Práctica 5: Ciclos hamiltonianos

Ejercicio 7:

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

a) *Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Ejercicio 7:

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

a) *Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración.

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y X e Y no vacíos.

Ejercicio 7:

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

a) *Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración.

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito conexo, con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y X e Y no vacíos. Supongamos que G tiene un ciclo hamiltoniano C, sin pérdida de generalidad supongamos que es de la forma:

$$C : v_1, v_1v_2, v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_n$$

Ejercicio 7:

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

a) *Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración.

Sea $G[X,Y]$ un grafo bipartito conexo, con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y X e Y no vacíos. Supongamos que G tiene un ciclo hamiltoniano C, sin pérdida de generalidad supongamos que es de la forma:

$$C : v_1, v_1v_2, v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_n$$

Como (X,Y) es una partición del conjunto V, podemos suponer que $v_1 \in X$. Luego, como v_2 es adyacente a v_1 resulta que $v_2 \in Y$ ya que cada arista en G tiene un extremo en cada conjunto por ser bipartito. Luego, al ser v_3 adyacente a v_2, $v_3 \in X$. Siguiendo con este razonamiento tenemos que v_i si i es impar y $v_i \in Y$ si i es par.

Ejercicio 7:

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

a) *Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración.

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y X e Y no vacíos. Supongamos que G tiene un ciclo hamiltoniano C, sin pérdida de generalidad supongamos que es de la forma:

$$C : v_1, v_1v_2, v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_n$$

Como (X, Y) es una partición del conjunto V, podemos suponer que $v_1 \in X$. Luego, como v_2 es adyacente a v_1 resulta que $v_2 \in Y$ ya que cada arista en G tiene un extremo en cada conjunto por ser bipartito. Luego, al ser v_3 adyacente a v_2, $v_3 \in X$. Siguiendo con este razonamiento tenemos que v_i si i es impar y $v_i \in Y$ si i es par. Como v_n es adyacente a v_1, entonces v_n debe pertenecer a Y. Por lo tanto, n es par. □

Ejercicio 7:

Demostración.

Luego, como C es un ciclo hamiltoniano, pasa por todos los vértices de G entonces tenemos que

$$|X| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, i \text{ impar}\}| = \frac{n}{2}$$

$$|Y| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, i \text{ par}\}| = \frac{n}{2}$$

Demostración.

Luego, como C es un ciclo hamiltoniano, pasa por todos los vértices de G entonces tenemos que

$$|X| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, i \text{ impar}\}| = \frac{n}{2}$$

$$|Y| = |\{v_i : 1 \leq i \leq n, i \text{ par}\}| = \frac{n}{2}$$

Por lo tanto, resulta que $|X| = |Y|$ como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 7:

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

b) *Probar que si G tiene un camino hamiltoniano, entonces $-1 \leq |X| - |Y| \leq 1$.*

Ejercicio 10:

Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

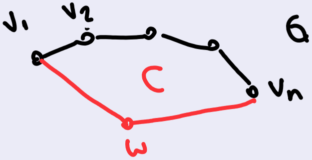
Ejercicio 10:

Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano $v_1, v_2, \ldots v_n$.

$\{w\} = V(K_1)$



Ejercicio 10:

Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano $v_1, v_2, \ldots v_n$. Consideremos el grafo $H = G \vee K_1$ con $V(H) = V(G) \cup V(K_1) = \{v_i : i \in [n]\} \cup \{w\}$ y $v_i w \in E(H)$ para todo $i \in [n]$. Luego, $w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$ es un ciclo hamiltoniano en H. Por lo tanto, H es hamiltoniano.

Ejercicio 10:

Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano $v_1, v_2, \ldots v_n$. Consideremos el grafo $H = G \vee K_1$ con $V(H) = V(G) \cup V(K_1) = \{v_i : i \in [n]\} \cup \{w\}$ y $v_i w \in E(H)$ para todo $i \in [n]$. Luego, $w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$ es un ciclo hamiltoniano en H. Por lo tanto, H es hamiltoniano. $\Leftarrow$) Sea G un grafo tal que $H = G \vee K_1$ es hamiltoniano. Sea C ciclo hamiltoniano de H.

Ejercicio 10:

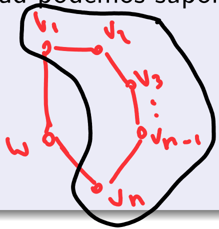
Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano $v_1, v_2, \ldots v_n$. Consideremos el grafo $H = G \vee K_1$ con $V(H) = V(G) \cup V(K_1) = \{v_i : i \in [n]\} \cup \{w\}$ y $v_i w \in E(H)$ para todo $i \in [n]$. Luego, $w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$ es un ciclo hamiltoniano en H. Por lo tanto, H es hamiltoniano. $\Leftarrow$) Sea G un grafo tal que $H = G \vee K_1$ es hamiltoniano. Sea C ciclo hamiltoniano de H. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es de la forma

$$w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$$

$G \vee K_1$



Ejercicio 10:

Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano si solo si el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano $v_1, v_2, \ldots v_n$. Consideremos el grafo $H = G \vee K_1$ con $V(H) = V(G) \cup V(K_1) = \{v_i : i \in [n]\} \cup \{w\}$ y $v_i w \in E(H)$ para todo $i \in [n]$. Luego, $w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$ es un ciclo hamiltoniano en H. Por lo tanto, H es hamiltoniano. $\Leftarrow$) Sea G un grafo tal que $H = G \vee K_1$ es hamiltoniano. Sea C ciclo hamiltoniano de H. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es de la forma

$$w, v_1, v_2, \ldots v_n, w$$

Luego, $v_1, v_2 \ldots, v_n$ es un camino simple en G que pasa por todos sus vértices. Por lo tanto, G tiene un camino hamiltoniano.

$\square$

Ejercicio 11:

Demostrar la siguiente condición necesaria para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo que tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $\emptyset \neq S \subset V(G)$ vale que $\kappa(G - S) \leq |S| + 1$.

Demostración.

Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano.

Ejercicio 11:

Demostrar la siguiente condición necesaria para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo que tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $\emptyset \neq S \subset V(G)$ vale que $\kappa(G - S) \leq |S| + 1$.

Demostración.

Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano. Luego, por el ejercicio 10,
$H = G \vee K_1$ es hamiltoniano.
Por la condición necesaria para la existencia de ciclos hamiltonianos, tenemos que
$\forall \emptyset \neq S \subseteq V(H)$ vale $\kappa(H - S) \leq |S|$.

Ejercicio 11:

Demostrar la siguiente condición necesaria para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo que tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $\emptyset \neq S \subset V(G)$ vale que $\kappa(G - S) \leq |S| + 1$.

Demostración.

Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano. Luego, por el ejercicio 10, $H = G \vee K_1$ es hamiltoniano.

Por la condición necesaria para la existencia de ciclos hamiltonianos, tenemos que $\forall \emptyset \neq S \subseteq V(H)$ vale $\kappa(H - S) \leq |S|$. Consideremos un conjunto $S = S' \cup \{w\}$, donde $V(K_1) = \{w\}$. Luego, $\kappa(H - S) \leq |S| = |S'| + 1$.

Ejercicio 11:

Demostrar la siguiente condición necesaria para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo que tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $\emptyset \neq S \subset V(G)$ vale que $\kappa(G - S) \leq |S| + 1$.

Demostración.

Sea G un grafo que tiene un camino hamiltoniano. Luego, por el ejercicio 10, $H = G \vee K_1$ es hamiltoniano.
Por la condición necesaria para la existencia de ciclos hamiltonianos, tenemos que $\forall \emptyset \neq S \subseteq V(H)$ vale $\kappa(H - S) \leq |S|$. Consideremos un conjunto $S = S' \cup \{w\}$, donde $V(K_1) = \{w\}$. Luego, $\kappa(H - S) \leq |S| = |S'| + 1$.
Observemos que $H - S = G - S'$.
Luego, $\kappa(H - S) = \kappa(G - S')$. Por lo tanto, $\kappa(G - S') \leq |S'| + 1$. □

Ejercicio 12:

Demostrar la siguiente condición suficiente para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo simple con $n = |V(G)| \geq 2$ tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v se tiene $d(u) + d(v) \geq n - 1$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Ejercicio 12:

Demostrar la siguiente condición suficiente para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo simple con $n = |V(G)| \geq 2$ tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v se tiene $d(u) + d(v) \geq n - 1$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración.

Usar ejercicio 10 y condición suficiente de existencia de ciclos hamiltonianos. □

Sea G un grafo simple / $\forall\, u,v \in V(G)$ con $uv \notin E(G)$, $d(u)+d(v) \geq n-1$.

Consideremos el grafo $G' = G \vee K_1$. con $V(G) = \{v_1 \dots v_n\}$ y $V(K_1) = \{w\}$.

$|V(G')| = n+1 = n' \geq 3$. Además $d_{G'}(w) = |V(G)| = n$ y

$d_{G'}(v_i) = d_G(v_i) + 1$

Sean $u,v \in V(G')$ / $uv \notin E(G')$, luego $u,v \in V(G)$. Entonces:

$d_{G'}(v) + d_{G'}(u) = d_G(v) + 1 + d_G(u) + 1 \geq n - \cancel{1} + \cancel{1} + 1 = n + 1 = n'$

hip

Por teo. G' es hamiltoniano. Entonces, por ej 10 G tiene un cam H.

Ejercicio 12:

Demostrar la siguiente condición suficiente para la existencia de caminos hamiltonianos: Si G es un grafo simple con $n = |V(G)| \geq 2$ tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v se tiene $d(u) + d(v) \geq n - 1$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración.

Usar ejercicio 10 y condición suficiente de existencia de ciclos hamiltonianos. □

(Ej 13:)

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n \geq 2$. Demostrar que si $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración.

Usar el anterior. □