Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

2.5 - Matriz de una transformación lineal

Hemos visto:

- Si $A \in F^{n\times n}$ entonces $T_A : F^n \to F^n$ dada por $T_A(x) = Ax$ es una tl. (Recordar que para que sea exacta la definición deberíamos poner $(Ax^t)^t$, pero lo denotamos Ax para no ensuciar la notación).
- Una tl queda unívocamente determinada a partir de los valores que asume en una base del dominio.
- Todo ev de dimensión finita es isomorfo a F^n.

Veamos ahora cómo todos estos resultados nos permitirán representar a cualquier tl como una transformación matricial (¡¡¡siempre que estemos en dimensión finita!!!).

Definición 1 *V, W F-ev finito dimensionales con $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Sea $T \in L(V, W)$. Llamamos* ***matriz de T respecto de las bases B_1 y B_2*** *a la matriz $[T]_{B_1B_2} := (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ cuyas entradas a_{ij} están definidas por: para cada $j = 1, \dots, n$ sean $a_{1j}, \dots, c_{nj} \in F$ tales que $T(v_j) = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{nj}w_n$. Esto es, la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los transformados de la base B_1 de V por T en la base B_2 de W:*

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]^t_{B_2} & [T(v_2)]^t_{B_2} & \dots & [T(v_n)]^t_{B_2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 1

1. *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 3y)$. T tl. Sean B_1, B_2 bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Ents. $T(1, 0, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 3)$ y $T(0, 0, 1) = (-1, 0)$. Luego, $[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Así, podemos calcular $T(1, 1, 1) = (1+2\cdot1-1, 1+3\cdot1) = (3, 4)$ o hacer el producto matricial*

$$[T]_{B_1B_2}[(1, 1, 1)]^t_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = [(3, 4)]^t_{B_2}.$$

   En el próximo teorema (que es un very important theorem) vamos a ver que esto sucede en general.

2. ***Very Important 1*** *Si T transformación matricial definida a partir de una matriz $A \in F^{m\times n}$ y B_1, B_2 bases de F^n y F^m, respectivamente, ents. $[T_A]_{B_1B_2} = A$.*

3. ***Very Important 2*** *Si V F-ev finito dimensional con B_1, B_2 bases de V, ents $[id_V]_{B_1B_2} = C_{B_1B_2}$, es decir, la matriz de la transformación identidad respecto de las dos bases dadas es la matriz de cambio de base.*

El siguiente teorema nos justifica lo que afirmamos al principio: toda tl entre espacios finitos se corresponde con una matriz (que dependerá de la elección de las bases).

Very Important Theorem 1 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente. $T \in L(V,W)$. Ents. para cada $v \in V$ tenemos que*

$$[T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} = [T(v)]^t_{B_2}.$$

Demostración: Sea $v \in V$ con $[v]_{B_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Recordemos que el producto entre una matriz y un vector columna puede escribirse como la cl de las columnas de la matriz con coeficientes las entradas del vector: si $A = (a_ij)$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ ents $Ax = Col_1(A)x_1 + \dots + Col_2(A)x_n$. Trasladando a nuestro caso tenemos que

$$\begin{aligned}[T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} =& \alpha_1[T(v_1)]_{B_2} + \dots + \alpha_n[T(v_n)]_{B_2} \\ &= [\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)]_{B_2} \\ &= [T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)]_{B_2} \\ &= [T(v)]_{B_2}.\end{aligned}$$

□

Del teorema se desprende el abuso de notación que muchas veces hacemos al obviar los paréntesis: muchas veces escribimos Tv en lugar de $T(v)$, en analogía con el producto matricial, aunque se trate de una transformación lineal entre espacios abstractos, pues ésta se reduce a un producto entre una matriz y un vector. IMPORTANTE: siempre recordar que esto sucede en dimensión finita, aunque igualmente usaremos esta notación en dimensión infinita.

Ejemplo 1 *Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times3}$ definida según: si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $T(p(x)) = \begin{pmatrix} a_0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 3a_2 & 4a_3 \end{pmatrix}$. Es una tl (EJERCICIO). Sean $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ base canónica ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$ y $B_2 = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$ base canónica ordenada de $\mathbb{R}^{2\times3}$. Tenemos que los vectores de coordenadas son $[p(x)]_{B_1} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ y $[T(p(x))]_{B_2} = (a_0, 2a_1, 0, 0, 3a_2, 4a_3)$. Evaluamos los elementos de la base B_1 y escribimos su transformado en la base B_2: $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$, $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12}$, $T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{22}$ y $T(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E_{23}$. Observemos ahora que siendo $dim\, \mathbb{R}_3[x] = 4$ y $dim\, \mathbb{R}^{2\times3} = 6$, tenemos que $[T]_{B_1B_2}$ es una matriz 6×4:*

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

luego

$$[T]_{B_1B_2}[p(x)]^t_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 3a_2 \\ 4a_3 \end{pmatrix} = [T(p(x))]^t_{B_2}.$$

Como consecuencias del teorema tenemos, como *seguramente ya intuíamos* que $L(V,W)$ es isomorfo al espacio de matrices $dimV \times dimW$ (¡¡recordemos nuevamente que todo esto es en dimensión finita!!):

Corolario 1 *V, W F-ev finito dimensionales. Fijadas B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente, la función $\varphi : L(V,W) \to F^{m\times n}$ tal que $\varphi(T) = [T]_{B_1B_2}$ es isomorfismo de ev.*

