COMPLEMENTOS DE MATEMATICA I (BORRADOR)

14 de noviembre de 2023

Contenidos

Unidad 1

Introduccion a Teoria de Grafos

1.1. Definiciones

Definición 1.1.1: Grafo

Un grafo G es un par ordenado $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto de vertices y $E(G)$ un conjunto de aristas tal que $V(G) \cap E(G) = \emptyset$, junto con una funcion de incidencia ϕ_G que asigna a cada arista un par no ordenado de vertices, no necesariamente disjunto, de G. Esto es,

$$\phi_G : E(G) \longrightarrow V(G) \times V(G)$$

Definición 1.1.2: Adyacencia

Dado $G = (V(G), E(G))$ y ϕ_G su funcion de incidencia, $e \in E(G)$ una arista y $u, v \in V(G)$, decimos que e conecta a u y v, que u y v son extremos de e, que son adyacentes, o que e incide en los vertices u y v si $\phi_G(e) = u, v = uv$.

Definición 1.1.3: Tamaño y orden de un grafo

Dado $G = (V(G), E(G))$ un grafo, llamaremos

- Orden de G a $|V(G)| = n = v(G)$
- Tamaño de G a $|E(G)| = m = e(G)$

Definición 1.1.4: Vecindad de un vertice

Dado un grafo G y un vertice $v \in V(G)$, definimos a la vecindad de V como el conjunto

$$N_G(v) = \{v \in V(G) : vu \in E(G)\}$$

Definición 1.1.5: Vecindad cerrada de un vertice

Dado un grafo G y un vertice $v \in V(G)$, definimos a la vecindad de V como el conjunto

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

Definición 1.1.6: Grafo simple

Diremos que un grafo G es simple si no posee bucles ni aristas paralelas. En tal caso, no sera necesario dar explicitamente la funcion de incidencia ϕ, bastara con indicar como aristas a los pares uv.

Fact 1.1.7

En un grafo simple,

$$|v| = n \Longrightarrow 0 \leq |E(G)| \leq \binom{n}{2}$$

Observación.

- Los grafos pueden ser infinitos. Diremos que un grafo G es finito sii m y n son finitos.
- $(\emptyset, \emptyset)$ es el grafo nulo.
- $(\{v\}, \emptyset)$ es el grafo trivial.

1.2. Familias de grafos simples clasicos

Definición 1.2.1: Grafo completo

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos al grafo K_n tal que

$$V(K_n) = \{v_i : i \in [n]\}$$

$$E(K_n) = \{v_i v_j : i, j \in [n], i \neq j\}$$

Tambien notaremos alternativamente a $E(K_n)$ como

$$E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$$

Definición 1.2.2: Grafo camino

Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definimos al grafo P_n tal que

$$V(P_n) = \{v_i : i \in [n]\}$$

$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i, j \in [n-1]\}$$

Definición 1.2.3: Grafo ciclo

Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ definimos al grafo C_n tal que

$$V(C_n) = \{v_i : i \in [n]\}$$

$$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i, j \in [n-1]\} \cup \{v_1 v_n\}$$

Definición 1.2.4: Grafo bipartito

Dado un grafo G diremos que es bipartito si existe una biparticion (X, Y) de $V(G)$ tal que $E(G) \subset X \times Y$.
Lo notaremos $G[X, Y]$

Ejemplo.

- P_n es bipartito.
- C_n es bipartito $\iff n$ es par.

Definición 1.2.5: Familia de grafos bipartitos

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, definimos al grafo $K_{n,m}$ bipartito completo tal queriamos

$$V(K_{n,m}) = \{u_i : i \in [n]\} \cup \{u_i : i \in [m]\} = X \cup Y$$

$$E(K_{n,m}) = X \times Y$$

Observación.

A los grafos $K_{1,m}$ los llamaremos grafos estrella.

Definición 1.2.6: Grafo conexo

Dado un grafo G, diremos que G es conexo si para toda biparticion (X, Y) de su conjunto de vertices (no vacia) existe una arista con un extremo en X y otro en Y. Esto es,

$$E(G) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$$

Definición 1.2.7: Grado de un vertice

El grado de un vertice es la cantidad de aristas que inciden en el. Definiremos que un bucle suma dos unidades, y lo notaremos $d_G(v)$.

Fact 1.2.8

En un grafo simple,

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

Definición 1.2.9: Grados maximos y minimos de un grafo

A los grados maximos y minimos de un grafo G los notaremos

$$\delta_G = min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

$$\Delta_G = max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Observación.

- Diremos que un vertice v es aislado si $d_G(v) = 0$.
- Por el contrario, diremos que es universal si $N_G[v] = V(G)$.

Teorema 1.2.10: Sumatoria de los grados de un grafo

Sea G un grafo con m aristas. Entonces,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\,|E(G)| = 2m$$

Demostración. Sigue de la definicion de grado de un vertice y del hecho de que cada arista aporta do unidades a la cantidad. □

Corolario 1.2.11

Sea G un grafo, entonces la cantidad de vertices de grado impar de G es par.

Prueba.

Sigue del teorema anterior. Veamos que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d_G(v) impar}} d_G(v) + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d_G(v) par}} d_G(v)$$

Donde sabemos que $2m$ es par y el segundo sumando tambien, luego el primero tambien debe ser par. Es decir, la suma de numeros impares es par, lo que implica que debe haber una cantidad par de vertices con grado impar.

Definición 1.2.12: Grafo $k-regular$

Diremos que un grafo G es $k-regular$ si

$$\exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall v \in V(G) : \; d_G(v) = k$$

Ejemplo.

El grafo de Petersen es $3-regular$.

1.3. Otra forma de representar grafos

Definición 1.3.1: Matriz de incidencia de un grafo

Sea $G(V, E)$ un grafo. Definiremos a la matriz de incidencia de G como la matriz $M_G \in \mathbb{N}^{n \times m}$ tal que

$$M_G := (m_{ve})$$

donde m_{ve} es el numero de veces que la arista e incide en un vertice u.

Definición 1.3.2: Matriz de adyacencia de un grafo

Sea $G(V, E)$ un grafo. Definiremos a la matriz de adyacencia de G como la matriz $A_G \in \mathbb{N}^{n \times n}$ tal que

$$A_G := (a_{uv})$$

donde m_{uv} es la cantidad de aristas que conectan a los vertices u y v. Contaremos a los bucles como dos aristas.

1.4. Isomorfismos de grafos

Definición 1.4.1: Isomorfismo

Dados G, H grafos **simples**, decimos que una funcion

$$\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$$

es un isomorfismo si es biyectiva y preserva adyacencias, es decir, si se verifica que

$$uv \in E(G) \iff \theta(u)\theta(v) \in E(H)$$

Si existe un isomorfismo, diremos que G y H son isomorfos, y notaremos

$$G \simeq H$$

Observación.

> Si $G \simeq H$ entonces debera valer $|E(G)| = |E(H)|$ y $|V(G)| = |V(H)|$, pero esto no es condicion suficiente.

Definición 1.4.2: Automorfismo

Un automorfismo es un isomorfismo de un grafo simple G en si mismo, es decir, se trata de una permutacion de sus vertices que preserva adyacencias.

Definición 1.4.3: Vertices similares

Dado un grafo G diremos que dos vertices $u, v \in V(G)$ son similares si existe un automorfismo θ tal que $\theta(u) = v$.

Definición 1.4.4: Grafo vertice-transitivo

Un grafo se dice vertice transitivo si todos sus vertices son similares.

Ejemplo.

> K_n, C_n, y $K_{n,n}$ son familias de grafos vertices transitivos. Tambien lo es el grafo de Petersen.

Definición 1.4.5: Grafo de interseccion

Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ el grafo de interseccion de $\mathcal{F}$ es el grafo cuyo conjunto de vertices es $\mathcal{F}$ y dos vertices S_i y S_j son adyacentes si y solo si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.
Es decir, es el grafo $I = (\mathcal{F}, E)$ tal que

$$E = \{XY : X \cap Y \neq \emptyset\}$$

Definición 1.4.6: Grafo de linea

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Entonces, el grafo de linea de G, que notaremos $L(G)$, es el grafo de interseccion de la familia de conjuntos E.
Es decir, es el grafo que tiene por vertices a las aristas de G (que son conjuntos de dos vertices) y dos vertices son adyacentes si y solo si su interseccion es no nula, esto es, si las aristas que estos vertices representan comparten algun vertice.

Definición 1.4.7: Grafos de intervalos

Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F}$ es una familia de intervalos de la recta real, entonces el grafo de interseccion de $\mathcal{F}$ se denomina grafo de intervalo.

Observación.

> No todos los grafos son grafos de interseccion o de intervalo. Por ejemplo, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ tenemos que C_n no puede ser grafo de intervalo.

1.5. Subgrafos y supergrafos

Definición 1.5.1: Eliminacion de aristas y vertices

Dados un grafo G, $e \in E(G)$, $v \in V(G)$, definimos al grafo $G\ e$ como el grafo obtenido borrando la artista e de G.
Analogamente, definimos al grafo $G - v$ como el que se obtiene de eliminar el vertice v y todas las aristas que inciden en el.

Definición 1.5.2: Subgrafo

Dado G un grafo, decimos que un grafo H es un subgrafo de G si H puede ser obtenido de G aplicando borrado de vertices y/o aristas. En tal caso, notaremos $H \subset G$.

Definición 1.5.3: Subgrafo inducido

Un subgrafo de G se dice inducido si puede ser obtenido de G borrando unicamente vertices.

Definición 1.5.4: Subgrafo inducido por un conjunto

Dado $G = (V, E)$ y $U \subset V$, definimos al subgrafo inducido por U, y lo notamos $G[U]$ al subgrafo obtenido de borrar los vertices $V - U$.

Definición 1.5.5: Grafo H-free o libre de H

Dados dos grafos G y H, diremos que G es $H - free$ o libre de H si H no es un subgrafo de G.

Observación.

Si un grafo G es $C_{2n+1} - free$ es bipartito. Mas aun, vale el si y solo si, esto es, G es $C_{2n+1} - free$ si y solo si G es bipartito.
Esto implica que la familia de grafos $C_{2n+1} - free$ es exactamente la familia de grafos bipartitos, se trata de una caracterizacion de los grafos bipartitos por subgrafos prohibidos.

1.6. Parametros en grafos

Definición 1.6.1: Clique

Dado un grafo G, un conjunto $W \subset V(G)$ es una *clique* si $G[W]$ es un grafo completo.

Definición 1.6.2: Estable

Dado un grafo G, un conjunto $S \subset V(G)$ es un estable o independiente si todos sus vertices son mutuamente no adyacentes. Esto es, si $E(G[S]) = \emptyset$.

Definición 1.6.3: Numero de clique

El numero de clique de un grafo G es

$$\omega(G) = \max\{|X| \ : X \text{ es una clique}\}$$

Definición 1.6.4: Numero de estabilidad

El numero de estabilidad de un grafo G es

$$\alpha(G) = \max\{|X| \ : X \text{ es un estable}\}$$

Definición 1.6.5: Numero de Ramsey

Dados $k, l \in \mathbb{N}$, el minimo $r \in \mathbb{N}$ que verifica que todo grafo con al menos r vertices tiene una clique de tamaño k o un estable de tamaño l se denomina numero de Ramsey.

1.7. Algunas operaciones con grafos

Definición 1.7.1: Grafo union disjunta

Dados dos grafos G y H, definimos al grafo union disjunta de G y H, y lo notamos $G + H$ $(G \cup H)$, como

$$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$$

$$E(G + H) = E(G) \cup E(H)$$

Definición 1.7.2: Grafo join

Dados dos grafos G y H, definimos al grafo join de G y H, y lo notamos $G \oplus H$, como

$$V(G \oplus H) = V(G) \cup V(H)$$

$$E(G \oplus H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

Proposición 1.7.3

Sea G un grafo tal que su grafo complemento $\overline{G}$ es no conexo. Luego, $\overline{G} = H_1 + H_2$ para algunos grafos H_1, H_2 sin aristas entre ellos. Entonces,

$$\overline{\overline{G}} = G = \overline{H_1} \oplus \overline{H_2}$$

Proposición 1.7.4

Todo grafo G con 2 o mas verticces verifica exactamente una de las siguientes condiciones:

1. G es no conexo.
2. $\overline{G}$ es no conexo.
3. G y $\overline{G}$ son conexos

Observación.

La utilidad de la proposicion anterior recae en que cada una de las condiciones anteriores implica (respectivamente)

1. $G = G_1 + G_2$
2. $G = G_1 \oplus G_2$
3. G es modular.

Esto nos permite hacer una descomposicion modular de cualquier grafo.

