$F^Y = \{ f: Y \longrightarrow F : f \text{ función} \}$

11. Probar que el conjunto de las funciones reales derivables en $(-4,4)$ tales que $f'(-1) = 3f(2)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{(-4,4)}$.

Sea $H = \{ f : (-4,4) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f \text{ es derivable y } f'(-1) = 3f(2) \}$

Queremos probar que H es un subesp. de $\mathbb{R}^{(-4,4)}$.

- Sea $\theta : (-4,4) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función

$$\theta(x) = 0.$$

θ es derivable (AM1) y

$$\theta'(x) = 0$$
$$\theta'(-1) = 0 = 3.0 = 3\theta(2)$$
$$\therefore \theta \in H.$$

- Sean $f, g \in H$. Probaremos que $f+g \in H$.

(1)_ f, g son derivables

(2)_ $f'(-1) = 3.f(2)$, $g'(-1) = 3g(2)$.

Entonces, $f+g$ es derivable por (1)

$$(f+g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1)$$
$$= 3f(2) + 3g(2) \quad \text{por (2).}$$
$$= 3(f(2) + g(2))$$
$$= 3(f+g)(2).$$
$$\therefore f+g \in H.$$

- Cierre del producto por escalar. Sea $f \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debemos ver que $\alpha.f \in H$. En efecto, sabemos

$$f \text{ derivable y } f'(-1) = 3f(2). \quad (*)$$

Ahora, $\alpha.f$ es derivable (AM1). y

$$(\alpha.f)'(-1) = \alpha.f'(-1) \overset{(*)}{=} \alpha.(3.f(2))$$
$$= 3(\alpha f(2)) = 3(\alpha f)(2)$$
$$\therefore \alpha f \in H.$$

Por lo tanto, H es un subespacio.

16. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, probar que $S = \{f \in V : f \text{ es par}\}$ y $T = \{f \in V : f \text{ es impar}\}$ son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

(ejercicio).

Vamos a probar que $V = S \oplus T$. Esto es,

(1)_ Dado $f \in V$, $f(x) = s(x) + t(x)$ con $s \in S$, $t \in T$

(2)_ que $s(x), t(x)$ en (1) son únicos.

(1)_ Sea $f \in V$. Definimos

$$s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad t(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Entonces,

- $$s(x) + t(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
$$= \frac{f(x) + \cancel{f(-x)} + f(x) - \cancel{f(-x)}}{2}$$
$$= f(x)$$

- Veamos que $s \in S$. Tenemos que ver $s(x) = s(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$s(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = s(x)$$
$$\therefore s \in S.$$

- De manera similar, $t \in T$ (ejercicio)

(2)_ Sean $\tilde{s} \in S$, $\tilde{t} \in T$ tales que

$$f(x) = \tilde{s}(x) + \tilde{t}(x).$$

Queremos ver $s = \tilde{s}$, $t = \tilde{t}$.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= s(x) + t(x) \\ f(x) &= \tilde{s}(x) + \tilde{t}(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow s(x) + t(x) = \tilde{s}(x) + \tilde{t}(x)$$

Luego, $\underbrace{s(x) - \tilde{s}(x)}_{\text{par}} = \underbrace{\tilde{t}(x) - t(x)}_{\text{impar}}$

$h(x) = s(x) - \tilde{s}(x)$ par

y $h(-x) = \tilde{t}(-x) - t(-x)$
$= \dots = -h(x).$

Entonces,

$s(x) - \tilde{s}(x)$ es par e impar

$\therefore s(x) - \tilde{s}(x) = \theta(x)$. $(\theta(x) = 0)$

$\therefore s = \tilde{s}$

De igual manera, $\tilde{t} = t$.

$$\therefore V = S \oplus T.$$

(2)_ $S \cap T = \{\theta\}$. $\boxed{(\subseteq)}$ $\boxed{(2)✓} \rightarrow$ S, T subesp $\left.\begin{aligned} \theta &\in S \\ \theta &\in T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \in S \cap T$

$$f \in S \cap T \Rightarrow \left.\begin{aligned} f &\in S \text{ par} \\ f &\in T \text{ impar} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow f = 0.$$

