Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

5.2 Forma de Jordan de una transformación lineal general

Vamos a generalizar el caso anterior, y para esto empezamos pensando en el caso en que el polinomio minimal tenga una sola raíz. Más precisamente, la situación que consideraremos primero es la siguiente:

V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ con $m_T(X) = (X - \lambda)^k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in F$.

Entonces $m_T(T) = (T - \lambda id_V)^k = 0(X)$ y $(T - \lambda id_V)^{k-1} \neq 0(X)$.

Esto nos dice que $T - \lambda id_V \in L(V)$ es un endomorfismo k pasos nilpotente. Luego podemos aplicar lo estudiado en la sección anterior para asegurar que existe una base B de V tq $[T - \lambda id_V]_B \in F^{n\times n}$ es una forma de Jordan nilpotente:

$$[T - \lambda id_V]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \in F^{n\times n},$$

con $J_i \in F^{n_i \times n_i}$ bloque de Jordan nilpotente, $1 \leq i \leq r$, y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Observemos que $[T + S]_B = [T]_B + [S]_B$ (EJERCICIO!). Luego,

$$[T]_B = [T - \lambda id_V]_B + [\lambda id_V]_B,$$

con lo cual

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda, n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix} \in F^{n\times n},$$

con $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ y para cada $1 \leq i \leq r$,

$$J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 1 *$\lambda \in F$, $n \in \mathbb{N}$. La matriz*

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

se llama bloque de Jordan asociado al autovalor λ de tamaño n.

Observaciones 1 *$J(0, n)$ es un bloque de Jordan nilpotente como los que hemos definido en la sección anterior.*

Buscamos una base donde la matriz del endomorfismo sea una matriz diagonal por bloques, con bloques de Jordan en la diagonal. Para ver la existencia usamos un lema técnico: descomponemos el espacio en suma directa de sev invariantes, en cada uno de los cuales el endomorfismo tiene sólo un autovalor.

Más precisamente, tenemos el siguiente Lema:

Lema 1 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ tq $m_T(X) = p(X)q(X)$ con $(p(X), q(X)) = 1$. Entonces:*

1. *$ker(p(T))$ y $ker(q(T))$ son sev T-invariantes.*
2. *$V = ker(p(T)) \oplus ker(q(T))$*
3. *$m_{T|_{ker(p(T))}}(X) = p(X)$ y $m_{T|_{ker(q(T))}}(X) = q(X)$.*

Demostración.

1. Veamos que $ker(p(T))$ es T-invariante, el otro es análogo. $p(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_r X^r$, $v \in ker(p(T))$. Luego $p(T)v = a_0 v + a_1 T v + \dots + a_r T^r v = \overline{0}$, de donde $T(p(T)v) = \overline{0}$. Veamos que $Tv \in ker(p(T))$. En efecto,

$$\begin{aligned} \overline{0} = T(p(T)v) =& T(a_0 v + a_1 T v + \dots + a_r T^r v) \\ =& a_0 T v + a_1 T T v + \dots + a_r T T^r v \\ =& a_0 T v + a_1 T(Tv) + \dots + a_r T^r (Tv) = p(T)Tv, \end{aligned}$$

de donde $Tv \in ker(p(T))$, luego $ker(p(T))$ es T-invariante.

2. Veamos que $V = ker(p(T)) \oplus ker(q(T))$, para esto veamos que $ker(p(T))$ y $ker(q(T))$ son disjuntos y que todo $v \in V$ se escribe como suma de vectores de $ker(p(T))$ y $ker(q(T))$. Como $(p(X), q(X)) = 1$, existen $r(X), s(X) \in F[X]$ t.q. $1 \equiv r(X)p(X) + s(X)q(X)$.

Entonces $id_V = r(T) \circ p(T) + s(T) \circ q(T)$.

- $v \in ker(p(T)) \cap ker(q(T))$, luego $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v) = \overline{0}$.

- $v \in V$, luego $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v)$. Veamos que $r(T)(p(T)v) \in ker(q(T))$, y análogam. será $s(T)(q(T)v) \in ker(p(T))$.

—>Recordemos que en general

—->$(pq)(Tv) = p(T)(q(T)v) = (p(T) \circ q(T))v$.

$$\begin{aligned} q(T)(r(T)(p(T)v)) =& (qrp)(Tv) = (rpq)(Tv) = r(T)((pq)(Tv)) \\ =& (r(T) \circ (pq)(T))v = (r(T) \circ m_T(T))v = \\ =& \overline{0}. \end{aligned}$$

Así, $r(T)(p(T)v) \in ker(q(T))$, de modo que $r(T)(p(T)v) \in ker(q(T))$. Análog. $s(T)(q(T)v) \in ker(p(T))$.

