Repaso:

Definición 1. *Dado un grafo G, un* ***ciclo hamiltoniano*** *es un ciclo que contiene a todos los vértices de G.*

Definición 2. *Decimos que un grafo G es* ***hamiltoniano*** *si tiene un ciclo hamiltoniano.*

Observación 1.

- Consideramos grafos simples
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos.
- Si G es hamiltoniano entonces:
  - es conexo
  - $\delta(G) \geqslant 2$
  - si $d(v) = 2$ para algún $v \in V(G)$ entonces ambas aristas incidentes en v están en el ciclo hamiltoniano.

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geqslant 2$. Si $d(v) + d(w) \geqslant n - 1$ para todo $v, w \in V, v \neq w$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.*

Corolario 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geqslant 2$. Si $d(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.*

Teorema 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geqslant 3$. Si $d(v) + d(w) \geqslant n$ para todo $v, w \in V$ no adyacentes, entonces G es hamiltoniano.*

Corolario 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geqslant 3$. Si $d(v) \geqslant \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$ entonces G es hamiltoniano.*

Corolario 3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geqslant 3$. Si $|E| \geqslant \binom{n-1}{2} + 2$ entonces G es hamiltoniano.*

Todos estos resultados nos dan condiciones suficientes para que un grafo tenga un ciclo hamiltoniano, pero no condiciones necesarias (probar en práctica).

Teorema 3 (Condición necesaria)**.** *Si G es hamiltoniano, entonces para todo conjunto no vacío S de $V(G)$ el grafo $G - S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas. Es decir, para todo $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$, $\kappa(G - S) \leqslant |S|$.*

Demostración. Sea S un subconjunto propio no vacío de $V(G)$, y supongamos que $\kappa(G-S) = k \geqslant 1$. Sea C un ciclo hamiltoniano de G. Si al ciclo le eliminamos $p < n$ vértices, entonces se producirán como máximo p componentes conexas. El mayor número de componentes lo obtendremos cuando los vértices que eliminemos no sean adyacentes en el ciclo, pues si lo son no tienen por qué aumentar dicho número de componentes. Por lo tanto, para que un grafo sea hamiltoniano, siempre que se elimine un conjunto de vértices el número de componentes conexas generadas sera menor o igual al cardinal de S, es decir, $\kappa(C - S) \leqslant |S|$.

Además, $C - S$ es un subgrafo que contiene todos los vértices del grafo $G - S$ y por tanto, $\kappa(G - S) \leqslant \kappa(C - S)$. □

Otra forma:

Demostración. Sean G un grafo hamiltoniano y $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$. Supongamos que $\kappa(G-S) = k \geqslant 1$ y sean $G_1, G_2 \ldots, G_k$ las componentes conexas en $G - S$.

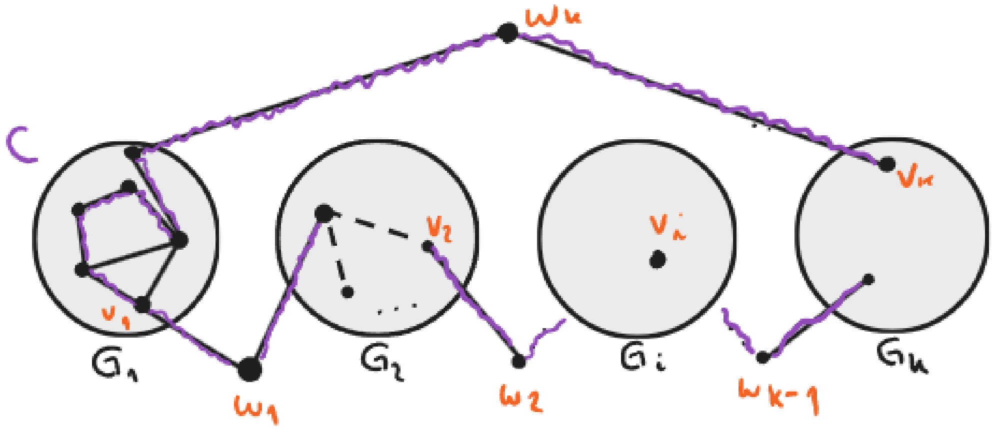
Si $k = 1$, el resultado es trivial ya que S es no vacío ($|S| \geqslant 1$).