$V =$

17. Sean U, W subespacios de V. Probar que $U + W$ es una suma directa si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

13. Probar que la intersección de cualquier colección de subespacios de V es un subespacio de V.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces

$$H = \bigcap_{i \in I} U_i \text{ es un subespacio de } V.$$

Dem/ $x \in \bigcap_{i \in I} U_i \Longleftrightarrow x \in U_i, \forall i \in I$ (#)

- Sea $\bar{0} \in V$. Veamos que $\bar{0} \in H$. Sea $i \in I$. Como U_i es un subesp. de V, entonces $\bar{0} \in U_i$. Luego, por (#), $\bar{0} \in H$.
- Sean $u, v \in H$. Probaremos que $u+v \in H$. O sea, $u+v \in U_i$, $\forall i \in I$. Sabemos que

$$u \in H \overset{(\#)}{\Rightarrow} u \in U_i, \forall i$$
$$v \in H \Rightarrow v \in U_i, \forall i$$

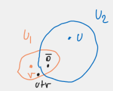
Cada U_i es un subespacio. Entonces $u+v \in U_i$, $\forall i$.

$$\therefore u+v \in H \quad \text{por (\#).}$$

- Sean $u \in H$ y $\alpha \in F$. Queremos ver que $\alpha u \in H$ (ejercicio)

14. Probar que la unión de dos subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios está contenido en el otro.

$(\Rightarrow)$_ Sean U_1, U_2 subespacio de V tales que $U_1 \cup U_2$ es un subespacio de V. Queremos probar que $U_1 \subset U_2 \vee U_2 \subset U_1$.



Supongamos que $U_1 \not\subset U_2 \wedge U_2 \not\subset U_1$. Sean $u \in U_2$, $u \notin U_1$ (*), $v \in U_1$, $v \notin U_2$. Ahora, $u, v \in U_1 \cup U_2$. Como $U_1 \cup U_2$ es un subespacio, se tiene $u+v \in U_1 \cup U_2$. Entonces,

$$u+v \in U_1 \quad \vee \quad u+v \in U_2.$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Supongamos que } u+v \in U_1. \\ &\text{Sabemos que } v \in U_1 \Rightarrow -v \in U_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (u+v) + (-v) \in U_1 \quad U_1 \text{ subesp}$$

$\therefore u \in U_1$ Abs! por (*)

$$\therefore U_1 \subset U_2 \vee U_2 \subset U_1.$$

Ahora, dados dos elementos $\bar{i}$ y $\bar{j}$ en $\mathbb{Z}_n$, definimos

$$\bar{i} + \bar{j} \overset{\text{def.}}{=} \overline{i+j},$$
$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \overline{i \cdot j}.$$

(b) Verficar que estas operaciones se encuentran bien definidas.

Sea $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_n$.

Queremos ver que $\bar{i} + \bar{j} = \overline{i+j}$ está bien definición.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\bar{a} = \bar{i}$, $\bar{b} = \bar{j}$. Probaremos que

$$\overline{a+b} = \overline{i+j}. \quad (\Leftrightarrow n \mid [i+j-(a+b)])$$

Sabemos

$$n \mid (i-a) \Rightarrow i - a = k_1.n, \; k_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = i - k_1 n$$
$$n \mid (j-b) \Rightarrow j - b = k_2 n, \; k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = j - k_2 n.$$

Entonces,

$$i+j-(a+b) = i+j-(i-k_1 n + j - k_2 n)$$
$$= \cancel{i} + \cancel{j} - \cancel{i} + k_1 n - \cancel{j} + k_2 n$$
$$= k_1 n + k_2 n$$
$$= (k_1 + k_2) n$$

$$\therefore n \mid [i+j-(a+b)]$$
$$\therefore \overline{a+b} = \overline{i+j}.$$

2. Probar que si $\mathbf{F}$ es un cuerpo de característica p, con p primo, entonces $(x+y)^p = x^p + y^p$. *Ayuda*: p divide a $\binom{p}{k}$ si y sólo si k no es 0 ni p.

