Resolución práctica 7 - Matching

$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$.

4) Sea G un grafo con $\Delta(G) \leqslant 2$. Probar que cada componente conexa no trivial de G es un camino o un ciclo.

6) Probar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

   Observación: no se pide demostrar que todo árbol tiene exactamente un matching perfecto, (puede no tener). Hay que probar que no puede tener dos matchings perfectos distintos.

Supongamos que T tiene al menos dos matchings perfectos.

Sean M_1 y M_2 dos de ellos., distintos.

Sea $H = T[M_1 \Delta M_2]$. En H los grados de los vértices son 0 o 2. (Probar).

En toda comp cxa no trivial de H todos sus vértices tienen grado 2.

Por lo tanto es un ciclo, pero eso no puede ocurrir ya que H es un bosque.
T es un árbol.

Luego, todas las comp cxas de H son triviales, es decir $M_1 = M_2$.

9) Sean M_1 y M_2 dos matchings de un grafo simple G con $|M_1| > |M_2|$. Probar que existen matchings M_1' y M_2' tales que $|M_1'| = |M_1| - 1$, $|M_2'| = |M_2| + 1$, $M_1' \cup M_2' = M_1 \cup M_2$ y $M_1' \cap M_2' = M_1 \cap M_2$.

Idea: considerar el grafo $H = G[M_1 \triangle M_2]$ y pensar como son sus componentes conexas.

Un cubrimiento de aristas por vértices de G es un conj $F \subseteq V(G)$ de manera que toda arista de G tiene al menos un extremo en F.

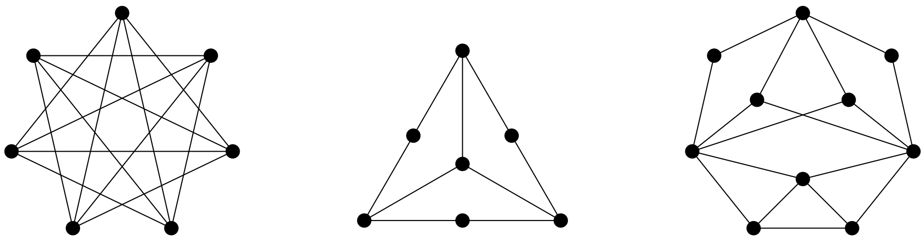
$\beta(G) = \min \{|F| : F$ cubrimiento de $G\}$.

Si F cub. de G y M matching de G

$|F| \geq |M|$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

12) Hallar un cubrimiento de aristas por vértices mínimo para cada grafo del ejercicio 2.



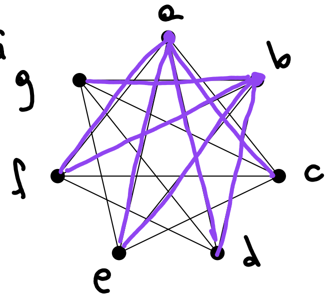
Recordemos que para todo grafo G, vale $\beta(G) \geqslant \alpha'(G)$.

a) Consideremos el siguiente grafo G.

Supongamos que C es cub. de G con $|C|=4$.
Entonces $\bar{C}$ es un conj estable. (ej 13)
Sean $u,v \in \bar{C}$, si $uv \in E$ entonces C no es un cub. de G ...
$\bar{C} = V - C$.

$\overline{C_7} = G$

$|\bar{C}|=3$



Sea C un cub. de G de cardinal 4.
G es 4-reg.
$2|E| = 4.7 \Rightarrow |E| = 14$.

Por el ejercicio 2, sabemos que $\alpha'(G) = 3$, por lo que $\beta(G) \geqslant 3$.

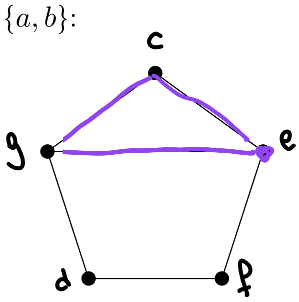
Sea C un cubrimiento por vértices de G. Como G es 4-regular, $\sum_{u \in C} d(u) = 12$. Pero $|E(G)| = 14$ por lo que C no cubre todas las aristas del grafo. Entonces $\beta(G) \geqslant 4$.

Supongamos que hay un cubrimiento C de tamaño 4.

