# Complementos de Matemática I
# Matemática Discreta

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

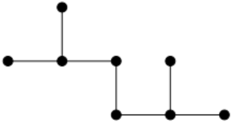
2024

# ARBOLES

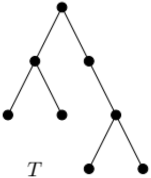
### DEFINICIÓN

*Un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Notamos $T = (V, E)$. Cuando cada componente de un grafo es un árbol, se llama bosque.*

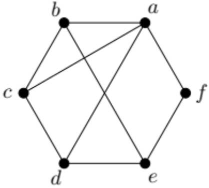
Un árbol es recubridor de un grafo $G$ si es un subgrafo acíclico conexo (árbol) que contiene todos los vértices de $G$. Similar para los bosques recubridores.



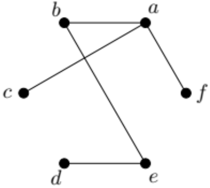
$T$



$T$




$G$




Árbol recubridor de $G$

Más ejemplos:

- $P_n$
- $K_{1,n}$

Todo árbol es bipartito. Vale la vuelta?

**Teorema**

*En un árbol $T = (V, E)$ existe un único camino entre cualquier par de vértices distintos.*

**Proof.**

Hojitas $\square$

**Teorema**

*Dado $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. $G$ es conexo si y sólo si tiene un árbol recubridor.*

**Proof.**

Hojitas $\square$

**TEOREMA**

*En cualquier árbol $T = (V, E)$, $|V| = |E| + 1$.*

**PROOF.**

Hojitas $\square$

**TEOREMA**

*En cualquier árbol, si $|V| \geq 2$ hay al menos dos vértices pendientes.*

**PROOF.**

Hojitas $\square$

### Teorema

*Los siguientes enunciados son equivalentes para un grafo $G = (V, E)$ sin bucles:*

a) *G es un árbol*
b) *G es conexo y el borrado de cualquier arista lo desconecta en dos subgrafos que son árboles*
c) *G acíclico y* $|V| = |E| + 1$
d) *G conexo y* $|V| = |E| + 1$
e) *G es acíclico y si* $a, b \in V$, $ab \notin E$, *el grafo que se obtiene al agregar la arista ab a G tiene exactamente un ciclo*

### Proof.

Hojitas $\square$

### Corolario

*Toda arista de un árbol es una arista de corte.*

Ejercicio

### Lema

*Si $T$ y $T'$ son dos árboles recubridores en un grafo (conexo) $G$ y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $(T \setminus e) \cup e'$ es un árbol recubridor.*

### Proof.

Hojitas $\square$

### Lema

*Si $T$ y $T'$ son dos árboles recubridores en un grafo (conexo) $G$ y $e \in E(T) - E(T')$ entonces existe $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $(T \cup e) \setminus e'$ es un árbol recubridor.*

Ejercicio

## ALGORITMO BFS

*Entrada*: $G$ grafo conexo y $u \in V(G)$.
*Salida*: Un árbol recubridor de $T$ de $G$ con una función predecesor $p$, y una función distancia $d(u, v)$ para todo $v \in V(G)$.

1: $Q := (u)$, $R = \{u\}$, $d(u, u) = 0$
2: **mientras** $R \neq V(G)$:
3: considerar $x$ el primer vértice de $Q$
4: **mientras** existe $y \in N_G(x) \setminus R$ **hacer**:
5: agregar $y$ atrás en $Q$
$R := R \cup \{y\}$
$p(y) = x$
$d(u, y) = d(u, x) + 1$
6: **fin mientras**
7: quitar $x$ de $Q$
8: **fin mientras**
9: mostrar $(p, d)$

## ALGORITMO BFS

*Entrada*: $G$ grafo conexo y un orden de sus vértices $v_1, \dots, v_n$.
*Salida*: Un árbol recubridor de $T$ de $G$ con una función predecesor $p$, y una función distancia $d(v_1, v_i)$ para todo $i \in [n]$.

