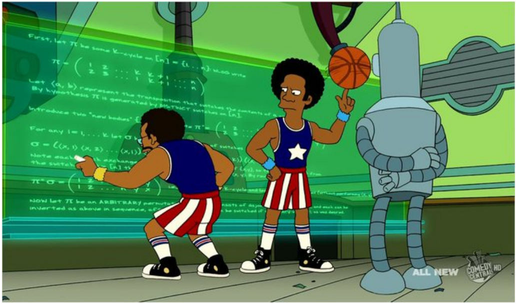
# Razonando con programas

Mauro Jaskelioff

27/04/2020



# Verificando la especificación

- Dado una implementación TAD, ¿cómo sabemos que es correcta?
  - Implementa las operaciones.
  - Estas operaciones verifican la especificación.
- Dada una implementación en Haskell
  - El sistema de tipos asegura que los tipos de las operaciones son correctos.
  - Pero la verificación de la especificación la debe hacer el programador.
- Pero, ¿cómo verificar la especificación?

# Razonamiento Ecuacional

- Haskell permite razonar ecuacionalmente acerca de las definiciones en forma similar al álgebra.

$$\begin{aligned}
&\mathit{reverse} && :: [a] \to [a] \\
&\mathit{reverse}\ [\,] && = [\,] \\
&\mathit{reverse}\ (x : xs) && = \mathit{reverse}\ xs +\!\!+ [x]
\end{aligned}$$

Probar que

$$\mathit{reverse}\ [x] = [x]$$

$$\begin{aligned}
& \mathit{reverse}\ [x] \\
= \quad & \{\mathit{Listas}\} \\
& \mathit{reverse}\ (x : [\,]) \\
= \quad & \{\mathit{reverse}\ .\ 2\} \\
& \mathit{reverse}\ [\,] +\!\!+ [x] \\
= \quad & \{\mathit{reverse}\ .\ 1\} \\
& [\,] +\!\!+ [x] \\
= \quad & \{(+\!\!+)\ .\ 1\} \\
& [x]
\end{aligned}$$

- Notar que en las ecuaciones usamos $=$ y no **==**.

# Patrones disjuntos

- Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned}&\mathit{esCero} && :: \mathit{Int} \to \mathit{Bool}\\ &\mathit{esCero}\ 0 && = \mathit{True}\\ &\mathit{esCero}\ n && = \mathit{False}\end{aligned}$$

- La 2da ecuación es aplicable sólo si $n \not\equiv 0$.
- Es más fácil razonar ecuacionalmente si los patrones son *disjuntos*.

$$\begin{aligned}&\mathit{esCero}' && :: \mathit{Int} \to \mathit{Bool}\\ &\mathit{esCero}'\ 0 && = \mathit{True}\\ &\mathit{esCero}'\ n \mid n \not\equiv 0 && = \mathit{False}\end{aligned}$$

- Patrones disjuntos $\Rightarrow$ no hace falta tener en cuenta el orden de las ecuaciones

# Extensionalidad

- Dadas dos funciones $f, g :: A \to B$

$$¿\text{Cómo probar que } f = g?$$

- Tomamos una visión de *caja negra* sobre las funciones.
  - Sólo podemos evaluar el comportamiento de una función, i.e. cómo se comporta al aplicarle argumentos.
- Principio de Extensionalidad:

$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x :: A.\ f\ x = g\ x$$

# Análisis por Casos

- Podemos hacer análisis por casos para probar propiedades:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{not} && :: \mathit{Bool} \to \mathit{Bool} \\
&\mathit{not}\ \mathit{False} && = \mathit{True} \\
&\mathit{not}\ \mathit{True} && = \mathit{False}
\end{aligned}
$$

- Probamos $\mathit{not}\ (\mathit{not}\ x) = x$, por casos de $x$:

