

1. Probar que la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es nilpotente. Dar la base y su forma de Jordan.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

(h) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

(j) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

(k) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix},$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

(f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix},$

(l) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

(b) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ tal que $m_A(x) = x^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

4. Sean A_i ($1 \leq i \leq 6$) matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i}(x) = x^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

5. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

$$(f) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(k) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(g) \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(l) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(h) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix},$$

$$(m) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(n) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(j) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Sea $W \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $W = \text{span}\{e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}\}$. Sea $\delta : W \rightarrow W$ la transformación lineal definida por $\delta f(x) = f'(x)$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

7. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si A y B son semejantes.

8. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \quad \chi_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2, \text{ y } m_A(x) = (x-2)^2(x-3)^2,$$

$$(b) \quad \chi_A(x) = (x-7)^5, \text{ y } m_A(x) = (x-7)^2,$$

$$(c) \quad \chi_A(x) = (x-2)^7, \text{ y } m_A(x) = (x-2)^3,$$

$$(d) \quad \chi_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4, \text{ y } m_A(x) = (x-3)^2(x-5)^2.$$

9. Dadas las matrices $A, B \in \mathbf{F}^{n \times n}$, probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a B .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

10. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.