Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9)
2024

6.3 Transformaciones unitarias y ortogonales

Recordemos la última definición de la sección anterior:

Si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible y tal que $U^{-1} = U^*$ se llama *matriz unitaria*,

Si $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y tal que $U^{-1} = U^t$ se llama *matriz ortogonal*.

A nivel de transformaciones lineales, esto significa que $T \circ T^* = T^* \circ T = id_V$. Estos endomorfismos preservan el producto interno y por lo tanto las distancias. Toda esta información se resume en un teorema, cuya demostración no veremos pero dejamos como ejercicio intentarlo. Al menos algunas implicancias deberían salir.

Teorema 1 *$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un F-ev con pi, $dim(V) = n$, $T \in L(V)$. Son equivalentes:*

1. *Existe B bon de V t.q. $T(B)$ bon de V.*
2. *P.t. $v, u \in V$, $\langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, u\rangle$.*
3. *P.t. B bon de V, $T(B)$ bon de V.*
4. *P.t. $v \in V$, $||T(v)|| = ||v||$.*
5. *$T^* \circ T = T \circ T^* = id_V$.*

Desafío 1 *Probar el teorema. Vale buscar en la bibliografía.*

Una t.l. que verifica cualquiera de las condiciones del teorema se dice **unitaria** (en el caso complejo) u **ortogonal** (en el caso real). Se desprende de todo lo que hemos estudiado que, dada una B bon de V, T es unitaria sii $[T]_B$ es unitaria (caso complejo), ortogonal sii $[T]_B$ es ortogonal (caso real).

Una t.l. que preserva la norma (item (vi) del teorema) se llama **isometría**.

El item (v) del teorema dice que T es un isomorfismo.

Estudiaremos a continuación el caso real en dimensiones 2 y 3: clasificaremos las transformaciones ortogonales. En el caso de dimensión 2, estudiaremos las isometrías del plano y en dimensión 3 las isometrías del espacio. Éstas serán, en ambos casos, rotaciones y simetrías.

Tenemos dos resultados inmediatos, muy interesantes

Proposición 1 *$T : V \to V$ t.l. ortogonal, $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de T. Entonces $\lambda = \pm 1$.*

Demostración: Sabemos que existe $v \in V$ no nulo autovector de T asociado a λ. Como T es ortogonal, $||Tv|| = ||v||$. Así,
$$||v|| = ||Tv|| = ||\lambda v|| = |\lambda|||v||,$$
de donde $\lambda = \pm 1$.

□

La siguiente proposición la hemos usado mil veces, y la hemos probado mil veces.

Proposición 2 *$T : V \to V$ t.l. ortogonal, $U \subset V$ sev T-invariante. Entonces $U^\perp$ también es T-invariante.*

Desafío 2 *Escribir la prueba.*

Simetrías en dimensión 2

Sea V espacio euclídeo con $dim(V) = 2$, T t.l. ortogonal. $B = \{v_1, v_2\}$ bon de V.

Tenemos que $\{Tv_1, Tv_2\}$ bon de V y más aún, si $Tv_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y $Tv_2 = \alpha' v_1 + \beta' v_2$, entonces $\{(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')\}$ bon de $\mathbb{R}^2$, luego $||(\alpha, \beta)|| = ||(\alpha', \beta')|| = 1$ y $(\alpha, \beta) \times (\alpha', \beta') = \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$. Sigue que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y o bien $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$ o bien $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$.

En el primer caso, $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$, tenemos que $[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, y $\chi_T(X) = (X - \alpha)^2 + \beta^2 = X^2 - 2\alpha X + 1$. El caso $[T]_B$ diagonal se da sólo cuando $\alpha = \pm 1$, pues en otro caso χ_T no tiene raíces reales. Más aún, como $||(\alpha, \beta)|| = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ t.q.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Y más aún, si cambiamos base $\{v_1, v_2\}$ a $\{v_1, -v_2\}$ podemos elegir $\theta \in [0, \pi]$.

