Ej 2 - Pract. 6

2. (a) Aplicar el teorema de Gerschgorin para mostrar que las raíces r de $p(\lambda)$ verifican que

$$|r| \le 1 \qquad o \qquad |r + a_{n-1}| \le |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$$

(b) Teniendo en cuenta que A y A^T tienen los mismos autovalores, usar el teorema de Gerschgorin sobre las columnas de A para obtener otras cotas para las raíces de $p(\lambda)$.

(c) Acotar las raíces de los siguientes polinomios:

i) $\lambda^{10} + 8\lambda^9 + 1 = 0$ *ii)* $\lambda^6 - 4\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$

Sea $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. Definimos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad \lambda Id - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & \boxed{-1} \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ +p(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede probar (ejercicio o me lo piden)

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = (-1)^n p(\lambda)$$

λ autovalor de A $\Leftrightarrow$ $p(\lambda) = 0$

Por Gerschgorin,

- $|r - 0| \le 1$
- $|r - (-a_{n-1})| \le \sum_{i=0}^{n-2} |-a_i|$

Ejemplificamos para un sistema de 3×3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} 1°$$

L: triang. inf, 1's diagonal

U: triang. sup.

$A = LU$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\ & & & 0 & 0 & u_{33} \\ \hline 1 & 0 & 0 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ m_{21} & 1 & 0 & u_{11} \cdot m_{21} & \boxed{}\ * & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & u_{11} m_{31} & & \end{array} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & & \end{bmatrix}$$

$$u_{11} \cdot m_{i1} = a_{i1}$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

$$* \begin{cases} u_{12} \cdot m_{21} + u_{22} = a_{22} \\ u_{13} \cdot m_{21} + u_{23} = a_{23} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{22} = a_{22} - u_{12} m_{21} \\ u_{23} = a_{23} - u_{13} m_{21} \end{cases}$$

$$l_{ii}u_{ij} = u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

3) Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se llaman menores principales de A a los números M_i que son los determinantes de las submatrices de A formadas por las primeras i filas y las primeras i columnas de A. Es claro que $M_1 = a_{11}$ y $M_n = |A| = \det(A)$. Una matriz A es definida positiva si es simétrica y se cumple que sus menores principales son positivos.

Considerar el sistema $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz de iteración del método de Jacobi

b) Hallar los autovalores de la matriz del ítem anterior y probar, en este caso particular, que si la matriz A es simétrica y definida positiva, entonces el método de Jacobi converge.

a) $D = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{I - D^{-1}A}_{= N} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 \end{pmatrix}$

b) $P_N(\lambda) = \det(I\lambda - N) = \det\begin{pmatrix} \lambda & a_{12}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & \lambda \end{pmatrix}$

$$= \lambda^2 - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}} \underset{\substack{A \text{ sim.} \\ a_{12} = a_{21}}}{=} \lambda^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}$$

$$\therefore \lambda = \pm \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

A es def. pos.

- $a_{11} > 0$
- $\det(A) > 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$

$$\Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}^2$$

$$1 > \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Escribir un programa en Scilab que resuelva específicamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss Seidel para cualquier valor de n.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \boxed{2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que la solución exacta es $x_i = -n/4 + i/2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

a) Obtener la fórmula iterativa del método de Gauss-Seidel para el sistema dado. Resolver para $n = 20$ partiendo de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Contar el número de iteraciones.

$$x^{(k)} \longrightarrow x_n^{(k+1)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(0 + 1 \cdot x_2^{(k)} - x_n^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(0 - (-1)x_{i-1}^{(k+1)} - (-1)x_{i+1}^{(k)}\right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_1^{(k+1)} - (-1)x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

3. Dada la siguiente matriz $A(\varepsilon)$, para $\varepsilon = 0.1k$ con $k = 0, 1, \dots, 10$:

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Utilizar los comandos adecuados de SCILAB para:

i) encontrar el polinomio característico y aproximar sus raíces

ii) hallar los autovalores de $A(\varepsilon)$.