Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9)
2024

4.5 Forma de Jordan de una transformación lineal nilpotente

Consideremos la siguiente situación: V F-ev, $T \in L(V)$ tal que $\chi_T(X) = X^k$ p.a. $k \in \mathbb{N}_0$.

Por Cayley-Hamilton sabemos que entonces $m_T(X) = X^{k'}$, con $k' \leq k$. Más aún, T tiene sólo un autovalor, $\lambda = 0$.

Así, $T^{k''} \equiv 0$ (es decir, es la transformación nula) para algún $k'' \in \mathbb{N}$.

Definición 1 *V F-ev, $T \in L(V)$ se dice que es **nilpotente** si existe $k \in \mathbb{N}$ tq $T^k \equiv 0$. En tal caso, si $k = min\{j \in \mathbb{N} : T^j \equiv 0\}$, decimos que T **es k pasos nilpotente** y que k es el **índice de nilpotencia**.*

La versión matricial es:

Definición 2 *$A \in F^{n\times n}$ es **nilpotente** si existe $k \in \mathbb{N}$ tq $A^k = \mathbf{0}_{n\times n}$. En tal caso, si $k = min\{j \in \mathbb{N} : A^j = \mathbf{0}_{n\times n}\}$, decimos que A **es k pasos nilpotente** y que k es el **índice de nilpotencia**.*

Observaciones 1 *En el caso finito, T nilpotente sii para cualquier base B de V se tiene que $[T]_B$ es nilpotente.*

Lema 1 *V F-ev, $dim(V) = n < \infty$, $T \in L(V)$. Ents. T es k pasos nilpotente sii $m_T(X) = X^k$.*

Demostración: $\Rightarrow$) T es k pasos nilpotente, luego $T^k \equiv 0$ y $T^{k-1} \not\equiv 0$.

Si $p(X) = X^k$ entonces $p(T) = T^k \equiv 0$, luego $m_T(X)|X^k$, de donde $m_T(X) = X^j$, $j \leq k$.

Si $q(X) = X^{k-1}$ entonces $q(T) = T^{k-1} \not\equiv 0$.

De lo anterior sigue que $m_T(X) = X^k$.

$\Leftarrow$) Si $m_T(X) = X^k$, entonces $T^k \equiv 0$ y $T^{k-1} \not\equiv 0$ (por ser m_T el minimal). Luego T es k pasos nilpotente.

$\square$

Observaciones 2 *$gr(m_T) \leq n = dim(V)$, luego T nilpotente sii $T^n \equiv 0$.*

Proposición 1 *V F-ev, $dim(V) = n < \infty$, $T \in L(V)$ k pasos nilpotente. Ents.*

$$\{\overline{0}\} \subsetneq ker(T) \subsetneq ker(T^2) \subsetneq \cdots \subsetneq ker(T^k) = V.$$

Demostración: - T es k pasos nilpotente, luego $ker(T^k) = V$.

- $ker(T^j) \subset ker(T^{j+1})$ (EJERCICIO).

- Falta ver que las inclusiones son estrictas:

Sea $0 \leq j$. Si $ker(T^j) = ker(T^{j+1})$, entonces $ker(T^{j+1}) \supset ker(T^{j+2})$. En efecto, si $v \in ker(T^{j+2})$

$$\begin{aligned} T^{j+2}v &= \overline{0} \\ T^{j+1}(Tv) &= \overline{0} \\ T^j(Tv) &= \overline{0} \text{ puesto que } ker(T^{j+1}) = ker(T^j), \\ T^{j+1}(v) &= \overline{0} \end{aligned}$$

luego $v \in ker(T^{j+1})$. Sigue que si $ker(T^j) = ker(T^{j+1})$ entonces $ker(T^j) = ker(T^{j+1}) = ker(T^{j+2})$, y más aún $ker(T^i) = ker(T^{i+1})$ p.t. $i \geq j$. Como T es k pasos, $ker(T^{k-1}) \neq V = ker(T^k)$. Luego $j \geq k$. Esto quiere decir que si alguna de las inclusiones no fuera estricta, y se diera la igualdad, es porque j es mayor o igual a k, luego no es ningún elemento de la cadena de contenciones.