Entonces hay dos vértices en C que no son vecinos, o son "consecutivos". Por la simetría del grafo, supongamos que son a y b.

Consideremos el grafo $G - \{a, b\}$:

$|E(G - \{a,b\})| = 6$

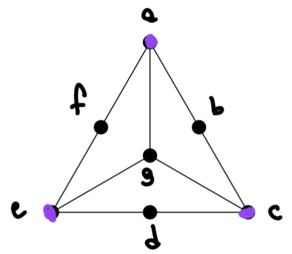


Notemos que la casa tiene un cubrimiento de tamaño 2. Pero esto no es posible ya que al tener 6 aristas y grado máximo 3, $\{g, c\}$ debería ser el cubrimiento pero no lo es.

Por lo tanto, $\beta(G) \geqslant 5$.

Finalmente, vemos que $C = \{a, b, c, d, e\}$ es un cubrimiento de G.

$$\therefore\ \beta(G) = 5$$



b) $\beta(G) \geqslant \alpha'(G) = 3$.

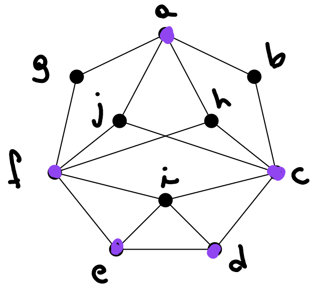
$C = \{a, c, e\}$ es un cubrimiento de G. y $|C| = 3$.

$\therefore \beta(G) = 3$.

$5 + 2 \cdot 4 + 3 = 16 \geq$

c)

G.



a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
4	2	5	3	3	5	2	3	4	3

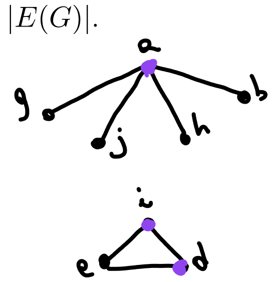
$|E| = 17$.

Sea C un cubrimiento de G con $|C| = 4$

c) $\beta(G) \geqslant \alpha'(G) = 4$.

Supongamos que hay un cubrimiento de aristas por vértices de tamaño 4.

Notemos que los dos vértices de grado 5 deben estar en ese cubrimiento ya que de lo contrario, $\sum_{v \in C} d(v) < 17 = |E(G)|$.



$G - \{c, f\} \simeq K_{1,4} + K_3$ que no tiene un cub. de cardinal 2.

$\therefore \beta(G) \geqslant 5$

Sea $C = \{a, c, d, e, f\}$. C es un cubrimiento de G con $|C| = 5$.

$\therefore \beta(G) = 5$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

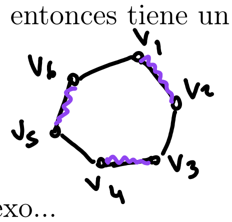
16) *a*) Para $k = 2, 3$, determinar si existe un grafo simple k-regular sin matching perfecto que tenga una cantidad par de vértices.

b) Para cada $k \geqslant 4$, construir un grafo simple k-regular sin matching perfecto.

a) Sea G un grafo simple 2-regular con una cantidad par de vértices.

Como $d(v) = 2$ para todo $v \in V(G)$, G es un ciclo o cada componente conexa es un ciclo. (PROBAR)

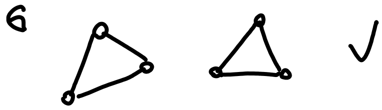
Si G es conexo, entonces tiene un matching perfecto. ¿Por qué?

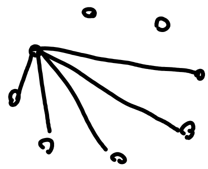


n es par, $n \geq 8$

$d_{\bar{G}}(v) = n-3 \geq 5$

Si G no es conexo...



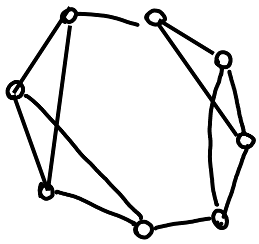


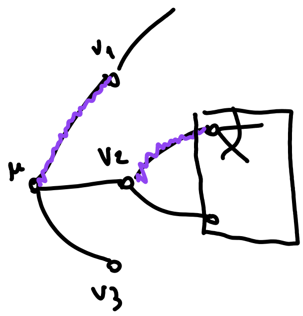
Sea G un grafo simple 3-regular con una cantidad par de vértices.

