Capítulo 3

Funciones Recursivas

3.1. Funciones Recursivas Primitivas

3.1.1. Introducción

Intentaremos construir modelos que nos acerquen a comprender los fundamentos del cálculo y su posibilidad de modelizarlo.

No es fácil encontrar una definición del concepto "cálculo" que aparece en múltiples aspectos de nuestra vida.

Calcula quien efectua una multiplicación, pero también decimos que realiza un cálculo un jugador cuando patea una pelota.

Cada cálculo implica el realizar, operando sobre ciertos datos, una serie de pasos, para obtener como resultado una determinada información. Esto es, la aplicación de un **algorítmo.**

Trataremos de encontrar elementos básicos en los que se pueda "descomponer" cualquier cálculo.

Así como la química muestra que las múltiples sustancias que nos rodean son en su esencia combinación de un conjunto relativamente pequeño de átomos (y además la física nos dice que cada uno de esos átomos está formado por partículas elementales), se trata de ver si sucede algo parecido con respecto a lo que denominamos cálculo.

Estas ideas y los modos de desarrollarlas, elaboradas por lógicos y matemáticos, hasta mediados de los años cuarenta del siglo pasado, sólo interesaban a un limitado grupo de científicos que se dedicaban a esos temas.

Pero, con la creación de la computadora (que, justamente, es un instrumento que puede realizar millones de operaciones sencillas en segundos) han cobrado notable importancia.

Una buena aproximación es tratar de modelizar, con elementos básicos, el cálculo matemático.

En ese sentido, la teoría indica que basta encontrar un modelo que abarque el cálculo sobre los números naturales.

Lo que presentaremos a continuación es un modelo desarrollado principalmente a partir de trabajos de Dedekind, Skolem, Peano, Hilbert, Ackerman y Church denominado "Funciones Recursivas". (fue en 1931 cuando Gödel propone formalmente el concepto de recursividad para funciones).

3.1.2. Funciones Numéricas

Definición 3.1.1. *Llamaremos función numérica a toda función f cuyo dominio sea una potencia cartesiana de $\mathbb{N}_0$ y cuyo codominio sea $\mathbb{N}_0$,*

$$f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0 \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Consideramos el caso en que el valor de k sea cero, con la convención de identificar una función de cero variables con un número perteneciente a los $\mathbb{N}_0$.

Una k-upla de elementos que pertenecen a $\mathbb{N}_0$ la notaremos $(x_1, x_2, ..., x_k)$.
También presentaremos las k-uplas de $\mathbb{N}_0^k$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con letras mayúsculas como X, Y, Z. Cuando se quiera remarcar el hecho de que tienen k componentes, escribiremos X^k.
El valor que toma una función f en $(x_1, x_2, ..., x_k)$ se indicará $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ o directamente $f(X)$
Si el dominio de una función es $\mathbb{N}_0^m$ diremos que es de *orden* m .
Cuando queremos hacer explícita referencia al orden de una función agregaremos al notarla un superíndice , o sea $f^{(m)}$ indica que f es de orden m. .

3.1.3. Funciones base

Definición 3.1.2. *Llamaremos funciones ceros a las funciones*

$$c^{(k)} : \mathbb{N}_0^{(k)} \to \mathbb{N}_0$$

$$\forall\, X \in \mathbb{N}_0^{(k)} \quad \mapsto c^{(k)}(X) = 0$$

Son funciones muy simples, ya que sólo consisten en asociar a cualquier valor el número cero.

Definición 3.1.3. *Definiremos una familia de funciones.*
Dados $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ tales que $1 \le n$, y $1 \le k \le n$.
Llamamos función proyección de orden n, en la k-ésima componente y notaremos

$$p_k^{(n)} : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto p_k^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) \stackrel{def}{=} x_k$$

Se trata de una familia de funciones sencillas de calcular ya que seleccionan en una n-upla la k-ésima componente

Definición 3.1.4. *Llamamos función sucesor a la función*

$$s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

$$x \in \mathbb{N}_0 \mapsto s(x) \stackrel{def}{=} x + 1$$

Es decir, s produce el sucesor de su valor de entrada. También en este caso, se trata de una función elemental.

Definición 3.1.5. *Llamaremos **funciones base** a las funciones $c^{(k)}$ con $k \ge 0$, a las proyecciones $p_k^{(n)}$ con $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \le k \le n$ y a la función sucesor $s^{(1)}$.*

La idea es agregar herramientas de construcción que nos permitan combinando estas funciones bases, como ladrillos elementales, obtener funciones más complejas.

3.1.4. Operador Composición

El modo más inmediato de combinar funciones es "encadenándolas " de modo que los resultados de la aplicación de un grupo de ellas sean del dominio de otra.

Definición 3.1.6. *Dados $n \geq 1$, $k \geq 0$, una función numérica $f^{(n)}$ y una familia de n funciones numéricas de orden k , $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^n$, diremos que la función h tal que*

$$h : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$$

$$X \in \mathbb{N}_0^k \mapsto \quad h(X) \overset{def}{=} f(g_1(X), g_2(X), ..., g_n(X)) \in \mathbb{N}_0$$

es definida por la composición de las funciones $f^{(n)}$, $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^n$ y notaremos:

$$h = \Phi\left(f^{(n)}, g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, ..., g_n^{(k)}\right)$$

En algunos casos al operador se le agregan los índices $n + 1$ y k, Φ_k^{n+1}, para hacer referencia a las $n+1$ funciones sobre las que opera, y a las k-uplas de su dominio.

Φ_k^{n+1} no está definido para todas las $n + 1$-uplas de funciones, sino sólo para aquellas n+1-uplas en las cuales la primera sea una función de de n-variables y las n restantes sean de orden k.

Ejemplo 3.1.1. *Podemos construir una familia de funciones constantes $uno^{(k)}$ que asocia a toda k-upla el valor* 1

$$uno^{(k)} = \Phi(s, c^{(k)})$$

Así también podemos construir cualquier función constante:
Por ejemplo $tres^{(k)}$ que asocia a cada k-upla el numero tres

$$tres^{(k)} = \Phi\left(s, \Phi\left(s, \Phi\left(s, c^{(k)}\right)\right)\right)$$

Ejercicio para pacientes: construir la constante $cuarentidos^{(k)}$ ....

Ejemplo 3.1.2. *Componiendo la función sucesor, podemos contruir funciones sobre $\mathbb{N}_0$ que devuelvan un número sumado a cualquier valor.*
Así por ejemplo la función $Mas5^{(1)}$

$$Mas5^{(1)} = \Phi(s, (\Phi(s, \Phi(s, (\Phi(s, s))))))$$

Ejercicio para muy pacientes: construir la función $Mas258$ ....

Sin embargo utilizando como elementos de construcción sólo las funciones base y el operador Φ no podemos conseguir funciones de una cierta complejidad.

Se puede ver, por ejemplo que no es posible, usando unicamente estos recursos construir una función sobre $\mathbb{N}_0$ llamada $doble$ tal que duplica un valor.

$$doble(x) = x + x. \text{ (Se recomiendo intentarlo)}$$

Se hace necesario introducir nuevas herramientas de construcción.