Demostración: Sean $B_1 = \{v_1 \ldots, v_2\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Veamos primero que ϕ es lineal. Sean $\alpha, \beta \in F$, $S, T \in L(V,W)$. Calculemos las columnas de $[\alpha T + \beta S]_{B_1B_2}$: para $j \in \{1, \ldots, n\}$, $[(\alpha T + \beta S)(v_j)]_{B_2} = [\alpha T(v_j) + \beta S(v_j)]_{B_2} = \alpha[T(v_j)]_{B_2} + \beta[S(v_j)]_{B_2}$. Luego, $[\alpha T + \beta S]_{B_1B_2} = \alpha[T]_{B_1B_2} + \beta[S]_{B_1B_2}$, de donde $\varphi(\alpha T + \beta S) = \alpha\varphi(T) + \beta\varphi(S)$.

Para ver que es un isomorfismo, basta ver que es inyectiva o sobreyectiva (porqué?). Igualmente veamos ambas, pues puede ser instructivo.

Para ver que es inyectiva, puesto que hemos probado que es lineal, debemos calcular su núcleo: si la matriz asociada a una tl es la matriz nula, significa que sus columnas son todas iguales al vector nulo, luego las imagenes de todos los vectores de la base del dominio son el vector nulo, es decir, la tl buscada es la transformación nula.

Para ver que es sobreyectiva, basta con tomar una matriz y definirse adecuadamente la tl en las bases.

Desafío 1 *Completar y desarrollar la prueba de sobreyectividad.*

□

La linealidad es tan intersante que la escribiremos aparte en un corolario:

Corolario 2 *V, W F-ev finito dimensionales. Fijadas B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente, para $\alpha, \beta \in F$, $S, T \in L(V,W)$ tenemos que $[\alpha T + \beta S]_{B_1B_2} = \alpha[T]_{B_1B_2} + \beta[S]_{B_1B_2}$.*

Veamos qué pasa con la matriz de la composición de funciones:

Proposición 1 *U, V, W F-ev finito dimensionales con bases B_1, B_2, B_3, respectivamente, y $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,W)$ ents $[ST]_{B_1B_3} = [S]_{B_2B_3}[T]_{B_1B_2}$.*

Demostración: Miremos las dimensiones: si $dimU = r$, $dimV = n$ y $dimW = m$, entonces $[ST]_{B_1B_3} \in F^{m\times r}$, $[S]_{B_2B_3} \in F^{m\times n}$ y $[T]_{B_1B_2} \in F^{n\times r}$. Usaremos que si $Ax = A'x$ para todo x entonces $A = A'$:

$$[S]_{B_2B_3}[T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} = [S]_{B_2B_3}[T(v)]^t_{B_2} = [(ST)(v)]^t_{B_3} = [ST]_{B_1B_3}[v]^t_{B_1}.$$

□

De la proposición desprendemos varios corolarios muy ilustrativos:

Corolario 3 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente, $T \in L(V,W)$ isomorfismo. Entonces $[T^{-1}]_{B_2B_1} = ([T]_{B_1B_2})^{-1}$.*

Ejercicio 1 *Probar el siguiente corolario:*

Corolario 4 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B_1' bases de V y B_2, B_2' bases de W, $T \in L(V,W)$. Entonces $[T]_{B_1'B_2'} = C_{B_2B_2'}[T]_{B_2B_1}C_{B_1'B_1}$, donde $C_{BB'}$ es la matriz de cambio de bases (en las bases correspondientes).*

Demostración: *... Ayuda: considerar $T = id_W \circ T \circ id_V$.*

$\square$

Cuando T es un endomorfismo y consideramos la misma base B en dominio y codominio, simplemente escribimos $[T]_B$.

Corolario 5 *V F-ev finito dimensional, B, B' bases de V, $T \in L(V)$. Entonces $[T]_{B'} = C_{BB'}[T]_B C_{B'B} = (C_{B'B})^{-1}[T]_B C_{B'B}$.*

Este tipo de expresiones matriciales tienen gran importancia: nos dan una relación de equivalencia entre matrices. La siguiente definición es very important.

Definición 2 *Dos matrices cuadradas A y B de tamaño $n \times n$ se dicen **semejantes** si existe una matriz P de tamaño $n \times n$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$.*

Desafío 2 *Probar la siguiente proposición:*

Proposición 2 *La semejanza es una relación de equivalencia en las matrices $F^{n\times n}$.*

El siguiente ejemplo ilustra un poco la importancia de tener matrices semejantes:

Ejemplo 2 *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la tl asociada a la matriz A. Entonces, en la base canónica tenemos que $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,0,1)$ y $T(0,0,1) = (3,2,1)$. Si P es la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1}AP$ es la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si pensamos a P como una matriz de cambio de base (porqué podemos hacer esto?), de la base canónica digamos a una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, concluímos que para la transformación T_A existe una base (la base B') donde la matriz asociada a T es diagonal: $[T_A(v_1)]_B = -[v_1]_B^t = -(1,0,0)^t$, $[T_A(v_2)]_B = [v_2]_B^t = (0,1,0)^t$ y $[T_A(v_3)]_B = 2[v_3]_B^t = 2(0,0,1)^t$. La importancia de tener una matriz diagonal es la sencillez de su expresión, de la cual por ejemplo se desprende a simple vista que T es un isomorfismo (porqué?), y aprenderemos a deducir muchas otras cosas. Estas ideas serán centrales en la segunda parte de la asignatura.*