Supongamos que $k > 1$.

Como G es hamiltoniano, existe un ciclo hamiltoniano C. Supongamos que le damos una orientación a C (ordenamos los vértices a medida que los vamos recorriendo).

Llamemos v_i el último vértice del ciclo C en la componente G_i y w_i al siguiente vértice en el ciclo C. Observemos que $w_i \notin V(G_i)$ por definición de v_i y que $w_i \notin V(G_j)$ para $j \neq i$ ya que las componentes conexas son disjuntas. Por lo tanto, $w_i \in S$.

Como C es un ciclo hamiltoniano debe recorrer todos los vértices, en particular, debe pasar por todas las componentes conexas del grafo G. Entonces, podemos definir w_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por otro lado, al ser C un ciclo vemos que $w_i \neq w_j$ para $i \neq j$. Por lo tanto, $|S| \geqslant k = \kappa(G-S)$ como queríamos probar.



□

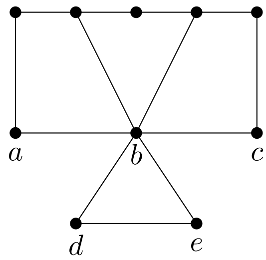
Observación 2. *Si G tiene una arista o un vértice de corte entonces no es hamiltoniano. (Pensar)*

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Resolución práctica 5 - Ciclos hamiltonianos

1. Encontrar un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada uno de los grafos siguientes. Si el grafo no tiene un ciclo hamiltoniano, determinar si tiene un camino hamiltoniano.

   a) Consideremos el siguiente grafo

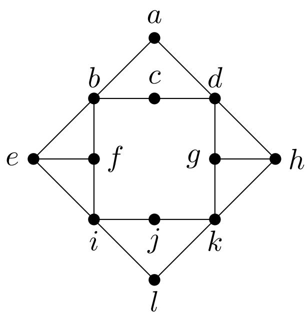


Por la observación 1 si G tiene un ciclo hamiltoniano C, las aristas ab, bd, be, bc tienen que estar en el ciclo ya que $d(a) = d(d) = d(c) = d(e) = 2$. Pero en ese caso, b tendría 4 aristas en el ciclo C incidentes en él, por lo que C no sería un ciclo. Por lo tanto, G no es hamiltoniano.

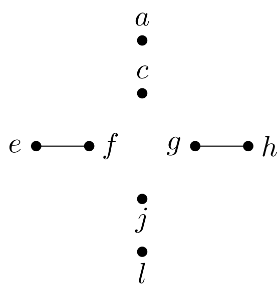
Otra forma de probarlo es utilizando la condición necesaria con el conjunto $S = \{b\}$ (Observemos que es un vértice de corte).

Determinar si existe un camino hamiltoniano.

   d) Consideremos el siguiente grafo:



Observemos que si tomamos el conjunto $S = \{b.d.i.k\}$ tenemos que $\kappa(G-S) = 6 > 4 = |S|$. Por lo tanto, G no es hamiltoniano.



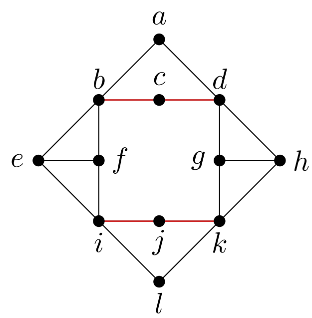
Veamos si G tiene un camino hamiltoniano.

Observemos que no verifica ningún teorema (pensar).

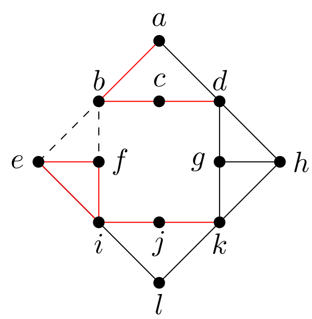
Supongamos que si, que G tiene un camino hamiltoniano P.

