Thm $gr(v)+gr(w)\geq n$ $\forall v,w$ no ady. $\Rightarrow$ G ciclo Hamiltoniano

D/ supongamos que G no tiene ciclo Hamiltoniano y agregamos aristas hasta que llegamos a un grafo H no tiene un ciclo hamiltoniano pero para cualquier $e\in E$, $H+e$ tiene ciclo hamiltoniano

Como $H\neq K_n$, existen $a,b\in V$ / $ab\notin E(H)$ pero $H+ab$ tiene ciclo hamiltoniano C. El grafo H no tiene ciclo $\Rightarrow$ $ab\in C$. Nombremos los nodos de C como sigue

$$a(=v_1)\to b(=v_2)\to v_3\to v_4\to\cdots\to v_{n-1}\to v_n \to a$$

Para cualquier $i=3,\dots,n$

$$bv_i\in E(H)\Rightarrow av_{i-1}\notin E(H)$$

ya que si $bv_i\in E(H)\wedge av_{i-1}\in E(H)$ hay un ciclo hamiltoniano

$$b\to v_i\to v_{i+1}\to\cdots\to v_{n-1}\to v_n\to a\to v_{i-1}\to v_{i-2}\to\cdots\to v_3 \to b$$

Contradicción del hecho que H no tiene ciclo hamilt.

Por lo tanto, sólo 1 de las aristas bv_i o av_{i-1} están en H y entonces

$$gr_H(a)+gr_H(b)<n$$

Además, como H se obtuvo agregando aristas

$$gr_H(v)\geq gr_G(v)=gr(v)\quad\forall v$$

$$\therefore\quad gr(a)+gr(b)\leq gr_H(a)+gr_H(b)<n$$

Como a y b son no ady. $\boxed{\text{contradicción}}$

∎

Corolario $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2 \Rightarrow G$ tiene ciclo hamiltoniano

D/ Sea $ab \notin E$. $\left\{ \text{Vamos a ver que } gr(a)+gr(b) \geq n \right\}$

A partir de G borramos:

i) las aristas ax, $x \in V$

ii) las aristas yb, $y \in V$

iii) los nodos a y b

$\left.\right\}$ obtenemos el grafo $H = (V', E')$

$\therefore |E| = |E'| + gr(a) + gr(b)$ ya que $ab \notin E$.

$|V'| = n-2 \Rightarrow |E'| \leq \binom{n-2}{2}$

$$\binom{n-1}{2} + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hip}}}{\leq} |E| = |E'| + gr(a) + gr(b) \leq \binom{n-2}{2} + gr(a) + gr(b)$$

$$\therefore gr(a)+gr(b) \geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)(\cancel{n}-1-\cancel{n}+3) + 2 = \frac{1}{2}(n-2).2 + 2 = n-2+2 = n$$

Por lo tanto, podemos aplicar el resultado anterior y existe ciclo hamiltoniano.