3.1.5. Operador Recursión

Definición 3.1.7. *Definiremos un nuevo operador R que llamaremos* recursión *que, a partir de dos funciones: $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$, construye una nueva función $f^{(k+1)}$*

$$f^{(k+1)} = R(g^{(k)}, h^{(k+2)})$$

definida para cada k+1-upla, del siguiente modo:
Si el primer elemento de la $k + 1$upla es igual a cero:

$$f(0, X^k) \overset{def}{=} g(X^k)$$

Si el primer elemento es distinto de cero (lo presentamos como $y + 1$) el valor de la función se calcula recursivamente del modo siguiente:

$$f(y + 1, X^k) \overset{def}{=} h(y, X^k, f(y, X^k))$$

Estamos ahora en condiciones de definir al conjunto de funciones recursivas primitivas en forma inductiva :

Definición 3.1.8. *Definiremos el conjunto de Funciones Recursivas Primitivas de la siguiente manera:*

a) Las funciones base definidas en 3.1.5 son Funciones Recursivas Primitivas.

b) Las funciones obtenidas a partir de Funciones Recursivas Primitivas aplicándo un número finito de operaciones de composición y recursón(Φ y R) son Funciones Recursivas Primitivas.

Notaremos a este conjunto : ***FRP****.*

Ejemplo 3.1.3. *Son* ***FRP*** *las funciones $\Sigma^{(2)}$, $\Pi^{(2)}$, $Fac^{(1)}$, $Exp^{(2)}$, $Pd^{(1)}$ definidas del siguiente modo:*

I) $\Sigma(y, x) \overset{def}{=} y + x \quad (Suma)$

II) $\Pi(y, x) \overset{def}{=} y.x \quad (Producto)$

III) $Fac(x) \overset{def}{=} x! \quad (Factorial)$

IV) $Exp(y, x) \overset{def}{=} x^y$ *(Exponencial) con la convención de que $0^0 = 1$*

V)

$$Pd(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si x} > 0 \end{cases} \quad (Predecesor)$$

Veamos cómo se muestra i), que $\Sigma(x, y) \in$ ***FRP***
En el caso de que la primer componente sea 0 es:

$$\Sigma(0, x) = 0 + x = x = p_1^{(1)}(x) \quad luego \quad la \;\; g^{(1)} = p_1^{(1)}$$

Si la primer componente es mayor que cero:

$$\Sigma(y+1,x) = (y+1)+x = (y+x)+1 = s(\Sigma(y,x)) = s(p_3^{(3)}(y,x,\Sigma(y,x)))$$

$$entonces \quad h^{(3)} = \Phi(s,p_3^{(3)})$$

De esto deducimos que se puede construir Σ por recursión a partir de $p_1^{(1)}$ y $\Phi(s,p_3^{(3)})$; en efecto, tenemos que

$$\Sigma = R(p_1^{(1)},\Phi(s,p_3^{(3)}))$$

Veamos la función definida en v), Pd (Predecesor)

$$Pd(0) = 0 = c^{(0)}$$

y además

$$Pd(y+1) = y = p_1^{(2)}(y,f(y))$$

De esto deducimos que se puede construir Pd por recursión a partir de $c^{(0)}$ y $p_1^{((2)}$

$$Pd = R(c^{(0)},p_1^{(2)})$$

Se dejan las demostraciones para las funciones ii), iii), iv) como ejercicio.

Observación importante: En esta parte del libro, aplicamos el criterio extensional considerando que dos funciones, f, g son iguales si tienen el mismo dominio y para todo elemento X que pertenezca a dicho dominio, $f(X) = g(X)$, aunque utilicemos distintos procedimientos para calcularlas. No nos preocupa la eficiencia del cálculo. Si una función pertenece a **FRP** todas las combinaciones de funciones base que la construyan son equivalentes.

Mostraremos a continuación una serie de propiedades que seran útiles para encontrar nuevos miembros de la familia **FRP**.

Comencemos con la llamada potencia n de una función f de orden 1, que es la función que obtenemos aplicando n veces la función f, con la convención que aplicada 0 veces es la identidad.

Esto nos permite pensar la potencia de una función como una función de dos variables.

Definición 3.1.9. *Dada una función $f^{(1)}$ definimos una nueva función $F^{(2)}$, llamada **potencia** de f, del siguiente modo:*

$$F(0,x) = x \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

$$F(y+1,x) = f(F(y,x)) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

Notaremos $F(y,x)$ como $f^y(x)$

Proposición 3.1.1. *Dada $f^{(1)}$, sea $F(y,x) = f^{y}(x)$ (potencia de f) , entonces si*

$$f \in \boldsymbol{FRP} \Longrightarrow F \in \boldsymbol{FRP}$$

Demostración.

$$F(0,x) = f^{0}(x) = x = p_1^{(1)}(x)$$

$$F(y+1,x) = f(f^{y}(x)) = f(p_1^{(3)}((y,x,F(y,x)))$$

entonces

$$F = R\left[p_1^{(1)}, \Phi(f, p_3^{(3)})\right]$$

□

Ejemplo 3.1.4. *Definiremos una función $\hat{d}^{(2)}$ del siguiente modo:*

$$\hat{d}^{(2)}(y,x) \overset{def}{=} \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si x < y} \end{cases}$$

Se trata de una resta, que se realiza cuando es posible. En algunos casos notaremos a $\hat{d}^{(2)}(y,x)$ como $x \dot{-} y$

*Se ve que la función $\hat{d}^{(2)}$ pertenece a las **FRP** ya que se puede presentar como la potencia de la función Pd*

$$\hat{d}(y,x) = Pd^{y}(x)$$

y aplicamos la proposición 3.1.1.

*La misma proposición se puede utilizar para mostrar que $\Sigma^{(2)}$ pertenece a las **FRP** ya que se puede ver que es la potencia del sucesor:*

$$\Sigma(y,x) = s^{y}(x)$$

Ejemplo 3.1.5. *Definiremos una función $D_{\boldsymbol{0}}^{(1)}$ del siguiemte modo:*

$$D_{\boldsymbol{0}}^{(1)}(y) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si y > 0} \end{cases}$$

Se trata de una función que distingue al cero de los demás números.