Consideremos los vértices a y c. Si ambos son vértices internos de P entonces como tienen grado 2, todas las aristas incidentes en ellos están en P, pero entonces tenemos que en P hay un ciclo ($abcda$) y esto no puede ocurrir. Luego, al menos uno de estos vértices (a o c) es extremos del camino P. Con un razonamiento análogo vemos que ocurre lo mismo con l y j. Por lo tanto, como P tiene exactamente dos extremos, uno de ellos está en $\{a, c\}$ y el otro en $\{j, l\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que a y l son los extremos de P (ya que a y c son similares y j y l también). Entonces, c y j son vértices internos del camino. Luego, las aristas bc, cd, ij, jk son aristas del camino.



Supongamos que ab es una arista del camino. Como el camino es simple, no vuelve a pasar por b y be y bf no están en P. Luego, como e y f son vértices internos del camino, ie, ef y fi son aristas del camino. Pero entonces i tiene 3 aristas incidentes que son del camino y esto no puede ocurrir. Contradicción.



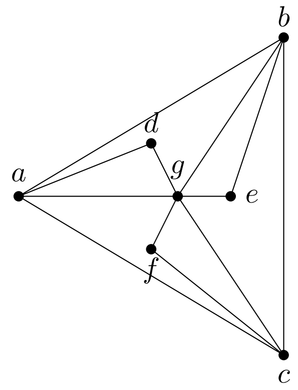
Con un razonamiento análogo llegamos a una contradicción si suponemos que ad está en P.

$\therefore$ G no tiene un camino hamiltoniano.

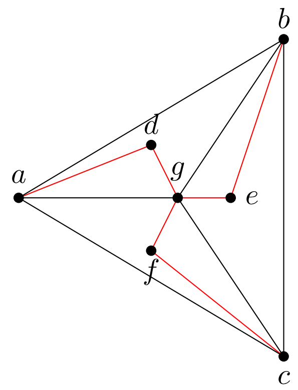
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

4) *a*) Dar un grafo G tal que para todo $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$ el grafo $G - S$ posee a lo sumo $|S|$ componentes conexas y que no sea hamiltoniano.

Consideremos este grafo G y veamos que no es hamiltoniano.



Si lo fuera, todas las aristas incidentes en los vértices de grado 2 deben pertenecer a un ciclo hamiltoniano.



Entonces, las aristas del ciclo incidentes en g son al menos 3 y esto no puede ocurrir.

$\therefore$ G no es hamiltoniano.

Veamos que $\forall\, \varnothing \neq S \subseteq V(G)$ se tiene $\kappa(G - S) \leqslant |S|$.

Observemos que G no tiene vértices de corte. Luego, para todo $S \subseteq V$ tal que $|S| = 1$, $\kappa(G-S) = 1 = |S|$.

Ahora analicemos los conjuntos $S \subseteq V(G)$ con $|S| = 2$.

a) $S = \{g, d\}$ ($\{g, e\}, \{g, f\}$ son análogos)
b) $S = \{g, a\}$ ($\{g, b\}, \{g, c\}$ son análogos)
c) $S = \{a, d\}$ ($\{b, e\}, \{c, f\}$ son análogos)
d) $S = \{a, f\}$ ($\{b, d\}, \{c, e\}$ son análogos)
e) $S = \{a, e\}$ ($\{b, f\}, \{c, d\}$ son análogos)

En los casos a), c), d) y e) $G - S$ es conexo y en el caso b) $G - S$ tiene 2 componentes conexas. En cualquier caso, $\kappa(G - S) \leqslant 2 = |S|$.

Analicemos los conjuntos $S \subseteq V(G)$ con $|S| = 3$. Como $N(g) = \{a, b, c, d, e, f\}$ (g es universal), consideremos sólo los conjuntos que contienen a g ya que si $g \notin S$ entonces $G - S$ es conexo.

a) $S = \{g, a, d\}$ ($\{g, b, e\}, \{g, c, f\}$ análogos) $G - S \equiv P_4$ conexo

b) $S = \{g, a, e\}$ ($\{g, a, f\}, \{g, b, d\}, \{g, b, f\}, \{g, c, d\}, \{g, c, e\}$ análogos) $G - S \equiv P_3 + K_1$ y $\kappa(G - S) \leqslant 2$

c) $S = \{g, d, e\}$ ($\{g, d, f\}, \{g, e, f\}$ análogos) $G - S$ es conexo.

