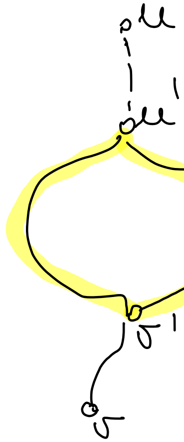
Teorema: $T=(V,E) \Rightarrow$ existe único camino entre cualquier par de vértices.

D/ Sean $u, v \in V$, $u \neq v$. Supongamos que existen dos caminos C y C' entre $u\,v$.

Sea u' el primer vértice en que ambos caminos difieren (un tal vértice existe porque los caminos son distintos). Y sea v' el último vértice en que ambos caminos difieren. (Un tal vértice existe porque ambos caminos conectan con v).



Esto significa que se forma un ciclo con los dos caminos disjuntos de u' a v' (las porciones de los caminos C y C' de u a v entre u' y v').

Contradicción de T árbol. $\blacksquare$

Teorema: $G=(V,E)$. G conexo $\Leftrightarrow$ G tiene un árbol recubridor

D/ $\Leftarrow$) Sea T árbol recubridor de G y $u,v \in V$, $u \neq v$

Como T es conexo, existe uv-camino en T.
Como T es subgrafo de G, el camino uv también está en G.
$\therefore$ G es conexo.

$\Rightarrow$) Si G es acíclico, $T=G$ es árbol recubridor.
Si no, existe C ciclo en G. Cualquier arista de C no es arista de corte. Sea $e \in C$, y consideramos $G_1 = G - e$. Este grafo G_1 es conexo pues e no es de corte.
Si G_1 es acíclico, $T=G_1$ es árbol recubridor. Si no, existe un ciclo en G_1. Repetimos lo anterior hasta que el grafo resultante no tiene ciclos (como el nro de ciclos es finito, este proceso termina). Y el grafo resultante del borrado de estas aristas es un árbol recubridor.

$\boxtimes$

Teorema: $T=(V,E)$, $|V|=|E|+1$

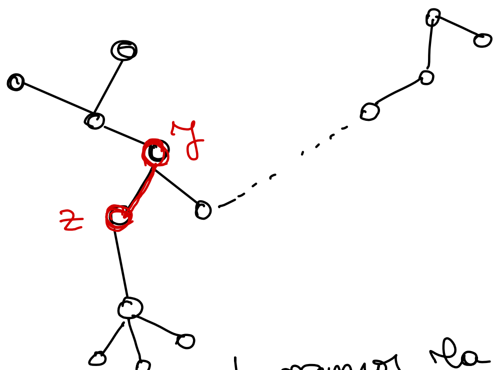
D/ Inducción sobre $|E|$.

$|E|=0$; $|E|=1$; $|E|=2$

En cualquiera de estos casos simples, vale.

Supongamos que el resultado vale $\forall T$, tal que $|E|\leq k$.

y sea T un árbol con $|E|=k+1$.



Supongamos que borramos la arista yz, entonces tenemos dos subárboles $T_1=(V_1,E_1)$ y $T_2=(V_2,E_2)$ tales que $|V_1|+|V_2|=|V|$ y $|E|=|E_1|+|E_2|+1$ y entonces T_1 y T_2 verifican que $|E_1|\leq k$, $|E_2|\leq k$ y entonces

$|V_1|=|E_1|+1$, $|V_2|=|E_2|+1$

$$\therefore |V|=|V_1|+|V_2|=\underbrace{|E_1|+1+|E_2|}_{=|E|}+1=|E|+1 \quad \blacksquare$$

Teorema $T=(V,E)$, si $|V|\geq 2$ entonces T tiene al menos 2 vértices pendientes.

