Complementos de Matemática I
Matemática Discreta

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

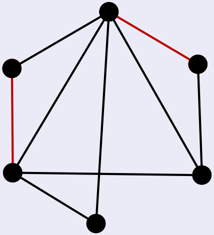
2024

Matching

Definición

Un matching en un grafo G es un conjunto de aristas (no bucles) que no tienen extremos en común. $M \subset E(G)$.Un vértice que es extremo de una arista que está en M matching se dice que está saturada por M o M-saturada.Un matching perfecto en un grafo G es un matching que satura todas los vértices de G.

Ejemplo

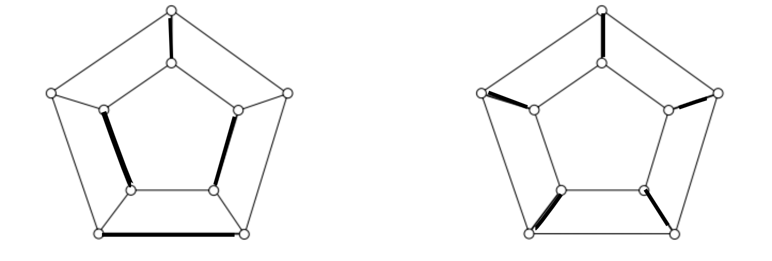


DEFINICIÓN

Un matching maximal M en un grafo G es matching que al agregar cualquier arista de G que no está en M deja de ser un matching en G. Un matching es máximo si es un matching cuyo cardinal es máximo entre todos los otros matching de G.

- Si un matching es máximo, es maximal.
- Dar un matching en P_n que sea maximal y no máximo.

Ejemplo

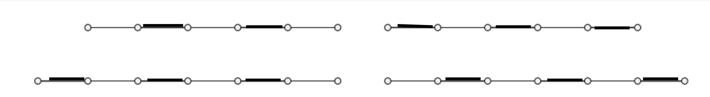


matching maximal *matching perfecto*

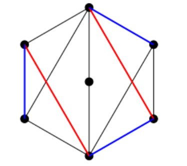
Definición

Dado un matching M en un grafo G, un camino es camino M-alternante si alterna entre aristas en M y aristas en $E(G) - M$.Un camino M-alernante es M-aumentante si sus extremos son distintos y no están M-saturados.

Ejemplo

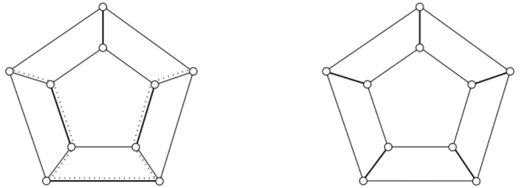


Ejemplo



Ejemplo

Camino M-aumentante P y el matching $M \triangle E(P)$:



THEOREM (BERGE)

un matching M en un grafo G es máximo si y sólo si G no tiene camino M-aumentante.

PROOF.

Hojitas $\square$

Asignación de trabajos a personas...
Dado $G[X, Y]$ buscamos un matching en G que sea incidente en todo vértice de X. Decimos que un tal matching satura X.

THEOREM (HALL)

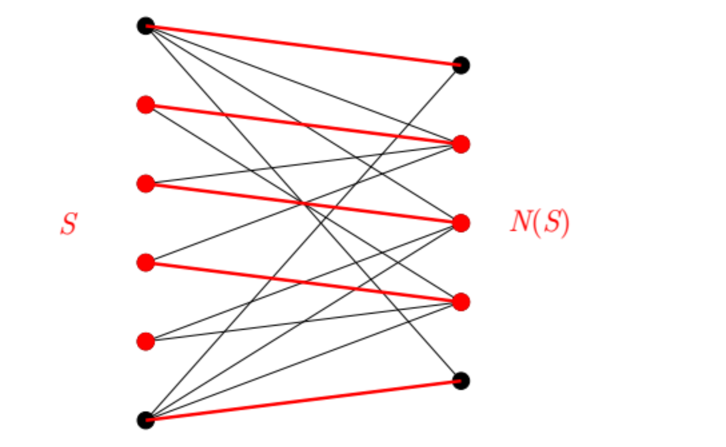
Un grafo bipartito $G[X, Y]$ tiene un matching que sature X si y sólo si

$$|N(S)| \geq |S| \quad \textit{para todo } S \subset X.$$

PROOF.

Hojitas $\square$

Ejemplo



Corolario

Todo grafo bipartito k-regular ($k \geq 1$) tiene un matching perfecto.

Proof.

Hojitas $\square$

Relación entre matching y cubrimiento

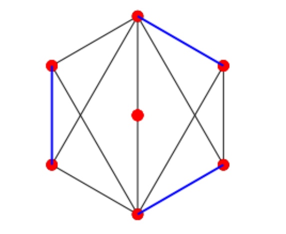
Definición

Un cubrimiento de aristas por vértices de un grafo G es un conjunto F de vértices de manera que toda arista de G tiene (al menos) un extremo en F.

Observación

Si F es un cubrimiento y M es un matching en G entonces $|M| \leq |F|$.

Ejemplo

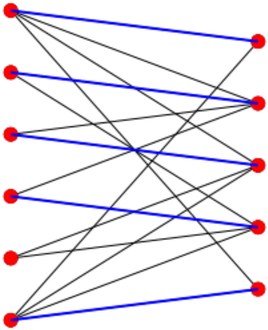


Llamemos con $\beta(G)$ al cardinal de un cubrimiento por vértices de mínimo cardinal. Entonces,

- $\beta(K_n) = n - 1$
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n, m\}]$
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(W_n) =$

Si $\alpha'(G)$ es el cardinal de un matching de máximo cardinal en G tenemos que:

$\beta(G) = \min\{|F| : F \text{ cubrimiento de } G\} \geq \max\{|M| : M \text{matching en } G\} = \alpha'($



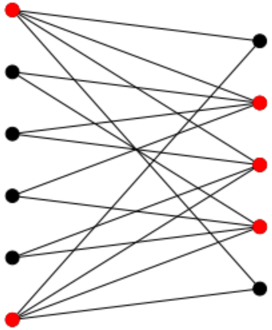
THEOREM (KONIG-EGERVARY (1931))

Si G es bipartito entonces $\beta(G) = \alpha'(G)$.

PROOF.

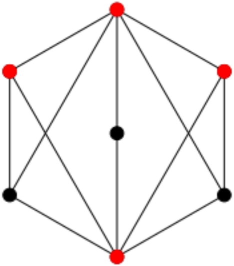
Hojitas $\square$

Relación entre conjuntos estables y cubrimientos por vértices



S es un cubrimiento por vértices de G si y sólo si $\overline{S}$ es un conjunto estable.

Otro ejemplo:



Proposición

Sea G grafo con $|V(G)| = n$ y $S \subset V(G)$. S es un conjunto estable en G si y sólo si $\bar(S)$ es un cubrimiento por vértices de G. Además, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

- $\beta(K_n) = n-1 \quad \alpha(K_n) = 1$
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n,m\} \quad \alpha(K_{n,m}) = \max\{n,m\}$
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad \alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad \alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- $\beta(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \quad \alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$