*Se puede ver que $D_{\boldsymbol{0}}^{(1)} \in$ **FRP** ya que:*

$$D_{\boldsymbol{0}}^{(1)} = R[\Phi(s, c^{(0)}), c^{(2)}]$$

Teorema 3.1.1. *Sea $f^{(2)}$ Sean*

a) $F(y,x) = \sum_{z=0}^{y} f(z,x)$

b) $G(y,x) = \prod_{z=0}^{y} f(z,x)$

*Entonces si $f \in$ **FRP** $\Longrightarrow F, G \in$ **FRP***

Demostración de a).

$$F(0,x) = f(0,x) = f(c^{1}(x), x)$$

$$F(y+1,x) = \Sigma(F(y,z), F(y+1,x)) =$$

$$\Sigma(p_1^{(3)}(F(y,x),y,x), f(s(p_2^{(3)}(F(y,x),y,x), p_3^{(3)}(F(y,x),y,x)))$$

Por lo tanto:

$$F^{(2)} = R\left[\phi[f^{(2)}, c^{(1)}, p_1^{(1)}], \phi[\Sigma, p_1^{(3)}, \phi[f^{(2)}, \phi[s^{(1)}, p_2^{(3)}], p_3^{(3)}]]\right]$$

*O sea F se construye aplicando los operadores ϕ y R a las funciones: f (por hipótesis $\in$ **FRP**), $\Sigma \in$ **FRP** segun 3.1.3 y funciones base (que son **FRP** por definición) , luego $F \in$ **FRP***

Se trata de una especie de integral discreta.

Para la parte b) se puede proceder analogamente sustituyendo Σ por Π

$$G^{(2)} = R\left[\phi[f^{(2)}, c^{(1)}, p_1^{(1)}], \phi[\Pi, p_1^{(3)}, \phi[f^{(2)}, \phi[s^{(1)}, p_2^{(3)}], p_3^{(3)}]]\right]$$

*En forma similar se puede mostrar que dada una $f^{(n+1)} \in$ **FRP** las funciones $F^{(n+2)}$ y $G^{(n+2)}$ definidas como:*

$$F(y,X) = \sum_{(z=0)}^{y} f(z,X)$$

$$G(y,X) = \prod_{(z=0)}^{y} f(z,X)$$

*tambien son **FRP***

3.1.6. Conjuntos recursivos primitivos (CRP)

Definición 3.1.10. *Dado un conjunto X, para cada subconjunto $A \subseteq X$ definimos su función característica*

$\chi_A : X \to \{0,1\}$ del siguiente modo:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La función característica de un conjunto lo determina totalmente. Recíprocamente, dada una función $\chi : X \to \{0,1\}$, existe un único subconjunto A de X tal que $\chi_A = \chi$.

Esto nos permite establecer una clasificación en los subconjuntos de $\mathbb{N}_0^k$

Definición 3.1.11. *Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{N}_0^k$ es un* conjunto recursivo primitivo*, notaremos **CRP** si su función característica $\chi_A : \mathbb{N}_0^k \to \{0,1\}$ es recursiva primitiva.*

Proposición 3.1.2. *Sea $k \in \mathbb{N}$, y sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{N}_0^k$. Si A , B son **CRP** , el complemento $\neg A$, la intersección ($A \cap B$) y la unión ($A \cup B$) son **CRP** .*

Demostración. Como A, B son **CRP** se tiene que sus funciones características χ_A , $\chi_B \in$ **FRP**

(a) $\chi_{\neg A} = \Phi(D^0, \chi_A)$

(b) $\chi_{A \cap B} = \chi_A . \chi_B \quad = \quad \Phi(\Pi, \chi_A, \chi_B)$

En a) y b) las funciones características se construyen a partir de **FRP**, por lo tanto sus conjuntos asociados son **CRP**.

(c) $\chi_{A \cup B}$

Recordemos que $A \cup B = \neg[(\neg A) \cap (\neg B)]$ (De Morgan)

Aplicamos, entonces, lo visto en a) y b).

□

3.1.7. Relaciones recursivas primitivas (RRP)

En el discurso matemático las funciones constituyen un caso particular de las llamadas relaciones entre conjuntos.

Ante una expresión como "$a + b \leq c$" se puede, para cada terna $(x_1, x_2.x_3)$ de $\mathbb{N}_0^3$ verificar si sus elementos cumplen o no con la expresón.

Se trata en este caso de una relación sobre $\mathbb{N}_0^3$.

En el mismo sentido una afirmación como "x es primo " es una relación definida sobre $\mathbb{N}_0^1$

Cada relación sobre $\mathbb{N}_0^k$ queda completamente determinada por el conjunto de las k-uplas que verifican la relación. (decimos que la relación es **verdadera** en esas k-uplas)

Es entonces que dada una relación α definida sobre $\mathbb{N}_0^k$ podemos asociar a la misma el subconjunto de $\mathbb{N}_0^k$, de los valores en que la relación es verdadera. Notaremos $D_\alpha \subset \mathbb{N}_0^k$ a dicho conjunto.

Así por ejemplo dada la relación $x = y$ el subconjunto asociado $D_=$ es la diagonal de $\mathbb{N}_0^2$

A partir de la asociación de una *relación* con el *conjunto de los valores donde es verdadera* definimos:

Definición 3.1.12. *Dada una relación α definida en $\mathbb{N}_0^k$ diremos que es Relación Recursiva Primitiva (notaremos **RRP**) si su conjunto asociado D_α es **CRP***

Ejemplo 3.1.6.

Mostraremos que la relación '$=$' es recursiva primitiva.

Llamaremos $D_=$ al conjunto asociado a esta relación.

$$D_= = \{(x, x) \;\; x \in \mathbb{N}_0\}$$

.

Observemos que la función $E(x, y) = D_{\mathbf{0}}^{(1)}(x \dot{-} y + y \dot{-} x)$ es tal que sólo vale 1 si $x = y$ y vale 0 para cualquier otro caso.

Esta es la función característica del conjunto $D_=$.

*Es inmediato que esta función es **FRP**, por lo que el conjunto $D_=$ es **CRP** y resulta la relación '$=$' es **RRP**.*

Definición 3.1.13. *Sean α, β relaciones definidas sobre $\mathbb{N}_0^k$*

Definimos :

I) *$\neg\alpha(X)$ la relación que es verdadera $\Leftrightarrow$ $\alpha(X)$ es falsa*

II) *$(\alpha \wedge \beta)(X)$ la relación que es verdadera $\Leftrightarrow$ $\alpha(X)$ y $\beta(X)$ son ambas verdaderas*

III) *$(\alpha \vee \beta)(X)$ la relación que es verdadera $\Leftrightarrow$ $\alpha(X)$ o $\beta(X)$ son verdaderas*

Proposición 3.1.3.
*Si α, β son **RRP**, $\Longrightarrow$ $\neg\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta\ \in$ **RRP***
La demostración es inmediata a partir de la proposición 3.1.2 .

Definición 3.1.14. *Dada una relación α definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$*

I) *Llamaremos cuantificador universal y lo notaremos $\bigwedge_y \alpha(y, X)$ a la relación que depende sólo de X que es verdadera si es verdadera la relación $\alpha(y, X)$ para todo y.*

II) *Llamaremos cuantificador universal limitado y lo notaremos:*
$\bigwedge_{y=0}^{z} \alpha(y, X)$ a la relación, que depende de X y de z, que es verdadera si es verdadera la relación $\alpha(y, X)$ para todos los valores de y no superiores a z.

