Resolución práctica 8 - Coloreo de Grafos

5) Sea G un grafo sin lazos con al menos una arista. Probar que G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.

Resolución:

$\Rightarrow$) Supongamos que $G = (V, E)$ es bipartito. Entonces existen dos conjuntos X e Y tales que $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$ y toda arista $uv \in E$ tiene un extremo en X y otro en Y.

Como G tiene al menos una arista, entonces $2 \leqslant \omega(G)$. Luego, como $\omega(G) \leqslant \chi(G)$, resulta $2 \leqslant \chi(G)$. Veamos que $\chi(G) \leqslant 2$.

Consideremos la función $f : V \to \{1, 2\}$ dada por

$$f(u) = \begin{cases} 1 & si \quad u \in X \\ 2 & si \quad u \in Y \end{cases}$$

Veamos que f es un coloreo de G. Si $uv \in E$ entonces $u \in X$ y $v \in Y$ o $u \in Y$ y $v \in X$. En ambos casos, $f(u) \neq f(v)$. Por lo tanto, f es un 2-coloreo de G y $\chi(G) \leqslant 2$.

Concluimos que $\chi(G) = 2$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\chi(G) = 2$. Es decir, existe un 2-coloreo $f : V \to \{1, 2\}$ tal que si $uv \in E$ entonces $f(u) \neq f(v)$.

Veamos que G es bipartito. Consideremos los conjuntos

$$X = \{v \in V : f(v) = 1\} \text{ e } Y = \{v \in V : f(v) = 2\}$$

Claramente, $X \cup Y = V$ y $X \cap Y = \varnothing$. Luego, como f es un 2-coloreo de G, si $uv \in E$ $f(u) \neq f(v)$. Con lo cual, $u \in X$ y $v \in Y$ o $u \in Y$ y $v \in X$.

Por lo tanto, G es bipartito con bipartición $[X, Y]$.

7) Sea G un grafo con componentes conexas $G_1, \ldots, G_k$. Probar que $\chi(G) = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$.

Resolución:

Sea G un grafo y $G_i = (V_i, E_i)$ $i = 1, \ldots, \kappa(G) = k$ sus componentes conexas.

Veamos primero que $\chi(G) \leqslant \max\limits_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$.

IDEA: Si definimos un s-coloreo para G, con $s = \max_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$ entonces $\chi(G) \leqslant \max_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$. Y para hacerlo, vamos a usar los $\chi(G_i)$-coloreos de G_i para cada i.

Sean $f_i : V_i \to \{1, \ldots, \chi(G_i)\}$ coloreos óptimos para cada G_i.

Definimos un coloreo de G de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \{1, \ldots, \max_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)\} \\ u &\longmapsto f(u) = f_i(u) \text{ si } u \in V_i \end{aligned}$$

f está bien definida pues $V_i \cap V_j = \varnothing$ para todo $i, j \in \{1, \ldots k\}$ distintos.

Veamos que f es un coloreo de G. Si $uv \in E$ entonces $uv \in E_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como f_i es un coloreo en G_i, si $uv \in E_i$, $f_i(u) \neq f_i(v)$, por lo que $f(u) \neq f(v)$. Luego, si $uv \in E$, $f(u) \neq f(v)$. Por lo tanto, $\chi(G) \leqslant \max_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$

Veamos ahora la otra desigualdad.

Sea f un coloreo óptimo de G.

Siguiendo el mismo razonamiento de antes, si definimos un $\chi(G)$-coloreo para cada G_j entonces $\chi(G) \geqslant \chi(G_j)$ y como j es arbitrario, obtenemos la desigualdad deseada.

Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f_i : V_i &\longrightarrow \{1, \ldots, \chi(G)\} \\ u &\longmapsto f_i(u) = f(u) \end{aligned}$$

Veamos que f_i es un coloreo de G_i. Si $uv \in E_i$, en particular, $uv \in E$ por lo que $f(u) \neq f(v)$. Luego, si $uv \in E_i$, $f_i(u) \neq f_i(v)$

Por lo tanto, $\chi(G) \leqslant \text{máx}_{i=1,\ldots,k} \chi(G_i)$ como queríamos probar.