Fact 1.7.5

- $\omega(G+H) = \text{máx}\{\omega(G),\ \omega(H)\}$
- $\alpha(G+H) = \alpha(G) + \alpha(H)$
- $\omega(G \oplus H) = \omega(G) + \omega(H)$
- $\alpha(G \oplus H) = \text{máx}\{\alpha(G),\ \alpha(H)\}$

Definición 1.7.6: Cografo

Un grafo es un cografo si es $P_4 - free$.

Ejemplo.

> K_n y $K_{n,m}$ son cografos. Tambien lo son C_3 y C_4 pero no lo son C_n para ningun $n \geq 5$.

Proposición 1.7.7

G es cografo $\iff$ todos sus grafos modulares son triviales.

Definición 1.7.8: Producto cartesiano entre grafos

Dados dos grafos G y H, el producto cartesiano entre G y H es el grafo, que notaremos $G\Box H$, definido por

$$V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G\Box H) = \{(g,h)(g',h') : g = g' \wedge\ hh' \in E(H) \vee h = h' \wedge gg' \in E(G)\}$$

Observación.

1. El producto cartsiano de grafos es conmutativo (son isomorfos).
2. En general, observamos que el grafo inducido por un conjunto de la forma $\{g\}\times V(H)$ es isomorfo a H, y los denominamos $H - fibrados$.
3. Analogamente, el grafo inducido por un conjunto de la forma $V(G)\times\{h\}$ es isomorfo a G y se denomina $G - fibrado$.

Proposición 1.7.9

$$\omega(G\Box H) = \max\{\omega(G),\ \omega(H)\}$$

Prueba.

Como $G\Box H$ posee un subgrafo inducido isomorfo a G (cada $G - fibrado$), entonces tenemos que $\omega(G) \leq \omega(G\Box H)$.

Analogamente, se puede ver que $\omega(H) \leq \omega(G\Box H)$.

Luego, $\max\{\omega(G), \omega(H)\} \leq \omega(G\Box H)$.

Supongamos ahora por el absurdo que $\omega(G\Box H) > \max\{\omega(G), \omega(H)\}$. Tal clique maxima, que llamaremos W, no puede estar contenida en un $G - fibrado$ ni en un $H - fibrado$.

En consecuencia, W debe tener dos vertices de la forma (g, h) y (g', h') tales que $g \neq g'$ y $h \neq h'$. En ese caso, tales vertices no serian adyacentes, luego W no es una clique, absurdo.

$$\therefore \omega(G\Box H) = \max\{\omega(G),\ \omega(H)\}$$

Definición 1.7.10: Propiedad invariante via isomorfismo

Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *invariante via isomorfismo* si para todo grafo G que cumple la propiedad $\mathcal{P}$ se verifica que todo grafo H isomorfo a G verifica la propiedad.

Ejemplo.

Algunas propiedades invariantes via isomorfismo son

- Tener n vertices de grado k
- Tener una arista (u, w) donde $d(u) = i$ y $d(w) = j$.
- Ser conexo
- Ser bipartito

Unidad 2

Caminos, ciclos y recorridos

2.1. Definiciones y primeros resultados

Definición 2.1.1: Camino

Dado un grafo G, un camino en G es una lista $v_0, e_0, v_1, \ldots, e_k, v_k$ de vertices y aristas tales que $e_i = v_{i-1}, \forall i \in [k]$. Llamaremos longitud de un camino a la cantidad de aristas que posee.
Si el grafo es simple, es suficiente con listar los vertices solamente.

Definición 2.1.2: Camino simple

Un camino simple es un camino que no repite vertices

Definición 2.1.3: Recorrido

Un recorrido es un camino que no repite aristas

Definición 2.1.4: $u, v-$camino/recorrido/camino simple

Un $u, v-$*camino* es un camino cuyos extremos son u y v. Analogamente se define para recorridos y caminos simples

Definición 2.1.5: Camino/Recorrido cerrado

Un camino/recorrido cerrado es un $u, u-$camino/recorrido.

Definición 2.1.6: Circuitos y ciclos

Un recorrido cerrado es un circuito. Un camino simple cerrado es un ciclo.

Teorema 2.1.7: Existencia de caminos simples

Todo $u, v-$camino contiene un $u, v-$camino simple.

Demostración. Procederemos por induccion sobre la longitud del camino n.

▪ Si $n = 0$, estamos en el caso de un unico vertice, luego este es un camino simple en si mismo.

▪ Sea $n \geq 1$ y supongamos inductivamente que la propiedad vale para todo camino de longitud menor a n. Entonces,

▪ Si el camino no repite vertices, no hay nada para hacer, pues ya es simple.

▪ Supongamos que si repite (al menos) un vertice que llamaremos w. Entonces, si eliminamos del camino a los vertices y aristas entre dos apariciones de w, manteniendo una aparicion del vertice, tendremos un $u, v-$camino de longitud menor o igual a n. Entonces, por HI este camino contiene un $u, v-$camino simple.

Luego, en particular ese es un $u, v-$camino simple del camino original, como queriamos demostrar. □

Observación.

▪ Un circuito contiene un ciclo no trivial. Mas aun, dado un circuito y un vertice v, existe al menos un ciclo que esta contenido en el circuito al cual v pertenece.

▪ Un grafo G es conexo si $\forall u, v \in V(G)$ existe un $u, v-$camino.

▪ Una componente conexa de G es un subgrafo conexo maximal.

▪ El agregado de una arista reduce en a lo sumo una unidad el numero de componentes conexas del grafo.

▪ El borrado de una arista aumenta en a lo sumo una unidad el numero de componentes conexas.

▪ El borrado de un vertice puede aumentar el numero de componentes conexas en hasta $|V(G) - 2|$ y disminuir en a lo sumo 1.

Definición 2.1.8: Vertice y arista de corte

Dado un grafo G, una arista de corte de G es una arista cuyo borrado aumenta el numero de componentes conexas de G.
Un vertice de corte es un vertice tal que $G - v$ posee mas componentes conexas que G.

Teorema 2.1.9: Caracterizacion de aristas de corte

Una arista es de corte $\iff$ no pertenece a ningun ciclo

Demostración. $\Longleftarrow$) Supongamos que $e \in E(G)$ no es de corte. Sea $e = uv$, $u \neq v$ y H la componente conexa de G a la cual pertenece e. Ahora, como e no es de corte de G, tampoco puede ser de corte de H, luego H/e debe ser conexo.

Como $u, v \in V(H/e)$, existe un $u, v-$camino simple en H/e. Este camino junto con e forman un ciclo en H y por lo tanto en G, absurdo.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $e = uv \in E(G)$ pertenece a un ciclo C. Sea H la componente conexa tal que $e \in E(H)$. Veamos que H/e es conexo.

Sean $x, y \in V(H/e)$. Como H es conexo, existe un $x, y-$camino, que llamaremos P, en H. Entonces,

- Si $e \notin P \Longrightarrow P$ es un $x, t - camino$ en H/e.
- Si $e \in P \Longrightarrow$ consideramos el camino P' que se obtiene de reemplazar la arista e en P por C/e. Como C/e es un $u, v-$camino, P' es un $x, y-$camino y $e \notin P'$, entonces P' es un $x, y-$camino en H/e.

$\therefore$ H/e es conexo $\Longrightarrow$ G/e tiene la misma cantidad de componentes conexas que $G \Longrightarrow$ no es de corte de G.

$\square$

Observación.

- Si $e = uv$ es de corte, entonces v es de corte?
- $\overline{G} - v \simeq ? \ \overline{G - v}$
- $v \in V(G)$ es de corte $\Longrightarrow \bar{(}G) - v$ es conexo.
- Si G es autocomplementario, entonces G tiene un vertice de corte $\iff G$ tiene un vertice de grado 1.

2.2. Circuitos de Euler

Definición 2.2.1: Grafos y circuitos eulerianos

Un grafo es euleriano si posee un circuito que contiene a todas las aristas.
Un circuito es euleriano es un circuito que recorre todas las aristas.

Definición 2.2.2: Camino maximal

Un camino simple es maximal si no esta contenido en otro de mayor longitud.

Lema 2.2.3

Sea G un grafo tal que $\delta(G) \geq 2$. Entonces, G contiene un ciclo.

Demostración

Comencemos observando que, si G tiene bucles o aristas repetidas, la tesis vale trivialmente. Por lo tanto, supongamos que G no tiene bucles ni aristas repetidas, y llamemos P a un camino simple maximal en G. Entonces,

- Si P es cerrado, $\Longrightarrow P$ es un ciclo.
- Si P no es cerrado, consideremos u un extremo de P cualquiera. Como $d(u) \geq 2$, existira un v tal que $uv \in E(G)$ y $uv \notin P$ (pues de otra manera no seria u extremo). Luego v pertenece a P ya que de lo contrario podriamos obtener un camino simple considerando la arista uv y P, y este nuevo camino tendria mayor longitud que P, lo que contradice nuestra hipotesis de P maximal.

$\therefore v \in P$, luego uv y la porcion del camino P que unen v con u forman un ciclo. ■

Teorema 2.2.4: Teorema de Euler

Un grafo G es euleriano $\Longleftrightarrow G$ tiene a lo sumo una componente conexa no trivial y todos sus vertices tienen un grado par

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que G tiene un circuito euleriano C.

- Si $E(G) = \emptyset$ la tesis es valida.
- Supongamos por el contrario que $E(G) \neq \emptyset$. Cada paso de C por un vertice usa 2 aristas incidentes en el, donde la primera arista y la ultima suman 2 al vertice inicial. Luego, todo vertice tiene grado par. Ademas, como 2 aristas cualesquiera de C estan en el circuito euleriano, en particular estan en la misma componente conexa.

$\Longleftarrow$) Sabemos que $d_G(v)$ es par $\forall v \in V(G)$ y tiene a lo sumo una componente conexa no trivial. Procederemos por induccion sobre $m = |E(G)|$.

- $m = 0$, entonces cada componente conexa es trivial luego se verifica la propiedad.
- Supongamos $m \geq 1$ y que el resultado es valido para todo grafo G con menos de m aristas. Como tenemos al menos una arista, hay al menos una componente conexa no trivial H.

Observemos que $d_H(v) = d_G(v), \forall v \in V(H) \implies H$ es par.

No pueden existir vertices de grado 0 ya que es conexo, entonces $\delta(H) \geq 2 \implies H$ tiene un ciclo C (lema). Sea $G' = G/E(C)$, como C tiene 0 o 2 aristas incidentes en cada vertice de G, entonces cada componente conexa de G' es par. Ademas, cada componente conexa tiene menos de m aristas. Luego, por HI cada componente conexa de G' tiene un circuito euleriano.

Ahora, para combinar estos circuitos eulerianos, comenzamos en un vertice cualquiera v de C, recorremos C y cada vez que llegamos a un vertice de alguna componente conexa, realizamos el circuito euleriano de esa componente conexa (si es que no la recorrimos antes), hasta volver al vertice de C para continuar. Este recorrido culmina en v y es, en efecto, un circuito euleriano.

$\square$

Corolario 2.2.5

Todo grafo par se puede descomponer en ciclos.

Definición 2.2.6: Distancia en un grafo

Sea G un grafo simple. Dados $u, v \in V(G)$, la distancia en G entre u y v es la longitud del camino mas corto que los une, si existe. En caso contrario, decimos que la distancia es ∞.
Lo notamos $dist_G(u, v) = l \in \mathbb{N}$.

Observación.

> La maxima $dist_G(u, v) \forall v, u \in V(G)$ se denomina diametro.
> Los caminos mas cortos son simples e inducidos, esto es:
> Si $dist_G(u, v) = k \in \mathbb{N}$, entonces existe P_{k+1} inducido en G.

Fact 2.2.7

Si $diam(G) = k \in \mathbb{N}$ entonces existe un P_{k+1} inducido. Mas aun, existe P_m inducido $\forall m \leq k + 1$.

Corolario 2.2.8

Sea G un grafo simple tal que G es $P_k - free$. Entonces, $diam(G) < k - 1$.

Proposición 2.2.9

$dist_G(u, v) = 1 \iff uv \in E(G)$

Observación.

Sea G simple y conexo, y sea $v \in V(G)$, con $diam(G) \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $D_k(G, v) = \{u \in V(G) : dist_G(u, v) = k\}$, donde $k \in \{0, \ldots, diam(G)\}$.
Observemos que fijando un vertice v y tomando todos los k posibles entre 0 y $diam(G)$ lo que obtenemos es una particion de $V(G)$.

Observación.

Tomar una particion en D_1, D_2, D_3, D_4 puede ser util para probar la equivalencia entre bipartito y no tener ciclos impares.

Proposición 2.2.10

Un camino cerrado impar contiene un ciclo impar.

