5. i) Probar que existe una única transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1)=(-5,3)$ y $T(-1,1)=(5,2)$. Para dicha T, determinar $T(5,3)$ y $T(-1,2)$.

Recordemos que

Proposición 2 *V, W dos F-ev con V finito dimensional. Sea $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V y sean $w_1,\dots,w_n\in W$. Entonces $\exists!$ tl $T:V\to W$ tq $T(v_i)=w_i$, $i=1,\dots,n$.*

Queremos probar que existe una única $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ t.L. t.q

$T(\underbrace{1,1}_{v_1})=(\underbrace{-5,3}_{w_1})$, $\quad T(\underbrace{-1,1}_{v_2})=(\underbrace{5,2}_{w_2})$ $\quad(*)$

Sea $B=\{(1,1),(-1,1)\}$. Vamos a probar que B es una base de $\mathbb{R}^2$.

Basta con probar que B es LI, pues $|B|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que

$\alpha(1,1)+\beta(-1,1)=(0,0)$

Tenemos que probar $\alpha=\beta=0$. Entonces,

$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$ $\quad(S)$

$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$

Entonces el sistema (S) tiene única solución trivial. Luego, $\alpha=\beta=0$.

$\therefore B$ es LI.

Como B es una base $\exists!\ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que verifica $(*)$.

Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Queremos buscar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.q.

$(x,y)=\alpha(1,1)+\beta(-1,1)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=x\\ \alpha+\beta=y\end{cases}$

Entonces, $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{y-x}{2}$ (ejercicio).

$\therefore (x,y)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{y-x}{2}(-1,1)$.

Luego, $T(x,y)=T\left(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in\mathbb{R}}(1,1)+\underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in\mathbb{R}}(-1,1)\right)$

$=\frac{x+y}{2}T(1,1)+\frac{y-x}{2}T(-1,1)$

$=\frac{x+y}{2}(-5,3)+\frac{y-x}{2}(5,2)$

$=(-5x,\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y)$

iv) Hallar todos los $a\in\mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que satisfaga $T(\underbrace{1,-1,1}_{v_1})=(2,a,-1)$, $T(\underbrace{1,-1,2}_{v_2})=(a^2,-1,1)$ y $T\boxed{(1,-1,-2)}=(5,-1,-7)$.

¿ e_1,e_2,e_3 ?

$\{v_1,v_2\}$ LI $\rightsquigarrow$ $\{v_1,v_2,\underbrace{\boxed{v_3}}_{=e_2}\}$ LI

$T(e_2)=\underbrace{(1,0,0)}_{=w_3}$

$\Big\}$ $\exists!$ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

---

8. Calcular el núcleo y la imagen de las transformaciones lineales del Ejercicio 1.

i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2-3x_1,x_1+\sqrt{2}x_3,x_1-\frac{1}{2}x_2)$. T.L

▸ $\ker(f)$. Recordemos que

$\ker(f)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)\}$

Entonces

$(x_1,x_2,x_3)\in\ker(f)$ sii $f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (x_2-3x_1,\ x_1+\sqrt{2}x_3,\ x_1-\frac{1}{2}x_2)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-3x_1=0\\ x_1+\sqrt{2}x_3=0\\ x_1-\frac{1}{2}x_2=0\end{cases}$ $\quad(S)$

$\begin{pmatrix}-3&1&0\\1&0&\sqrt{2}\\1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdots}\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&\frac{1}{3}&\sqrt{2}\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

Entonces, (S) tiene única solución trivial, y por lo tanto, $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$.