8) Un grafo G se dice k-color crítico si su número cromático es k y el número cromático de todo subgrafo propio inducido de G es menor a k. Equivalentemente, G es k-color crítico si $\chi(G) = k$ y $\chi(G - v) < k$ para todo $v \in V(G)$.

Sea G un grafo k-color crítico. Probar que:

a) G es conexo.

b) $d(v) \geqslant k - 1$ para todo $v \in V(G)$.

c) G no tiene vértices de corte.

Resolución:

a) Sea G un grafo k-color crítico y supongamos que no es conexo. Sean $G_i = (V_i, E_i)$ sus componentes conexas con $i \in \{1, \ldots, \kappa(G)\}$.

Por el ejercicio anterior, $\chi(G) = \text{máx}_{i=1,\ldots,\kappa(G)} \chi(G_i)$.

Sea j tal que $\chi(G_j) = \text{máx}_{i=1,\ldots,\kappa(G)} \chi(G_i)$, es decir $\chi(G_j) = k$,. Pero G_j es un subgrafo inducido de G con $\chi(G_j) = \chi(G)$, contradiciendo que G es k-color crítico.

Por lo tanto, G es conexo.

b) Sea G k-color crítico. Supongamos que para algún $v \in V(G)$, $d(v) \leqslant k - 2$.

Sea f un coloreo óptimo de $G - v$:

$$\begin{aligned} f\,:\, V - \{v\} &\longrightarrow \{1, \ldots, \chi(G - v)\} \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

Como G es $k-$color crítico, $\chi(G) = k$ y $\chi(G - v) \leqslant k - 1$.

Por otro lado, como $d(v) \leqslant k - 2$, la cantidad de colores asignados a los vecinos de v es a lo sumo $k - 2$. Luego, existe un "color" $x \in \{1, \ldots, k - 1\}$ tal que $f(u) \neq x$ para todo $u \in N(v)$. Entonces podemos definir un coloreo en G de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f' : V &\longrightarrow \{1, \ldots, k - 1\} \\ u &\longmapsto f'(u) = \begin{cases} f(u) & si \quad u \neq v \\ x & si \quad u = v \end{cases} \end{aligned}$$

f' es un coloreo de G que tiene a lo sumo $k-1$ colores. Luego, $\chi(G) \leqslant k-1$ contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto, $d(v) \geqslant k - 1$ para todo $v \in V$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

c) Sea G k-color crítico y supongamos que G tiene un vértice de corte v.

Sean $G_i = (V_i, E_i)$ con $i = 1, \ldots, t$ las componentes conexas de $G - v$ y consideremos los subgrafos inducidos $G'_i = G[V_i \cup \{v\}]$. Como G es k-color crítico, $\chi(G'_i) < k = \chi(G)$.

Sea $f_i : V_i \cup \{v\} \longrightarrow \{1, \ldots, \chi(G'_i)\}$ un coloreo óptimo de G_i.

Reordenando los colores de ser necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_i(v) = 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Luego, podemos definir el siguiente coloreo para G:

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \{1, \ldots, \max_{i=1,\ldots,t} \chi(G'_i)\} \\ u &\longmapsto f(u) = \begin{cases} f_i(u) & si \quad u \in V_i \\ 1 & si \quad u = v \end{cases} \end{aligned}$$

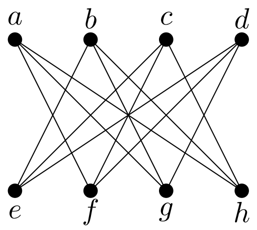
Veamos que f es un coloreo de G.

Sea $uv \in E$. Como G_i son componentes conexas de $G - v$ y v es un vértice de corte, $u, v \in V_j \cup \{v\}$ para algún j (no hay aristas entre vértices de componentes conexas distintas).

