Complementos de Matemática I
Matemática Discreta

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

2024

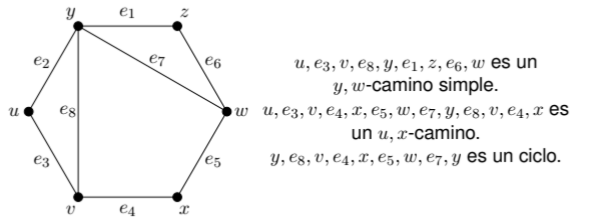
Caminos

P_n camino de n vértices.

- Un camino en un grafo G es una lista que alterna vértices y aristas (con extremos en esos vértices) de la forma $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ donde $e_i = v_{i-1}v_i$ para $i \in [k]$. La longitud del camino es la cantidad de aristas que posee.
- Un recorrido es un camino que no repite aristas.
- Un camino simple es un camino que no repite vértices (y por lo tanto un recorrido).
- Si queremos resaltar que los vértices u y v son los extremos del camino decimos que es un u, v-camino. Análogamente u, v-camino simple, u, v-recorrido.
- Un camino o recorrido es cerrado si sus extremos son iguales.
- Un circuito es un recorrido cerrado (camino que no repite aristas cuyos extremos son iguales).
- Un ciclo es un camino simple cerrado (sólo repite los extremos del camino).

Podemos simplificar la notación y listar sólo los vértices del camino: $v_0, v_1, \ldots, v_k$.

Ejemplo



Lema

Dado un gafo G, todo u, v-camino en G para $u \neq v$ posee (como subgrafo) un u, v-camino simple.

Proof.

Pizarra $\square$

Algunas propiedades más:

- Todo circuito contiene un ciclo. Más aún, si v es un vértice en un circuito, existe un ciclo en el circuito que contiene a v.
- Un grafo es conexo sii existe un u,v-camino en G para todo $u \neq v$ vértices de G.

DEFINICIÓN

Una componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo maximal. El número de componentes conexas de un grafo es $\kappa(G)$.

- G' se obtuvo agregando una arista a G entonces $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G') \leq \kappa(G)$. Análogamente, si $G' = G \setminus e$ entonces $\kappa(G') \leq \kappa(G) + 1$.
- Si $G' = G - v$ entonces $\kappa(G') \leq \kappa(G) + |V(G)| - 2$.

Definición

Dado un grafo G, una arista de corte e de G es una arista tal que $\kappa(G \setminus e) > \kappa(G)$. Un vértice de corte v de G es un vértice tal que $\kappa(G - v) > \kappa(G)$.

Lema

Dado un grafo G, e es una arista de corte si y sólo si e no pertenece a ningún ciclo en G.

Proof.

Pizarra $\square$

- Si uv es una arista de corte, v es vértice de corte?
- Si G es conexo, $\overline{G}$ es conexo?
- Si v es vértice de corte de G, $\overline{G} - v$ es conexo?
- Si G es *autocomplementario*, G tiene un vértice de corte si y sólo si G tiene un vértice de grado 1?
  Vértice colgante o pendiente = vértice de grado 1.

DEFINICIÓN

Un circuito euleriano en un grafo G es un circuito que contiene todas las aristas de G.

Idem recorrido euleriano.

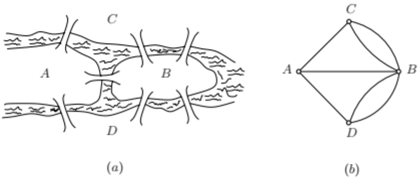


Fig. 3.4. The bridges of Königsberg and their graph

DEFINICIÓN

Un grafo euleriano en un grafo G que posee un circuito euleriano.

EJEMPLO

TEOREMA

Un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

PROOF.

Pizarra $\square$

Circuitos eulerianos

Dado un grafo conexo par, ¿cómo hallar un circuito euleriano?

Algoritmo de Fleury

1. Considerar cualquier vértice $u \in V(G)$.
   $W \leftarrow u$
   $x \leftarrow u$
   $F \leftarrow G$.
2. Mientras $gr_F(x) > 0$, seleccionar una arista $e = xv$ (incidente en x), donde e no es de corte de F, salvo que tal arista no exista.
   $W \leftarrow uev$
   $x \leftarrow v$
   $F \leftarrow F \setminus e$.
3. W es un circuito euleriano.

Teorema

Si G es conexo y par entonces el camino que devuelve el Alg. de Fleury es un circuito euleriano.

Teorema

Un grafo conexo G tiene un recorrido (no cerrado) euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Grafos dirigidos (digrafos)

Definición: El grafo subyacente de un digrafo D es el grafo G obtenido considerando los arcos como pares no ordenados.

Observación: Las definiciones sobre digrafos de subdigrafo, isomorfismo, etc. son análogas a las de grafos.

- Matriz de adyacencia $A(D) = \{a_{ij}\}$ donde a_{ij} es la cantidad de arcos $(v_i v_j) \in E(D)$.
- Matriz de incidencia $M(D) = \{m_{ve}\}$ donde

$$m_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{si } e = (v,u), \\ -1 & \text{si } e = (u,v), \\ 0 & \text{si } e = (u,w),\ u \neq v \neq w. \end{cases}$$

Grafos dirigidos (digrafos)

Definición: Sea D un digrafo y $v \in V(D)$. El grado de salida de v es la cantidad de aristas de la forma (v,u), i.e. que tienen a v como origen. Notación $\mathrm{d}_D^+(v)$.
El grado de entrada de v es la cantidad de aristas de la forma (u,v), i.e. que tienen a v como final. Notación $\mathrm{d}_D^-(v)$.

Ejercicio: Sea D un digrafo,

$$\sum_{v \in V(D)} \mathrm{d}^+(v) = \sum_{v \in V(D)} \mathrm{d}^-(v).$$

Observación: Se definen de manera análoga camino dirigido, recorrido dirigido, camino simple dirigido, etc., respetando el orden de los arcos y nodos en la lista.

Definición

Un circuito (recorrido) euleriano dirigido es un digrafo es un circuito (recorrido) dirigido que contiene todas las aristas.

Lema

Si D es un digrafo tal que $d^+(v) \geq 0$ para todo $v \in V(D)$ entonces D contiene un ciclo.

Teorema

Un digrafo D es euleriano si y sólo si $d^+(v) = d^-(v)$ para todo $v \in V(D)$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente conexa no trivial.

Ejercicio.