$Q := (v_1)$, $R = \{v_1\}$, $d(v_1, v_1) = 0$

**mientras** $R \neq V(G)$:

  considerar $x$ el primer vértice de $Q$

  **for** $i = 2$ hasta $n$ **hacer**

    **si** $v_i \in N_G(x) \setminus Q$ **hacer**:

      agregar $v_i$ atrás en $Q$

      $R := R \cup \{v_i\}$

      $p(v_i) = x$

      $d(v_1, v_i) = d(v_1, x) + 1$

    **fin si**

  **fin for**

  quitar $x$ de $Q$

**fin mientras**

mostrar $(p, d)$

# Algoritmo DFS

*Entrada*: $G$ grafo conexo y $u \in V(G)$.
*Salida*: Un árbol recubridor de $T$ de $G$ con una función predecesor $p$.

1: $Q := (u)$, $R = \{u\}$
2: **mientras** $R \neq V(G)$:
3: considerar $x$ el primer vértice de $Q$
4: **si** existe $y \in N_G(x) \setminus R$ **hacer**:
5: agregar $y$ adelante (primero) en $Q$
$R := R \cup \{y\}$
$p(y) = x$
6: **si no**
7: quitar $x$ de $Q$
8: **fin si**
9: **fin mientras**
10: mostrar $p$

## Algoritmo DFS

*Entrada*: $G$ grafo conexo y un orden de sus vértices $v_1, \ldots, v_n$.
*Salida*: Un árbol recubridor de $T$ de $G$ con una función predecesor $p$.

**Ejercicio**: Escribir DFS respetando el orden de los vértices.

We now apply this algorithm to the graph $G = (V, E)$ shown in Fig. 12.21(a). Here the order for the vertices is alphabetic: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.

First we assign the vertex $a$ to the variable $v$ and initialize $T$ as just the vertex $a$ (the root). Going to step 2, we find that the vertex $b$ is the first vertex such that $\{a, b\} \in E$ and $b$ has not been visited earlier. So we attach edge $\{a, b\}$ to $T$, assign $b$ to $v$, and return to step 2.

At $v = b$ we find that the first vertex (not visited earlier) that provides an edge for the spanning tree is $d$. Consequently, the edge $\{b, d\}$ is attached to $T$, $d$ is assigned to $v$, and we again return to step 2.

This time, however, there is no new vertex that we can obtain from $d$, because vertices $a$ and $b$ have already been visited. So we go to step 3. But here the value of $v$ is $d$, not $a$, and we go to step 4. Now we backtrack from $d$, assigning the vertex $b$ to $v$, and then we return to step 2. At this time we see that the edge $\{b, e\}$ can be added to $T$.

Continuing the process, we attach the edges $\{e, f\}$ and $\{e, h\}$ next. But now the vertex $h$ has been assigned to $v$, and we must backtrack from $h$ to $e$ to $b$ to $a$. When $v$ is assigned the vertex $a$ this (second) time, the new edge $\{a, c\}$ is obtained. Then we proceed to attach the edges $\{c, g\}$, $\{g, i\}$, and $\{g, j\}$. At this point all of the vertices in $G$ have been visited, and we backtrack from $j$ to $g$ to $c$ to $a$. With $v = a$ once again we return to step 2 and from there to step 3, where the process terminates.

The resulting tree $T = (V, E_1)$ is shown in part (b) of Fig. 12.21. Part (c) of the figure shows the tree $T'$ that results for the vertex ordering: $j, i, h, g, f, e, d, c, b, a$.

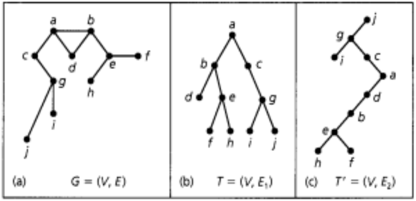
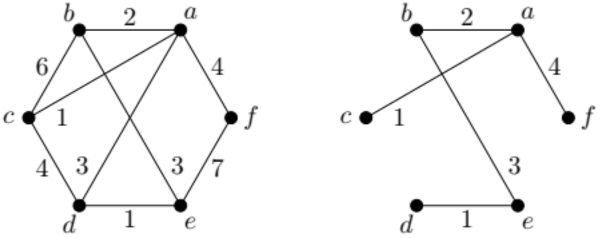



**Figure 12.21**

# Árboles recubridores de costo óptimo (mínimo o máximo)

*Definición:* Un grafo ponderado es un grafo con etiquetas numéricas en sus aristas.

