ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9) 2024

3.4 Ortogonalidad

Vamos a trabajar con este concepto tan importante y que nos va a permitir obtener bases más amigables para trabajar.

Definición 1 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi.*

- $u, v \in V$ *se dicen* ***ortogonales*** *si* $\langle u, v\rangle = 0$.
- $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ *se dice* ***ortogonal*** *si* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *para todo* $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$.
- $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ *se dice* ***ortonormal*** *si es ortogonal y* $||v_i|| = 1$ *para todo* $i = 1, \dots, r$.

Ejemplos 1

1. *La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ortonormal.*
2. *$V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,1),(1,-1)\}$ es un conjunto ortogonal pero no ortonormal (EJERCICIO). El conjunto $S' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$ es ortonormal (EJERCICIO).*

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Si B es un conjunto ortogonal, la matriz asociada al pi es

$$g = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle v_2, v_2\rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||v_1||^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ||v_2||^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ||v_n||^2 \end{pmatrix}.$$

Y si B es ortonormal, $g = Id$. Las bases ortogonales se suelen abreviar con b.o., y las ortonormales con b.o.n.

Si B es b.o.n., el producto interno en V puede describirse en términos de coordenadas de la base B de manera similar al producto interno usual de $\mathbb{F}^n$. En efecto, si $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in V$ entonces

$$\langle u, v\rangle = [u]_B g \overline{[v]_B t} = [u]_B Id \overline{[v]_B t} = [u]_B \overline{[v]_B t} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

Luego también la norma se expresa de manera sencilla como en $\mathbb{F}^n$: $||u|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Sigue que dada una base de un ev (de dimensión finita), existe un único pi tq la base dada es bon:

Proposición 1 *Sea V un $\mathbb{F}$-ev, $dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Entonces existe un único pi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en V tal que la base B es ortonormal respecto de ese pi.*

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: definir el pi a partir de la matriz $g = (\langle v_i, v_j\rangle) = Id$ asociada a la base B.

□

Además, todo conjunto ortogonal de vectores no nulos resulta ser li:

Proposición 2 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \overline{0}$ pt $i = 1, \ldots, r$. Entonces S es li.*

Demostración: Veamos que la cl $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \overline{0}$ tiene sólo la solución trivial. En efecto, pc $j = 1, \ldots, r$ tenemos que

$$0 = \langle \overline{0}, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j ||v_j||^2,$$

de donde por ser S ortogonal y todos sus vectores no nulos sigue que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Luego S es li.

□

Así, si S es un conjunto finito y ortogonal en un ev V, resulta ser una base para $W = span(S)$, y podemos calcular los coeficientes de los elementos $v \in W$ con ayuda del pi:

Proposición 3 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \overline{0}$ pt $i = 1, \ldots, r$. Sea $W = span(S)$. Si $v \in W$ ents*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2} v_j.$$

Demostración: Supongamos que $v = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$. Calculemos los coeficientes. Para esto, consideremos pc $j = 1, \ldots, r$

$$\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j ||v_j||^2,$$

de donde $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2}$.

□

Corolario 1 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = span(S)$. Si $v \in W$ ents*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Corolario 2 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $v \in V$.*

1. *Si B bo entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2} v_j$.*

2. *Si B bon entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j$.*

Corolario 3 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = span(S)$. Si $u, v \in W$ ents*

1. $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle u, v_i \rangle \overline{\langle v, v_i \rangle}$.

2. $||u|| = \left(\sum_{i=1}^{r} |\langle u, v_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera en un ev de dimensión finita, podemos construir una bon: este es el conocido método de ortonormalización de Gram-Schmidt. El proceso resulta en una base con una cualidad extra:

Teorema 1 *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$ *y* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *base de* V*. Entonces existe* $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *bon de* V *tal que pt* $k = 1, \ldots, n$*,*

$$span\{v_1, \ldots, v_k\} = span\{w_1, \ldots, w_k\}.$$

Demostración: En primer lugar construiremos una bo $B'' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ que verifique lo indicado, luego normalizando esta base otendremos la B' buscada.

- Definimos $u_1 := v_1$. Luego $span\{v_1\} = span\{u_1\}$.
- Buscamos ahora $u_2 \in V$ tq $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ y $span\{v_1, v_2\} = span\{u_1, u_2\}$. Para esto necesitamos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que $u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y que $\beta \neq 0$ (por qué??). Supongamos spg que $\beta \neq 1$, o sea $u_2 = \alpha v_1 + v_2$. Veamos:

  $$0 = \langle u_2, u_1 \rangle = \langle \alpha v_1 + v_2, u_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v1 \rangle,$$

  de donde $\alpha = -\frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{||v_1||^2}$. Así,

  $$u_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1$$

  verifica lo requerido.
- Procedemos a construir inductivamente: si suponemos que ya tenemos construidos $u_1, \ldots, u_r \in V$, con $r < n$, tales que
  - $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i \neq j$,
  - $span\{v_1, \ldots, v_r\} = span\{u_1, \ldots, u_r\}$.