- Caso $x = \mathit{False}$

$$
\begin{aligned}
&\quad \mathit{not}\ (\mathit{not}\ \mathit{False}) \\
=&\quad \quad \{\mathit{not}\ .\ 1\} \\
&\quad \mathit{not}\ \mathit{True} \\
=&\quad \quad \{\mathit{not}\ .\ 2\} \\
&\quad \mathit{False}
\end{aligned}
$$

- Caso $x = \mathit{True}$

$$
\begin{aligned}
&\quad \mathit{not}\ (\mathit{not}\ \mathit{True}) \\
=&\quad \quad \{\mathit{not}\ .\ 2\} \\
&\quad \mathit{not}\ \mathit{False} \\
=&\quad \quad \{\mathit{not}\ .\ 1\} \\
&\quad \mathit{True}
\end{aligned}
$$

# Razonando con programas recursivos

- Los programas funcionales interesantes usan *recursión*.
- Para poder probar propiedades acerca de programas recursivos usualmente uno necesita usar *inducción*

# Inducción

- La inducción nos da una forma de escribir una prueba infinita de una manera finita.
- Queremos probar una propiedad $P$ para todo número natural.
  - Por ej: $P(n) = n$ es par o impar.
- Con un papel infinito e infinito tiempo podríamos probar $P(0)$, luego probar $P(1)$, luego $P(2)$, etc.
- La inducción es una forma de probar que con papel infinito e infinito tiempo podríamos completar la prueba.

# Inducción sobre $\mathbb{N}$: Primera forma

**Definición**

*Para probar $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, probamos $P(0)$ y probamos que para cualquier $m$, si $P(m)$ entonces $P(m+1)$.*

- La prueba $P(0)$ es lo que llamamos *caso base*.
- La prueba de que $P(m) \to P(m+1)$ es el *paso inductivo*.
- El suponer $P(m)$ verdadero es la *hipótesis de inducción*.

# Inducción sobre $\mathbb{N}$: Segunda forma

### Definición

*Para probar* $P(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, probamos que para cualquier* $m$*, si* $P(i)$ *para todo* $i < m$*, entonces* $P(m)$*.*

- No hay caso base
- Suponemos $P(i)$ para todo $i < m$ (hipótesis de inducción)
- Esta forma es llamada a veces *inducción completa* o *inducción fuerte*.
- En realidad, es tan completa o fuerte como la anterior.

# Inducción sobre otros conjuntos

- Podemos usar la inducción sobre los naturales para obtener inducción sobre otros conjuntos.
- Por ejemplo, podemos hacer inducción sobre la altura de un árbol o la longitud de una lista.
- En gral, dada una función $f : A \to \mathbb{N}$, y una propiedad $P$ sobre elementos de $A$, podemos definir:

$$Q\ (n) = \forall a :: A\ .\quad f\ a = n \quad \Rightarrow \quad P\ (a)$$

- Transformamos una propiedad sobre $A$ en una sobre $\mathbb{N}$.

# Ejemplo

$\textbf{data}\ Bin = Null \mid Leaf \mid Node\ Bin\ Bin$

- Probar $\forall t :: Bin\ .\quad cantleaf\ \ t \leqslant cantnode\ t + 1$

$$
\begin{array}{ll}
cantleaf & :: Bin \to Int \\
cantleaf\ \ Null & = 0 \\
cantleaf\ \ Leaf & = 1 \\
cantleaf\ \ (Node\ t\ u) & = cantleaf\ \ t + cantleaf\ \ u
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
cantnode & :: Bin \to Int \\
cantnode\ (Node\ t\ u) & = 1 + cantnode\ t + cantnode\ u \\
cantnode\ \_ & = 0
\end{array}
$$

# Prueba del ejemplo

$$Q\ (n) = \forall t :: Bin\ .\quad height\ (t) = n \Rightarrow cantleaf\ \ t \leqslant cantnode\ t + 1$$

$$\begin{array}{ll} height & :: Bin \rightarrow Int \\ height\ (Node\ t\ u) & = 1 + max\ (height\ t)\ (height\ u) \\ height\ \_ & = 0 \end{array}$$