Def: Sea F un cuerpo. Decimos que $n \in \mathbb{N}_0$ es la característica de F, y se denota $\text{Char}(F) = n$, si

- $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} = 0 \in F$ y es el mínimo $n \in \mathbb{N}$ que verifica esto,
- $\text{Char}(F) = 0$ si no se verifica lo anterior para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lo sabemos: $p \mid \binom{p}{k}$

$$(x+y)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} x^j y^{p-j}$$
$$= \underbrace{\binom{p}{0} x^0 y^{p-0}}_{y^p} + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} x^j y^{p-j} + \underbrace{\binom{p}{p} x^p y^{p-p}}_{= x^p} \quad (*)$$

Ahora, $p \mid \binom{p}{k}$ si $k \neq 0, p$. Entonces

$$\binom{p}{k} = p.m, \quad m \in F, \; m = \underbrace{1 + \dots + 1}_{m \text{ veces}},$$
$$p = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ veces}}$$

Observació:
$1 \in F$.
$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} \overset{\text{def}}{=} n$

Como $\text{Char}(F) = p$,

$$\binom{p}{k} = p.m = 0.m = 0.$$

Luego, en (*),

$$(x+y)^p = y^p + \sum_{j=1}^{p-1} 0.x^j y^{p-j} + x^p = y^p + x^p$$
$$= x^p + y^p.$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2$$
$$\overset{\text{conmut.}}{=} x^2 + 1.xy + 1.xy + y^2 = x^2 + \underbrace{(1+1)}_{=2} xy + y^2$$

5. Probar que $V = \mathbf{F}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i \in \mathbf{F} \; \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbf{F}$ (donde $\mathbf{F}$ es un cuerpo cualquiera), es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$ con la suma y el producto por escalar definidos de la siguiente manera:

$$+ : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}},$$
$$\cdot : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k a_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Veamos que $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ es un e.v. sobre F.

- $V \neq \emptyset$. Sea $(\underset{\in F}{0}, 0, 0, \dots)$. Luego, $(0, 0, 0, \dots) \in F$.

$$\therefore V \neq \emptyset.$$

- Clausura de +. Sean $(a_i), (b_i) \in F^{\mathbb{N}}$. Luego,

$$(a_i) + (b_i) = (\underbrace{a_i + b_i}_{\in F}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \in F^{\mathbb{N}} = V$$

- Clausura de $\cdot$. Sean $(a_i) \in F^{\mathbb{N}}$ y $\alpha \in F$. Luego,

$$\alpha \cdot (a_i) = (\underbrace{\alpha a_i}_{\in F}) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots) \in F^{\mathbb{N}} = V$$

(i)_ Asociativa de +. Sean $(a_i), (b_i), (c_i) \in V$. Luego,

$$(a_i) + ((b_i) + (c_i)) = (a_i) + (b_i + c_i) = (a_1, a_2, \dots) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots) \quad \text{def +}$$
$$= (\underbrace{a_i + (b_i + c_i)}_{\in F}) \quad \text{def}$$
$$= ((a_i + b_i) + c_i) \quad \text{Asoc. de + en } F$$
$$= (a_i + b_i) + (c_i) \quad \text{def +}$$
$$= ((a_i) + (b_i)) + (c_i) \quad \text{def +}$$

(ii)_ Existencia del elem. neutro para +. Definimos

$$(0) = (0, 0, 0, \dots) \in V.$$

Sea $(a_i) \in V$. Luego,

$$\left.\begin{aligned} (a_i) + (0) &\overset{\text{def +}}{=} (a_i + 0) = (a_i) \\ (0) + (a_i) &\overset{\text{def}}{=} (0 + a_i) = (a_i) \end{aligned}\right\} =$$

(iii) – (x)_ Ejercicio.