Prueba.

Por induccion sobre la longitud del camino $l = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Caso base. Sea $k = 1$. Entonces el unico camino cerrado posible es exactamente C_3, luego la propiedad vale trivialmente.

Hipotesis inductiva. Supongamos que para todo $k \leq n - 1$ vale la propiedad.

Paso inductivo. Consideremos el camino cerrado P de longitud $2n + 1 = l$. Ahora, tenemos que este camino puede ser simple o no. Si el camino es simple, entonces por definicion es un ciclo impar, luego vale la propiedad.

Consideremos entonces que el camino no es simple, es decir, tiene algun vertice repetido. Expresemos al camino como

$$P = v_0 v_1 v_2 \ldots v_{2n}$$

Definamos entonces un indice $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$j = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : v_i = v_k, i \neq k\}$$

Es decir, j es el primer indice de un vertice repetido en P. Como j es repetido, podemos expresar a P de la siguiente manera:

$$P = v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_j v_{j+1} \dots v_k v_{k+1} \dots v_0$$

Podemos separar entonces a P en dos caminos cerrados P_1 y P_2 tales que

$$P_1 = v_0 v_1 v_2 \dots v_j v_{k+1} \dots v_0$$

$$P_2 = v_j v_{j+1} \dots v_{k-1} v_k$$

$$P = P_1 + P_2 \ (P_1 \cup P_2)$$

Observemos que, como la longitud de P es impar, y es igual a la suma de las longitudes de P_1 y P_2, necesariamente alguno de los dos caminos debe tener longitud impar. Entonces, considerando ese camino, cuya longitud debera ser menor a $2k+1$, aplicando H.I. tenemos que debe contener un ciclo impar. En particular, entonces, P contiene un ciclo impar.

$\therefore$ P contiene un ciclo impar, luego por teorema de induccion vale la proposicion.

Observación.

Este es un resultado mas fuerte que el anterior. Es decir, probar esta proposicion facilita la prueba de la caracterizacion de los grafos bipartitos anterior.

2.3. Grafos dirigidos (digrafos)

Ejemplo.

Si $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$, x es un divisor maximal de y si $\frac{y}{x}$ es un numero primo.

Para $S \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto $R = \{(x, y) \in S^2 : x \text{ es un divisor maximal de y } \}$.

Para graficarlo, colocamos un vertice por cada numero de S y una flecha de x a y si x es divisior maximal de y.

Definición 2.3.1: Grafo dirigido (digrafo)

Un grafo dirigido o digrafo es una terna que consiste en un conjunto de vertices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una funcion que asigna a cada elemento de $E(G)$ un par ordenado de vertices.

Observación.

Una notacion para un digrafo es $\vec{G}$ o D.
A las aristas de un digrafo se las suele llamar tambien arcos.

Definición 2.3.2: Bucles en digrafos

Un bucle en un digrafo es una arista con los mismos extremos. Aristas multiples (o repetidas) son aristas que poseen el mismo par ordenado.

Ejemplo.

Sea $f : A \longrightarrow B$ una funcion. El digrafo funcional de f es el digrafo con conjunto de vertices A y arcos $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.

Definición 2.3.3: Grafo subyacente

El grafo subyacente de un digrafo D es el grafo G obtenido considerando los arcos como pares no ordenados.

Observación.

Las definiciones sobre digrafos de subdigrafo o isomorfismo son analogas a las de grafos.

Definición 2.3.4: Matriz de adyacencia de un digrafo

Dado D un digrafo con n vertices, la matriz de adyacencia de D es la matriz $A(D) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ definida por $A(D) = \{a_{ij}\}$ donde a_{ij} es la cantidad de arcos de la forma (i, j).

Definición 2.3.5: Matriz de incidencia de un digrafo

Dado D un digrafo sin bucles, definimos a la matriz de incidencia de D, y la notamos $M(D)$ a la matriz tal que $M(D) = \{m_{ve}\}$ donde:

$$m_{ve} = \begin{cases} 1 & e = (v, u) \in E(D) \\ -1 & e = (u, v) \in E(D) \\ 0 & e = (x, y) \in E(D) \wedge x \neq v \neq y \end{cases}$$

Definición 2.3.6: Grado de salida y de entrada de un vertice

Sea D un digrafo y $v \in V(G)$. Entonces,

- El grado de salida de v en G es la cantidad de arcos de la forma (v, u) para algun $u \in V(G)$.
- El grado de entrada de v en G es la cantidad de arcos de la forma (u, v) para algun $u \in V(G)$.

Los notaremos $d_D^+(v)$ y $d_D^-(v)$ respectivamente.

Proposición 2.3.7

$$\sum_{v \in V(D)} d_D^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d_D^-(v)$$

Observación.

Se definen de manera analoga camino, recorrido, camino simple, circuito, ciclo, respetando el orden de los arcos en la lista.

Definición 2.3.8: Circuito euleriano dirigido

Un circuito euleriano dirigido de un digrafo es un circuito que recorre cada arco exactamente una vez.

Lema 2.3.9: Lema previo al teorema de Euler para digrafos

Sea D un digrafo tal que $\forall v \in V(D)$ $d_D^+(v) \geq 1$. Entonces, D contiene un ciclo.

Demostración

Sea $\vec{P}$ un camino simple dirigido maximal en D y $u \in V(D)$ el ultimo vertice de $\vec{P}$. Si $\vec{P}$ es cerrado, vale la tesis.

En caso contrario, con $d_D^+(u) \geq 1$ existe un arco de la forma (u, v) para algun $v \in V(D)$. Tenemos entonces dos posibilidades para este v.

Si $v \notin V(\vec{P})$, entonces $\vec{P}$ no seria maximal, absurdo. Luego, $v \in V(\vec{P})$, entonces (u, v) junto con la parte del camino que une v con u forman un ciclo. ∎

Teorema 2.3.10: Teorema de Euler

Sea D un digrafo. Entonces,

$$D \text{ es euleriano} \iff d_D^+(v) = d_D^-(v)\ \forall v \in V(D) \text{ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente conexa no trivial.}$$

Demostración. Sigue del lema anterior, analoga al teorema de Euler para grafos. □

2.4. Ciclos de Hamilton

Definición 2.4.1: Ciclo Hamiltoniano

Dado un grafo G, un ciclo en G es hamiltoniano (o de Hamilton) si contiene todos los vertices.
En tal caso, diremos que G es un $grafo\ hamiltoniano$.

Observación.

> No existe una caracterizacion sencilla de los grafos hamiltonianos como si existe de los grafos eulerianos.
> Consideraremos grafos simples, ya que los bucles y aristas repetidas son irrelevantes para la existencia de ciclos hamiltonianos.

Fact 2.4.2

Hay condiciones evientes que un grafo G debe verificar para ser hamiltoniano:

- $\delta(G) \geq 2$
- G conexo
- Las aristas con extremos en vertices de grado 2 deben aparecer en el ciclo de Hamilton (si existe).

Ejemplo.

> - $K_{m,n}$ es hamiltoniano si y solo si $m = n$.

Teorema 2.4.3:

Condicion necesaria para la existencia de ciclos hamiltonianos

Si G es hamiltoniano, entonces para todo $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$, el grafo $G - S$ posee a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

Demostración. Supongamos G es hamiltoniano. Sea C un ciclo hamiltoniano en G y $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ el numero de componentes conexas de $G - S$.

Observemos que la cantidad de aristas de C con al menos un extremo en S es a lo sumo $2\,|S|$.

Por otro lado, para una componente conexa de $G - S$ deben existir al menos dos aristas de C con un extremo en dicha componente y el otro en S. Luego, existen al menos $2k$ aristas con un extremo en S.

Tenemos entonces que la cantidad de aristas con extremo en S es al menos $2k$ y a lo sumo $2|S|$. Esto es,

$$\therefore \quad 2k \leq 2|S| \Longrightarrow k \leq |S|$$

□

Corolario 2.4.4

Si un grafo G tiene vertices de corte entonces no es hamiltoniano.

Definición 2.4.5: Cantidad de componentes conexas

Dado un grafo G, notaremos $c(G)$ al numero de componentes conexas de G.

Teorema 2.4.6: Condicion suficiente para la existencia de ciclos hamiltonianos

Si G es un grafo simple con $|V(G)| \geq 3$ tal que

$$\forall u, v \in V(G), u \neq v, uv \notin E(G) \quad d_G(u) + d_G(v) \geq n \Longrightarrow G \textit{ es hamiltoniano}$$

Demostración. Supongamos por el absurdo que existe un grafo G no hamiltoniano tal que satisface las hipotesis. Notemos que si adicionamos aristas a G, seguira verificando las hipotesis. Por lo tanto, podemos considerar a G maximal en aristas, *i.e.* G no es hamiltoniano, satisface las hipotesis, y ademas es maximal en $E(G)$, si agregamos una arista se convierte en hamiltoniano.

Sean entonces $u, v \in V(G)$ tales que $uv \notin E(G)$ (deben existir, de otra manera seria $G \approxeq K_n$ *hamiltoniano*). Tenemos que entonces en $G + uv$ existira un ciclo hamiltoniano. Ademas, ese ciclo necesariamente contendra a la arista uv, pues de otra manera ya existia un ciclo hamiltoniano previo a añadir la arista.

Entonces, G tiene un $u, v -$ *camino simple* que pasa por todos los vertices (el que se convierte en ciclo al agregar uv a $E(G)$). Sea

$$P = u = v_1\ v_2\ v_3\ \dots v_i\ v_{i+1}\ \dots\ v_{n-1}\ v_n = v$$

Queremos probar ahora que deben existir dos vertices consecutivos, v_i, v_{i+1} tales que u es adyacente a v_i y v a v_{i+1} o viceversa. Esto nos permitiria construir un ciclo hamiltoniano en G.

Sean

$$S = \{i \in [n] : v_{i+1} \in N(u)\}$$

$$T = \{i \in [n] : v_i \in N(v)\}$$

Ahora por hipotesis tenemos que $n \leq d_G(u) + d_G(v)$. Pero notemos que

$$n \leq d_G(u) + d_G(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T|$$

Observemos que $n \notin S \cap T$ y $n \notin S \cup T$, luego tenemos que el cardinal de $S \cup T$ es a lo sumo $n - 1$. En consecuencia, debera ser $|S \cap T| \geq 1$ para que se verifique la desigualdad.

Esto es, existe un indice $i_0 \in S \cap T$, luego $v_{i_0}v \in E(G)$ y $v_{i_0+1}u \in E(G)$. Entonces, consideremos el ciclo

$$C = v_1\ \dots\ v_{i_0}\ v\ \dots\ v_{i_0+1}\ u$$

C es un ciclo hamiltoniano, contradiccion.

$\therefore$ si G satisface las hipotesis entonces es hamiltoniano. □

Corolario 2.4.7

Si G es un grafo simple con

$$|V(G)| \geq 3 \quad \wedge \quad \delta(G) \geq \frac{n}{2} = \frac{|V(G)|}{2}$$

Entonces G es hamiltoniano.

Corolario 2.4.8

Sea G un grafo simple. Si existen $u, v \in V(G)$ tales que

$$u \neq v, \quad uv \notin E(G), \quad d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

Entonces

$$G \text{ es hamiltoniano} \iff G + uv \text{ es hamiltoniano}$$

Unidad 3

Arboles

3.1. Definiciones y primeros resultados

Definición 3.1.1: Grafo aciclico

Un grafo es aciclico si no tiene ciclos.

Definición 3.1.2: Bosque, arbol, hoja

Dado un grafo G diremos que

- G es un **bosque** si es aciclico.
- G es un **arbol** si es un bosque y es conexo.
- Dado $v \in V(G)$, G un arbol, diremos que v es una **hoja** si es un vertice de grado uno.

Definición 3.1.3: Subgrafo recubridor (generador o de expansion)

Dado un grafo G, diremos que H un subgrafo de G es un **subgrafo recubridor** de G si tiene los mismos vertices que G.

Definición 3.1.4: Arbol recubridor

Dado un grafo G, un **arbol recubridor** de G es todo subgrafo recubridor de G que es un arbol.

Ejemplo.

Algunos ejemplos de arboles son:

- Un grafo con un unico vertice
- El grafo completo de dos vertices, K_2
- Los caminos P_n para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Los grafos estrella $K_{1,m}$

Observación.

Por definicion un arbol no tiene ciclos, luego por caracterizacion de grafos bipartitos, todo arbol es bipartito.

Proposición 3.1.5

Todo arbol T con al menos dos vertices tiene al menos dos hojas

Prueba.

Como T tiene al menos dos vertices, tiene al menos una arista, pues de otra manera no seria conexo. Sea P un camino simple maximal (y no trivial) en T.