- Usamos la 2da forma de inducción y suponemos que $\forall i < n$, si $height\ (t) = i$ entonces $cantleaf\ \ t \leqslant cantnode\ t + 1$.
- Hacemos un análisis por casos de $n$
  - Si $n = 0$, entonces la HI no se aplica y debemos probar directamente

$$height\ (t) = 0 \quad \Rightarrow \quad cantleaf\ \ t \leqslant cantnode\ t + 1$$

(¡fácil!)

# Prueba del ejemplo (cont.)

- Si $n > 0$ y $\mathit{height}\ t = n$ entonces podemos calcular

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathit{cantleaf}\ \ t \\
= & \quad \{\mathit{height}\ t > 0\} \\
 & \mathit{cantleaf}\ (\mathit{Node}\ u\ v) \\
= & \quad \{\mathit{cantleaf}\ .\ 3\} \\
 & \mathit{cantleaf}\ \ u + \mathit{cantleaf}\ \ v \\
\leqslant & \quad \{\mathit{HI}\ (\mathit{height}\ u < n) \wedge (\mathit{height}\ v < n)\} \\
 & \mathit{cantnode}\ u + 1 + \mathit{cantnode}\ v + 1 \\
= & \quad \{\mathit{cantnode}\ .\ 1\} \\
 & \mathit{cantnode}\ (\mathit{Node}\ u\ v) + 1
\end{array}
$$

- Pudimos probar una propiedad sobre árboles usando inducción sobre naturales.

# Inducción Estructural

- Es más práctico hacer inducción directamente sobre la estructura del árbol.

### Definición (Inducción estructural)

*Dada una propiedad $P$ sobre un tipo de datos algebraico $T$, para probar $\forall t :: T \;.\; P\ (t)$:*

- *probamos $P\ (t)$ para todo t dado por un constructor no recursivo*
- *para todo t dado por un constructor con instancias recursivas $t_1, \ldots, t_k$, probamos que si $P\ (t_i)$ para $i = 1, \ldots, k$ entonces $P\ (t)$.*

- Podemos definir una forma adicional de inducción estructural en la que suponemos que $P\ (t')$ para *todo* $t' :: T$ que ocurre dentro de $t$.

# Ejemplo: Inducción Estructural para *Bin*

$\textbf{data } \mathit{Bin} = \mathit{Null} \mid \mathit{Leaf} \mid \mathit{Node}\ \mathit{Bin}\ \mathit{Bin}$

**Definición (Inducción estructural para *Bin*)**

*Dada una propiedad $P$ sobre elementos de Bin, para probar $\forall t :: \mathit{Bin}\ .\quad P\ (t)$:*

- *probamos $P\ (\mathit{Null})$ y $P\ (\mathit{Leaf})$.*
- *probamos que si $P\ (u)$ y $P\ (v)$ entonces $P\ (\mathit{Node}\ u\ v)$.*

- Probamos $\forall t :: \mathit{Bin}\ .\quad \mathit{cantleaf}\ t \leqslant \mathit{cantnode}\ t + 1.$

# Prueba usando inducción estructural

- Caso *Null*:
  $cantleaf\ Null = 0 \leqslant 1 = 0 + 1 = cantnode\ Null + 1$
- Caso *Leaf*:
  $cantleaf\ Leaf = 1 \leqslant 1 = 0 + 1 = cantnode\ Leaf + 1$
- Caso *Node u v*:

La hipótesis inductiva es:

$$cantleaf\ u \leqslant cantnode\ u + 1$$
$$cantleaf\ v \leqslant cantnode\ v + 1$$

$$\begin{array}{ll} & cantleaf\ (Node\ u\ v) \\ = & \quad \{cantleaf\ .\ 3\} \\ & cantleaf\ u + cantleaf\ v \\ \leqslant & \quad \{HI\} \\ & cantnode\ u + 1 + cantnode\ v + 1 \\ = & \quad \{cantnode\ .\ 1\} \\ & cantnode\ (Node\ u\ v) + 1 \end{array}$$

# Ejemplo: Inducción Estructural para Listas

**Definición (Inducción estructural para listas)**

*Dada una propiedad $P$ sobre listas, para probar $\forall xs :: [a] \,.\; P\,(xs)$:*

- *probamos $P\,([\,])$.*
- *probamos que si $P\,(xs)$ entonces $P\,(x : xs)$.*

**Ejercicio**

*Probar $reverse\,(xs +\!\!+\, ys) = reverse\;ys +\!\!+\, reverse\;xs$.*

**Ejercicio**

*Exprese la inducción estructural para el tipo Nat*

$$\textbf{data}\; Nat = Zero \mid Succ\; Nat$$

# Ejemplo: Compilador correcto

- Dado un lenguaje aritmético simple, cuyo AST es:

$$\textbf{data}\ \mathit{Expr} = \mathit{Val}\ \mathit{Int} \mid \mathit{Add}\ \mathit{Expr}\ \mathit{Expr}$$

- Su semántica denotacional está dada por el siguiente evaluador

$$\begin{aligned}
&\mathit{eval} && :: \mathit{Expr} \to \mathit{Int} \\
&\mathit{eval}\ (\mathit{Val}\ n) && = n \\
&\mathit{eval}\ (\mathit{Add}\ x\ y) && = \mathit{eval}\ x + \mathit{eval}\ y
\end{aligned}$$

# Máquina virtual

- Queremos compilar el lenguaje a la siguiente máquina de stack:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{type}\ \mathit{Stack} = [\mathit{Int}]\\
&\textbf{type}\ \mathit{Code}\ \ = [\mathit{Op}]\\
&\textbf{data}\ \mathit{Op}\ \ \ \ \ = \mathit{PUSH}\ \mathit{Int} \mid \mathit{ADD}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{exec} && :: \mathit{Code} \to \mathit{Stack} \to \mathit{Stack}\\
&\mathit{exec}\ []\ s && = s\\
&\mathit{exec}\ (\mathit{PUSH}\ n : c)\ s && = \mathit{exec}\ c\ (n : s)\\
&\mathit{exec}\ (\mathit{ADD} : c)\ (m : n : s) && = \mathit{exec}\ c\ (n + m : s)
\end{aligned}
$$

# Compilador

- Definimos un compilador

$$\begin{aligned} &\mathit{comp} && :: \mathit{Expr} \to \mathit{Code} \\ &\mathit{comp}\ (\mathit{Val}\ n) && = [\mathit{PUSH}\ n] \\ &\mathit{comp}\ (\mathit{Add}\ x\ y) && = \mathit{comp}\ x \mathbin{+\!\!+} \mathit{comp}\ y \mathbin{+\!\!+} [\mathit{ADD}] \end{aligned}$$

$$e = \mathit{Add}\ (\mathit{Add}\ (\mathit{Val}\ 2)\ (\mathit{Val}\ 3))\ (\mathit{Val}\ 4)$$

$> \mathit{eval}\ e$

$9$

$> \mathit{comp}\ e$

$[\mathit{PUSH}\ 2, \mathit{PUSH}\ 3, \mathit{ADD}, \mathit{PUSH}\ 4, \mathit{ADD}]$

$> \mathit{exec}\ (\mathit{comp}\ e)\ [\,]$

$[9]$

# ¿Es correcto el compilador?

- El compilador es correcto si

$$\forall e. \quad exec\ (comp\ e)\ [\,] \quad = \quad [eval\ e]$$

- Lo probamos por inducción estructural de *Expr*

### Definición (Inducción estructural para *Expr*)

*Dada una propiedad $P$ sobre elementos de $Expr$, para probar $\forall e :: Expr\ . \quad P\ (e)$:*

- *probamos $P\ (Val\ n)$ para todo $n$.*
- *probamos que si $P\ (e)$ y $P\ (e')$ entonces $P\ (Add\ e\ e')$.*

# Prueba: el compilador es correcto

Queremos probar:

$$\forall e. \quad exec\ (comp\ e)\ [\,] \quad = \quad [eval\ e]$$

Lo hacemos por inducción estructural sobre $e$.