  Definimos entonces el vector

  $$u_{r+1} := v_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{||u_k||^2} u_k.$$

  Así, para $1 \leq j \leq r$,
  - Calculemos los pi entre el nuevo vector y los anteriores:

    $$\begin{aligned} \langle u_{r+1}, u_j \rangle =& \langle v_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{||u_k||^2} u_k, u_j \rangle = \langle v_{r+1}, u_j \rangle - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{||u_k||^2} \langle u_k, u_j \rangle \\ =& \langle v_{r+1}, u_j \rangle - \frac{\langle v_{r+1}, u_j \rangle}{||u_j||^2} \langle u_j, u_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

    puesto que $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ si $k \neq j$.
  - $u_{r+1} \in span\{v_1, \ldots, v_{r+1}\}$ y $v_{r+1} \in span\{u_1, \ldots, u_{r+1}\}$ de donde ambos spans son iguales.

Así construimos hasta obtener una bon que verifica lo requerido. Para terminar basta considerar $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ donde $w_k = \frac{u_k}{||u_k||}$, $k = 1, \ldots, n$.

□

Corolario 4 *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$*. Sea* $U \subset V$ *sev no trivial* ($U \neq \{\overline{0}\}$) *ents existe una bon de* V *que contiene una bon de* U*.*

Demostración: Sea $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U. Completamos a $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$, y esta base es tal que $span\{v_1, \ldots, v_r\} = span\{w_1, \ldots, w_r\}$, luego $B'_U = \{w_1, \ldots, w_r\}$es bon de U.

□

Ejemplo 1 *Sea $B = \{(1,0,i),(1,1,2+i),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{C}^3$. B es una base (EJERCICIO). Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos la siguiente bon:*

$$B' = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} i), (\frac{1}{\sqrt{3}} i, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{\sqrt{6}}{6} i, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}) \right\}.$$

Complemento ortogonal

Definición 2 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. Sea $S \subset V$ un conjunto. Definimos el complemento ortogonal de S como el conjunto*

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \text{ para todo } s \in S\}.$$

Proposición 4 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. Sea $S \subset V$. Entonces $S^\perp$ es un sev de V.*

Demostración: EJERCICIO.

□

Observar que $\overline{0} \in S^\perp$ para todo $S \subset V$.

Ejemplo 2 *$V = \mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto $S = \{(1,1)\}$. Tenemos que*

$$S^\perp = \{(1,1)\}^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(1,1) \rangle = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\} = span\{(1,-1)\}.$$

Cuando S es además sev de V, se tiene una descomposición de V en sev ortogonales:

Proposición 5 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces:*

1. *$U \cap U^\perp = \{\overline{0}\}$,*
2. *$dimU + dimU^\perp = dimV$.*

Luego resulta $U \oplus U^\perp = V$.

Demostración:

1. Sea $u \in U \cap U^\perp$. Veamos que $u = \overline{0}$. Puesto que $u \in U$ y $u \in U^\perp$, resulta $\langle u, u \rangle = 0$. Luego $u = \overline{0}$.
2. Sea $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U, $r = dimU$. Completamos a una base de V: $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y obtenemos $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bon de V tal que $B'_U = \{w_1, \ldots, w_r\}$ bon de U. Luego, $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ bon de $U^\perp$. En efecto: si $j > r$, $w_j \in U^\perp$, puesto que si tomamos $v \in spanB'_U$, $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i$, de donde

$$\langle w_j, v \rangle = \langle w_j, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i} \langle w_j, w_i \rangle = 0,$$

por ser B' bon. Esto nos dice que $span\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} \subset U^\perp$. Pero como $n - dimU = n - r = dimspan\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} \leq dimU^\perp$ resulta $n \leq dimU + dimU^\perp \leq n$ (pues $U \cap U^\perp = \{\overline{0}\}$). Concluimos así que $span\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} = U^\perp$ y $dimU + dimU^\perp = dimV$.

□

Ejemplos 2

$V = \mathbb{C}^3$. $S = \{(1, i, 1+i)\}$. Entonces

$$S^\perp = span\{(-i,1,0),(i-1,0,1)\}.$$

EJERCICIO!