**Ejemplo:**




Veamos un algoritmo para hallar un árbol recubridor de peso mínimo en un grafo ponderado conexo.

# Algoritmo de Kruskal

## Algoritmo de Kruskal (para mínimo)

Entrada: Un grafo conexo $G$.

Idea: Mantener un subgrafo recubridor acíclico $H$ e ir agregando aristas de peso mínimo.

Inicio: $E(H) = \emptyset$, $V(H) = V(G)$.

Iteración: Mientras existan aristas que unan dos componentes conexas de $H$, agregar la de mínimo peso a $E(H)$.

# Algoritmo de Dijkstra (distancia mínima de un vértice a los restantes)

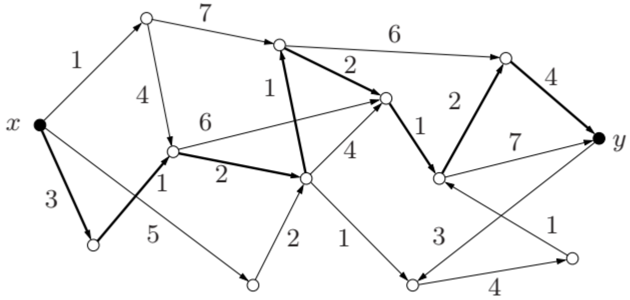
**Algoritmo de Dijkstra**

Entrada: Un grafo $G$ ponderado con pesos no negativos y un vértice de inicio $u$. El peso de una arista $xy$ es $\omega(xy)$ y si $xy \notin E(G)$, consideramos $\omega(xy) = \infty$.

Idea: Considerar un conj. $S$ de vértices para los cuales hallamos un camino mínimo desde $u$, agrandando $S$ hasta incluir todos los vértices. Tendremos una distancia arbitraria $t(z)$ desde $u$ a cada $z \notin S$, hasta que la distancia mínima sea hallada.

Inicio: $S = \{u\}$, $t(u) = 0$, $t(z) = \omega(uz)$ $\forall z \neq u$.

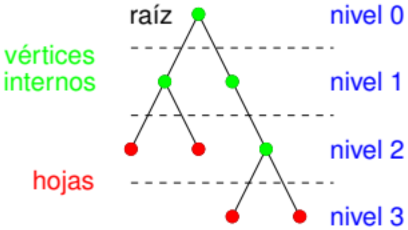
Iteración: Considerar $v \notin S$ con $t(v) = \text{mín}\{t(z) : \ z \notin S\}$.
Agregar $v$ a $S$.
Explorar las aristas desde $v$ y actualizar las etiquetas $t(z)$ para $z$ vecino de $v$ y $z \notin S$ con $t(z) = \text{mín}\{t(z), t(z) + \omega(vz)\}$.
Continuar la iteración hasta que $S = V(G)$ o hasta que $T(z) = \infty$ $\forall z \notin S$.



7
6
1
2
4
4
1
2
x
6
1
7
y
4
2
1
3
1
3
5
2
1
1
4

# Árboles binarios

*Definición:* Un árbol enraizado $T$ es un árbol con un único vértice distinguido $r$, llamado raíz de $T$. Un árbol enraizado es binario si todo vértice tiene a lo sumo dos hijos. Si en particular todo vértice tiene grado $0$ o $2$ hijos el árbol es binario completo.




La altura del árbol enraizado es su máximo nivel.

**TEOREMA**

*Si $T$ es un árbol binario con $i$ vértices internos entonces $T$ tiene a lo sumo $i+1$ hojas.*

Hojitas

**TEOREMA**

*Si $T$ es un árbol binario con altura $H$ y $l$ hojas entonces $log_2(l) \leq h$.*

Ejercicio