

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)

2024

4.2 Diagonalización

En los ejemplos hemos trabajado con los conjuntos de autovectores: los obtuvimos quitando el vector nulo de los sev definidos como solución de un cierto sistema lineal homogéneo. Esos espacios tienen gran importancia, se trata de los *autoespacios*. Más precisamente:

Definición 1 $A \in F^{n \times n}$, λ autovalor de A . El **autoespacio de A asociado a λ** se define por

$$E_\lambda = \{v \in F^n : Av = \lambda v\} = \{v \in F^n : (\lambda I - A)v = \bar{0}\}.$$

Observaciones 1 1. $\bar{0} \in E_\lambda$

2. $E_\lambda \subset F^n$ sev puesto que es el espacio solución del sistema lineal homogéneo $(\lambda I - A)v = \bar{0}$.

3. $E_\lambda = N(\lambda I - A)$

Veremos en esta sección que estos sev descomponen en suma directa a F^n sii A es diagonalizable. Vayamos paso a paso:

Veamos primero que los autoespacios se suman de manera directa:

Proposición 1 $A \in F^{n \times n}$, λ_1, λ_2 autovalores distintos de A . Entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\bar{0}\}$.

Demostración: Si $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ entonces $Av = \lambda_1 v$ y $Av = \lambda_2 v$. Luego $\lambda_1 v = \lambda_2 v$. Luego $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \bar{0}$. Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sigue que $v = \bar{0}$.

□

Más generalmente, tenemos que:

Proposición 2 $A \in F^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de A . Entonces para $j = 1, \dots, r$,

$$E_{\lambda_j} \cap \bigoplus_{k=1, k \neq j}^r E_{\lambda_k} = \{\bar{0}\}.$$

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: proceder por inducción sobre r .

□

Ahora, recordando que todo autovalor es raíz del polinomio característico, veremos cómo se relacionan la dimensión del autoespacio asociado al autovalor con su multiplicidad como raíz del polinomio característico.

Proposición 3 $A \in F^{n \times n}$, λ autovalor de A , r multiplicidad de λ como raíz de χ_A (esto es, $\chi_A(X) = (X - \lambda)^r P(X)$ con $P(\lambda) \neq 0$). Entonces, $\dim E_\lambda \leq r$.

Demostración: Sea $T : F^n \rightarrow F^n$ definida según $Tx = Ax$. Sea $s = \dim(E_\lambda)$ y $B_\lambda = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de E_λ . Completamos a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de F^n . Así,

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_s & N_{s \times n-s} \\ \hline 0_{n-s \times s} & M_{s \times s} \end{array} \right).$$

en efecto $[Tv_i]_B = \lambda e_i$ para toda $i = 1, \dots, s$, es decir, sus coeficientes de v_{s+1}, \dots, v_n son nulos (y los demás no se sabe ni interesan, por eso quedan escritas dos matrices de los tamaños indicados).

Además tenemos también que

$$XI - [T]_B = \left(\begin{array}{c|c} (X - \lambda)I_s & -N \\ \hline 0 & XI_{n-s} - M \end{array} \right).$$

El polinomio característico es entonces

$$\chi_A(X) = \det(X - [T]_B) = \det(X - \lambda) \det(XI_{n-s} - M) = (X - \lambda)^s Q(X),$$

donde los determinantes son de las submatrices indicadas. Ahora bien, como por hipótesis $\chi_A(X) = (X - \lambda)^r P(X)$ con $P(\lambda) \neq 0$, sigue que

$$(X - \lambda)^s Q(X) = (X - \lambda)^r P(X),$$

y como $P(\lambda) \neq 0$ debe ser $s \leq r$, esto es, $\dim(E_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda, \chi_A)$.

□

Estamos finalmente en condiciones de caracterizar las matrices diagonalizables en términos de autoespacios (vd, en términos de autovalores y autovectores).

Teorema 1 $A \in F^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los autovalores distintos de A . Son equivalentes:

1. A es diagonalizable en $F^{n \times n}$,
2. $\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} = F^n$,
3. $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{a_1} \dots (X - \lambda_r)^{a_r}$ y $a_i = \dim(E_{\lambda_i})$, $i = 1, \dots, r$

Demostración:

1 \Rightarrow 2) A diagonalizable en $F^{n \times n}$. Luego existe $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de autovectores de A . Para cada $v_j \in B$, $j = 1, \dots, n$, existe λ_i , $i = 1, \dots, r$ tq v_j autovector asociado al autovalor λ_i . Luego, cada v_j está en algún E_{λ_i} , y como B es base debe ser $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_n} = F^n$. La proposición anterior nos permite concluir que esta suma es suma directa: $\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} = F^n$.

2 \Rightarrow 3) Tenemos que $\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} = F^n$. Por las propiedades vistas tenemos que $\dim E_{\lambda_i} \leq \text{mult}(\lambda_i, \chi_A)$. Luego

$$n \leq \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^r \text{mult}(\lambda_i, \chi_A) = \text{gr}(\chi_A) = n,$$

luego estas desigualdades son todas igualdades. En particular, $\sum_{i=1}^r \text{mult}(\lambda_i, \chi_A) = \text{gr}(\chi_A)$, de donde $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{a_1} \dots (X - \lambda_r)^{a_r}$ con $a_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_A)$. Como cada $\dim(E_{\lambda_i}) \leq \text{mult}(\lambda_i, \chi_A) = a_i$, $i = 1, \dots, r$, debe ser $a_i = \dim(E_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i, \chi_A)$ pues si vale el menor estricto resulta en una contradicción. Así,

3 \Rightarrow 1) Sabemos que $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{a_1} \dots (X - \lambda_r)^{a_r}$. Para cada $i = 1, \dots, r$ sea B_i base de E_{λ_i} . Así, $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ (unión disjunta, porque?) es base de $\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} \subset F^n$. Así:

$$|B| = \sum_{i=1}^r |B_i| = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^r a_i = \text{gr}(\chi_A) = n.$$

Entonces $\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} = F^n$ y por lo tanto B es base de autovectores de A , luego A es diagonalizable.

□

Ejemplo 1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿es diagonalizable? Calculemos $\chi_A(X) = \det(\lambda I - A) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2). \text{ Los autovalores son entonces } \lambda_1 = 1 \text{ de multi-}$$

plicidad $a_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$ de multiplicidad $a_2 = 1$. Si calculamos $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : (I - A)x = \bar{0}\} = \text{span}(\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\})$ (EJERCICIO: calcular esto), vemos que $\dim E_1 = 2 < 3 = \text{mult}(1, \chi_A)$. Resulta así que A no es diagonalizable.