$V = \mathbb{C}^4$. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0, (1-i)x_2 + x_3 = 0\}$. Para calcular $S^\perp$ observamos que

- $x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0$ *es lo mismo que* $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -i, 1, -1) \rangle$ *y*
- $(1-i)x_2 + x_3 = 0$ *se puede escribir como* $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1+i, 1, 0) \rangle$.

Entonces

$$S^{\perp} = span\{(1, -i, 1, -1), (0, 1+i, 1, 0).$$

Asociado a un sev siempre existe una función muy importante, la proyección. Cuando tenemos pi, la proyección nos dará una herramienta muy útil para las aplicaciones que veremos en la sección próxima. Nos centraremos en el siguiente problema que podremos resolver:

Problema: Dado un sev U de un ev V de dimensión finita con pi y un punto $v \in V$, encontrar si es posible el punto de U que se encuentra a menor distancia de v.

Aquí es necesario interpretar qué se entiende por distancia de un punto a un conjunto. Hacemos la siguiente definición, y luego definimos la función proyección:

Definición 3 *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi, sea* $S \subset V$ *subconjunto y* $v \in S$*. Definimos la distancia de* v *a* S *como*

$$d(v, S) = inf\{d(v, s) : s \in S\} = inf\{||v - s|| : s \in S\}.$$

Definición 4 *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$*. Sea* $U \subset V$ *sev. La función* $p_U : V \to V$ *definida por* $p_U(v) = v$ *si* $v \in U$ *y* $p_U(v) = \overline{0}$ *si* $v \in U^{\perp}$ *se llama* ***proyección ortogonal sobre*** U*.*

Veamos algunas propiedades de la proyección:

1. p_U es una tl. EJERCICIO.
2. $ker P_U = U^{\perp}$. EJERCICIO.
3. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bon de V tal que $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ bon de U, entonces

$$p_U(v) = p_U\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle p_U(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

4. $p_U + p_{U^{\perp}} = id_V$. EJERCICIO.

Estamos en condiciones de resolver el problema:

Proposición 6 *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$*. Sea* $U \subset V$ *sev. Entonces para* $v \in V$ *tenemos que*

$$d(v, U) = ||v - p_U(v)||.$$

Es decir, el punto de U más cercano a v es, como podíamos intuir, $p_U(v)$.

Demostración: Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bon de V tq $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ bon de U. Sea $v \in V$, luego $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$ y $p_U(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i$. Sio $u \in U$, $u = \sum_{i=1}^{r} \langle u, v_i \rangle v_i$. Luego,

$$v - u = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i - \sum_{i=1}^{r} \langle u, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{r} (\langle v, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle) v_i + \sum_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i, \text{ luego}$$

$$||v - u||^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \sum_{i=1}^{r} |\langle v - u, v_i \rangle|^2 + \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2 \geq \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2,$$

y la igualdad se da sii $\sum_{i=1}^{r} |\langle v - u, v_i \rangle|^2 = 0$, es decir, si $\langle v - u, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$, que es lo mismo que $\langle v, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Es decir, para $u = \sum_{i=1}^{r} \langle u, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i = p_U(v)$. Tomando ínfimo resulta $d(v, U) = ||v - p_U(v)||$.

$\square$

Corolario 5 *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}}V = n$*. Sea* $U \subset V$ *sev. Entonces para* $v \in V$ *tenemos que*

$$d(v, U) = ||p_{U^\perp}||.$$

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: $v = id(v) = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$.

$\square$

Ejemplo 3 *Sean* $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$*,* $P(1, -1, 2)$ *y* $Q(1, 1, 2)$*. Calculemos* $d(P, S) = ||p_{S^\perp}(P)$*. Tenemos que* $S = (span\{(2, 2, -1)\})^\perp$*, de donde* $\{(2, 2, -1)\}$ *es una base (ortogonal) de* $S^\perp$*. Normalizamos y obtenemos que* $\{(2/3, 2/3, -1/3)\}$ *es una bon de* $S^\perp$*. Esto nos permite calcular* $p_{S^\perp}(P)$*:*

$$\begin{aligned} p_{S^\perp}(1, -1, 2) =& \langle (1, -1, 2), (2/3, 2/3, -1/3)\rangle (2/3, 2/3, -1/3) = (-4/9, -4/9, 2/9), \\ ||p_{S^\perp}(1, -1, 2)||^2 =& 4/9, \end{aligned}$$

de donde sigue que $d(P, S) = 2/3$*. EJERCICIO: completar los cálculos. EJERCICIO: Calcular* $d(Q, S)$*.*