Sean los extremos de P los vertices $u, v \in V(G)$. Notemos que los extremos de P no pueden ser adyacentes a otros vertices de P, pues formarian un ciclo. Ademas, como P es maximal, los extremos de P no pueden tener vecinos fuera de P pues en ese caso, estos vecinos serian los nuevos extremos. Es decir, u y v no pueden tener mas vecinos fuera ni dentro de P.

$\therefore$ Como u, v tienen una arista en P y ninguna fuera de P, tienen grado 1. Es decir, los dos extremos de P son hojas. ■

Proposición 3.1.6

Sea T un arbol con al menos dos vertices y v una hoja de T. Entonces, $T - v$ es un arbol.

Prueba.

Comencemos observando que $T - v$ es aciclico ya que T es aciclico. Ademas, si $u, v \in V(T) - \{v\}$, existe un $u, v-$camino simple P en T.

Este camino no usa el vertice v, ya que $d_T(v) = 1$ y los vertices del camino distintos de u y w tienen grado al menos 2. Luego, P es un $u, w-$camino en $T - v$.

En consecuencia, $T - v$ es conexo.

$\therefore$ por aciclico y conexo, $T - v$ es un arbol. ■

Teorema 3.1.7: Definiciones equivalentes de arbol

Sea G un grafo con $|V(G)| = n \geq 1$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. G es conexo y aciclico.
2. G es conexo y $|E(G)| = n - 1$.
3. G es aciclico y $|E(G)| = n - 1$.

Demostración. **1 $\implies$ 2 y 3**) Probaremos la implicancia por induccion sobre $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ el resultado es trivial.

Supongamos ahora que $n \geq 2$ y que vale la implicancia para todo grafo con menos de n vertices. Del lema anterior, tenemos que como $n \geq 2$ entonces G tiene al menos dos hojas. Sea v una hoja de G.

Ahora, considerando otro lema revio, tenemos que $G - v$ es aciclico y conexo. Notemos entonces que $G - v$ es un grafo aciclico, conexo, y tal que $\Big|V(G)\Big| = n - 1$. Luego, por H.I. tenemos que $\Big|E(G - v)\Big| = \Big|V(G - v)\Big| - 1 = n - 2$.

Finalmente, al agregar nuevamente el vertice v a $G - v$, es claro que

$$\Big|V(G)\Big| = \Big|V(G - v)\Big| + 1 = n - 1 + 1 = n$$

$$\Big|E(G)\Big| = \Big|E(G - v)\Big| + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$$

Como queriamos probar.

2 $\implies$ 1 y 3) Supongamos que borramos de G una arista de cada ciclo sucesivamente hasta obtener un grafo G' aciclico. Observemos que una arista de un ciclo no es de corte.

Luego, G' es conexo y aciclico. Entonces, por lo probado anteriormente,

$$\Big|E(G')\Big| = \Big|V(G')\Big| - 1 = \Big|V(G)\Big| - 1 = n - 1 = \Big|E(G)\Big|$$

Es decir, G' tiene los mismos vertices y aristas que G. Por lo tanto, $G' = G$ luego G es aciclico, como queriamos probar.

3 $\implies$ 1 y 2) Sean $G_1, \dots, G_{c(G)}$ (donde $c(G)$ es la cantidad de componentes conexas de G) las componentes conexas de G.

Cada componente conexa es en particular aciclica y conexa, entonces por lo probado anteriormente,

$$\left|E(G_i)\right| = \left|V(G_i)\right| - 1$$

Por lo tanto,

$$n - 1 = |E(G)| = \sum_{i-1}^{c(G)} \left|E(G_i)\right| = \sum_{i-1}^{c(G)} \left(\left|V(G_i)\right| - 1\right) = \left(\sum_{i-1}^{c(G)} \left|V(G_i)\right|\right) - c(G) = n - c(G)$$

Es decir, $c(G) = 1$, entonces G es conexo. □

Corolario 3.1.8

1. Toda arista de un arbol es de corte.
2. Agregar una arista a un arbol forma exactamente un ciclo en el arbol.
3. Todo grafo conexo tiene un arbol recubridor.

Prueba.

1. Una arista es de corte si y solo si no pertenece a ningun ciclo. Luego, si existiera una arista de corte en un arbol, perteneceria a algun ciclo en el arbol, absurdo pues los arboles son aciclicos.

2. Por **(1 y 2)**, como al agregar una arista el grafo sigue siendo conexo pero ahora tiene n aristas, necesariamente debe fallar la condicion de aciclico. Entonces, agregar una arista crea al menos un nuevo ciclo. (**Obs.** Otra manera era considerar un u, v camino en el arbol, cuya existencia viene dada por ser conexo. Luego, al agregar la arista u, v, junto con el camino forman un ciclo).

   La prueba de que es exactamente un ciclo sigue de la caracterizacion de arboles que implica que para cada par de vertices existe un unico camino simple en el arbol que los une. Luego, es claro que si hubiera dos ciclos, ambos usan la nueva arista pero la unica forma de crear un ciclo con esa arista es usar el unico camino simple, luego son el mismo ciclo.

3. Basta con partir del grafo conexo y eliminar sucesivamente las aristas que forman ciclos. De tal manera, G se mantiene conexo y eventualmente sera aciclico, luego es un arbol y en particular un arbol recubridor del grafo original.

■

Proposición 3.1.9

Sean T y T' dos arboles recubridores de un grafo G y $e \in E(T) - E(T')$.
Entonces, existe $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $(T \backslash e) \cup e'$ es un arbol recubridor de G.

Prueba.

Del corolario anterior, sabemos que toda arista de T es de corte. Sean entonces T_1 y T_2 las dos componentes conexas de $T \backslash e$.

Como T' es conexo, existe $e' \in E(T')$ con un extremo en T_1 y otro en T_2. Luego, $(T \backslash e) \cup e'$ es conexo y como no borramos ningun vertice, es recubridor. Mas aun, mantiene la cantidad de aristas, entonces tiene $n - 1$ aristas.

$\therefore$ $(T \backslash e) \cup e'$ es un arbol recubridor. ∎

Proposición 3.1.10

Sean T y T' dos arboles recubridores de un grafo G y $e \in E(T) - E(T')$.
Entonces, existe una arista $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $\big(T' \cup e\big) \setminus e'$ es un arbol recubridor de G.

Prueba.

Analoga a la proposicion anterior. Completar. ∎

Proposición 3.1.11

Si T es un arbol con k aristas y G es un grafo simple y no vacio tal que $\delta(G) \geq k$, entonces T es subgrafo de G.

Prueba.

Por induccion sobre $k \in \mathbb{N}$:

- Si $k = 0$ entonces el resultado es directo ya que K_1 es subgrafo de G pues es no vacio.

- Sea $k \geq 1$ y supongamos que el resultado es valido para arboles con menos de k aristas (H.I)

  Por los lemas previos tenemos que T tiene al menos dos hojas, y en particular, al menos una hoja, que llamaremos v, y ademas $T' = T - v$ es un arbol.

  Sea u el padre de v en T. Como $\Big|E(T')\Big| = k - 1$ y $\delta(G) \geq k \geq k - 1$ por H.I. tenemos que T es un subgrafo de G.

Sea x el vertice en T' correspondiente a u. Como debe valer $d_G(x) \geq k$ y T' tiene k vertices, existe (por principio del palomar) un vecino w de x en G que no pertenece a T'.

Luego, agregando a T' la arista xw y el vertice w, tenemos a T como subgrafo de G, como queriamos demostrar.

■

Observación.

Esta condicion es ajustada. Por ejemplo, no es posible reducir la condicion de grado minimo a $k-1$ pues el completo K_k verifica la condicion y no la conclusion.

3.2. Busqueda en grafos

Definición 3.2.1: BFS (Busqueda a lo ancho)

- Entrada. Un grafo conexo G y $u \in V(G)$
- Inicio. $R = (u)$, $S = \emptyset$ y $d(u,u) = 0$.
- Iteracion. Mientras $R \neq \emptyset$ buscamos el primer vertice v de R. Los vecinos que no estan en $S \cup R$ son agregados atras de R y se les asigna la distancia $d(u,v)+1$. Luego, v es removido de R y ubicado en S.

Definición 3.2.2: DFS (Busqueda a lo profundo)

- Entrada. Un grafo conexo G y $u \in V(G)$
- Salida. Un arbol recubridor de raiz u.
- Inicio. $R = (u)$, $T = (\{u\}, \emptyset)$
- Iteracion. Mientras $R \neq \emptyset$ buscamos el ultimo vertice v de R. Si existe un vertice w de v que no este en $V(T) \cup R$, agregamos a w atras de R y actualizamos

$$V(T) \longleftarrow V(T) \cup \{w\}$$

$$E(T) \longleftarrow E(T) \cup \{vw\}$$

  Si no existiera tal w, eliminamos a v de R.

3.3. Arboles recubridores de costo optimo (min/max)

Definición 3.3.1: Grafo ponderado

Un grafo ponderado es un grafo con etiquetas numericas en sus aristas.

Definición 3.3.2: Algoritmo de Kruskal (para minimos)

- Entrada. Un grafo G conexo ponderado.
- Idea. Mantener un subgrafo recubridor aciclico H e ir agregando aristas de peso minimo.
- Inicio. $E(H) = \emptyset, V(H) = V(G)$.
- Iteracion. Mientras existan aristas que unan dos componentes conexas de H, agregar la de peso minimo (resp. maximo) a $E(H)$.
- Salida. H es un arbol recubridor de peso minimo (resp. maximo).

Observación.

Si tenemos el algoritmo para construir el camino minimo, podemos hacer modificaciones para que, sin calcular maximos, podamos encontrar los caminos maximos.

- Una manera es reemplazar cada peso por su opuesto. Entonces, elegir el minimo implica tomar el maximo de los pesos originales. Finalmente, $w(H) = -w'(H)$ si w' es la funcion que asigna a cada arista el opuesto de su peso, $w'(e) = -w(e)$.
- Otra forma es considerar $\max_{e \in E(G)} w(e) = M$, y definir la nueva funcion de costos $w'(e) = M - w(e)$. Entonces, tambien estaremos obteniendo el camino maximo, y se verifica que

$$w'(H) = \sum_{e \in E(H)} M - w(e) = M(n-1) - w(H) \implies w(H) = M(n-1) - w'(H)$$

Teorema 3.3.3: Verificacion del Algoritmo de Kruskal

Si G es un grafo conexo ponderado, el algoritmo de Kruskal produce un arbol recubridor de peso minimo.

Demostración. Debemos probar que H, la salida del algoritmo, es un arbol, es recubridor, y es de peso minimo.

Observemos primero que H es un arbol. Notemos que al agregar aristas entre diferentes componentes conexas, no es posible formar ciclos.

Ademas, H es conexo, ya que si existieran dos o mas componentes conexas en H, entonces no existen aristas de G entre sus componentes (pues de otra manera el algoritmo hubiera agregado alguna de ellas a H), luego G no seria conexo, absurdo.

Luego, por ser aciclico y conexo, por definicion H es un arbol. En particular, como definimos a H inicialmente de manera que $V(G) = V(H)$, es un arbol recubridor.

Ahora, veamos que en efecto H es de peso minimo. Consideremos H' un arbol recubridor de G de peso minimo cualquiera. Queremos probar que $w(H) \leq w(H')$.

Supongamos por el absurdo que $w(H) > w(H')$. Es claro que como $w(H) \neq w(H')$, y como por definicion $V(H) = V(H') = V(G)$, H y H' deberan difeir en sus aristas, esto es, $E(H) \neq E(H')$.

Notemos que como debe valer $\left|E(H)\right| = \left|E(H')\right|$, pero $E(H) \neq E(H')$, entonces debera existir una arista en $E(H)$ tal que no perteneza a $E(H')$ y viceversa, i.e., $E(H) - E(H') \neq \emptyset$

Sea entonces $e \in E(H) - E(H')$ la primer arista seleccionada por el algoritmo en ese conjunto. Es decir, es la primer arista que el algoritmo elige que pertenece a H pero no a H'.

De la proposicion 4.1.9 tenemos que debe existir una arista $e' \in E(H') - E(H)$ tal que $H'' = \big(H' \cup e\big) \backslash e'$ es un arbol recubridor de G.

Como e' y todas las aristas seleccionadas por el algoritmo antes de e pertencen a H', tanto e como e' estan disponibles cuando el algoritmo selecciona a e para H. Entonces, si eligio a e es por que el peso de e era a lo sumo el de e'. Luego,

$$w(e) \leq w(e') \implies w(H'') \leq w(H')$$

Por lo que H'' es arbol recubridor de G y es de peso minimo. **(Ver obs. debajo)**

Mas aun, H'' coincide con H en una arista mas. Repitiendo este razonamiento y como H es finito, finalemente llegaremos a un grafo que es recubridor de G, es de peso minimo, y coincide en H en todas sus aristas. Como los vertices no difieren, ese grafo es exactamente H, absurdo.