□

Matricialmente, esta proposición se traduce en:

Proposición 2 *$A \in F^{n \times n}$ k pasos nilpotente. Ents.*

$$\{\overline{0}\} \subsetneq N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq \cdots \subsetneq N(A^k) = F^n.$$

Consideremos ahora la siguiente situación: V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ n pasos nilpotente.

Entonces $m_T(X) = \chi_T(X) = X^n$ y $T^{n-1} \not\equiv 0$ existe $v \in V$ t.q. $T^{n-1}v \neq \overline{0}$, luego $v \in V \backslash ker(T^{n-1})$.

Como $m_v | m_T$ debe ser $m_v(X) = X^k$, con $1 \leq k \leq n$. Y como $T^{n-1}v \neq \overline{0}$, debe ser $m_v(X) = X^n$.

Luego, $B = \{v, Tv, T^2v, \ldots, T^{n-1}v\}$ base de V. Además,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 3 *$J \in F^{n \times n}$ es un bloque de Jordan nilpotente si*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $ran(J) = n - 1$.

Veremos que para toda transformación lineal nilpotente en un ev de dimensión finita, existe una base donde la matriz de la transformación lineal esté formada por bloques de Jordan nilpotentes ubicados sobre la diagonal, y ceros en las demás posiciones. Más aún, veremos que esta disposición es única.

Antes de dar el resultado estableceremos un lema técnico:

Desafío 1 *El siguiente lema es un lema técnico. Es difícil de interpretarlo, y es un desafío.*

Lema 2 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$, $i \in \mathbb{N}$. Sea $C = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ un conjunto li tq*

$$ker(T^i) \cap span(C) = \{\overline{0}\}.$$

Entonces $T(C)$ es li y

$$ker(T^{i-1}) \cap span(T(C)) = \{\overline{0}\}.$$

Demostración: Tenemos que $T(C) = \{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ y $span(T(C)) = span\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$. Sea $v \in ker(T^{i-1}) \cap span(T(C))$. Entonces $v = \alpha_1 Tv_1 + \dots \alpha_r Tv_r \in ker(T^{i-1})$ y $T^{i-1}v = \overline{0}$. Luego $\overline{0} = T^{i-1}v = \alpha_1 T^i v_1 + \dots \alpha_r T^i v_r = T^i(\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_r v_r) = T^i(w)$, con $w = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_r v_r \in ker(T^i) \cap span\{v_1, \dots, v_r\} = \{\overline{0}\}$, y puesto que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es li, sigue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ y por lo tanto $v = \overline{0}$ y más aún, $\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ es li.

□

Desafío 2 *El siguiente teorema es muy importante, y nos dará un algoritmo. Es muchísimo más técnico, mucho más difícil de interpretarlo, y es el mayor desafío de toda la asignatura.*

Teorema 1 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ k pasos nilpotente. Entonces existe una base B de V tal que*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in F^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Observemos que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Además, en tal caso, la base se dice **base de Jordan** y la matriz de la tl en dicha base se dice que es la **forma de Jordan** de la tl.

Demostración.

Como T es k pasos nilpotente,

$$\{\overline{0}\} \subsetneq ker(T) \subsetneq ker(T^2) \subsetneq \dots \subsetneq ker(T^k) = V.$$

Vamos a construír la base buscada usando el lema anterior bajando el índice desde $j = k$ hasta $j = 1$.

- Sea B_{k-1} base de $ker(T^{k-1})$.

- Completamos B_{k-1} con un conjunto li $C_k = \{v_1^{(k)}, \dots, v_{r_k}^{(k)}\} \subset ker(T^k) = V$ de modo que $B_{k-1} \cup C_k$ sea una base de $ker(T^k) = V$. Así,

$$ker(T^{k-1}) \oplus span(C_k) = \ker(T^k) = V.$$

- Por el lema anterior, $T(C_k) \subset ker(T^{k-1})$ es un conjunto li y

$$ker(T^{k-2}) \cap T(C_k) = \{\overline{0}\}.$$

- Sea B_{k-2} base de $ker(T^{k-2})$.

- Completamos B_{k-2} con un conjunto li $C_{k-1} = T(C_k) \cup \{v_1^{(k-1)}, \dots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\} \subset ker(T^{k-1})$ de modo que $B_{k-2} \cup C_{k-1}$ sea una base de $ker(T^{k-1})$. Así,

$$ker(T^{k-2}) \oplus span(C_{k-1}) = \ker(T^{k-1}).$$

- Luego $ker(T^{k-2}) \oplus span(C_{k-1}) \oplus span(C_k) = V$.

y aplicamos el lema anterior nuevamente ...

