Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal

Examen Final - 01/07/2024

Apellido y nombre:

Legajo: Carrera:

Parte práctica regulares

1. Considere la función $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & 2p(1) \\ p(1) & p(1) - p(0) \end{pmatrix}.$$
   (a) Pruebe que T es una transformación lineal.
   (b) Calcule una base y la dimensión de $\ker(T)$ y $\operatorname{Im}(T)$.
   (c) Determine si T es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo. Justifique su respuesta.
   (d) Calcule la matriz de la transformación T en las bases $\mathfrak{B}_1 = \{1, 1-x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathfrak{B}_2 = \{E_{11}, E_{22}, 2E_{12}, E_{21}\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
   (e) Calcule $[T(2x)]_{\mathfrak{B}_2}$.

2. En $\mathbb{R}^3$, considere la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$
   (a) Pruebe que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.
   (b) Sea $W = span(\{e_1\})$. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales de W y $W^\perp$.
   (c) Sea $v = (1, 2, 3)$. Calcule $\text{proy}_{W^\perp} v$.

3. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcule los autovalores y autovectores de A.
   (b) Utilice el hecho de que el polinomio minimal de A es $m_A(x) = x(x-1)^2$ (no hace falta calcularlo), para justificar que A no es diagonalizable.
   (c) Halle una matriz invertible P y una forma de Jordan J_A tal que $A = PJ_AP^{-1}$. Dé explícitamente la base de Jordan.

4. Determine si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   (a) El conjunto $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ A - 2A^t = 0\}$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales de matrices.
   (b) Sea V un $\mathbf{F}$-espacio vectorial y sean $S_1, S_2 \subset V$ dos subconjuntos linealmente independientes tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Entonces $\text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2) = \{0\}$.
   (c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\lambda = 0$ es autovalor de A, entonces A no es invertible.
   (d) La transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (-z, y, -x)$ define una simetría (respecto de un plano).

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal

Examen Final - 01/07/2024

Apellido y nombre:

Legajo: Carrera:

Parte práctica complemento libres

5. Considere el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathfrak{B} = \{(1,0,0), (-1,1,1), (0,1,-1)\}$.
   (a) Explique brevemente por qué $\mathfrak{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Halle la base dual $\mathfrak{B}^*$ de $\mathfrak{B}$.
   (c) Calcule $[(1,1,1)]_{\mathfrak{B}}$.
   (d) Sea $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ definido por $f(x,y,z) = 2x + 3y - z$. Calcule $[f]_{\mathfrak{B}^*}$.
   (e) Calcule una base de W^0 donde $W = \text{span}\{(1,0,0), (0,1,1)\}$.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal

Examen Final - 01/07/2024

Apellido y nombre:

Legajo: Carrera:

Parte teórica

1. **Indique** si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, **de** una prueba. Si es falsa, **de** un contrajemplo y luego **corrija** el enunciado para que sea verdadero y **demuéstrelo**.

   Sea V un $\mathbb{F}$-ev y sean $U_1, U_2 \subset V$ sev finito dimensionales. Entonces

   $$dim\ (U_1 \cup U_2) = dim\ U_1 + dim\ U_2 - dim\ (U_1 \cap U_2).$$

2. Sean V y W dos $\mathbb{F}$-ev finito dimensionales. De un isomorfismo entre los espacios $F^{m\times n}$ y $L(V,W)$, donde $n = \dim V$ y $m = \dim w$. Explicite el isomorfismo para un subespacio de matrices V y un subespacio de polinomios W (elija los espacios y sus dimensiones).

3. **Enuncie y demuestre** el teorema que describe el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt.

4. Sea V un espacio vectorial y sea $v \in V$. Entonces v induce una aplicación $L_v : V^* \to F$ definida por

   $$L_v(f) = f(v), \quad \text{para } f \in V^*.$$

   (a) Mostrar que L_v es lineal.
   (b) Probar que si V es de dimensión finita y $v \neq \overline{0}$, entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.
   (c) Probar que si V es de dimensión finita, la aplicación $\Omega : V \to (V^*)^*$ definida por $\Omega(v) = L_v$ es un isomorfismo de V en $(V^*)^*$. El espacio $V^{**} = (V^*)^*$ se conoce como el **doble dual** de V.
   (d) Probar que si V es dimensión finita y $L \in V^{**}$, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.

5. Complete los siguientes enunciados para obtener una afirmación correcta, y de una prueba.

   (a) Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un .... de A. Entonces λ es .... de m_A.
   (b) Sean $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tales que para todo $x \in \mathbb{F}^n$ se tiene que .... Entonces $A = B$.
   (c) Sean $A, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$, con C .... Entonces $\chi_{CAC^{-1}}(x) =$ ....
   (d) Sea $A \in \mathbb{R}^{\cdots\cdots\times\cdots\cdots}$ una matriz. Entonces $N(\ldots\ldots) \overset{\perp}{\oplus} C(\ldots\ldots) = \mathbb{R}^{\cdots\cdots}$.
   (e) Sea V un $\mathbb{F}$-ev y sea $U \subset V$ un subespacio. El **anulador** de $U = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ y es un .... de V^*.
   (f) Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un F-espacio vectorial de dimensión .... con producto interno. Sea $U \subset V$ .... Entonces $p_U + p_{U^\perp} =$ ....
   (g) Sea V un $\mathbb{C}$-ev con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sea T un endomorfismo unitario, esto es $T \circ T^* =$ ..... $=$ ...... Entonces T preserva el producto interno, esto es, $\langle Tu, Tv\rangle =$ .... para todo $u, v \in V$.