III) *Llamaremos cuantificador existencial, y lo notaremos $\bigvee_y \alpha(y, X)$ a la relación que depende sólo de X que es verdadera si es verdadera la relación $\alpha(y, X)$ para al menos un valor de y.*

IV) *Llamaremos cuantificador existencial limitado y lo notaremos:*
$\bigvee_{y=0}^{z} \alpha(y, X)$ a la relación, que depende de X y de z, que es verdadera si es verdadera la relación $\alpha(y, X)$ para al menos un valor y no superior a z.

Proposición 3.1.4. *Sea la relación α definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$*

*Si α es **RRP** $\Longrightarrow$ $\gamma(z, X) = \bigwedge_{y=0}^{z} \alpha(y, X)$, $\delta(z, X) = \bigvee_{y=0}^{z} \alpha(y, X)$ son **RRP**.*

Demostración:

Sea f_{D_α} la función característica asociada a la realación α
Entonces la función asociada a γ llamada f_{D_γ} será :

$$f_{D_\gamma(z,X)} = \prod_{z=0}^{y} f_{D_\alpha(z,X)}$$

*Por la parte b) del teorema 3.1.1 vimos que esta función es **FRP** dado que f_{D_α} es **FRP**.*
Para la demostración de la parte ii) debemos, nuevamente, apelar a De Morgan .
Observemos que

$$D_\delta(z, X) \equiv \neg \bigcup_{y=0}^{z} \neg\ D_\alpha(y, X)$$

y la demostración sale inmediatamente aplicando los resultados anteriores.

Atención: Estos resultados no se pueden extender, en general, para el caso de los cuantificadores no limitados.

Veamos algunos ejemplos de **RRP**.

Ejemplo 3.1.7.
$x \neq y \in$ ***RRP***
inmediato pues $(x \neq y) \equiv \neg(x = y)$

Ejemplo 3.1.8.
$x \geq y \in$ ***RRP*** *en efecto:*

$$x \geq y \equiv \bigcup_{z=0}^{x} (y = z)$$

Ejemplo 3.1.9.
$x > y \in$ ***RRP*** *pues*

$$x > y \equiv (x \geq y) \wedge \sim (x = y)$$

Ejemplo 3.1.10.
La relación $Mult(x, y)$ *(x es múltiplo de y) es* ***RRP***
(la relacion es verdadera si $\exists k \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $x = k.y$ *)*
En efecto:

$$Mult(x, y) \equiv \bigcup_{z=0}^{x} (x = z.y)$$

Ejemplo 3.1.11.
Sea relación "x es un número primo" .(Notaremos $Prim(x)$*)*
Entonces $Prim(x) \quad \in$ ***RRP***
Sabemos que un valor x *es primo si es* $x > 1$ *y no es múltiplo de ningún nḿero* z *tal que* $1 < z < x$ *.*

$$Prim(x) \equiv (x > 1) \wedge \bigcap_{z=2}^{x-1} (\neg Mult(x, z)))$$

Enunciaremos ahora una proposición, que será de aplicación para las funciones definidas por casos en una partición.

Proposición 3.1.5.
Sean los conjuntos recursivos primitivos $A_1, A_2, ...A_p \subset \mathbb{N}_0^m$ *una partición de* $\mathbb{N}_0^m$

$$\bigcup_{i=1}^{i=p} A_i = \mathbb{N}_0^m \quad y \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

Entonces si $g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, ...g_p^{(m)}$ *son funciones recursivas primitivas, la función* $h^{(m)}$ *definida por*

$$h(X) \stackrel{def}{=} \begin{cases} g_1(X) & \text{si } X \in A_1 \\ g_2(X) & \text{si } X \in A_2 \\ & ..... \\ g_p(X) & \text{si } X \in A_p \end{cases}$$

es recursiva primitiva.

*Para demostrarlo basta observar que como los conjuntos A_i son **CRP** implica que sus funciones características χ_{A_i} son **FRP**.*

De acuerdo a la definición f se puede escribir como:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} g_i(X).\chi_{A_i} \quad \Rightarrow f \in \textbf{\textit{FRP}}$$

Definición 3.1.15. *Sea una relación α definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$*

Usaremos la notación $\mu(\alpha(y, X^k))$ para indicar el mínimo valor de y para el que es verdadera la relación $\alpha(y, X^k)$

Tal símbolo sólo tiene sentido si la relación se verifica para algún valor de y. Decimos que se cumple la condición de regularidad cuando eso sucede.

Teorema 3.1.2. *Sea una relación α definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$ tal que se cumple la condición de regularidad para todo elemento de $\mathbb{N}_0^{k+1}$*

O sea que para cada X^k existe un valor de y tal que $\alpha(y, X^k)$ es verdadera

Podemos definir

$$f(X) = \mu(\alpha(y, X^k))$$

Definimos la relación β sobre $\mathbb{N}_0^{k+1}$ del siguiente modo:

$$\beta(y, X) \equiv (y = f(X))$$

*Entonces si $\alpha \in$ **RRP** $\Longrightarrow \beta \in$ **RRP***

En efecto se tiene:

$$\beta(y, X) \equiv \bigcap_{z=0}^{y} (z < y \wedge (\neg(\alpha(z, X))) \vee (z = y) \wedge (\alpha(z, X))$$

Teorema 3.1.3.

*Si además de verificarse las condiciones del teorema anterior existe una $g^{(k)} \in$ **FRP** tal que para cada X, $\;f(X) \leq g(X)$*

*Entonces podemos afirmar que la $f \in$ **FRP***

En efecto, podemos escribir:

$$f(X) = \sum_{y=0}^{g(X)} y.D_\alpha(y, X)$$

Ejemplo 3.1.12.

Sea $Q(x, y) = [x/y]$, parte entera de la división.

(Con la convención $Q(x, 0) = 0$.)

*Entonces $Q \in$ **FRP***

En efecto :

$$Q(x, y) = \mu z((y = 0) \vee ((z + 1).y > x))$$

Ejemplo 3.1.13.
Sea $Mod(x, y)$ el resto de la división de x por y.
(Con la convención $Mod(x, 0) = 0$)
*Entonces $Mod(x, y)$ es **FRP***
En efecto

$$Mod(x, y) = (x \dot{-} (y.Q(x, y))$$

Ejemplo 3.1.14. *Sea la función $N^{(1)}$ que a cada valor x le asocia el x-ésimo número primo.*
Así $N(0) = 2,\ N(1) = 3,\ N(2) = 5.$
*Mostraremos que esta singular función es **FRP**.*
Utilizaremos la función $Prim$ definida en 3.1.11
Definimos la función h que dado un valor x devuelve el mínimo número primo mayor que x

$$h(x) = \mu\ y[Prim(y) \wedge (y > x)]$$

Por ejemplo h(8)=11.