Caso $Val$ $(e = Val\ n)$

$$
\begin{array}{lll}
 & exec\ (comp\ (Val\ n))\ [\,] & \\
= & \quad \{comp.1\} & comp\ (Val\ n) = [PUSH\ n] \\
 & exec\ [PUSH\ n]\ [\,] & \\
= & \quad \{exec.2\} & exec\ (PUSH\ n : c)\ s = exec\ c\ (n : s) \\
 & exec\ [\,]\ [n] & \\
= & \quad \{exec.1\} & exec\ [\,]\ s = s \\
 & [n] & \\
= & \quad \{eval.1\} & eval\ (Val\ n) = n \\
 & [eval\ (Val\ n)] &
\end{array}
$$

Caso *Add* $(e = Add\ e_1\ e_2)$

Hipótesis Inductiva: $\begin{array}{ll} HI.1 & exec\ (comp\ e_1)\ [\,] = [eval\ e_1] \\ HI.2 & exec\ (comp\ e_2)\ [\,] = [eval\ e_2] \end{array}$

$$
\begin{array}{ll}
& exec\ (comp\ (Add\ e_1\ e_2))\ [\,] \\
= & \{comp.2\} \qquad comp\ (Add\ x\ y) = comp\ x +\!\!+\ comp\ y +\!\!+ [ADD] \\
& exec\ (comp\ e_1 +\!\!+\ comp\ e_2 +\!\!+ [ADD])\ [\,] \\
= & \{Lema\ 1 : \forall c, d, s.\ exec\ (c +\!\!+\ d)\ s = exec\ d\ (exec\ c\ s)\} \\
& exec\ (comp\ e_2 +\!\!+ [ADD])\ (exec\ (comp\ e_1)\ [\,]) \\
= & \{Lema\ 1 : \forall c, d, s.\ exec\ (c +\!\!+\ d)\ s = exec\ d\ (exec\ c\ s)\} \\
& exec\ [ADD]\ (exec\ (comp\ e_2)\ (exec\ (comp\ e_1)\ [\,])) \\
= & \{HI\} \qquad exec\ (comp\ e_1)\ [\,] = [eval\ e_1] \\
& exec\ [ADD]\ (exec\ (comp\ e_2)\ [eval\ e_1]) \\
= & \{?\}
\end{array}
$$

No puedo seguir. Necesito **generalizar la hipótesis inductiva**!

# Reforzando la hipótesis inductiva

- Probamos una propiedad más fuerte.
  - La hipótesis inductiva será mas fuerte.
- Generalizamos

$$\begin{array}{lrcl} \forall e. & \mathit{exec}\ (\mathit{comp}\ e)\ [\,] & = & [\mathit{eval}\ e] \\ \forall e, s. & \mathit{exec}\ (\mathit{comp}\ e)\ s & = & (\mathit{eval}\ e) : s \end{array}$$

- La prueba original es un caso particular de la general (cuando $s = [\,]$).

# Prueba: el compilador es correcto (prop. general)

Queremos probar:

$$\forall e, s. \quad exec\ (comp\ e)\ s \quad = \quad eval\ e : s$$

Lo hacemos por inducción estructural sobre $e$.