3. Veamos finalmente que $m_{T|_{ker(p(T))}}(X) = p(X)$ y $m_{T|_{ker(q(T))}}(X) = q(X)$.

Definimos $T_1 = m_{T|_{ker(p(T))}}$ y $T_2 = m_{T|_{ker(q(T))}}$. Como $V = ker(p(T)) \oplus ker(q(T))$, $m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\}$.

$p(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_rX^r$, $v \in ker(p(T)$, luego

$p(T_1)v = a_0v + a_1T_1 + \cdots + a_rT_1^rv = a_0v + a_1Tv + \cdots + a_rT^rv = \overline{0}$.

Sigue que $m_{T_1}|p$. Análogamente $m_{T_2}|q$. Como p, q coprimos, m_{T_1} y m_{T_2} coprimos, de donde $pq = m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\} = m_{T_1}m_{T_2}$ y más aún, $p = m_{T_1}$ y $q = m_{T_2}$.

$\square$

Definición 2 *$J \in F^{n\times n}$ es una **matriz de Jordan** o una **forma de Jordan** si*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde p.c. $1 \leq i \leq r$, J_i es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix},$$

con $n_1^{(i)} \geq \cdots \geq n_{r_i}^{(i)}$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Esto es, cada J_i está formado por (varios) bloques de Jordan de autovalor λ_i sobre la diagonal.

El siguiente teorema es el resultado de existencia de forma de Jordan.

Teorema 1 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente sobre F. Entonces existe B base de V t.q. $[T]_B$ es una forma de Jordan.*

*En tal caso B se dice **base de Jordan para** T y la matriz $[T]_B$ **una forma de Jordan para** T.*

Demostración.

Realizaremos la prueba por inducción sobre n.

$n = 1$ es trivial.

Supongamos que el teorema es verdadero para todo V con $dim(V) = m < n$. Sea V F-ev con $dim(V) = n$ y sea $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente en F.

Si $m_T(X) = (X - \lambda)^k$ ya vimos que en este caso el teorema se verifica.

Supongamos que T tiene al menos dos autovalores distintos y sea $\lambda = \lambda_1 \in F$ uno de los autovalores.

Entonces $m_T(X) = (X - \lambda)^k q(X)$, con $gr(q) \geq 1$ y $((X - \lambda)^k, q(X)) = 1$.

Por el lema anterior, tenemos que $V = ker((T - \lambda id_V)^k) \oplus ker(q(T))$, y cada uno de estos sumandos es un sev T-invariante.

Además, como λ es autovalor (y no el único),

$$\bar{0} \subsetneq ker((T - \lambda id_V)^k) \subsetneq V.$$

Luego, $0 < dim(ker((T - \lambda id_V)^k)) < n$ y $0 < dim(ker(q(T)) < n$.

Considerando las restricciones $T_1 : ker((T - \lambda id_V)^k) \to ker((T - \lambda id_V)^k)$ y $T_2 : ker(q(T)) \to ker(q(T))$ sigue que , por hipótesis de inducción, existe una base B_1 de $ker((T - \lambda id_V)^k)$ y una base B_2 de $ker(q(T))$ t.q. $[T_1]_{B_1} = J_1$ y $[T_2]_{B_2} = J_2$ son formas de Jordan.

Entonces, tomando $B = B_1 \cup B_2$ base de V, sigue que $[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$.

Como λ es raíz del polinomio minimal m_{T_1} y no es raíz de m_{T_2}, no es raíz de $q(X)$, luego J_2 no tiene bloques de Jordan asociados al autovalor λ.

Así, resulta $[T]_B = J$ forma de Jordan.

$\square$

En general, la construcción general la hacemos como sigue: si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de T, y $m_T(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$, tenemos que

$$V = ker((T - \lambda_1 id_V)^{k_1}) \oplus \cdots \oplus ker((T - \lambda_r id_V)^{k_r}).$$

Podemos obtener una forma de Jordan p.c. una de las restricciones $T_1, \dots T_r$ a los sev invariantes $ker((T - \lambda_i id_V)^{k_i})$, y obtener asimismo las bases de Jordan B_i correspondientes. Entonces $B = B_1 \cup B_r$ es una base de Jordan de V y $[T]_B$ es una forma de Jordan de T.