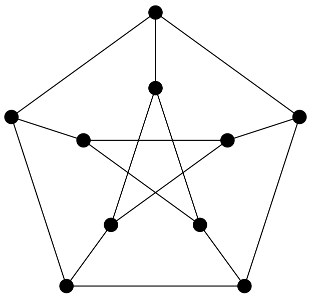
d) $S = \{g, a, b\}$ ($\{g, a, c\}, \{g, b, c\}$ análogos) $G - S$ es conexo.

En cualquier caso, $\kappa(G - S) \leqslant 3 = |S|$.

Como $|V(G)| = 7$, cualquier conjunto S con $|S| \geqslant 4$, tenemos que $\kappa(G - S) \leqslant 3 < 4 \leqslant |S|$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

6) Considerar el *grafo de Petersen.*



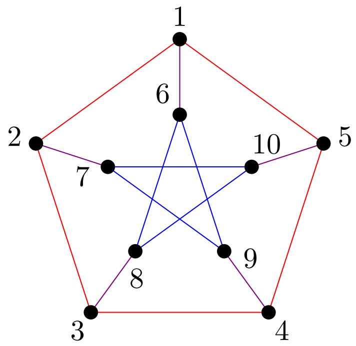
a) Mostrar que el grafo de Petersen no tiene ciclos hamiltonianos pero si tiene un camino hamiltoniano.

b) Mostrar que si se elimina cualquier vértice (y las aristas incidentes en él) del grafo de Petersen, entonces el subgrafo resultante tiene un ciclo hamiltoniano.

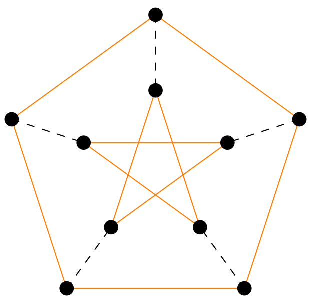
Queremos ver que el grafo de petersen no tiene un ciclo hamiltoniano. Supongamos que si, es decir, que existe un ciclo C que pasa por todos los vértices de G. Observemos que por definición la longitud del ciclo C es igual a $|V(G)| = 10$. Por lo tanto, de las 15 aristas que tiene G, solo 10 pertenecen al ciclo.

Observemos que las aristas del grafo las podemos particionar en tres conjuntos de 5 aristas cada uno:

Las aristas del ciclo externo, las que están en el ciclo interno y las que conectan vértices en ambos ciclos, que llamaremos aristas puentes.



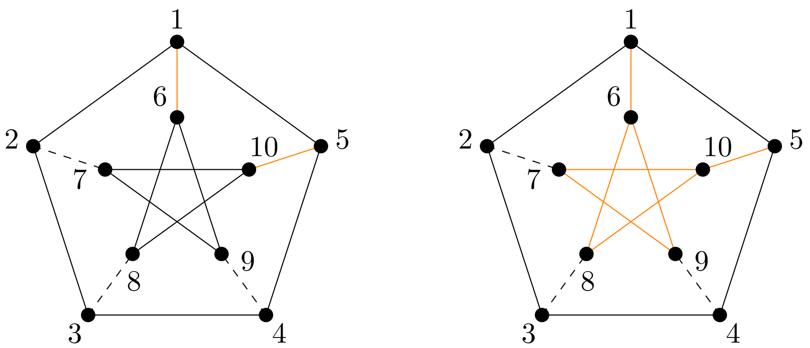
El ciclo C utiliza al menos una de las aristas puente, ya que de lo contrario C consistiría en las 10 aristas restante, pero éstas forman dos ciclos disjuntos.