Caso *Val* $(e = Val\ n)$

$$
\begin{array}{lll}
 & exec\ (comp\ (Val\ n))\ s & \\
= & \quad \{comp.1\} & comp\ (Val\ n) = [PUSH\ n] \\
 & exec\ [PUSH\ n]\ s & \\
= & \quad \{exec.2\} & exec\ (PUSH\ n : c)\ s = exec\ c\ (n : s) \\
 & exec\ []\ (n : s) & \\
= & \quad \{exec.1\} & exec\ []\ s = s \\
 & n : s & \\
= & \quad \{eval.1\} & eval\ (Val\ n) = n \\
 & eval\ (Val\ n) : s &
\end{array}
$$

Caso *Add* $(e = Add\ e_1\ e_2)$

Hipótesis Inductiva:
$$\begin{array}{ll} HI.1 & \forall s.\ exec\ (comp\ e_1)\ s = eval\ e_1 : s \\ HI.2 & \forall s.\ exec\ (comp\ e_2)\ s = eval\ e_2 : s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & exec\ (comp\ (Add\ e_1\ e_2))\ s \\
= & \{comp.2\} \qquad comp\ (Add\ x\ y) = comp\ x +\!\!+\ comp\ y +\!\!+ [ADD] \\
 & exec\ (comp\ e_1 +\!\!+\ comp\ e_2 +\!\!+ [ADD])\ s \\
= & \{Lema\ 1 : \forall c, d, s.\ exec\ (c +\!\!+ d)\ s = exec\ d\ (exec\ c\ s)\} \\
 & exec\ (comp\ e_2 +\!\!+ [ADD])\ (exec\ (comp\ e_1)\ s) \\
= & \{Lema\ 1 : \forall c, d, s.\ exec\ (c +\!\!+ d)\ s = exec\ d\ (exec\ c\ s)\} \\
 & exec\ [ADD]\ (exec\ (comp\ e_2)\ (exec\ (comp\ e_1)\ s)) \\
= & \{HI.1\} \qquad \forall s\ .\ exec\ (comp\ e_1)\ s = eval\ e_1 : s \\
 & exec\ [ADD]\ (exec\ (comp\ e_2)\ (eval\ e_1 : s)) \\
= & \{HI.2\} \qquad \forall s\ .\ exec\ (comp\ e_2)\ s = eval\ e_2 : s \\
 & exec\ [ADD]\ (eval\ e_2 : eval\ e_1 : s)
\end{array}$$

Ahora podemos finalizar la prueba:

$$
\begin{array}{lll}
& \multicolumn{2}{l}{exec\ [ADD]\ (eval\ e_2 : eval\ e_1 : s)} \\
= & \{exec.3\} & exec\ (ADD : c)\ (m : n : s) = exec\ c\ (n + m : s) \\
& \multicolumn{2}{l}{exec\ [\,]\ (eval\ e_1 + eval\ e_2 : s)} \\
= & \{exec.1\} & exec\ [\,]\ s = s \\
& \multicolumn{2}{l}{(eval\ e_1 + eval\ e_2 : s)} \\
= & \{eval.2\} & eval\ (Add\ x\ y) = eval\ x + eval\ y \\
& \multicolumn{2}{l}{eval\ (Add\ e_1\ e_2) : s}
\end{array}
$$

- Nos queda probar el lema auxiliar:

  $$Lema\ 1 : \forall c, d, s.\ exec\ (c \mathbin{+\!\!+} d)\ s = exec\ d\ (exec\ c\ s)$$

  donde para probar esto debemos asumir que el stack está bien formado, (para todo *ADD* hay al menos dos elementos en el stack).

# Conclusiones

- Probar una propiedad más general hace más fuerte la hipótesis de inducción.
- ¡A veces es más fácil probar propiedades más generales!
- Conviene estructurar las pruebas en lemas.

# Referencias


- Programming in Haskell. Graham Hutton (2007)
- Introduction to Functional Programming. Richard Bird (1998)
- Foundations of Programming Languages. John C. Mitchell (1996)