▸ $Im(f)$. Recordemos

$Im(f)=\{w\in\mathbb{R}^3: w=f(v),\ v\in\mathbb{R}^3\}$

Entonces,

$w\in Im(f)$ sii $w=f(x_1,x_2,x_3)$ p.a. $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$

sii $w=(x_2-3x_1,\ x_1+\sqrt{2}x_3,\ x_1-\frac{1}{2}x_2)$ p.a. x_1,x_2,x_3

$=(-3x_1,x_1,x_1)+(x_2,0,-\frac{1}{2}x_2)+(0,\sqrt{2}x_3,0)$

$=x_1(-3,1,1)+x_2(1,0,-\frac{1}{2})+x_3(0,\sqrt{2},0)$ p.a. $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$

$Im(f)=\underbrace{span\{(-3,1,1),(1,0,-\frac{1}{2}),(0,\sqrt{2},0)\}}_{\text{ver si es base.}}$

---

x) $f:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times3}$, $f\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&0&a_{12}+a_{21}\\0&a_{11}&a_{22}-a_{11}\end{pmatrix}$,

▸ $\ker(f)$. Sea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$

$A\in\ker(f)$ sii $f(A)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

sii $\begin{pmatrix}d&0&b+c\\0&a&d-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

sii $\begin{cases}d=0\\0=0\\0=0\\a=0\\b+c=0\\d-a=0\end{cases}$ $\quad(S)$ $\quad b=-c$

$Sol(S)=\{(\overset{a}{0},\overset{b}{-c},\overset{c}{c},\overset{d}{0}):\ c\in\mathbb{R}\}$ $\quad(0,-c,c,0),\ c\in\mathbb{R}$ $=c(0,-1,1,0)$

$=span\{(0,-1,1,0)\}$

$\therefore\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}0&-c\\c&0\end{pmatrix}: c\in\mathbb{R}\right\}$ $\quad\begin{pmatrix}0&-c\\c&0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$=span\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

---

11. (a) Supongamos que $T:\mathbf{F}^4\to\mathbf{F}^2$ es una transformación lineal que verifica

$\ker(T)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=5x_2\ \text{ y }\ x_3=7x_4\}$.

Probar que T es un epimorfismo.

$\ker(T)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ x_1=5x_2\ \text{ y }\ x_3=7x_4\}$

$w=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(T)$ sii $w=(5x_2,x_2,7x_4,x_4)$ p.a. x_2,x_4

sii $w=(5x_2,x_2,0,0)+(0,0,7x_4,x_4)$

$=x_2(5,1,0,0)+x_4(0,0,7,1)$

$\therefore\ker(T)=span\{\underbrace{(5,1,0,0),(0,0,7,1)}\}$

Sea $B=\{(5,1,0,0),(0,0,7,1)\}$. ¿$B$ es base?

Sí, es LI (ejercicio). Luego,

$\dim(\ker(T))=|B|=2$.

$\therefore nul(T)=2$.

Por el Teo. de la Dimensión,

$nul(T)+ran(T)=\dim(\mathbf{F}^4)=4$

$2+ran(T)=4$

$\therefore ran(T)=2$

y $\boxed{Im(T)\underset{s.e.}{\subseteq}\mathbf{F}^2}$ $\Big\}\Rightarrow Im(T)=\mathbf{F}^2$

$\therefore T$ es un epimorfismo.

$Im(T)\underset{s.e.}{\subseteq}\mathbf{F}^2$ y $\dim(Im(T))=2$

---

3. Para un $\mathbf{F}$-espacio vectorial V conveniente se pide:

i) Encontrar una función $f:V\to V$ que cumpla $f(v+w)=f(v)+f(w)$ para cualquier par de vectores $v,w\in V$ pero que no sea una transformación lineal.

ii) Encontrar una función $f:V\to V$ que cumpla $f(\alpha v)=\alpha f(v)$ para cualquier escalar $\alpha\in\mathbf{F}$ y cualquier vector $v\in V$ pero que no sea una transformación lineal.

(i)- $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ $\quad$ ($\mathbb{C}$- esp. vectorial)

$f(z)=\overline{z}$

▸ $f(z+w)=f(z)+f(w)$

▸ $f(\alpha z)=\overline{\alpha z}=\overline{\alpha}\,\overline{z}\overset{?}{\neq}\alpha\cdot\overline{z}$ $\quad\alpha\in\mathbb{C}$

(ii)- $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$f(x,y)=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3},\ 0\right)$

▸ $f(\alpha(x,y))=\alpha f(x,y)$

▸ $f(v+w)\overset{?}{\neq}f(v)+f(w)$