Para matrices complejas, el resultado de existencia se traduce en:

Teorema 2 *$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces $A \sim J$, J forma de Jordan.*

Observaciones 2 *Si B base de F^n t.q. $[T]_B$ forma de Jordan, llamamos a B **base de Jordan para** A y a $[T]_B$ **forma de Jordan para** A.*

Ejemplo 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 01 & \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. *Hallar una forma de Jordan semejante a A y una base de Jordan.*

Veamos ahora la *unicidad* de la forma de Jordan, que entenderemos siempre *unicidad salvo el orden en el que aparecen los bloques de Jordan con respecto a autovalores distintos.*

Teorema 3 *V F-ev, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$ t.q. $m_T(X)$ se factoriza linealmente sobre F. Entonces existe una única forma de Jordan $J \in F^{n \times n}$, salvo por el orden de sus bloques, t.q. para alguna base B de V, $[T]_B = J$.*

Demostración.

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tq $[T]_B = J \in F^{n \times n}$ forma de Jordan:

$$[T]_B = J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

donde p.c. $1 \leq i \leq s$, $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$ denota la matriz formada por todos los bloques de Jordan de autovalor λ_i que aparecen en J, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Tenemos que $\chi_T(X) = \chi_J(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i}$. Entonces $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los autovalores de T y p.c. $1 \leq i \leq s$, $d_i = mult(\lambda_i, \chi_T)$.

P.c. $1 \leq i \leq s$, $m_{J_i(\lambda_i)}(X) = (X - \lambda_i)^{k_i}$ p.a. $1 \leq k_i \leq d_i$. Entonces $m_T(X) = m_J(X) \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{k_i}$, con lo que p.c. $1 \leq i \leq s$, $k_i = mult(\lambda_i, m_T)$.

Sea λ uno de los autovalores de T y sea $k = mult(\lambda, m_T)$. S.p.g. supongamos que $\lambda = \lambda_1$. Observemos que

$$J - \lambda I_n = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s - \lambda) \end{pmatrix},$$

de donde

$$(J - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (J_2(\lambda_2 - \lambda))^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (J_s(\lambda_s - \lambda))^k \end{pmatrix}.$$

Puesto que $(J_i(\lambda_i - \lambda))^k$ es inversible p.c. $2 \leq i \leq s$, tenemos que $ker((J_i(\lambda_i - \lambda))^k) = span\{e_1, \dots, e_{d_1}\}$.

Teniendo en cuenta que $J = [T]_B$, resulta que $J - \lambda I_n = [T - \lambda id_v]_B$.

Luego, $ker((T - \lambda id_V)^k) = span\{v_1, \dots, v_{d_1}\}$.

La restricción $T_1 = (T - \lambda id_V)|_{ker((T - \lambda id_V)^k} : ker((T - \lambda id_V)^k) \to ker((T - \lambda id_V)^k)$ es una tl nilpontente, luego tiene una única forma de Jordan nilpontente J_1 asociada.

Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_{d_1}\}$ base de $ker((T - \lambda id_V)^k$. Observemos que

$$[T_1]_{B_1} = [T|_{ker((T - \lambda id_V)^k}]_{B_1} - \lambda I_{d_1} = J_1(0).$$

Como $J_1(0)$ es una forma de Jordan nilpotente, debe ser la forma de Jordan J_1 de T_1.

Así, $J_1(\lambda_1) = J_1 + \lambda I_{d_1}$ está unívocamente determinada por T (pues ambos sev invariante y t.l. restricción sólo dependen de T y no de la base).

Haciendo lo mismo p.c. λ_i, $1 \leq i \leq s$, resulta que $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$ satisface $J_i(\lambda_i) = J_i + \lambda I_{d_i}$, donde $d_i = mult(\lambda_i, \chi_T)$ y si $k_i = mult(\lambda_i, m_T)$ entonces J_i es la forma de Jordan nilpotente de la restricción $T_i = (T - \lambda_i id_V)|_{ker((T - \lambda_i id_V)^{k_i})} : ker((T - \lambda_i id_V)^{k_i}) \to ker((T - \lambda_i id_V)^{k_i})$.

Por lo tanto la forma de Jordan de T está unívocamente determinada por T, salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores de T.

$\square$

Matricialmente, como todo polinomio se factoriza linealmente en $\mathbb{C}[X]$, tenemos

Teorema 4 *$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, J_A y J_B formas de Jordan de A y B, respectivamente. Entonces $A \sim B$ sii $J_A = J_B$ (salvo el orden de los bloques).*

Demostración: EJERCICIO.

$\square$

Ejemplo 2 *$A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Veamos que $A \sim B$ sii $\chi_A = \chi_B$ y $m_A = m_B$. Veamos también que esto es falso en $\mathbb{C}^{4\times 4}$.*