Sea $1 \leq j < k$. Hagamos el paso $j-$ésimo de la recursión. Supongamos que ya hemos construído

$$C_{j+1} \subset ker(T^{j+1}), \dots, C_k \subset ker(T^k) \qquad \text{tales que:}$$

- $T(C_h) \subset C_{h-1}$ p.t. $j+2 \leq h \leq k$,

- $ker(T^j) \oplus span(C_{j+1}) = ker(T^{j+1})$,

- $ker(T^j) \oplus span(C_{j+1}) \oplus \cdots \oplus span(C_k) = V$.

Por el lema anterior,

- $T(C_{j+1}) \subset ker(T^j)$ li y

- $ker(T^{j-1}) \cap span(T(C_{j+1})) = \{\bar{0}\}$.

Y proseguimos como antes:

- Sea B_{j-1} una base de $ker(T^{j-1})$.

- Completamos B_{j-1} con un conjunto li $C_j = T(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset ker(T^j)$ de modo que $B_{j-1} \cup C_j$ sea una base de $ker(T^j)$. Así,

$$ker(T^{j-1}) \oplus span(C_j) = \ker(T^j).$$

- Luego $ker(T^{j-1}) \oplus span(C_j) \oplus \cdots \oplus span(C_k) = V$.

Completando la recursión obtendremos

$$span(C_1) \oplus \cdots \oplus span(C_k) = V,$$

donde cada C_j es li, $1 \leq j \leq k$. Luego $B = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ es la base buscada.

Precisamente,

$$\begin{aligned} B = \{ & v_1^{(k)}, Tv_1^{(k)}, \dots, T^{k-1}v_1^{(k)}, \dots, \\ & v_{r_k}^{(k)}, Tv_{r_k}^{(k)}, \dots, T^{k-1}v_{r_k}^{(k)}, \dots, \\ & v_1^{(j)}, Tv_1^{(j)}, \dots, T^{j-1}v_1^{(j)}, \dots, \\ & v_{r_j}^{(j)}, Tv_{r_j}^{(j)}, \dots, T^{j-1}v_{r_j}^{(j)}, \dots, \\ & v_1^{(1)}, \dots, v_{r_1}^{(1)}\}. \end{aligned}$$

Sigue que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}.$$

□

Matricialmente:

Definición 4 *$A \in F^{n \times n}$ es una forma de Jordan nilpotente si*

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in F^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

El teorema dice que para toda tl nilpotente en un ev de dimensión finita, existe una base donde su matriz es una forma de Jordan nilpotente.

Teorema 2 *$A \in F^{n\times n}$ nilpotente. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente. Si B es una base de F^n tq $[T_A]_B = J_A$ es una forma de Jordan nilpotente, la llamamos **base de Jordan para** A y J_A es la forma de Jordan de A.*

Ejemplos 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Obtener una base de $\mathbb{R}^6$ tq la matriz $[T_A]_B = J_A$ es una forma de Jordan de A.

- Veremos a continuación la unicidad de «la» forma de Jordan.

- Podremos luego decidir si dos matrices nilpotentes son semejantes.

- Para demostrar unicidad probaremos que la cantidad de bloques de Jordan de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan está unívocamente determinada por la transformación lineal.

Lema 3 *$J \in F^{m\times m}$ bloque de Jordan nilpotente. Entonces $ran(J^i) = m - i$ p.c. $1 \leq i \leq m$.*

Demostración: EJERCICIO. Inducir: $J^i = (e_{i+1}^t \ \dots \ e_m^t \ 0 \ \dots \ 0)$, e_j el $j-$ésimo vector de la base canónica de F^n. Vale decir: elevar un bloque de Jordan nilpotente a la potencia i equivale a «bajar» $i-1$ lugares los unos.

Así, $ran(J^i) = dim(span\{e_{i+1}, \dots, e_m\}) = m - i$.

□

Proposición 3 *$A \in F^{n\times n}$ forma de Jordan k pasos nilpotente. Entonces el bloque de Jordan de mayor tamaño que aparece en A es $k \times k$. Además, p.c. $1 \leq i \leq k-1$ la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño mayor que i que aparecen en A es $b_i = ran(A^i) - ran(A^{i+1})$.*

En particular, la cantidad de bloques de Jordan que aparecen en A es $b_0 = n - ran(A) = dim(ker(A))$.