$\square$

Observación.

> Otra manera era definir a H' de manera que sea de peso minimo y ademas coincida en el maximo de aristas posibles con H. Entonces al aplicar la proposicion 4.1.9 estariamos obteniendo un nuevo arbol que es de peso minimo y ademas coincide en una arista mas con H que H', absurdo.

Definición 3.3.4: Algoritmo de Prim

Es otra version del algoritmo de Kruskal, pero manteniendo los grafos intermedios siempre conexos.

- Entrada. Un grafo conexo ponderado.
- Idea. Mantener un subgrafo conexo H e ir agregando vertices incidentes en aristas de peso minimo.
- Inicio. Elegir $v \in V(G)$, y definimos $V(H) = \{v\}, E(H) = \emptyset$.
- Iteracion. Mientras $V(H) \neq V(G)$, elegir la arista e de menor peso entre el conjunto de aristas que tiene un extremo en $V(H)$ y otro en $V(G) - V(H)$. Si la arista elegida es $e = uw$ con $u \in V(H)$ y $w \in V(G) - V(H)$, actualizamos

$$V(H) \longleftarrow V(H) \cup \{w\}$$

$$E(H) \longleftarrow E(H) \cup \{e\}$$

Definición 3.3.5: Algoritmo de Dijkstra

Sea G un grafo, w una funcion que asigna el peso a cada arista tal que $\forall e \in E(G) \quad w(e) \geq 0$ y $d(u, v)$, la distancia de un vertice u a otro v, la definimos como la suma de los pesos de las aristas.
Entonces, el Algoritmo de Dijkstra para la busqueda de la distancia minima de un vertice a los restantes sigue el siguiente formato:

- Entrada. Un grafo ponderado con pesos no negativos y un vertice de inicio u. El peso de una arista xy es $w(x, y)$ y si $xy \notin E(G)$ consideramos $w(x, y) = \infty$

- Idea. Considerar un conjunto S de vertices para los cuales hallamos un camino minimo desde u, agrandando S hasta incluir todos los vertices.

  Tendremos entonces una distancia arbitraria, que notaremos $t(z)$, desde u a $z \notin S$, hasta que la distancia minima sea hallada.

- Inicio. Sea $S = \{u\}$, $t(u) = 0$, $t(z) = w(u, z) \ \ \forall z \neq u$.

- Iteracion. Consideramos $v \notin S$ tal que

  $$t(v) = \min_{z \notin S} \ t(z)$$

  Agregamos v a S. Ahora exploramos las aristas desde v y actualizamos las etiquetas $t(z)$ para z vecino de v y $z \notin S$

  $$t(z) = \min \Big\{ t(z), \ t(v) + w(v, z) \Big\}$$

  Continuamos la iteracion hasta que se verifique que $S = V(G)$ o hasta que $t(z) = \infty \ \ \forall z \notin S$.

  Finalmente, consideramos

  $$d(u, v) = t(v) \ \ \forall v \in V(G)$$

Teorema 3.3.6: Correctitud del Algoritmo de Dijkstra

Dado un grafo G y un vertice $v \in V(G)$, el Algoritmo de Dijkstra calcula

$$d(v, z) \ \ \forall z \in V(G)$$

Demostración. Dado un grafo G ponderado con pesos no negativos y un vértice $v \in V(G)$, entonces el algoritmo de Dijkstra calcula $d(u, v) \ \forall v \in V(G)$.

Veamos que se verifican las siguientes condiciones en cada iteracion del algoritmo:

1. Para $z \in S$, $t(z) = d(u, z)$.
2. Para $z \notin S$, $t(z)$ es la menor longitud de un uz camino que llega a z por una arista desde S.

Hagamos inducción sobre $|S| = k$.

Si $k = 1$, tenemos que $S = \{u\}$, $d(u, u) = t(u) = 0$, la minima longitud de un uz camino desde $S = \{u\}$ es $t(u) = w(u, z)$.

Supongamos que valen 1 y 2 para $|S| = k$. Sea $v \notin S$ tal que:

$$t(v) = \min_{z \notin S} t(z)$$

El algoritmo entonces selecciona v y sea $S' = S \cup \{v\}$. Veamos entonces que S' verifica 1 y 2.

Primero veamos 1: Si $z \in S' - \{v\}$, entonces por HI se tiene que $t(z) = d(u, z)$. Veamos ahora que $t(v) = d(u, v)$. Por HI, la longitud de un uv camino mínimo que llega a v con una arista desde S es $t(v)$. Como todo uz camino debe salir desde el conjunto S y llegar a v, si para por un vértice $z \notin S$ con $z \neq v$, como $t(z) \geq t(v)$, entonces ese camino tendrá al menos la longitud del uv camino que llega a v por una arista que sale desde S. Por lo que $d(u, v) = t(v)$ y vale 1 para S'.

Ahora veamos 2: Sea $z \notin S'$, o sea que $z \notin S$ y $z \neq v$. Queremos probar que la actualización de etiqueta:

$$t(z) = \min\{t(z), t(v) + w(v, z)\}$$

es la minima longitud de un uz camino que llega a z directamente desde una arista que sale de S'.

Por HI la minima longitud de estos caminos que llegan a z desde una arista de S es $t(z)$. Como agregamos v a S, y se actualiza la etiqueta a $\min\{t(z), t(v) + w(v, z)\}$ estamos considerando también los uz caminos que llegan a z desde v.

Observemos que la longitud minima de un uz camino que llega a z desde v es $t(v)+w(v, z)$. Esto prueba 2 para S'.

Por lo tanto vale los enunciados 1 y 2 para S', por lo que valen para toda iteracion del algoritmo. $\square$

Observación.

- Dijkstra sigue funcionando en el caso de digrafos.
- Si la funcion w admite pesos negativos, el algoritmo no es correcto como lo definimos. En tal caso podemos considerar un algoritmo alternativo similar al de Dijkstra, el algoritmo de **Ford-Bellman**.
- Si consideramos una funcion de pesos constante $w(e) = k \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall e \in E$, el algoritmo de Dijkstra encuentra la distancia. Es decir, funciona como el algoritmo de Kruskal.

3.4. Arboles binarios

Definición 3.4.1: Arbol binario

Un arbol enraizado es binario si todo vertice tiene a lo sumo dos hijos. Si ademas verifica que todo vertice tiene exactamente 0 o 2 hijos, diremos que es un arbol binario completo.

Proposición 3.4.2

Si T es un arbol binario con i vertices internos entonces T tiene a lo sumo $i+1$ hojas.

Prueba.

Sea l la cantidad de hojas.

La cantidad de hijos que tienen un padre, i.e. que son hijos de algun vertice, es $l+(i-1)$, es decir, todas las hojas y todos los vertices internos.

La cantidad de vertices que tienen hijos es i, todos los vertices excepto las hojas. Como la cantidad de hijos para cada vertice es *a lo sumo 2*, existen a lo sumo $2i$ vertices que son hijos.

Luego, usando esta cota sobre lo antes calculado, sabemos que

$$l + i - 1 \leq 2i$$

$$l \leq i + 1$$

Como queriamos probar. ■

Corolario 3.4.3

Si T es un arbol binario completo con i vertices internos y l hojas, entonces

$$l = i + 1$$

Prueba.

Sigue de considerar $\leq$ por $=$ en la demostracion anterior.

Ejemplo.

Si expresamos a un torneo como un arbol binario, tenemos que cada hoja es un equipo y cada vertice interno representa un partido jugado.

Luego, si tenemos i partidos (vertices internos) entonces habra a lo sumo $i+1$ partidos (hojas). Mas aun, el arbol deberia ser completo, luego sabemos que habra exactamente $i+1$ partidos.

Proposición 3.4.4

Si T es un arbol de altura h con l hojas, entonces

$$l \leq 2^h$$

Prueba.

Por induccion sobre h,

- Si $h = 0$ entonces $l = 1$ luego vale la tesis.
- Sea $h \geq 1$ y supongamos que el resultado es valido para todo arbol de altura menor a h.

  Sea r la raiz el arbol. Si la raiz tiene un unico hijo, al borrar la raiz y enraizar el arbol en el hijo de r entonces el nuevo arbol tiene la misma cantidad de hojas que T y altura $h-1$. Luego, por H.I. tenemos

  $$l \ \leq \ 2^{h-1} \ \leq 2^h$$

  Si la raiz tiene dos hijos, entonces si consideramos los subarboles T_1 y T_2 obtenidos de eliminar la raiz y enraizarlos en cada hijo respectivamente, tenemos que la altura de T_1 y T_2 es a lo sumo $h-1$ para cada uno (obs. al menos uno verifica que su altura es exactamente $h-1$, el otro puede verificarlo o no).

Luego, la cantidad de hojas del arbol original es la suma de las hojas de T_1 y T_2. Por H.I. es claro que si l_1 y l_2 es la cantidad de hojas de cada uno respectivamente, entonces

$$l_1 \leq 2^{h-1}$$

$$l_2 \leq 2^{h-1}$$

$$l = l_1 + l_2 \leq 2 \; . \; 2^{h-1} = 2^h$$

Como queriamos probar.

■

Unidad 4

Matching

4.1. Definiciones y primeros resultados

Definición 4.1.1: Matching

Un matching en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) que no tienen extremos en comun.

Definición 4.1.2: Vertice saturado

Un vertice extremo de alguna arista de un matching M se dice saturado por M (M-saturado).

Definición 4.1.3: Matching perfecto

Un matching es perfecto en un grafo G si satura todos los vertices de G

Observación.

- Si un grafo tiene un matching perfecto, entonces la cantidad de vertices es par (pues la cantidad de vertices saturados por un matching es par). Esto es una condicion necesaria pero no suficiente para la existencia de un matching perfecto.
- Una cota superior para el tamaño maximo de un matching en un grafo es la mitad de los vertices.
- Un matching es maximal si no esta contenido en ningun otro matching distinto. Es decir, no podemos seguir agregandole aristas y que siga siendo un matching.

Definición 4.1.4: Matching maximo y maximal

Un matching maximal en un grafo G es un matching tal que no existe otro matching de mayor cardinal en G que lo contenga.
Un matching maximo en G es un matching de cardinal maximo en G

Observación.

> Un matching puede ser maximal porque no puedo seguir agregandole aristas, pero no ser maximo porque eligiendo otras aristas puedo obtener un matching de mayor cardinal.

Ejemplo.

> - Si M es un matching maximal no necesariamente es maximo.
> - Si M es un matching maximo entonces es maximal, pues si no lo fuera existiria un matching M' que lo contiene y es mayor, luego M no es maximo.

Definición 4.1.5: Matching alternante

Dado un matching M en G, un camino M alternante es un camino en G que alterna aristas en M y $E(G) - M$.

Definición 4.1.6: Camino aumentante

Dado un matching M diremos que un camino es $M-aumentante$ si es $M-alternante$ y sus extremos son distintos y no son $M-saturados$.

Lema 4.1.7: Condicion necesaria para matchings maximos

Si P es un camino $M-aumentante$ en G, entonces al sacar las aristas de $M \cap P$ y colocar las aristas de $P - M$, tenemos un nuevo matching M' que tiene una arista mas que M. Luego, si M es un matching maximo entonces no existe camino $M-aumentante$.

Observación.

> Esto realmente es un si y solo si. Es decir, tambien vale que si no existe un camino $M-aumentante$ entonces M es maximo.

Ejemplo.

Consideremos P_n. Entonces, si n es par tenemos que existe un matching perfecto y es maximo, por ejemplo considerando los vertices v_iv_{i+1} para todo i impar. Este matching es de tamaño $\frac{n}{2}$.

Si n impar entonces tomando el mismo matching sin considerar la ultima arista, tenemos que es un matching maximo y es de tamaño $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ejemplo.

Consideremos K_n. Entonces,

- Si n es par, entonces tiene un matching perfecto.
- Si n es impar, no tiene un matching perfecto pero tambien existe un matching maximo de tamaño $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ejemplo.

Consideremos $K_{n,m}$. Entonces el tamaño maximo es $\min n, m$, y si $n \neq m$ son distintos, no existe un matching perfecto (?).

