1. Probar que los valores λ_1 y λ_2 son autovalores de T. Calcular el espacio de autovectores asociado a cada autovalor y dar una base del mismo.
   (a) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(A) = A^t$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.
   (b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

2. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación, esto es
$$\delta f(x) = f'(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$
Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

3. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes ítems. Analizar por separado los casos $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,
   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   (e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$,
   (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
   (g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
   (h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
   (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

4. Determinar cuáles de las matrices del Ejercicio 3 son semejantes a una matriz diagonal. En caso afirmativo, dar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.

5. Pruebe que las siguientes matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son diagonalizables y dé una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,
   (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,
   (c) $A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:
$$T(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -y, -x - 3y - 4z).$$
   (a) Encontrar una base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathfrak{B}}$ sea diagonal.
   (b) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$.
   (a) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores.
   (b) Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

8. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbf{F}^{2\times 2}$. Determinar todos los $a, b, c \in \mathbf{F}$ para los que A es diagonalizable.

(b) Probar que toda matriz $A \in \mathbf{F}^{2\times 2}$ como en el ítem anterior es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

9. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
   (a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible, entonces 0 no es autovalor de A.
   (b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible y v autovector de A, entonces v es un autovector de A^{-1}.
   (c) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n impar, entonces A admite un autovalor real.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$, donde I_n denota a la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ las raíces de χ_A contadas con su multiplicidad. Probar que:
   (a) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$,
   (b) $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$. Probar que T es diagonalizable si y sólo si $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.

13. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el polinomio característico):
   (a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
   (c) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$,
   (d) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$,
   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   (j) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   (k) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   (l) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,
   (m) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,
   (n) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,
   (o) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}$,

14. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:
   (a) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $Tp(x) = p'(x) + 2p(x)$,
   (b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(A) = A^t$.

15. Utilizando el Teorema de Cayley-Hamilton:
   (a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

(c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A - 37I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.

(d) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} y A^3.

16. Sea V un $\mathbf{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que T es un isomorfismo si y sólo si el término constante de χ_T es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de T^{-1} como polinomio en T.