*h está acotada por $Fac(x) + 1$ que es **FRP**, puesto que se puede mostrar que siempre existe un número primo p tal que $x < p < x! + 1$*
*Entonces como está acotada por una **FRP** aplicando el teorema 3.1.3, h es **FRP**.*
Entonces definimos $N(x)$ como la potencia x de h aplicada a 2.

$$N(x) = h^x(2)$$

*N es **FRP***

3.1.8. Función Dupla

Definición 3.1.16. *Llamaremos **Función Dupla**, una función, $W^{(2)}$, que tenga las siguientes propiedades:*

I) $W(x, y) = W(m, n) \implies x = m\ ,\ y = n$ *(unicidad)*

II) $x > m \Longrightarrow W(x, y) > W(m, y)$ *(creciente respecto a la primera componente)*

III) $y > n \Longrightarrow W(x, y) > W(x, n)$ *(creciente respecto a la segunda componente)*

A partir de estas propiedades se puede observar que si W es función dupla entonces

$$W(x, y) \geq x \quad W(x, y) \geq y$$

Por la propiedad i) vemos que podemos definir las inversas $U^{(1)}$ y $V^{(1)}$ tales que:

$$z = W(x, y) \Longrightarrow U(z) = x \quad V(z) = y$$

y se cumple

1. $$W(U(z), V(z)) = z$$

2. $$U(W(x, y)) = x$$

3.
$$V(W(x,y)) = y$$

Observemos que por satisfacer las condiciones ii) e iii) de la definición 3.1.16 las funciones U y V pueden definirse:

$$U(z) = \mu x(\bigcup_{y=0}^{z} z = W(x,y)) \quad , U(z) \leq z$$

$$V(z) = \mu y(\bigcup_{x=0}^{z} z = W(x,y)) \quad , V(z) \leq z$$

y por lo tanto aplicando 3.1.3

$$\text{Si } W \in \textbf{FRP} \Longrightarrow \quad U,\ V \in \textbf{FRP}$$

Ejemplo 3.1.15. *Se puede verificar que son funciones **dupla** las siguientes:*

a)
$$W(x,y) = 2^x.(2y+1)\dot{-}1$$

b)
$$W(x,y) = \left[\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right] + x$$

*Es inmediato que ambas son **FRP***

Veamos una aplicacion de estas funciones:

Teorema 3.1.4. *Sean* $g_1^{(n)}$, $g_2^{(n)}$, $h_1^{(n+3)}$, $h_2^{(n+3)}$

Decimos que $f_1^{(n+1)}$ *y* $f_2^{(n+1)}$ *se construyen por **Recursión entrelazada** si son definidas del siguiente modo:*

$$\begin{aligned} f_1(0,X) &= g_1(X) \\ f_1(y+1,X) &= h_1(f_1(y,X), f_2(y,X), y, X) \\ f_2(0,X) &= g_2(X) \\ f_2(y+1,X) &= h_2(f_2(y,X), f_1(y,X), y, X) \end{aligned}$$

Entonces si $g_1^{(n)}$, $g_2^{(n)}$, $h_1^{(n+3)}$, $h_2^{(n+3)}$ $\in$ ***FRP*** $\Longrightarrow$ $f_1^{(n+1)}$ *y* $f_2^{(n+1)}$ $\in$ ***FRP***

Demostración. Sea W, una función **dupla** y **FRP** (como las del ejemplo 3.1.15)

Sea $F(y,X) = W(f_1(y,X), f_2(y,X))$

Mostraremos que $F \in$ **FRP**

$$F(0,X) = W(g_1(X), g_2(X)) \qquad g = \Phi(W, g_1, g_2)$$

$$F(y+1,X) = W(h_1(f_1(y,X), f_2(y,X), y, X), h_2(f_2(y,X), f_1(y,X), y, X)) =$$

$$F(y{+}1,X) = W(h_1(U(F(y,X)), V(F(y,X)), y, X), h_2(V(F(y,X)), U(F(y,X)), y, X)$$

Como F se puede definir por recursión de funciones **FRP** $\Longrightarrow F \in$ **FRP**

Pero por construcción:

$$f_1(y,X) = U(F(y,X)) \quad f_2(y,X) = V(F(y,X)$$

Luego f_1 y f_2 son **FRP**

$\square$

3.2. Las FRP no alcanzan...

3.2.1. Introducción

En la sección anterior hemos presentado una gran cantidad de ejemplos de cálculos que se pueden representar con las **FRP**.

Sin embargo mostraremos que existen funciones que podemos calcular (esto es existe un procedimiento que nos permite encontrar la imagen de la función para determinados valores), que no pueden ser **FRP**.

Observemos, para empezar, que podemos definir funciones sobre los naturales que no son totales.

Así por ejemplo, la función natural "raíz cuadrada " sólo esta definida para algunos elementos de $\mathbb{N}_0$

Un camino que que podemos utilizar para calcularla. es por ejemplo:

$$\begin{array}{l} Leer \quad (n) \\ R \leftarrow 0 \\ Mientras \quad (R * R) \neq n \quad hacer \quad R \leftarrow R + 1 \\ Mostrar \quad (R) \end{array}$$

Este procedimiento "funciona " sólo para algunos valores de n. Si la entrada es un número que no es un cuadrado perfecto, el procedimiento no termina. (se trata de un semialgoritmo).

Le podemos, entonces, asociar una función definida para una parte de los naturales (se trata de una función parcial).

Pero este cálculo no podrá ser representado por una **FRP** ya que, estas son siempre totales como mostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Si f es **FRP** entonces f es total.*

Demostración. En esta demostración aprovecharemos la forma de construcción inductiva de las **FRP**

Se muestra que la propiedad se cumple para las funciones base (a) y luego se muestra que la propiedad se "hereda" al realizar una composición (b) o una recursión (c).

(a) Trivial . Las funciones base son totales por definición.

(b) Veamos la prueba para la composición.

Sea $f^{(n)}, g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}$ funciones totales, queremos probar que

$$h^{(m)} = \Phi[f^{(n)}, g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}]$$

es total.

Sea $X \in \mathbb{N}_0$.

Podemos calcular $x_i = g_i(X),\ i = 1 \ldots n$ pues cada g_i es total.

Entonces

$$\exists y \ \ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pues f es total.

$$\therefore \exists y \in \mathbb{N}_0 \quad y = h(X).$$

(c) el caso de la recursión queda como ejercicio.

Esto nos permite afirmar que toda FRP es total. □

No poder representar procesos de cálculo que estan definidos parcialmente sobre los naturales es una importante limitación de las **FRP**.

Pero, como mostraremos a continuacion, existen funciones calculables totales que no son **FRP**. Para mostrar un ejemplo de una función con tal característica debemos realizar una serie de pasos previos.

La idea es buscar una propiedad que cumplan todas las **FRP** y luego encontrar una función total y calculable que no la cumpla.

Comenzaremos presentando una serie de funciones.

3.2.2. La serie de Ackermann

Sea la siguiente sucesión de funciones que llamaremos serie de **Ackermann**

$$\begin{array}{lcl} f_0(x) & = & s(x) \\ f_1(x) & = & f_0^{(x+2)}(x) = s^{(x+2)}(x) = 2x + 2 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ f_{k+1}(x) & = & f_k^{(x+2)}(x) \\ & . & \\ & . & \\ & . & \end{array}$$

Veamos algunas propiedades de las funciones de esta serie.