Definición 4.1.8: Diferencia simetrica

Sean A, B dos conjuntos. Entonces definimos a la diferencia simetrica como

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Fact 4.1.9

Sea G un grafo y M, M' dos matchings de G. Definimos al grafo F tal que $F = M \triangle M'$, luego si $G_F = (V(G), F)$, vale

$$\Delta(G_F) \leq 2$$

Esto sigue de que dado un vertice $v \in V(G)$, a lo sumo dos aristas pueden incidir en el en el grafo G_F, tal caso se verifica cuando dos aristas distintas que inciden en v pertenecen cada una a un matching distinto.

Lema 4.1.10: Diferencia simetrica de matchings

Toda componente conexa de la diferencia simetrica de dos matchings es un camino o un ciclo par.

Demostración

Sean M y M' matchings de G y $F = M \triangle M'$. Consideremos el grafo $G_F = (V(G), F)$. Luego, todo vertic de G_F tiene grado a lo sumo 2, ya que en cada vertice puede incidir a lo sumo una arista de cada matching.

En consecuencia, $\Delta(G_F) \leq 2$ y por lo tanto toda componente conexa de G es un camino o un ciclo (probar esto).

Si una componente conexa es un ciclo, debe alternar entre aristas de M y de M', por lo tanto su longitud es par. ■

Teorema 4.1.11: Caracterizacion de matchings maximos

Un matching M de un grafo G es maximo si y solo si G no tiene camino $M-aumentante$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Vale por el lema previo (cond. necesaria).

$\Longleftarrow$) Supongamos que M' es un matching de G con $|M'| > |M|$. Probaremos que existe un camino $M-aumentante$ en G. Sea $F = M' \triangle M$. Cada componente de G_F es un camino o un ciclo par (por el lema previo). Como $|M'| > |M|$, debe existir un camino P en G_F que tiene mas aristas de M' que de M. Como el camino alterna aristas de ambos matchings, los extremos estan saturados por M'. En consecuencia, P es un camino $M-aumentante$ en G.

(Obs. que no pueden ser todos ciclos pares en M' porque en la diferencia simetrica tendriamos igual cardinal. Por eso debe existir un camino, que en particular es el $M-aumentante$) □

4.2. Matching en grafos bipartitos

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito y M un matching en G que satura todo los vertices de X. Es claro que si un subconjunto $S \subseteq X$ entonces en $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ existen al menos $|S|$ vertices.

Esta condicion, llamada condicion de Hall (para todo $S \subseteq X, |N(S)| > |S|$) es suficiente y necesaria para la existencia de un matching que satura X.

Teorema 4.2.1: Caracterizacion de matchings en grafos bipartitos (Hall)

Un grafo bipartito $G[X, Y]$ tiene un matching que satura X si y solo si, para todo $S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Para $S \subseteq X$ existen $|S|$ vertices saturados en Y por aristas con un extremo en S, luego $|N(S)| \geq |S|$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe un matching maximo M en G que no satura X y encontremos $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| \leq |S|$, es decir, un S tal que no se verifique la condicion de Hall.

Sea $u \in X$ un vertice no saturado por M. Tenemos entonces que todas las aristas incidentes en u no pertenecen a M. Consideremos entonces los vertices en la vecindad de u. Estos vertices deben estar saturados por M, de otra manera, si $v \in N(u)$ no lo estuviera, podemos considerar el matching $M \cup uv$ y obtendriamos un matching de mayor cardinal que M, absurdo pues M es maximo.

Consideremos todos los caminos M alternantes que comienzan en u. Sea $T \subseteq Y$ el conjunto de todos los vertices que pertenecen a alguno de estos caminos en Y y $S \subseteq X$ el conjunto de todos los vertices que pertenecen a alguno de estos caminos en X (obs. que $u \in X$).

Por como lo hemos definido, $T \subseteq N(S)$, pues existen aristas que los conectan en algun camino. Veamos que $T = N(S)$.

Sea $y \in N(S) - T$. Es decir, y es adyacente a algun vertice en S, pero no pertenece a T. Notemos que y no puede estar $M - saturado$ pues en tal caso seria $y \in T$.

Como y esta en $N(S)$, existe una arista con un extremo en un vertice $s \in S - u$ (no puede ser u pues en tal caso existe el camino uy alternante luego $y \in T$) y otro en y.

Como s esta en S, hay un camino alternante que va de u a s. Agregando la arista sy a este camino, tenemos un camino $M - aumentante$, luego por caracterizacion M no es maximo, absurdo.

$\therefore T = N(S)$. Por lo tanto,

$$|N(S)| = |T| = |S - u| = |S| - 1 < |S|$$

□

Observación.

> Una condicion necesaria para la existencia de matchings perfectos en grafos bipartitos es que ambas particiones tengan igual cardinal.

Corolario 4.2.2

Todo grafo bipartito $k - regular$ con $k \geq 1$ tiene un matching perfecto

Prueba.

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito $k-regular$. La cantidad de aristas de G es $k|X|$ ya que toda arista tiene exactamente un extremo en X y hay k aristas con un extremo en un vertice fijo. Analogamente para Y, la cantidad de aristas es $k|Y|$. Luego, $k|X| = k|Y| \implies |X| = |Y|$. Entonces, un matching que sature a X o que sature a Y es un matching perfecto.

Veamos que vale la condicion de Hall para X. Sea $S \subseteq X$ y $E(S)$ las aristas con un extremo en S (y el otro en $N(S)$). Como G es $k - regular$, $|E(S)| = k|S|$. Por otro lado, la cantidad de aristas con un extremo en $N(S)$ es $k|N(S)|$, entonces $|E(S)| \leq k|N(S)|$, pues toda arista incidente en un vertice de S debe pertenecer a las aristas de $N(S)$, pero $E(N(S))$ puede contener otras aristas.

$$\therefore k|S| \leq k|N(S)| \implies |S| \leq |N(S)|$$

■

4.3. Matching y cubrimientos

Definición 4.3.1: Cubrimiento de aristas por vertices

Un cubrimiento de aristas por vertices de un grafo G es un conjunto de vertices $F \subseteq V(G)$ tal que toda arista de G tiene al menos un extremo en F.
Notamos $\beta(G)$ al tamaño minimo de un cubrimiento de aristas por vertices.

Fact 4.3.2

Si M es un matching y F es un cubrimiento por vertices, entonces siempre vale

$$|M| \leq |F|$$

Esto sigue de que en el cubrimiento F, cada vertice puede cubrir a lo sumo una arista del matching, pues si un mismo vertice cubriera dos aristas de M, entonces M no era un matching. Luego, minimamente necesitamos un vertice por cada arista del matching.

Fact 4.3.3

Sea $\alpha'(G)$ el tamaño de un matching maximo en G. De las observaciones anteriores, resulta que para todo grafo G

$$\beta(G) \geq \alpha'(G)$$

Es decir, hallar un cubrimiento nos da una cota superior para el cardinal de los matchings de G.

Teorema 4.3.4: Konig-Egervary

Si G es un grafo bipartito entonces $\beta(G) = \alpha'(G)$.

Demostración. Sea F un cubrimiento por vertice minimo de $G[X, Y]$, $|F| = \beta(G)$. Construiremos un matching M tal que $|M| = |F|$, lo que implica la tesis.

Sean $R = F \cap X$ y $T = F \cap Y$. Consideremos H el subgrafo inducido por $R \cup (Y - T)$ y H' el subgrafo inducido por $T \cup (X - R)$.

Como $F = R \cup T$ es un cubrimiento por vertices de G, entonces no hay aristas entre $Y - T$ y $X - R$, de otra manera esas aristas no podrian ser cubiertas por F (pueden haber aristas entre R y T).

Queremos construir un matching para cada uno de los subgrafos inducidos, H y H'.

Sea $S \subseteq R$, supongamos que valiera $|N_H(S)| < |S|$. Tenemos que $T \cup N_H(S)$ es un cubrimiento de G, ya que todas las aristas que cubre S tambien las cubre $T \cup N_H(S)$ (pues las aristas que cubre S son las que van a $N(S)$ en $Y - T$ y las que van a T). Pero $|T \cup N_H(S)| < \beta(G)$ por nuestro supuesto. Es decir, al reemplazar S por $N(S)$ y T tenemos un cubrimiento de cardinal menor que el minimo, absurdo.

En consecuencia, $|N_H(S)| \geq |S|$. Luego, se verifica la condicion de Hall para R en H.

Entonces, existe un matching M_H en H que satura R. Por lo tanto, $|M_H| = |R|$. Analogamente, se puede obtener un matching $M_{H'}$ en H' que satura a T y $|M_{H'}| = |T|$.

Como $V(H) \cap V(H') = \emptyset$, $M = M_H \cup M_{H'}$ es un matching de G con $|M| = |X \cup T| = |F|$ como estabamos buscando. □

Ejemplo.

> Un ejemplo de un grafo que no verifica que el numero de cubrimiento coincide con el numero de matching debe contener un ciclo impar, pues en caso contrario seria bipartito.
>
> Por ejemplo, C_3 verifica que $\beta(C_3) = 2$ mientras que $\alpha'(C_3) = 1$.

Observación.

Los vertices que no pertenecen a un cubrimiento de aristas por vertices deben formar un estable. De otra manera, si existiera entre ellos alguna arista, esa arista no seria cubierta, luego no seria un cubrimiento por vertices.

Teorema 4.3.5: Caracterizacion de estables/cubrimientos por vertices

Sean G un grafo, $S \subseteq V(G)$ y $n = |V(G)|$. Luego, S es un estable de G si y solo si $\overline{S}$ es un cubrimiento de aristas por vertices de G. Ademas,

$$\alpha(G) + \beta(G) = n$$

Fact 4.3.6

Algunos resultados sobre $\beta(G)$ son:

- $\beta(K_N) = n - 1$
- $\beta(K_{n,m}) = \text{mín}\{n, m\}$ y $\alpha(K_{n,m}) = \text{máx}\{n, m\}$
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, y $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- $\beta(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ y $\alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(Q_n) = 2^{n-1} = \alpha(Q_n)$
- $\beta(K(n,k)) = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$ y $\alpha(K(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$

Observación.

Un matching en un grafo G es un estable en $L(G)$. Por eso el numero de matching recibe la notacion α', pues el numero de matching de un grafo es el numero de estabilidad de su grafo de linea.

Unidad 5

Coloreo

5.1. Definiciones y primeros resultados

Definición 5.1.1: k-coloreo

Un $k-coloreo$ de un grafo G es una funcion

$$f : V(G) \longrightarrow \{1, \dots, k\}$$

tal que

$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G)$$

Definición 5.1.2: Numero cromatico

Definimos a $\chi(G)$ el numero cromatico de un grafo G como

$$\chi(G) = \min\{k : G\ admite\ un\ k - coloreo\}$$

Definición 5.1.3: Grafo color-critico

Un grafo G se dice $k-$color critico si $\chi(G) = k$ y para todo $G' \subseteq G$, $\chi(G') < \chi(G)$. Equivalentemente, G es $k-$color critico si $\chi(G) = k$ y $\chi(G-v) < k$ para todo $v \in V(G)$.

Fact 5.1.4

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(P_n) = 2, (n \geq 2)$
- Si T es un arbol 2 o mas vertices, $\chi(T) = 2$
- G es bipartito $\iff \chi(G) \leq 2$
- $\chi(C_n) = 2$ si n es par y $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.
- $\chi(W_n) = \chi(C_n) + 1$
- Si G_P es el grafo de Petersen, $\chi(G_P) = 3$
- Si G es $k - critico$, $\delta(G) \geq k - 1$

Observación.

> Dado un grafo, siempre existe un coloreo tal que el grafo verifica la condicion de que cada vertice se le asigne un color distinto. Para un grafo de n vertices, basta con tomar n colores distintos.

Fact 5.1.5

Sean $n = |V(G)|$, $m + |E(G)|$, $\alpha(G)$ el numero de estabilidad y $\omega(G)$ el numero de clique. Entonces, algunas cotas para el numero cromatico son:

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$
- $\chi(G)\alpha(G) \geq n$
- $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$
- $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$
- $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$
- $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq 1 + n$
- $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$
- $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$

Demostración.

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$$

Consideremos G simple. Sea f un coloreo optimo de G, es decir, es un $\chi(G) - coloreo$. Observemos que si W es una clique maxima de G, entonces $f(v) \neq f(u)$ para cada par de vertices $u, v \in W$. Luego, $\chi(G) \geq |W|$. Luego, $\chi(G) \geq |W| = \omega(G)$. Por otro lado, si $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, como la funcion $f(v_i) = i, \forall i \in [n]$ es un coloreo de G, entonces $\chi(G) \geq n$

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n$$

Sea f un coloreo optimo de G. Consideremos $V_i = f^{-1}(\{i\}), i \in [\chi(G)]$ (clases de color). Observemos que $\bigcup_{i=1}^{\chi(G)} V_i = V(G)$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Es decir, la union es una particion de G.