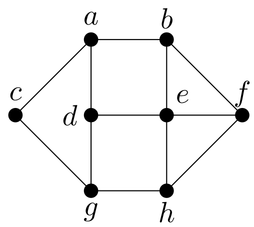
Luego, si $u, v \in V_j \cup \{v\}$ entonces $f_j(u) \neq f_j(v)$, es decir, $f(u) \neq f(v)$.

Por lo tanto, f es un coloreo de G. Por lo que G admite un coloreo con $\max_{i=1,\ldots,t} \chi(G'_i) \leqslant k - 1$ colores, pero $\chi(G) = k$. Por lo tanto, G no tiene vértices de corte.

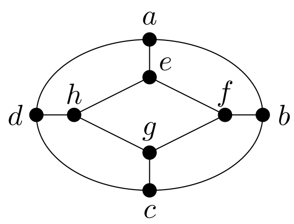
10) Obtener un coloreo para cada uno de los siguientes grafos mediante el algoritmo greedy utilizando el orden dado de los vértices. Determinar si el coloreo obtenido es óptimo.



a, e, b, f, c, g, d, h



e, a, b, g, h, d, c, f



a, g, b, h, c, e, d, f

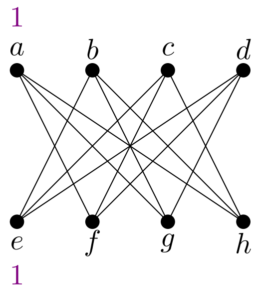
Algoritmo Greedy: Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el algoritmo greedy colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.

Resolución:

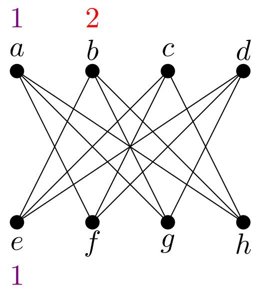
Consideremos el siguiente grafo G, con el orden de sus vértices a, e, b, f, c, g, d, h.

Comenzamos coloreando el color a con el primer color disponible, al cual llamamos 1.

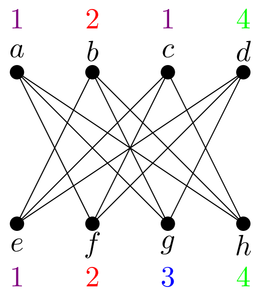
El siguiente vértice en la lista es e. Como a y e no son adyacentes, podemos colorear a e con el mismo color que a.



El siguiente vértices es b. Como b y e son adyacentes entonces b debe recibir otro color distinto al de a y e. Luego, lo coloreamos con el primer color disponible distinto de 1:



Luego, como f es adyacente a a pero no a b recibe el color 2 (el mismo color que b, ya que es el primero disponible). Continuando con el mismo razonamiento, obtenemos el siguiente coloreo:



Observemos que G es bipartito, por lo que $\chi(G) = 2$ por el ejercicio 5. Por lo tanto, el 4-coloreo que obtuvimos implementando el Algoritmo Greedy no es óptimo.

11) *a*) Probar que dado un grafo cualquiera G, existe un orden de los vértices de G tal que el *algoritmo greedy* devuelve un coloreo óptimo.

b) Para cada grafo del ejercicio , dar un orden de los vértices para el cual el *algoritmo greedy* devuelva un coloreo óptimo.

Idea para la resolución:

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos un coloreo óptimo $f : V \longrightarrow \{1, \ldots, \chi(G)\}$. Luego, podemos considerar los conjuntos $V_i = f^{-1}(\{i\}), i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$ las cuales definimos como **clases de color**. Observemos que $\cup_{i=1}^{\chi(G)} V_i = V$ y $V_i \cap V_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Para implementar el Algoritmo Greedy podemos ordenar los vértices utilizando las clases de color. Primero consideramos todos los vértices de v_1, luego los del v_2 y asi sucesivamente.

Como el Algoritmo devuelve un coloreo del grafo, sabemos que va a utilizar al menos $\chi(G)$ colores.