En el segundo caso, $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$, tenemos que $[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$, o sea que T es simétrica, y $\chi_T(X) = (X - \alpha)(X + \alpha) - \beta^2 = X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$. O sea,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.l.ortogonal es una **rotación** si $det(T) = 1$,
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.l.ortogonal y $H \subset \mathbb{R}^2$ sev de dimensión 1, T es una **simetría respecto de** H si $T|_H = id_H$ y $T|_{H^\perp} = -id_{H^\perp}$.

Así, toda t.l. ortogonal en $\mathbb{R}^2$ es una simetría o una rotación.

Ejemplos 1 *1. En $\mathbb{R}^2$ consideremos la recta L de ecuación $x + y = 0$. Buscamos la simetría respecto de L. Como $L = span\{(1, -1)\}$ y $L^\perp = span\{(1, 1)\}$, podemos definir T en la base $\{(1, -1), (1, 1)\}$ como $T(1, -1) = (1, -1)$ y $T(1, 1) = (-1, -1)$. Luego $T|_L = id_L$ y $T|_{L^\perp} = -id_{L^\perp}$. Así, $T(x, y) = (-y, -x)$, como era esperable.*

2. Hallar una rotación T en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(2, 1) = (1, 2)$.

Para esto, recordemos que una rotación es una simetría, así que $||T(2, 1)|| = ||(1, 2)|| = \sqrt{5} = ||(2, 1)||$, es decir, ambos puntos $(2, 1)$ y $(1, 2)$ se ubican en la misma circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{5}$. Normalicemos por este radio, y completemos a una bon: $B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$, como T t.l. debe ser $T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. En coordenadas, tenemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Resulta entonces que, puesto que T es una rotación,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sigue que $T\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Simetrías en dimensión 3

Sea V espacio euclídeo con $dim(V) = 3$. Si $T : V \to V$ t.l. ortogonal, como $\chi_T \in \mathbb{R}[X]$ es de grado $gr(\chi_T) = 3$, debe tener una raíz real, o sea T tiene un autovalor real λ. Hemos visto que $|\lambda| = 1$, luego $\lambda = \pm 1$.

Definimos en forma análoga:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l.ortogonal es una **rotación** si $det(T) = 1$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l.ortogonal y $H \subset \mathbb{R}^3$ sev de dimensión 2, T es una **simetría respecto de** H si $T|_H = id_H$ y $T|_{H^\perp} = -id_{H^\perp}$.

Si $\lambda = 1$, y v_1 autovector asociado de norma 1, $U = span\{v_1\}$ es T-invariante, luego también su ortogonal $U^\perp$, de dimensión 2. Entonces $T|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ y por el estudio anterior $T|_{U^\perp}$ es o bien una rotación o bien una simetría. Si $B_1 = \{v_2, v_3\}$ bon de $U^\perp$, sigue que para $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, o bien

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

o bien

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y en el primer caso T es una rotación con **eje de rotación** el sev $span\{v_1\}$ y en el segundo caso T es una simetría respecto del sev $span\{v_2, v_2\}$.

Si $\lambda = 1$ no es un autovalor de T, tenemos que $\lambda = -1$ sí lo es. Sean en forma análoga v_1 autovector asociado de norma 1, $U = span\{v_1\}$ y $U^\perp = span\{v_2, v_3\}$. $T|_{U^\perp}$ es ortogonal, y más aún, una rotación. Entonces, en $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tenemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

y más aún,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

es decir, una rotación compuesta con una simetría.

Así, toda t.l. ortogonal en $\mathbb{R}^3$ es una simetría o una rotación o una rotación compuesta con una simetría.

Ejemplo 1 *Definir una rotación T en $\mathbb{R}^3$ t.q. $T(1,1,0) = (0,1,1)$ y el eje de la rotación sea ortogonal a $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.*

Sea $H = span\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ *y* $H^{\perp} = span\{(1,-1,1)\}$. *Queremos que* H *sea el eje de la rotación:* $T|_{H^{\perp}} = id_{H^{\perp}}$.

Construimos una bon de $\mathbb{R}^3$ *tal que el primer vector sea bon de* $H^{\perp}$ *y los dos siguientes de* H*:*

$$B = \{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\}.$$

Definimos T *en la base como sigue:*

$T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

$T\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Así,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observaciones 1 *Se puede hacer un razonamiento análogo para* $dim(V) = n$.