Por otro lado, observemos que dos vertices de una misma clase de color no osn adyacentes. Ergo, cada V_i es un conjunto estable. Entonces, $|V_i| \leq \alpha(G), \forall i \in [\chi(G)]$. Luego,

$$n = |V(G)| = |\bigcup_{i=1}^{\chi(G)} V_i| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G) \geq n$$

Como queriamos probar.

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$$

Por lo anterior sabemos que $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G})$. Pero hemos visto que $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$. Luego, $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq \chi(G)\omega(\overline{G}) = \chi(G)\alpha(G) \geq n$

Veamos ahora la cuarta propiedad,

$$\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$$

Sea I un estable maximo de G y $v \in I$. Luego, $I \subseteq V(G) - N(v)$ y en consecuencia $\alpha(G) = |I| \leq n - |N(v)| = n - gr(v) \leq n - \delta(G)$. Ergo, $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq \chi(G)\alpha(G) \geq n$, como queriamos probar.

$$\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Sea $I = \{v_i, \ldots, v_{\alpha(G)}\}$ un estable maximo de G. Notemos $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y consideremos

$$f : V(G) \longrightarrow 1, \ldots, n + 1 - \alpha(G)$$

tal que $f(v) = 1$ si $i = 1, \ldots, \alpha(G)$ y $f(v_i) = 1 + i - \alpha(G)$ si $i = \alpha(G) + 1, \ldots, n$ Luego, los unicos vertices que reciben el mismo color son los vertices de I, que son un estable. En consecuencia, f es un coloreo de G y por lo tanto $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ □

Teorema 5.1.6: Numero cromatico monotono no decreciente por subgrafos inducidos

Sea G' un subgrafo (inducido o no) de un grafo G ($G' \subseteq G$). Entonces, $\chi(G') \leq \chi(G)$.

Demostración. Consideremos f un coloreo optimo (minimo) de G y f' la restriccion de f a $V(G')$. Observemos que la funcion f' es un coloreo de G', ya que para todo $u, v \in V(G')$ se verifica

$$f'(u) = f'(v) \Longrightarrow f(u) = f(v) \Longrightarrow uv \notin E(G) \Longrightarrow uv \notin E(G')$$

Como f usa $\chi(G)$ colores, f' utiliza a lo sumo $\chi(G)$ colores y por lo tanto

$$\chi(G') \leq \chi(G)$$

□

Teorema 5.1.7

Para todo grafo G de orden n se verifica

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G)}{2} \right\rfloor$$

Demostración. Por induccion sobre $n\omega(G)$.

- Si $n - \omega(G) = 0$, entonces $G \approx K_n$
- Sea $k \geq 1$ y supongamos que el resultado es cierto para todo grafo H de orden n' tal que $n' - \omega(H) < k$. Si $k = 1$, $\chi(G) = n - 1 = \omega(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor$
- Sea $k = n - \omega(G) \geq 2$. Sean u y v dos vertices no adyacentes en G. Consideremos $H = G - \{u, v\}$. Luego, si f_H es un coloreo optimo de H, entonces

  $$f_G : V(G) \longrightarrow \{1, \ldots, \chi(H) + 1\}$$

  con $f_G|_H = f_H$ y $f_G(u) = f_G(v) = \chi(H) + 1$ es un coloreo de G. En consecuencia, $\chi(G) \leq \chi(H) + 1$. Ademas, si W es una clique maxima de G, como $\{u, v\} \nsubseteq W$, entonces $W - \{u, v\}$ es una clique de H de tamaño $|W| - 1$.

Es decir, $\omega(G) - 1 \leq \omega(H) \leq \omega(G)$. Por lo tanto,

$$|V(H)| - \omega(W) = (n-2) - \omega(H) \leq (n-2) - (\omega(G) - 1) = n - \omega(G) - 1 = k - 1 < k$$

$$\chi(G) \leq \chi(H) + 1 \leq \left\lfloor \frac{n - 2 + \omega(H)}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n + \omega(H)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G)}{2} \right\rfloor$$

□

Definición 5.1.8: Algoritmo Greedy para el Coloreo

Dado un grafo G y un orden de sus vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el algoritmo greedy colorea los vertices den el orden dado asignando a v_i el menor color aun no utilizado en sus vertices vecinos de menor indice.

Proposición 5.1.9

Notemos que en cada iteracion el color que se le asigna a un vertice es a lo sumo uno mas que su cantidad de vecinos. Luego, aplicando el algoritmo greedy tenemos una cota

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

Como podemos aplicar el algoritmo a cualquier grafo, esto constituye una cota superior para el numero cromatico de cualquier grafo.

Proposición 5.1.10

Si G tiene la secuencia de grados $d_1 \geq d_2 \geq, \ldots, \geq d_n$ entonces en cada iteracion el color que se le asigna al vertice v_i es a lo sumo $d_i + 1$ y tambien es a lo sumo i (hay $i-1$ ya coloreados). Entonces,

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{d_i, i-1\}\}$$

Es decir, si ordenamos los vertices acorde al orden de los grados, esta es la mejor cota que podemos obtener por este algoritmo.

Observación.

> Dado un grafo, siempre es posible dar un orden de sus vertices tal que el algoritmo Greedy obtiene un coloreo optimo. Si ya contamos con un coloreo optimo, basta con ordenar primero a los vertices de color 1, luego a los de color 2, etc, hasta llegar a los de color $\chi(G)$.

5.2. Generalizacion de la definicion de coloreo

Definición 5.2.1: $k - coloreo$ generalizado

Un $k - coloreo$ de un grafo G es una funcion

$$f : V(G) \mapsto A$$

donde $|A| = k$, tal que

$$f(u) = f(v) \Longrightarrow uv \notin E(G)$$

Teorema 5.2.2: Nordhaus-Gaddum

Si G es un grafo de orden n entonces tenemos dos cotas,

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

$$n \leq \chi(G)\overline{\chi(G)} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Demostración. Veamos la segunda cota inferior. Sean $\chi(G) = k$, $\chi(\overline{G}) = c$, y g un $k - coloreo$ de G y $\overline{g}$ un $k - coloreo$ de $\overline{G}$. Entonces, la asignacion $v \longrightarrow (g(v), \overline{(}g)(v))$ determina un coloreo de K_n, pues si $u, v \in V(G)$,

$$(g(u), \overline{g}(u)) \neq (g(v), \overline{g}(v))$$

ya que si son adyacentes en G, difieren sus imagenes por g, y si no son adyacentes en G entonces lo son en $\overline{G}$ luego difieren sus imagenes por $\overline{g}$. Por lo tanto,

$$n = \chi(K_n) \leq k.c = \chi(G)\chi(\overline{G})$$

Ahora veamos la primer cota inferior. Tenemos que la media geometrica de dos reales positivos es a lo sumo su media aritmetica,

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G)\chi(\bar{(G)})} \leq \frac{\chi(G) + \chi(\bar{(G)})}{2}$$

□

Demostración. Para las cotas superiores usar induccion o a partir de la cota

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$$

□

Teorema 5.2.3

Sea n un entero positivo. Para todo par de numeros enteros a, b tales que

$$2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1$$

$$n \leq a.b \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

existe un grafo G de orden n tal que

$$\chi(G) = a$$

$$\chi(\overline{G}) = b$$

Observación.

> Sabemos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ademas, para todo $k \geq 1$,
>
> - $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$
> - $\chi(K_k) = k = \Delta(K_k) + 1$

Teorema 5.2.4: Teorema de Brooks

Si G es un grafo conexo que no es un ciclo impar o un grafo completo, entonces vale la cota

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Demostración. No la hacemos. □

Observación.

- Sabemos que si G es $k-critico$, entonces $\delta(G) \geq k-1$
- Los unicos grafos $k-criticos$ y $(k-1)-regulares$ son los ciclos impares y los grafos completos.
- Otra manera de enunciar el Teorema de Brooks es que, si $\Delta(G) \geq 3$, entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G)\}$.

Claim: Conjetura de Borodin y Kostochka

Si $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G) - 1\}$

Observación.

Pedimos grado mayor a 9 porque el M_8 no verifica la cota.

Proposición 5.2.5

Otras cotas de $\chi(G)$ son:

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$
- $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$
- $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$
- **Conjetura.** $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+1+\delta(G)}{2}$

Sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G)$, es decir, $\chi(G) - \omega(G) \geq 2$. Cuanto mas grande que $\omega(G)$ puede ser que $\chi(G)$? Esa diferencia no esta acotada, podemos construir grafos para que la diferencia sea tan grande como queramos.

Ejemplo.

$$\chi(K_n) - \omega(K_n) = n - n = 0$$

$$\chi(C_{2k+1}) - \omega(C_{2k+1}) = 3 - 2 = 1$$

$$\chi(M_8) - \omega(M_8) 8 - 6 = 2$$

Teorema 5.2.6: Teorema de Jan Mycielski

Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un grafo G_k tal que $\chi(G_k) - \omega(G_k) = k$.

Veamos como podemos construir esos grafos. Sea G un grafo con $\omega(G) \leq 2$ (libre de triangulos), $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Consideremos el siguiente grafo G_M:

$$V(G_M) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w\}$$

$$E(G_M) = E(G) \cup \{u_i v_j : v_i v_j \in E(G), i, j \in [n]\} \cup \{u_i w : i \in [n]\}$$

Es decir, hacemos una copia de cada uno de los vertices originales y lo conectamos con los vertices que esta conectado el vertice original. Luego, agregamos un vertice w y lo hacemos adyacente a todos los vertices nuevos. Es importante notar que los vertices originales no son adyacentes a sus copias.

Ademas, el numero de clique de cada grafo nuevo siempre se mantiene constante. Supongamos que aumentara de 2 a 3, luego en el nuevo grafo existira un triangulo. Sea u_h una copia que forma parte de ese triangulo. Entonces, debera ser incidente a dos vertices v_i y v_j. Notemos entonces que u_h no puede ser copia de ninguno de ellos pues no serian adyacentes, luego u_h es una copia de algun v_h. Pero si u_h es adyacente a v_i y v_j, entonces es porque v_h tambien es adyacente a ambos, luego v_i, v_j, v_h forman un triangulo en el grafo original, absurdo.

(Queda por ver que el numero cromatico no disminuye, que el numero cromatico aumenta en a lo sumo 1, y finalmente que aumenta en exactamente 1 por cada repeticion de la construccion)

Supongamos por el absurdo que existe f un $\chi(G) - coloreo$ para G_M. Sin perdida de generalidad, podemos asignarle a w el color $\chi(G)$. Luego, todos los vertices u deberan tener un color distinto a $\chi(G)$.

(**REVISAR**)

Proposición 5.2.7

$$\chi(G_M) = \chi(G) + 1$$

$$\omega(G_M) = 2$$

5.3. Grafos perfectos

Definición 5.3.1: Grafo perfecto

Un grafo G se dice perfecto si para todo subgrafo inducido G' de G (incluso G) se verifica que $\chi(G') = \omega(G')$

.

Ejemplo.

> P_n, K_n, C_{2k} y los grafos bipartitos son grafos perfectos (luego los arboles son perfectos). Los ciclos impares C_{2k+1} no son grafos perfectos para $k \geq 2$

Teorema 5.3.2: Prueba de la Conjetura de Berge

Un grafo es perfecto si y solo si su complemento es perfecto.

Teorema 5.3.3: Prueba de la conjetura fuerte de los grafos perfecto

$$G\ perfecto \iff \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2\ \ C_{2k+1} \nsubseteq G \wedge \overline{C_{2k+1}} \nsubseteq G$$

Un grafo es perfecto si y solo si no tiene como subgrafo inducido a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 ni su complemento (es decir, C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$ no son subgrafos inducidos de G para todo $k \geq 2$).

Apendice A

Resultados de la practica.

A.1. Introduccion a la Teoria de Grafos

Proposición A.1.1

Sea G un grafo simple con n vertices y m aristas. Entonces,

$$m \leq \binom{n}{2}$$

Proposición A.1.2

Sea $G[X, Y]$ un grafo simple bipartito con n vertices y m aristas, donde $|X| = r$ y $|Y| = s$. Entonces,

$$m \leq rs$$

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$

Proposición A.1.3

- Todo camino es bipartito.
- Un ciclo es bipartito si y solo si tiene longitud par.

Proposición A.1.4

Para $n \geq 1$, el $n-$cubo Q_n es el grafo cuyo conjunto de vertices es el conjunto de todas las $n-$uplas $(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in 0, 1$ para cada i, donde dos $n-$uplas son adyacentes si difieren en exatamente una coordenada.
Los grafos Q_n verifican que

- Son $n-$regulares.
- Son bipartitos para cada $n \geq 1$.
- Son vertice transitivos, por ejemplo por el automorfismo con la suma en binario.