Proposición 3.2.1.

I) $\forall k : f_k \in$ ***FRP***

II) $x > x' \Rightarrow f_k(x) > f_k(x')$

III) $\forall x, k \Rightarrow f_k(x) > x$

IV) $\forall x, k \Rightarrow f_{k+1}(x) > f_k(x)$

Demostración.
Se demuestra por inducción sobre k utilizando la proposición 3.1.1, partiendo como caso base $k = 0$.

$$f_0(x) = s(x) \text{ que es } \textbf{FRP} \text{ por ser base}$$

II) Ejercicio. (**Sugerencia:** hacer inducción sobre k)

III) Haremos inducción sobre k

Caso base $k = 0$

$$f_o(x) = s(x) > x$$

Paso inductivo

Suponemos que vale para $k = n$, o sea, tomamos como hipótesis $f_n(x) > x$ (**HI**), y probamos que es cierta que $f_{n+1}(x) > x$.

$$f_{n+1}(x) = f_n^{(x+2)}(x) = f_n(f_n^{(x+1)}(x) > f_n^{(x+1)}(x) = f_n(f_n^{(x)}(x)) > f_n^{(x)}(x) =$$

$$\vdots$$

$$= f_n(f_n^{(2)}(x)) \overset{\text{(HI)}}{>} f_n^{(2)}(x) = f_n(f_n(x)) \overset{\text{(HI)}}{>} f_n(x) \overset{\text{(HI)}}{>} x$$

IV)

$$f_{k+1}(x) \overset{(1)}{=} f_k^{(x+2)} \overset{(2)}{=} f_k^{(x+1)}(f_k(x)) \overset{\text{ii) y iii)}}{>} f_k^{(x+1)}(x) > \ldots > f_k(x)$$

(1) por definición de la $k+1$ función de la serie.

(2) por definición de potencia.

□

Definición 3.2.1. *Decimos que una función $f^{(1)}$ **mayora** a una $g^{(n)}$ si se verifica que*

$$f(max(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Notaremos : $f^{(1)} \uparrow g^{(n)}$ *para indicar que* $f^{(1)}$ *mayora* $g^{(n)}$

Teorema 3.2.2. *Sea $g^{(n)} \in$ **FRP**, entonces existe f_k de la sucesión de Ackerman tal que:*

$$f_k \uparrow g$$

Demostración. Tal como hicimos para mostrar que todas las **FRP** son totales, haremos esta demostración en forma inductiva:

(a) Trivial. Las funciones base son mayoradas por f_0.

(b) Composición :

Sean las funciones:

$$I^{(m)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \ldots, h_m^{(n)}$$

tales que

$$f_k \uparrow I^{(m)} \quad \wedge f_k \uparrow h_i^{(n)} \qquad i = 1, \ldots, m$$

.

$$\texttt{Sea} \quad g^{(n)} = \Phi[I^{(m)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \ldots, h_m^{(n)}] \implies f_{k+1} \uparrow g^{(n)}$$

Por ser mayoradas por f_k se cumple que:

$$h_1^{(n)}(X) \leq f_k(max(X)),\ \ldots\ , h_m^{(n)}(X) \leq f_k(max(X))$$

Entonces

$$max\{h_1^{(n)}(X), h_2^{(n)}(X),\ \ldots\ , h_m^{(n)}(X)\} \leq f_k(max(X)) \quad (*)$$

Además como $f_k \uparrow I^{(m)}$

$$g(X) \stackrel{\text{def}}{=} I(h_1(X), h_2(X),\ \ldots\ , h_n(X)) \leq f_k(max(h_1(X), h_2(X),\ \ldots\ , h_n(X))) \leq$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} f_k(f_k(max(X))) \stackrel{(2)}{\leq} f_k^{max(X)+2}(max(X)) \stackrel{\text{def}}{=} f_{k+1}(max(X))$$

$$\therefore f_{k+1} \uparrow g^{(n)}$$

(1) por $(*)$ y propiedad $ii)$.

(2) usando propiedades $ii)$ y $iii)$ de la proposición 3.2.1 aplicadas varias veces.

(c) Recursión

Sea $g^{(n+1)} = R[I^{(n)}, h^{(n+2)}]$, entonces

$$f_k \uparrow I \wedge f_k \uparrow h \implies \quad f_{k+1} \uparrow g^{(n)}$$

Para empezar, sabemos por definición de R que

$$g(0, X) = I(X)$$

$$g(y+1, X) = h(y, X, g(y, X))$$

pero $g(0, X) = I(X) \leq f_k(max(X))$ por hipótesis. $\quad (**)$

Además,

$$g(1, X) = h(0, X, g(0, X)) \stackrel{\text{hip}}{\leq} f_k(max(0, X, g(0, X)) \leq$$

$$\overset{(1)}{\leq} f_k(max(0, X, f_k(max(X)) \overset{(2)}{\leq} f_k(f_k(max(X)))$$

Puede demostrarse por inducción que

$$\forall y, \;\; g(X, y) \leq f_k^{(y+1)}(max(X))$$

pero

$$f_k^{y+1}(max(X)) \overset{(3)}{\leq} f_k^{y+1}(max(y, X)) \overset{(4)}{\leq} f_k^{max(y,X)+1}(max(y, X)) \leq$$

$$\leq f_k^{max(y,X)+2}(max(y, X)) = f_{k+1}(max(y, X))$$

$$\therefore g(X, y) \leq f_{k+1}(max(y, X))$$

(1) por $ii)$ y $(**)$.

(2) $f_k(max(X)) > max(X, 0) \quad \forall k$.

(3) agrego y al conjunto.

(4) por $ii)$.

□

A partir de (a), (b) y (c) podemos demostrar el teorema, ya que toda $f \in$ **FRP** se obtiene aplicando un número finito de veces los operadores Φ y R a las funciones base.

Teorema 3.2.3.
Definimos ahora una función que llamaremos ACK de la siguiente manera:

$$ACK(x) = f_x(x)$$

O sea para encontrar su valor imagen para un determinado x, tomamos la x-ésima función de Ackerman y la calculamos en dicho x.(existe un modo de calcularla para cualquier valor, aunque el esfuerzo de cálculo sea enorme)

*Mostraremos que esta función no pertenece al conjunto de las **FRP**.*

Demostración. Suponemos que $ACK \in$ **FRP**.
Luego, $ACK(x) + 1$ debe pertenecer al conjunto de las **FRP**.

Si esta función fuese **FRP** debe existir, por lo visto en el teorema anterior, una función de la serie de Ackerman que la mayore.

Sea M tal que la M-ésima función de la serie, (f_M) mayora a $Ack(x) + 1$ para todo valor de x

$$\forall x \quad ACK(x) + 1 \leq f_M(x)$$

Tomemos entonces el caso en que $x = M$.

$$ACK(k) + 1 \quad \leq f_M(M) \quad \text{pero como } f_M(M) = ACK(M)$$

$$ACK(k)+1 \quad \leq ACK(M)$$

Absurdo que proviene de suponer que ACK es **FRP**.

$$\therefore ACK \notin \textbf{FRP}.$$

□

Hemos encontrado una función que podemos calcular para todo número natural. O sea que es total y calculable, pero no pertenece a las **FRP**.