D/ Sea $|V|=n\geq 2$. Por el Teorema anterior, $|E|=n-1$

y además $$\sum_{v\in V} gr(v) = 2|E| = 2(n-1)$$

Como G es conexo, $gr(v)\geq 1 \ \forall v$. Si G tiene menos de 2 vértices pendientes

$gr(v)\geq 2 \ \forall v$

(no tiene pendientes)

$$2n \underset{\substack{\uparrow \\ gr(v)\geq 2}}{\leq} \sum gr(v) = 2(n-1)$$

Contradicción

$gr(v)=1$ para el único pendiente

(tiene un único pendiente)

$$1+2(n-1) \leq \sum gr(v) = 2(n-1)$$

Contradicción

■

Teorema.

A) $\Rightarrow$ B) G árbol (G conexo y acíclico). $e \in E(G)$, $e = ab$

Si $G - e$ fuera conexo, hay al menos dos caminos de a hacia b. Contradicción. Por lo tanto, $G - e$ es disconexo.

Sea V_1 el conjunto de los vértices de $G-e$ que pueden alcanzarse desde a, y V_2 el de los de $G-e$ que pueden alcanzarse desde b.

$G[V_1]$ es un árbol, $G[V_2]$ es un árbol (un ciclo en alguno de ellos sería un ciclo en G.

B) $\Rightarrow$ C) Si G tuviera un ciclo y $e = ab$ una arista del ciclo. $G-e$ seguiría siendo conexo, contradicción de B).

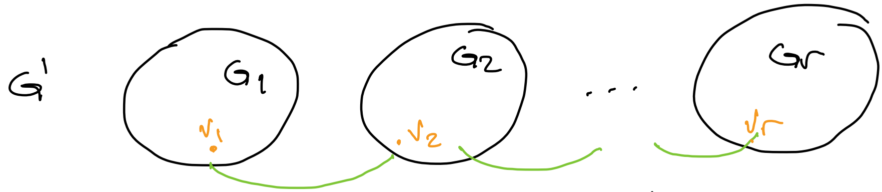
Por lo tanto, G no tiene ciclos. Veamos que $|V| = |E| + 1$. Y consideremos dos casos: $|V| = 1$ (con lo cual $|E| = 0$ pues no tiene bucles) o $|V| > 1$. Como G es conexo, $|E| \geq 1$.

A partir de la hipótesis B), si $e \in E$, $G - e = T_1 \cup T_2$ donde $T_1 = (V_1, E_1)$ $T_2 = (V_2, E_2)$ son árboles y en cada uno de ellos vale $|V_i| = |E_i| + 1$ $i = 1, 2$.

Además, $|V_1| + |V_2| = |V|$ y $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$. Por lo tanto,

$$|V| = |V_1| + |V_2| = \underbrace{|E_1| + 1 + |E_2|}_{=|E|} + 1 = |E| + 1.$$

C) $\Rightarrow$ D) Sea $k(G) = r$ y $G_1 \dots G_r$ las componentes conexas de G. Sea $v_i \in V(G_i)$ (un vértice cualquiera en una componente conexa) y agreguemos las aristas $v_i v_{i+1}$ $i = 1 \dots r-1$, para formar el grafo G'.



G' es conexo y acíclico, por lo tanto, es un árbol.

Como $V(G') = V(G)$ y $|E(G')| = |E| + r - 1$; y G' es árbol

$$|V(G')| = |E(G')| + 1 \Longrightarrow |V(G)| = |E| + r - 1 + 1 \underset{\text{hipótesis}}{\Longrightarrow}$$

$\boxed{r = 1}$ i.e. G es conexo.

Ejercicio

D) $\Longrightarrow$ E)

E) $\Longrightarrow$ A)

∎

<u>Lema</u> T y T' árboles recubridores, $e \in E(T) - E(T')$
$\Rightarrow \exists\ e' \in E(T') - E(T) \ / \ T \setminus e \cup \{e'\}$ árbol recubridor

D/ $T \setminus e$ es disconexo (pues toda arista de un árbol es de corte). T_1 y T_2 dos componentes conexas de $T \setminus e$.

Como T' es conexo, existe una arista e' con un extremo en T_1 y otro en T_2. Luego, $T \setminus e \cup \{e'\}$ es conexo, tiene $n-1$ aristas y pasa por todos los vértices de G. $\therefore$ es recubridor.

$\blacksquare$