Proposición A.1.5

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito, Entonces

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

Ademas, si G es $k-$regulares con $k \geq 1$, entonces $|X| = |Y|$.

Proposición A.1.6

Un grafo $k-$partito es un grafo cuyo conjunto de vertices puede particionarse en k conjuntos $X_1, \ldots, X_k$ de manera que ninguna arista tiene ambos extremos en el mismo conjunto X_i.
Entonces, sea $G = (V, E)$ un grafo simple $k-$partito con n vertices y m aristas, con $|X_i| = a_i$ para cada i. Se verifica que,

$$m \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i(n - a_i)$$

Proposición A.1.7

Sea G un grafo simple de n vertices y m aristas, con $m > \binom{n-1}{2}$ entonces G es conexo.

A.2. Isomorfismos

Proposición A.2.1

Algunas propiedades invariantes por isomorfismo son:

- Tener n vertices de grado k.
- Tener una arista (u, w) donde $d(u) = i$ y $d(w) = j$.
- Ser conexo.
- Ser bipartito.

Proposición A.2.2

Si G y H son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.

Definición A.2.3: Lattice booleano

Para $n \geq 1$, el lattice booleano BL_n es el grafo cuyo conjunto de vertices es el conjunto de todos los subconjuntos de $[n]$ y dos vertices X e Y son adyacentes si la diferencia simetrica $X \triangle Y$ tiene exactamente un elemento.

Proposición A.2.4

El lattice booleano BL_n es isomorfo al $n-$cubo Q_n para todo $n \geq 1$.

Proposición A.2.5

Dos grafos son isomorfos si y solo si sus vertices pueden ordenarse de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

Proposición A.2.6

Si G es autocomplementario, entonces G es conexo. Ademas, si G es autocomplementario con n vertices para $n > 1$, entonces $n = 4k$ o $n = 4k + 1$ para algun $k \in \mathbb{Z}^+$.

Proposición A.2.7

Sea G un grafo simple, entonces un automorfismo de G es un automorfismo de $\overline{G}$.

Proposición A.2.8

Si G es un grafo vertice transitivo, entonces es un grafo regular.

A.3. Subgrafos

Proposición A.3.1

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n \geq 2$ y vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se define al grado promedio de G, denotado por $d(G)$, como

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$$

Entonces, se verifica que

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

Proposición A.3.2

Sea G un grafo simple claw-free. Entonces, si $\Delta(G) \geq 5$, G tiene a C_4 somo subgrafo.

Teorema A.3.3: Caracterizacion de grafos bipartitos

Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ningun ciclo impar como subgrafo.

Proposición A.3.4

El $n-$cubo Q_n es $K_{2,3} - free$.

Proposición A.3.5

Para todo grafo G, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Proposición A.3.6

Un grafo es un cografo si es $P_4 - free$. Un grafo es un cografo si y solo si los grafos modulares de su descomposicion modular son triviales.

A.4. Ciclos eulerianos

Proposición A.4.1

Si hay un camino de v a w entonces hay un camino simple de v a w.

Proposición A.4.2

Sea G un grafo y $v \in V(G)$. Entonces,

- $c(G) - 1 \leq c(G - v) \leq c(G) + d(v) - 1$.
- Si G es conexo, entonces $d(v) \geq c(G - v)$.
- Si v es un vertice de corte de un grafo, entonces $d(v) \geq 2$.
- Si $d(v) \geq 2$ y $c(G - v) = c(G)$, entonces G tiene un ciclo que contiene a v.

Proposición A.4.3

Una arista en un grafo simple es de corte si y solo si no pertenece a ningun ciclo.

Proposición A.4.4

Un vertice v en un grafo conexo G es un vertice de corte si y solo si existen vertices u y w en G tales que todo camino de u a w pasa por v¿

Teorema A.4.5: Caracterizacion de recorridos eulerianos

Un grafo conexo tiene un recorrido (no cerrado) euleriano si y solo si tiene exactamente dos vertices de grado impar.

Proposición A.4.6

Si D es un digrafo, entonces

$$\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$$

Proposición A.4.7

Un digrafo D es euleriano si y solo si $d^+(v) = d^-(v)$, $\forall v \in V(D)$ y el grafo subyacente de D tiene a lo sumo una componente no trivial.

A.5. Ciclos Hamiltonianos

Proposición A.5.1

El grafo de Petersen no tiene ciclos hamiltonianos pero si caminos hamiltonianos. Ademas, si se elimina cualquier vertices del grafo, entonces el subgrafo resultante si tiene un ciclo hamiltoniano.

Proposición A.5.2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y bipartito, con $V = V_1 \cup V_2$ y V_1, V_2 no vacios. Entonces, si $|V_1| \neq |V_2|$, G no tiene un ciclo hamiltoniano.
Analogamente, si el grafo tiene un camino hamiltoniano, entonces

$$|V_1| - |V_2| = \pm 1$$

Proposición A.5.3

Para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en un grafo bipartito completo $K_{n,n}$ es

$$\frac{1}{2}(n-1)!\, n!$$

Proposición A.5.4

Un grafo G tiene un camino hamiltoniano si y solo si el grafo $G \oplus K_1$ es hamiltoniano.

Teorema A.5.5: Condicion necesaria para la existencia de caminos hamiltonianos

Si un grafo G tiene un camino hamiltoniano, entonces para todo $S \subset V(G)$ vale que $c(G - S) \leq |S| + 1$

Teorema A.5.6: Condicion suficiente para la existencia de caminos hamiltonianos

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $n \geq 2$ vertices. Entonces, si $gr(v) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V$, G tiene un camino hamiltoniano.

Proposición A.5.7

Sea $G = (V, E)$ un grafo y S un conjunto estable en G. Para cada $a \in S$ y cualquier ciclo hamiltoniano C de G, habra $gr(a) - 2$ aristas en E incidentes en a que no estan en C. Por lo tanto, habra al menos

$$\sum_{a \in S}(gr(a) - 2) = \sum_{a \in S} gr(a) - 2|S|$$

aristas en E que no estan en C.

A.6. Arboles

Proposición A.6.1

Todo arbol es bipartito.

Proposición A.6.2

- K_n es un arbol solo para $n = 1$ o $n = 2$
- P_n es siempre un arbol
- C_n solo es un arbol para $n = 1$ o $n = 2$
- $K_{n,m}$ es un arbol para cualesquiera n, m.
- Q_n es un arbol solo para $n = 1$.

Proposición A.6.3

T es un arbol $\iff$ T no tiene bucles y para cada par de vertices $u, v \in V(T)$ existe un unico $(u, v)-$camino simple en T.

Proposición A.6.4

T es un arbol $\iff$ T no tiene bucles, es conexo y cuando se agrega una arista entre dos vertices cualesquiera, se crea exactamente un ciclo.

Proposición A.6.5

Un grafo con n vertices y menos de $n - 1$ aristas no es conexo.

Proposición A.6.6

Cada componente conexa de un bosque es un arbol.

Proposición A.6.7

Sea F un bosque de k arboles , entonces $|E(F)| = |V(F)| - k$

Proposición A.6.8

Sea T un arbol. Entonces todo $v \in V(T)$ tal que $gr(v) \geq 2$ es un vertice de corte.

Proposición A.6.9

Sea G un grafo conexo. Entonces una $e \in E(G)$ esta contenida en todo arbol recubridor de G si y solo si e es de corte.

Definición A.6.10: Arbol $m-$ario

Un arbol enraizado es $m-$ario si todo vertice tiene a lo sumo m hijos. Si en particular todo vertice tiene 0 o m hijos, se dice $m-ario$ completo.

Proposición A.6.11

Sea T un arbol $m-ario$ completo con i vertices internos, l hojas y n vertices. Entonces,

$$l = i(m-1)+1$$

$$n = mi$$

A.7. Matching

Proposición A.7.1

Sea G tal que $\Delta(G) \leq 2$, entonces cada componente conexa de G es un camino o un ciclo.

Proposición A.7.2

Sea G un grafo y $S \subseteq V(G)$ un conjunto de vertices saturado por un matching de G. Entonces, existe algun matching maximo que satura a S, pero no todo matching maximo lo satura.

Proposición A.7.3

Sea G un grafo hamiltoniano, entonces G tiene un matching de tamaño $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Proposición A.7.4

Sean M_1 y M_2 dos matchings de un grafo simple G tales que $|M_1| > |M_2|$. Entonces existen dos matchings M_1' y M_2' tales que

$$|M_1'| = |M_1| - 1$$

$$|M_2'| = |M_2| + 1$$

$$M_1' \cup M_2' = M_1 \cup M_2$$

$$M_1' \cap M_2' = M_1 \cap M_2$$

Proposición A.7.5

Sea G un grafo bipartito conexo con una biparticion (V_1, V_2) tal que todos los vertices de V_1 tienen distinto grado. Entonces, existe un matching que satura a V_1.

Proposición A.7.6

Todo arbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

Proposición A.7.7

Sea G un grafo bipartito. Entonces,

$$\alpha(G) = \frac{|V(G)|}{2} \iff G \; tiene \; un \; matching \; perfecto$$

Proposición A.7.8

Sea G un grafo simple sin vertices aislados. Entonces existe M un matching tal que

$$M \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$$

Definición A.7.9: $k - factor$ y $k - factoreable$

Un $k - factor$ de un grafo G es un subgrafo $k - regular$ recubridor de G. Asi, un $1 - factor$ de un grafo es un matching perfecto.

Diremos que un grafo G es $k - factoreable$ si existen $k - factores$ $H_1, \ldots, H_r$ tales que

$$\forall i \neq j \; E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$$

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} E(H_i)$$

Proposición A.7.10

Sea G un grafo. Entonces si G no es regular, no es $k-$factoreable para ningun $k \in \mathbb{N}$. Ademas, si es $m - regular$, entonces una condicion necesaria para que G sea $k-$factoreable es que m sea multiplo de k.

A.8. Coloreo

Proposición A.8.1

Sea G un grafo sin lazos con al menos una arista. Entonces,

$$G \textit{ es bipartito} \iff \chi(G) = 2$$

Proposición A.8.2

Sean G y H dos grafos cualesquiera. Entonces,

$$\chi(G + H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$$

$$\chi(G \oplus H) = \chi(G) + \chi(H)$$

Proposición A.8.3

Sea G un grafo con componentes conexas $C_1, \ldots, C_k$ y sea $G_i = G[C_i]$. Entonces,

$$\chi(G) = \underset{i=1,\ldots,k}{\text{máx}} \chi(G_i)$$

Proposición A.8.4

Sea G un grafo $k - color$ critico. Entonces,

- G es conexo.
- $gr(v) \geq k - 1$ para todo $v \in V(G)$.
- G no tiene vertices de corte. Mas aun, no tiene ninguna clique de corte (es decir, un conjunto de vertices que sean una clique y que al eliminarlos aumente la cantidad de componentes conexas).

Proposición A.8.5

Dado un grafo cualquiera, existe un orden de sus vertices tal que el algoritmo greedy devuelve un coloreo optimo del grafo. Este se puede obtener por ejemplo, dado un $k - coloreo$ optimo, ordenando los vertices por sus clases de color de 1 a k.

Proposición A.8.6

Sea G un grafo con vertices $v_1, \ldots, v_n$ y una secuencia de grados $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ donde $d_i = d(v_i)$. Entonces,

$$\chi(G) \leq 1 + d_1$$

O una mejora para esta cota, considerando que al colorear con el algoritmo greedy $i-1$ vertices han sido coloreados en la iteracion i,

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i, i-1\}$$

Proposición A.8.7

Sea G un grafo con n vertices y m aristas. Entonces,

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$$

Lema A.8.8

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo par de numeros $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1$$

$$n \leq ab \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Existe un grafo G con n vertices para el cual $\chi(G) = a$ y $\chi(\overline{G}) = b$.

Proposición A.8.9

Sean G y H grafos simples, con $|V(G)| = n$. Entonces,

$$\chi(G) = k \iff \alpha(G \Box K_k) \geq n$$

$$\chi(G \Box H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$$

Proposición A.8.10

Sea G un grafo. Entonces, las aristas de G pueden ser coloreadas con k colores si y solo si los vertices del grafo $L(G)$ pueden ser coloreados con k colores.

Obs. Un coloreo por aristas de un grafo G es una asignacion del conjunnto de aristas a un conjunto de colores tal que si dos aristas comparten un extremo, entonces tienen distintos colores asignados.

Proposición A.8.11

Sea G un grafo. Entonces,

$$\overline{G}\ es\ bipartito \iff G\ es\ perfecto$$