hallar un matching máximo en cada uno de los siguientes grafos:



3. Determinar para qué valores de $n$ (o $n$ y $m$ si corresponde) los siguientes grafos admiten matching perfecto.

   *a*) El grafo completo $K_n$, con $n \in \mathbb{N}$.
   *b*) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.
   *c*) El ciclo $C_n$, con $n \geqslant 3$.
   *d*) El camino $P_n$, con $n \in \mathbb{N}$.
   *e*) El grafo rueda $W_n$, con $n \geqslant 3$.
   *f*) El $n$-cubo $Q_n$, con $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $G$ un grafo con $\Delta(G) \leqslant 2$. Probar que cada componente conexa no trivial de $G$ es un camino o un ciclo.

5. Sea $G$ un grafo, y sea $S \subseteq V(G)$ un conjunto de vértices saturado por un matching de $G$. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones.

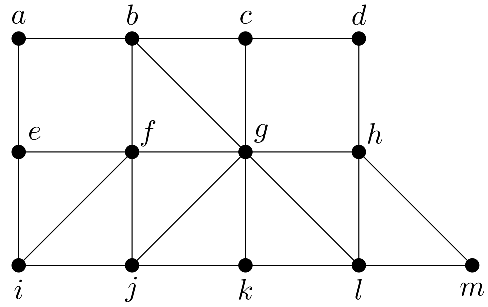
   *a*) Existe algún matching máximo de $G$ que satura a $S$.
   *b*) Todo matching máximo de $G$ satura a $S$.

6. Probar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

7. Sea $k \in \mathbb{N}$. Determinar la cantidad de matchings perfectos distintos que tienen los siguientes grafos.

   a) El grafo completo $K_{2k}$.
   b) El grafo bipartito completo $K_{k,k}$.
   c) El grafo ciclo $C_{2k}$.
   d) El grafo rueda $W_{2k+1}$.

8. Sea $G = (V, E)$ el grafo de la figura y $M \subseteq E$ el matching definido por $M = \{\{a, e\}, \{c, d\}, \{h, m\}\}$. Hallar un camino $M$-aumentante y redefinir el matching a partir de dicho camino, aumentando su cardinal. Repetir el procedimiento hasta obtener un matching máximo.




9. Sean $M_1$ y $M_2$ dos matchings de un grafo simple $G$ con $|M_1| > |M_2|$. Probar que existen matchings $M_1'$ y $M_2'$ tales que $|M_1'| = |M_1| - 1$, $|M_2'| = |M_2| + 1$, $M_1' \cup M_2' = M_1 \cup M_2$ y $M_1' \cap M_2' = M_1 \cap M_2$.

10. Sea $G$ un grafo bipartito conexo con bipartición $(X, Y)$ tal que $d(v) \neq d(w)$ para todo par de vértices $v, w \in X$. Demostrar que existe un matching que satura a $X$.

11. Sea $G$ un grafo bipartito. Probar que $\alpha(G) = \dfrac{|V(G)|}{2}$ si y sólo si $G$ tiene un matching perfecto.

12. Hallar un cubrimiento de aristas por vértices mínimo para cada grafo del ejercicio 2.

13. Sea $G$ un grafo simple. Probar los siguientes enunciados:

   a) $S$ es un conjunto independiente de $G$ si y sólo si $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices de $G$.
   b) $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$, donde $\alpha(G)$ es el máximo cardinal de un conjunto independiente de $G$ y $\beta(G)$ es el mínimo cardinal de un cubrimiento por vértices de $G$.
   c) $\beta(G') \leqslant \beta(G)$ para todo $G' \subseteq G$ subgrafo inducido de $G$.

14. Determinar $\beta(G)$ para cada uno de los grafos del ejercicio 3

15. Probar que el número de matching de un grafo $G$ es igual al número de estabilidad del grafo de línea de $G$. Es decir, $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$.

16. a) Para $k = 2, 3$, determinar si existe un grafo simple $k$-regular sin matching perfecto que tenga una cantidad par de vértices.
    b) Para cada $k \geqslant 4$, construir un grafo simple $k$-regular sin matching perfecto.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

17. Sea $G$ un grafo simple sin vértices aislados. Probar que $G$ tiene un matching $M$ tal que

$$|M| \geqslant \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}.$$

*Sugerencia:*

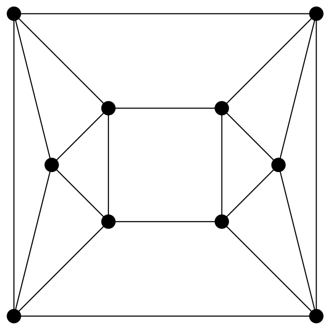
*a)* *Probar el enunciado para un árbol $G$ con $|V(G)| \geqslant 2$, usando el teorema de König-Egerváry.*
*b)* *Probar el enunciado para un grafo simple conexo $G$ con $|V(G)| \geqslant 2$, recordando que todo grafo conexo tiene un árbol recubridor.*
*c)* *Finalmente, probar el enunciado para todo grafo $G$ simple sin vértices aislados.*

18. Un *$k$-factor* de un grafo $G$ es un subgrafo $k$-regular recubridor de $G$. Así, las aristas de un 1-factor de un grafo $G$ forman un matching perfecto de $G$.

Además, se dice que $G$ es $k$-factoreable si existen $k$-factores $H_1, \ldots, H_r$ con aristas disjuntas tales que

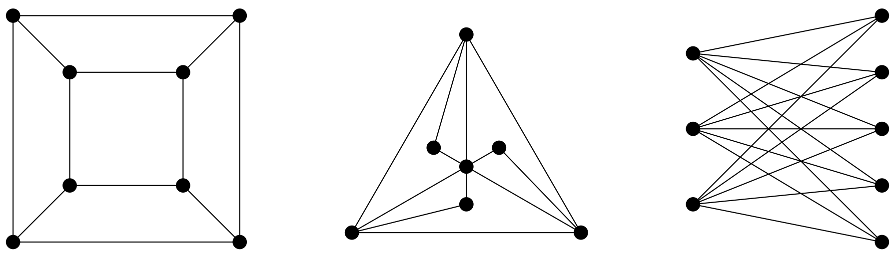
$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} E(H_i)$$

*a)* Para el siguiente grafo, dar un $k$-factor para cada $k$ en $\{1, 2, 3, 4\}$.



*b)* Probar que el grafo de Petersen tiene un 1-factor pero no es 1-factoreable.
*c)* Probar que $K_{n,n}$ es 1-factoreable para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. ¿Cuáles de los siguientes grafos admiten 1-factores? ¿Son 1-factoreables?



20. *a)* Sea $G$ un grafo. Probar que si $G$ es 1-factoreable, entonces $G$ no tiene vértices de corte.
*b)* Dibujar un grafo simple conexo y 3-regular que tenga un 1-factor y un vértice de corte.
*c)* Explicar por qué el grafo del ítem (b) no contradice lo probado en el ítem (a).