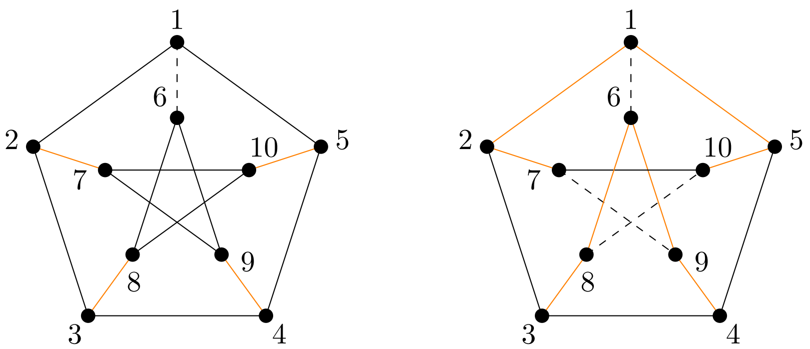
Luego, si comenzamos a recorrer el ciclo C en un vértice del ciclo externo, como C pasa por todos los vértices, en algún momento pasa por los vértices del ciclo interno utilizando una arista puente. Nuevamente, tiene que volver al ciclo externo, por lo que utilizará otra arista puente. Así, cada vez que vamos del ciclo externo al interno se utiliza una arista puente. Por lo tanto, la cantidad de aristas puente en el ciclo C debe ser par. Es decir, C utiliza 2 o 4 aristas puente.

Si C **utiliza 2 aristas puente**, las 8 restantes del ciclo están en los ciclos externo e interno. De hecho, C utilizará 4 de cada ciclo. En efecto, no es posible que estén las 5 aristas pues los vértices extremos de las aristas puente tendrían 3 aristas del ciclo incidentes en ellos y eso no puede ocurrir.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{1,6\}$ y $\{5,10\}$ son las únicas aristas puente del ciclo. Luego, si o si debemos utilizar las aristas del ciclo interno incidentes en $7,8$ y 9. Es decir, consideramos las 5 aristas del ciclo interno y dijimos que eso no puede ocurrir (ya que 6 y 10 tienen 3 aristas del ciclo que inciden en ellos).

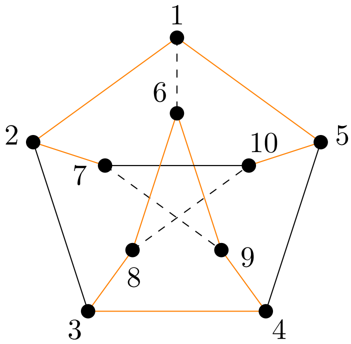


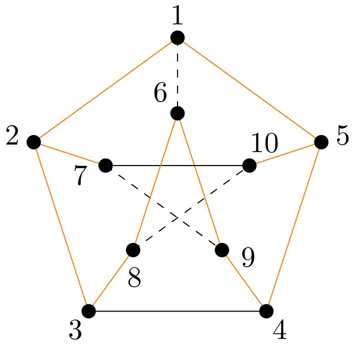
Si **las aristas puente utilizadas son 4**, hay un vértice del ciclo interno que no cubrimos. Supongamos sin pérdida de generalidad que es el vértice 6. Luego, las aristas $\{6,9\}, \{6,8\}, \{1,2\}$ y $\{1,5\}$ deben estar en el ciclo.



Si la arista $\{3,4\}$ está en C, obtendríamos un ciclo que no es hamiltoniano y eso no puede ocurrir, ya que como C debe recorrer todos los vértices deberá tener una arista incidente en algún vértice de este ciclo haciendo que tenga 3 aristas de C incidentes en él.

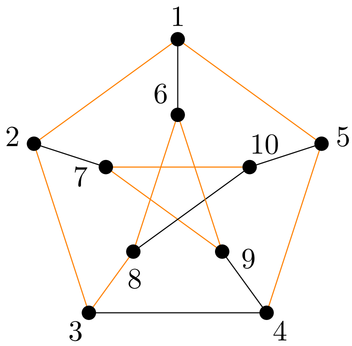
Por otro lado, si $\{3,4\}$ no está en C, las aristas $\{4,5\}$ y $\{2,3\}$ deberían estar. En este caso, 4 y 5 tendrían 3 aristas de C incidentes en ellos.





En ambos casos llegamos a una contradicción, que surge de suponer que G tiene un ciclo hamiltoniano. Por lo tanto, G no es hamiltoniano.

Por otro lado, G si tiene un camino hamiltoniano.



b) Queremos ver que se elimina cualquier vértice del grafo de Petersen, entonces el subgrafo resultante tiene un ciclo hamiltoniano.

Observemos que el grafo de Petersen en vértice transitivo, es decir, todos sus vértices son similares. Por eso, no perdemos generalidad al eliminar un vértice cualquiera.