Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

4.2 Diagonalización

En los ejemplos hemos trabajado con los conjuntos de autovectores: los obtuvimos quitando el vector nulo de los sev definidos como solucion de un cierto sistema lineal homogéneo. Esos espacios tienen gran importancia, se trata de los *autoespacios*. Más precisamente:

Definición 1 *$A \in F^{n\times n}$, λ autovalor de A. El* ***autoespacio de A asociado a λ*** *se define por*

$$E_\lambda = \{v \in F^n : Av = \lambda v\} = \{v \in F^n : (\lambda I - A)v = \overline{0}\}.$$

Observaciones 1

1. *$\overline{}\in E_\lambda$*
2. *$E_\lambda \subset F^n$ sev puesto que es el espacio solución del sistema lineal homogéneo $(\lambda I - A)v = \overline{0}$.*
3. *$E_\lambda = N(\lambda I - A)$*

Veremos en esta sección que estos sev descomponen en suma directa a F^n sii A es diagonalizable. Vayamos paso a paso:

Veamos primero que los autoespacios se suman de manera directa:

Proposición 1 *$A \in F^{n\times n}$, λ_1, λ_2 autovalores distintos de A. Entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\overline{0}\}$.*

Demostración: Si $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ entonces $Av = \lambda_1 v$ y $Av = \lambda_2 v$. Luego $\lambda_1 v = \lambda_2 v$. Luego $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \overline{0}$. Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sigue que $v = \overline{0}$.

□

Más generalmente, tenemos que:

Proposición 2 *$A \in F^{n\times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de A. Entonces para $j = 1, \dots, r$,*

$$E_{\lambda_j} \cap \bigoplus_{k=1, k\neq j}^{r} E_{\lambda_k} = \{\overline{0}\}.$$

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: proceder por inducción sobre r.

□

Ahora, recordando que todo autovalor es raíz del polinomio característico, veremos cómo se relacionan la dimensión del autoespacio asociado al autovalor con su multiplicidad como raíz del polinomio característico.

Proposición 3 *$A \in F^{n\times n}$, λ autovalor de A, r multiplicidad de λ como raíz de χ_A (esto es, $\chi_A(X) = (X - \lambda)^r P(X)$ con $P(\lambda) \neq 0$). Entonces, $dim E_\lambda \leq r$.*

Demostración: Sea $T : F^n \to F^n$ definida según $Tx = Ax$. Sea $s = dim(E_\lambda)$ y $B_\lambda = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de E_λ. Completamos a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de F^n. Así,

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_s & N_{s\times n-s} \\ \hline 0_{n-s\times s} & M_{s\times s} \end{array}\right).$$

en efecto $[Tv_i]_B = \lambda e_i$ para toda $i = 1, \ldots, s$, es decir, sus coeficientes de $v_{s+1}, \ldots, v_n$ son nulos (y los demás no se sabe ni interesan, por eso quedan escritas dos matrices de los tamaños indicados).

Además tenemos también que

$$XI - [T]_B = \left(\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_s & -N \\ \hline 0 & XI_{n-s} - M \end{array} \right).$$

El polinomio característico es entonces

$$\chi_A(X) = det(X - [T]_B) = det(X - \lambda) det(XI_{n-s} - M) = (X-\lambda)^s Q(X),$$

donde los determinantes son de las submatrices indicadas. Ahora bien, como or hipótesis $\chi_A(X) = (X-\lambda)^r P(X)$ con $P(\lambda) \neq 0$, sigue que

$$(X-\lambda)^s Q(X) = (X-\lambda)^r P(X),$$

y como $P(\lambda) \neq 0$ debe ser $s \leq r$, esto es, $dim(E_\lambda) \leq mult(\lambda, \chi_A)$.

□

Estamos finalmente en condiciones de caracterizar las matrices diagonalizables en términos de autoespacios (vd, en términos de autovalores y autovectores).

Teorema 1 *$A \in F^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todos los autovalores distintos de A. Son equivalentes:*

1. *A es diagonalizable en $F^{n\times n}$,*
2. *$\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = F^n$,*
3. *$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{a_1} \ldots (X-\lambda_r)^{a_r}$ y $a_i = dim(E_{\lambda_i})$, $i = 1, \ldots, r$*

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$) A diagonalizable en $F^{n\times n}$. Luego existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de autovectores de A. Para cada $v_j \in B$, $j = 1, \ldots, n$, existe λ_i, $i = 1, \ldots, r$ tq v_j autovector asociado al autovalor λ_i. Luego, cada v_j está en algún E_{λ_i}, y como B es base debe ser $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_n} = F^n$. La proposición anterior nos permite concluír que esta suma es suma directa: $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = F^n$.

$2 \Rightarrow 3$) Tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = F^n$. Por las propiedades vistas tenemos que $dimE_{\lambda_i} \leq mult(\lambda_i, \chi_A)$. Luego

$$n \leq \sum_{i=1}^{r} dimE_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} mult(\lambda_i, \chi_A) = gr(\chi_A) = n,$$

luego estas desigualdades son todas igualdades. En particular, $\sum_{i=1}^{r} mult(\lambda_i, \chi_A) = gr(\chi_A)$, de donde $\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{a_1} \ldots (X-\lambda_r)^{a_r}$ con $a_i = mult(\lambda_i, \chi_A)$. Como cada $dim(E_{\lambda_i}) \leq mult(\lambda_i, \chi_A) = a_i$, $i = 1, \ldots, r$, debe ser $a_i = dim(E_{\lambda_i}) = mult(\lambda_i, \chi_A)$ pues si vale el menor estricto resulta en una contradicción. Así,

$3 \Rightarrow 1$) Sabemos que $\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{a_1} \ldots (X-\lambda_r)^{a_r}$. Para cada $i = 1, \ldots, r$ sea B_i base de E_{λ_i}. Así, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ (unión disjunta, porqué?) es base de $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \subset F^n$. Así:

$$|B| = \sum_{i=1}^{r} |B_i| = \sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} a_i = gr(\chi_A) = n.$$

Entonces $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = F^n$ y por lo tanto B es base de autovectores de A, luego A es diagonalizable.

□

Ejemplo 1 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*, ¿es diagonalizable? Calculemos* $\chi_A(X) = det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$*. Los autovalores son entonces* $\lambda_1 = 1$ *de multiplicidad* $a_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = 2$ *de multiplicidad* $a_2 = 1$*. Si calculamos* $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : (I - A)x = \overline{0}\} = span(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\})$ *(EJERCICIO: calcular esto), vemos que dim* $E_1 = 2 < 3 = mult(1, \chi_A)$*. Resulta así que A no es diagonalizable.*