3.3. Funciones Recursivas (FR)

Con la intención de completar nuestro modelo en esta sección agregaremos un nuevo operador:

3.3.1. Minimizador

Definición 3.3.1. *Dada $f^{(n+1)}$, decimos que $g^{(n)}$ se construye por minimización de f y lo notamos $M[f]$, cuando g es definida del modo siguiente:*

$$g^{(n)}(X) = M[f](X) = \mu_t(f(t,X) = 0)$$

es decir, para cada X^n el valor de $g(X)$ que se le asocia es (si existe) el mínimo t tal que $f(t,X) = 0$

Observemos que nada garantiza que exista tal valor de t , por lo que las funciones construidas con M pueden no estar definidas para todos los valores de la n-uplas.

Veamos algunos ejemplos de funciones sobre $\mathbb{N}_0^2$ que sólo están definidas para algunos pares de valores y que pueden construidas utilizando el operador M

Ejemplo 3.3.1. *La función cociente $C(x,y) = x/y$ que sólo está definida si x es múltiplo de y*

$$C(x,y) \equiv M\left[h(t,x,y)\right]$$

donde

$$h(t,x,y) \stackrel{def}{=} \left[(t.y)\dot{-}x\right] + \left[x\dot{-}(t.y)\right]$$

Ejemplo 3.3.2.

La función logaritmo $Log(x,y) = log_x y$ que sólo está definida si existe t tal que $x^t = y$

$$Log(x,y) \equiv M\left[h(t,x,y)\right]$$

donde

$$h(t,x,y) \stackrel{def}{=} \left[y\dot{-}x^t\right] + \left[x^t\dot{-}y\right]$$

Ejemplo 3.3.3.

La función raiz n-sima $Rad(x,n) = \sqrt[n]{x}$ que sólo está definida si existe t tal que $t^n = x$

$$Rad(x,n) \equiv M\left[h(t,x,n)\right]$$

donde

$$h(t,x,n) \overset{def}{=} \left[x \dot{-} t^n\right] + \left[t^n \dot{-} x\right]$$

Agregando este operador **Minimizador** a los anteriores definimos inductivamente un nuevo conjunto de funciones:

Definición 3.3.2. *Definiremos el conjunto de Funciones Recursivas de la siguiente manera:*

a) Las funciones base definidas en 3.1.5 son Funciones Recursivas.

b) Las funciones obtenidas a partir de Funciones Recursivas aplicándoles un número finito de veces los operadores composición, recursión y minimizador (Φ , R y M) son Funciones Recursivas.

Las notaremos: ***FR****.*

Observemos que las **FRP** son un subconjunto de las **FR**.

Podemos extender la propiedad de ser **recursivos** a los subconjuntos y a las relaciones definidas en $\mathbb{N}_0^k$

Definición 3.3.3.

Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{N}_0^k$ *es* recursivo *, notaremos* ***CR*** *si su función característica* $\chi_A : \mathbb{N}_0^k \to \{0,1\}$ *es* ***FR***

Definición 3.3.4. *Dada una relación* α *definida en* $\mathbb{N}_0^k$ *diremos que es Relación Recursiva (notaremos* ***RR****) si su conjunto asociado es* ***CR***

Observación: Todos los mecanismos que permitian obtener **FRP** y **RRP** a partir de otras relaciones y funciones recursivas primitivas se pueden extender a las **FR** y **RR**.

Teorema 3.3.1. *Sea una relación* R *definida en* $\mathbb{N}_0^{k+1}$

Sea la función :

$$f(X) = \mu y(R(y, X^k))$$

Enstonces si $R \in$ ***RR*** $\Longrightarrow$ $f \in$ ***FR***

Demostración. Como $R \in$ **RR** su función característica $\chi_{D_R} \in$ **FR**

$$f(X) = \mu\ y(R(y, X^k)) = \mu\ y\ (\chi_{D_R}(y, X) = 1) = \mu\ y\ (\chi_{D_{\neg R}}(y, X) = 0)$$

$$f = M\left[\chi_{D_{\neg R}}\right]$$

□

3.3.2. Funciones de Gödel

Sabemos que el conjunto de las listas finitas de números de $\mathbb{N}_0$ es numerable.

Esto implica que su cardinalidad es la misma de $\mathbb{N}_0$ y por lo tanto es posible encontrar funciones que asocien en forma unívoca un valor de $\mathbb{N}_0$ a cada lista finita de numeros naturales.

Definición 3.3.5. *Diremos que una función $G^{(2)}$ es función de* ***Gödel*** *si para cada una lista finita $< a_0, a_1, ...a_s >$ de elementos de $\mathbb{N}_0$, existe un valor z (al que se le llama número de Gödel de la lista) que tambien notaremos $z = \overline{< a_0, a_1, ...a_s >}$ tal que:*

I)

$$G(i, z) = a_i \quad i = 0, 1, 2, ...s$$

II)

$$Se \;\; cumple \;\; que \;\; \overline{< x_0, x_1, ...x_s >} < \overline{< y_0, y_1, ...y_s, y_{s+1}, ...y_k >}$$

$$con \quad s < k, \quad x_i = y_i \;\; para \;\; i = 0, ...s$$

O sea que el número de Gödel asociado a cualquier lista finita es siempre menor que el que se le asocia al de la lista que se forma agregando nuevos elementos a la primera.

Ejemplo 3.3.4.

a) Dada la sucesión de los números primos : $< 2, 3, 5, 7, 11, ... >$ podemos asociar en forma unívoca a cada sucesión finita de $\mathbb{N}_0$

$$< a_0, a_1, ...a_k >$$

el valor

$$z = 2^{a_0},3^{a_1}.....N(k)^{a_k}$$

Como la descomposición en factores primos es única esto nos garantiza poder reconstruir la sucesión original definiendo la siguiente función de ***Gödel***

$$G(i, z) = \mu t(\neg(Mult(z, Exp(t + 1, N_p(i)))))$$

Donde $Mult$, Exp y N_p fueron definidos en los ejemplos 3.1.10, 3.1.3 iv) y 3.1.14

Observando que $G(i, z) \leq z$, aplicando el 3.1.3 se ve que esta función es ***FRP***

b) Sea una función ***dupla*** *W y sus inversas U ,V*

A cualquier sucesión finita $< a_0, a_1, ...a_k >$ se le puede asociar unívocamente el número:

$$z = W(a_0, W(a_1, ...(W(a_k, 0))))$$

Entonces tenemos la función de Gödel:

$$G(i, z) = U(V^i(z))$$

Utilizando las funciones dupla vistas en el ejemplo 3.1.15 se ve que esta función de Gödel también es ***FRP***