Demostración.

Veamos la primera afirmación. Sea A k pasos nilpotente. Entonces $m_A(X) = X^k$.

Sean $J_1, \dots, J_r$ los bloques de Jordan que aparecen en A, con $J_l \in F^{n_l\times n_l}$, $1 \leq l \leq r$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$. Entonces $m_A(X) = m.c.m.\{m_{J_1}, \dots, m_{J_r}\} = m.c.m.\{X^{n_1}, \dots, X^{n_r}\} = X^{n_1}$.

Luego $k = n_1$.

P.c. $1 \leq i \leq k$ sean:

- c_i: la cantidad de bloques de Jordan nilpotente de tamaño $i \times i$ que aparecen en A,

- b_i: la cantidad de bloques de Jordan de tamaño mahyor que $i \times i$.

Si A está formada por r bloques de Jordan nilpotentes, entonces $ran(A) = n - r$. En efecto:

$ran(A) = \sum_{i=1}^r ran(J_i) = \sum_{i=1}^r n_i - 1 = \sum_{i=1}^r n_i - \sum_{i=1}^r 1 = n - r$.

Así, $b_0 = r$: la cantidad de bloques de Jordan.

Sea ahora $1 \leq i \leq k-1$. Por el lema anterior, si $J \in F^{j\times j}$ es un bloque de Jordan, entonces $J^i = 0_{j\times j}$ si $j \leq i$ o $ran(J^i) = j-i$ si $j > i$.

Además, $ran(A^i) - ran(A^{i+1}) = \sum\limits_{j=i+1}^{k} c_j(j-1) - \sum\limits_{j=i+2}^{k} c_j(j-(i+1)) = \sum\limits_{j=i+1}^{k} c_j = b_i$.

□

Corolario 1 *$A \in F^{n\times n}$ forma de Jordan k pasos nilpotente. Entonces p.c. $1 \leq i \leq k$, la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño $i \times i$ que aparecen en A es*

$$c_i = ran(A^{i+1}) - 2ran(A^i) + ran(A^{i-1}).$$

Demostración: Observemos que $c_k = b_{k-1} = ran(A^{k-1}) - ran(A^k) = ran(A^{k+1}) - 2ran(A^k) + ran(A^{k-1})$, puesto que $A^k = 0_{n\times n}$.

Sea $1 \leq i \leq k-1$. Entonces

$$\begin{aligned} c_i =& b_{i-1} - b_i = \\ =& (ran(A^{i-1}) - ran(A^i)) - (ran(A^i) - ran(A^{i+1})) \\ =& ran(A^{i+1}) - 2ran(A^i) + ran(A^{i-1}). \end{aligned}$$

□

Ejemplos 2 *¿Existe $A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ t.q. $ran(A) = 10$, $ran(A^4) = 3$ y $ran(A^5) = 0$?*

Lema 4 *J, J' formas de Jordan nilpotentes. Si $J \sim J'$ entonces $J = J'$.*

Demostración: Vimos que las cantidades de bloques de Jordan de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan nilpotente dependen sólo de los rangos de sus potencias.

Si $J \sim J'$ entonces p.c. $1 \leq i \leq k$ $ran(J^i) = ran(J'^i)$, por lo tanto tienen las mismas cantidades de bloques de Jordan de cada tamaño, luego deben ser iguales: $J = J'$.

□

Sigue entonces la unicidad para formas de Jordan nilpotentes:

Teorema 3 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ nilpotente. Entonces existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in F^{n\times n}$ t.q. $[T]_B = J$ para alguna base B de V.*

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: B, B' bases de V t.q. $[T]_B = J$ y $[T]_{B'} = J'$. Ents. $J \sim J'$ y usar lema anterior.

□

Matricialmente:

Teorema 4 *$A, B \in F^{n\times n}$ nilpotentes. J, J' formas de Jordan nilpotentes t.q. $A \sim J$ y $B \sim J'$. Entonces $A \sim B$ sii $J = J'$.*

Demostración: EJERCICIO.

□

Ejemplos 3 *1. $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tq $m_A(X) = m_B(X) = X^3$. Veamos que $A \sim B$.*

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$

Veamos que $A \not\sim B$.