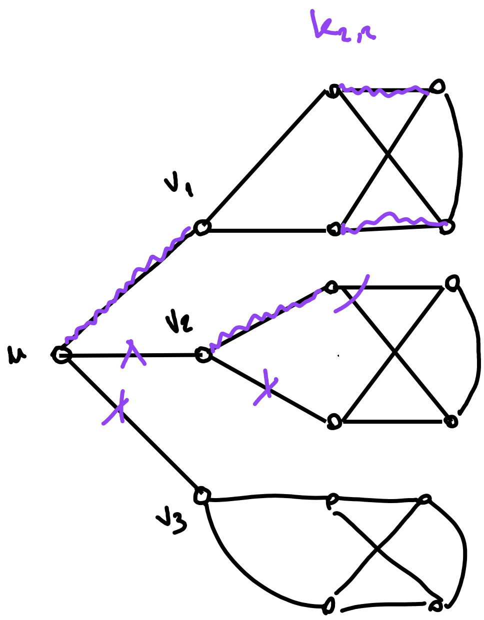
Sea $n = |V(G)|$. Observemos que $d(v) + d(w) = 6$ para todo $v, w \in V(G)$. Luego, si $n = 4$ o $n = 6$ entonces G es hamiltoniano. Es decir, tiene un ciclo hamiltoniano, por lo que G tiene un matching perfecto. PROBAR.

Consideremos $n > 6$.

$d(v) + d(w) \geq n \ \forall v, w \in V(G)$, no ady. entonces G es hamiltoniano.





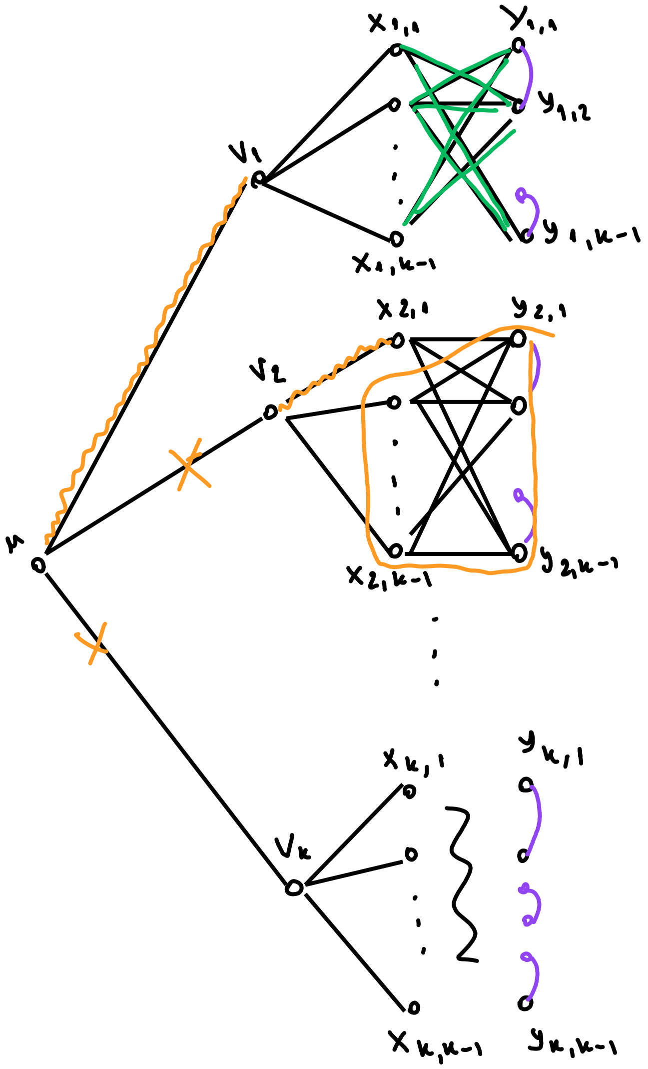


3-reg.

1

→ Si k es par, consideramos $G = K_{k+1}$.
k impar

b) Para cada $k \geqslant 4$, construir un grafo simple k-regular sin matching perfecto.



→ $\{\{x_{i,j}, y_{i,j}\} : j \in \{1 \ldots k-1\}\}$

$K_{k-1,k-1}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119