3.3.3. Funciones Recorrido

Definición 3.3.6.
Sea una función $f(y, X)$ y una función de ***Gödel*** $G^{(2)}$
Llamaremos función ***recorrido*** *de f y la notaremos f^* a la función definida del siguiente modo:*

$$f^*(y, X) = \overline{< f(0, X), f(1, X), ...f(y, X) >}$$

Es decir a cada (y, X) se le asocia el valor que devuelve la $G^{(2)}$ sobre la y+1-upla formada por todos los valores $f(t, X)$ con t variando de 0 a y

$$G(i, f^*(y, X)) = f(i, X)$$

Teorema 3.3.2. *Si una $f \in FR \Longrightarrow f^* \in FR$*
En efecto $f^*(y, X)$ devuelve un número z tal que verifica la condición de Gödel para todo i de 0 a y

$$\bigcap_{i=0}^{y} G(i, z) = f(i, X)$$

Pero además es el menor número que cumple esa propiedad por la condición ii) de la definición de 3.3.5 Luego:

$$f^*(y, X) = \mu\ z \left[\bigcap_{i=0}^{y} G(i, z) = f(i, X) \right]$$

Luego $f^* \in FR$

3.3.4. Relaciones Semi-recursivas

Definición 3.3.7. *Dada una relación S definida en $\mathbb{N}_0^k$ diremos que es* ***Relación Semi-recursiva****, notaremos* ***RSR****, si existe una Relación R definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$, tal que $R \in$* ***RR*** *y se cumple:*

$$S(X) \equiv \bigcup_{y} R(y, X)$$

Teorema 3.3.3.

$$\textbf{\textit{RR}} \subset \textbf{\textit{RSR}}$$

Sea R definida $\mathbb{N}_0^k \in$ ***RR****, la relación $S(y, X) = (y = 0) \wedge R(X)$ definida en $\mathbb{N}_0^{k+1}$ también pertenece a* ***RR***
Podemos presentar a R como:

$$R(X) \equiv \bigcup_{y} S(y, X) \qquad \Longrightarrow R \in \textbf{\textit{RSR}}$$

Teorema 3.3.4. *Sea la S definida $\mathbb{N}_0^{k+1}$ y sea T la relación en $\mathbb{N}_0^k$ definida del siguiente modo:*

$$T(X) \equiv \bigcup_{z} S(z, X)$$

Entonces si $S \in$ ***RSR*** $\Longrightarrow T \in$ ***RSR***

Por la definición de ***RSR*** *existen una relación* $R \in$ ***RR*** *tal que:*

$$S(z,X) \equiv \bigcup_y R(y,z,X) \qquad T(X) \equiv \bigcup_z \bigcup_y R(y,z,X)$$

De donde:

$$T(X) \equiv \bigcup_w R(U(w),V(w),X)$$

Teorema 3.3.5.
Sean la S_1 , S_2 *relaciones definidas en* $\mathbb{N}_0^k$
Sean $A(X) \equiv S_1(X) \ \wedge \ S_2(X) \qquad B(X) \equiv S_1(X) \ \vee \ S_2(X)$
Entonces si S_1 , S_2 $\in$ ***RSR*** $\Longrightarrow$ A , $B \in$ ***RSR***
Si S_1 , S_2 $\in$ ***RSR*** *existen* R_1 , R_2 $\in$ ***RR*** *que les dan origen.*

$$A(X) \equiv \bigcup_y R_1(y,X) \wedge \bigcup_z R_2(z,X) \equiv \bigcup_y \bigcup_z (R_1(y,X) \wedge R_2(z,X)$$

$$B(X) \equiv \bigcup_y R_1(y,X) \vee \bigcup_z R_2(z,X) \equiv \bigcup_y \bigcup_z (R_1(y,X) \vee R_2(z,X)$$

Aplicando el teorema anterior A , $B \in$ ***RSR***.

Teorema 3.3.6. *(Este es el llamado* ***Lema de Post****)*
Sea la relación S *definida en* $\mathbb{N}_0^k$ *entonces*
S *y* $\neg S$ *son* ***RSR*** $\iff$ $S \in$ ***RR***

$$\Leftarrow)$$

Inmediato del teorema 3.3.3, y de la observación de la definición 3.3.4

$$\Rightarrow)$$

$$S(X) \equiv \bigcup_y R_1(y,X) \qquad \neg S(X) \equiv \bigcup_y R_2(y,X)$$

Obviamente $S(X) \vee \ \neg S(X)$ *es verdadera para todo valor de* X.

$$S(X) \vee \neg S(X) \equiv \bigcup_y R_1(y,X) \ \ \vee \bigcup_y R_2(y,X) \equiv \bigcup_y R_1(y,X) \ \ \vee \ \ R_2(y,X)$$

Sea $f(X) = \mu \ \ y(R_1(y,X) \vee R_1(y,X))$
La $f \in$ ***FR*** *por el teorema 3.3.1*
Entonces podemos ver que $S(X) \equiv R_1(f(X),X)$

3.3.5. Tesis de Church

Existe la presunción de que el conjunto de las **FR** coincide con el conjunto de las funciones "calculables", o seaaquellas funciones donde es posible obtener para cualquier conjunto de valores de su dominio, por medio de un mecanismo de cálculo, el valor de la imagen que corresponde a esos valores.

Cuando decimos "es posible" queremos indicar que existe un conjunto de instrucciones, que consisten en la acrítica aplicación de reglas establecidas rigurosamente. [1]

Considerar que coinciden la funciones "calculables" con las funciones recursivas es una afirmación conocida como la **Tesis de Church**

Observemos que no es posible demostrar lo que afirma la tesis de Church, dado que vincula un concepto perfectamente definido como el de las funciones recursivas con un concepto intuitivo como el de calculabilidad.

Sin embargo, da fuerza argumentativa a esta tesis que, en la búsqueda de otros posibles modelos para el cálculo, no se ha encontrado ningún mecanismo que no pueda ser representado con las **FR**

En los próximos capítulos veremos algunos de esos modelos.

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.4.1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función g_n tal que $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}_0$ es recursiva primitiva.

Ejercicio 3.4.2. Mostrar que las siguientes son **FRP**:

1. $\Pi(x, y) = xy$
2. $exp(x, y) = x^y$
3. $fac(x) = x!$
4. La función *distancia*, definida por

$$dist(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ y - x & \text{si } x < y \end{cases}$$

Ejercicio 3.4.3. Sea $f^{(k+1)}$ una **FRP**de orden $k + 1$. Definimos dos nuevas funciones $F^{(k+1)}$ y $G^{(k+1)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(X, y) &= \sum_{k=0}^{y} f(X, k) \\ G(X, y) &= \prod_{k=0}^{y} f(X, k) \end{aligned}$$

donde X representa una k-upla. Mostrar que F y G son **FRP**

[1] Eso no implica que efectivamente se pueda realizar dicho calculo por ejemplo la función

$$A(m, n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n + 1 & \text{si } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & \text{si } m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{si } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

que es una variante de la Ack el valor de el resultado de A(5, 2) no se puede escribir como una secuencia de números pues su tamaño supera el estimado para el universo.