Probar que con ese orden se alcanza la igualdad (no puede colorearse con más colores).

b) En el primer grafo podemos considerar el siguiente orden de vértices : $\{a, b.c.d.e.f.g.h\}$ (utilizando los conjuntos de la bipartición) para que el Algoritmo devuelva un coloreo óptimo. Probarlo.

12) Sea G un grafo simple con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Probar que

a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$

b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

c) $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

d) $\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$

Resolución:

a) Veamos por inducción sobre n que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$.

Consideremos el caso base $n = 1$:

si $n = 1$ entonces $G \equiv \overline{G} \equiv K_1$, por lo que $\chi(G) = \chi(\overline{G}) = 1$.

Por lo tanto, $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = 2 = n + 1$

Supongamos que vale para $n = k$ y veamos que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$ para $n = k + 1$.

Sea G un grafo con $|V(G)| = k + 1$ y consideremos el subgrafo $G' = G - v$ para algún $v \in V(G)$.

Por hipótesis inductiva, $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leqslant k + 1$. Luego, $\chi(G) \leqslant \chi(G') + 1$ ya que al $\chi(G')$-coloreo óptimo de G' podemos agregarle un color y definir un coloreo para G. Obtenemos el mismo resultado considerando $\overline{G}$ en vez de G. Es decir, $\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{G'}) + 1$

Consideremos los siguientes casos:

- si $\chi(G) \leqslant \chi(G')$ o $\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{G'})$ entonces

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 1 \leqslant k + 2$$

- si $\chi(G) = \chi(G') + 1$ y $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$ entonces v tiene al menos $\chi(G')$ vecinos en G y $\chi(\overline{G'})$ vecinos en $\overline{G}$ (pensar por qué). Por lo tanto,

$$\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leqslant d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = |V(G)| - 1 = k$$

Luego,

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) = \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 2 \leqslant k + 2$$

como queríamos probar.

b) Veamos que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Primero recordemos que para cualquier par de números positivos a y b vale $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(*)$.

En particular, para $a = \chi(G)$ y $b = \chi(\overline{G})$ tenemos que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{\chi(G)+\chi(\overline{G})}{2}\right)^2$. Luego, por el ítem a)

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{\chi(G)+\chi(\overline{G})}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

. como queríamos probar.

(∗) Sean a y b números positivos.

Sabemos que $0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$. Luego, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Por lo tanto,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

c) Veamos que $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Consideremos un coloreo óptimo f de G. Luego, quedan definidas las clases de color $V_i = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$.

Observemos que i y j son dos colores distintos, entonces existen $u_i \in V_i$ y $u_j \in V_j$ tales que $u_iu_j \in E$, ya que de lo contrario podría colorear todos los vértices de $V_i \cup V_j$ con el mismo color y eso no puede ocurrir (pues f es óptimo). Por lo tanto, por cada par de colores que consideremos hay al menos una arista, es decir, $\binom{\chi(G)}{2} \leqslant m$.

Luego, $m \geqslant \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)!}{2!(\chi(G)-2)!} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
m &\geqslant \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}\\
2m &\geqslant \chi(G)(\chi(G)-1)\\
2m + \frac{1}{4} &\geqslant \chi(G)(\chi(G)-1) + \frac{1}{4}\\
2m + \frac{1}{4} &\geqslant (\chi(G) - \frac{1}{2})^2\\
\sqrt{2m + \frac{1}{4}} &\geqslant \chi(G) - \frac{1}{2}\\
\sqrt{2m + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} &\geqslant \chi(G)
\end{aligned}$$

d) Veamos finalmente que $\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$.

Sea G' un subgrafo inducido de G. Si probamos que $\chi(G) \leqslant 1 + \delta(G')$ entonces $\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$.

Supongamos que $\chi(G) = k$ y G' es k-color crítico. Por el ejercicio 8 b) $d(v) \geqslant k - 1$ para todo $v \in V(G')$. Por lo tanto, $\delta(G') \geqslant k - 1 = \chi(G) - 1$. Entonces,

$$\chi(G) \leqslant 1 + \delta(G') \leqslant 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$$

como queríamos.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119