Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

5.3 Profe, ¿y ésto para qué sirve?

Hay muchísimas aplicaciones de la teoría de autovalores y autovectores, les dejo indicadas algunos ejemplos de la bibliografía por si tienen curiosidad:

En el libro de David Poole (ver bibliografía, capítulo 4 sección 6) se muestran diversos ejemplos, a saber:

- Cadenas de Markov (teoría de probabilidad),
- Crecimiento poblacional (biología, economía)
- Sistemas de ecuaciones diferenciales linales,
- Sistemas dinámicos lineales discretos,
- Relaciones de recurrencia lineal,
- Clasificación de equipos deportivos,
- Búsqueda en internet.

Observemos que para ello debe desarrollar el teorema de Perron-Frobenius.

En el libro de Jim Hefferon (ver bibliografía, capítulo 5, tópicos) se desarrollan los siguientes ejemplos:

- Estabilidad de poblaciones (en Poole se describe como crecimiento poblacional),
- Page ranking (en Poole es la búsqueda en internet),
- Oscilaciones acopladas (física),
- Recurrencia lineal.

Para ello, nuevamente desarrolla algunas cuestiones teóricas como ser el método de las potencias.

El libro de Gilbert Strang es quizás el que más aplicaciones tiene. Introduciendo el concepto de Singular Value Decomposition (SVD), en el capítulo 7, describe el estudio del procesamiento de imágenes. En el capítulo 10 el que tiene muchísimas aplicaciones. Nuevamente trabaja con las llamadas matrices de Markov, población y economía.

A modo de continuación de temas vistos en materias anteriores, vamos a ver otra aplicación: ecuación general de segundo grado en dos (cónicas) y tres variables (cuádricas). Dejo también, para quienes ya han estudiado Proba, delineada otra aplicación.

0.1. Curvas planas de segundo grado

Una curva plana de segundo grado responde a una ecuación cuadrática con dos variables cuya expresión es

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{13} no se anulan simultáneamente.

- La expresión $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ se denomina **forma cuadrática** y se la puede expresar matricialmente como

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

  donde $a_{21} = a_{12}$.

- La expresión $2a_{13}x + 2a_{23}y$ se denomina **forma lineal** y se la puede expresar matricialmente como

$$2a_{13}x + 2a_{23}y = (a_{13}, a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, la ecuación cuadrática (1) se expresa en forma matricial como

$$(x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_{13}, a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_33 = 0, \tag{2}$$

y si ponemos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = (a_{13}, a_{23})$ y $C = a_{33}$, la ecuación cuadrática matricial se reescribe como

$$(x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C = 0. \tag{3}$$

Es posible hallar una matriz diagonal D semejante a A

$$D = Q^{-1}AQ.$$

de modo tal que la matriz semejanza $Q = Q_{B\to E} = C_{B\to E}$ sea una matriz ortogonal (lo que implica que $Q^t = Q^{-1}$) de cambio de bases entre dos bases ortonormales E y B. Luego, si hacemos

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_E = C_{B\to E}\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]_B$$

, sigue (transponiendo $[(x, y)]_E = [(x', y')]_B Q^t_{B\to E}$) que:

$$(x', y')D\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + BQ\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + C = 0, \tag{4}$$

donde $D = Q^tAQ$.

Esta expresión permite eliminar el término rectangular xy y si se efectúa una traslación de ejes paralelos conveniente, se obtiene la ecuación canónica de la cónica dada.

La matriz diagonal D está formada por los autovalores asociados a la matriz A, es decir $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

reemplazando en la ecuación (4) , la ecuación de la cónica queda de la forma :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

que reescribimos como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2bx' + 2cy' + d = 0. \tag{5}$$

- Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, y completamos cuadrados en (5), resulta

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{b}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{c}{\lambda_2}\right)^2 + K = 0.$$

  Traslademos el origen de coordenadas al punto $\left(-\frac{b}{\lambda_1}, -\frac{c}{\lambda_2}\right)$, conservando las direcciones de los ejes: esto es, efectuar la sustitución $x'' = x' + \frac{b}{\lambda_1}$ y $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$. Luego, (5) se reduce a

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + K = 0.$$

  - Si $sgn(\lambda_1) = sgn(\lambda_2) = sgn(K)$, el lugar geométrico es el conjunto vacío.
  - Si $sgn(\lambda_1) = sgn(\lambda_2) \neq sgn(K)$, el lugar geométrico es una elipse, y si además $\lambda_1 = \lambda_2$, se trata de una circunferencia.
  - Si $sgn(\lambda_1) = sgn(\lambda_2)$ y $K = 0$, el lugar geométrico es un punto.
  - Si $sgn(\lambda_1) \neq sgn(\lambda_2)$ y $k \neq 0$, el lugar geométrico es una hipérbola.
  - Si $sgn(\lambda_1) \neq sgn(\lambda_2)$ y $k = 0$, el lugar geométrico es un par de rectas coincidentes.

- Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, digamos con $\lambda_2 \neq 0$, la ecuación (5) toma la forma

$$\lambda_2 y'^2 + 2bx' + 2cy' + d = 0.$$

  - Si $b \neq 0$, reescribimos la ecuación como

$$\lambda_2 \left[y'^2 + \frac{2c}{\lambda_2}y' + \frac{c^2}{\lambda_2^2} - \frac{c^2}{\lambda_2^2}\right] + 2bx' + d = 0,$$
$$\lambda_2 \left[y'^2 + \frac{2c}{\lambda_2}y' + \frac{c^2}{\lambda_2^2}\right] - \frac{c^2}{\lambda_2^2} + 2bx' + d = 0,$$
$$\lambda_2 \left(y' + \frac{c}{\lambda_2}\right)^2 + 2b\left(x' + \frac{d}{2b} - \frac{c^2}{2b\lambda_2^2}\right) = 0.$$

    Trasladamos el origen de coordenadas mediante las ecuaciones $x'' = x' + \frac{d}{2b} - \frac{c^2}{2b\lambda_2^2}$ y $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$, luego obtenemos

$$\lambda_2 y''^2 + 2bx'' = 0,$$

    que representa una parábola.

  - Si $b = 0$, reescribimos la ecuación como

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{c}{\lambda_2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{\lambda_2} = 0,$$

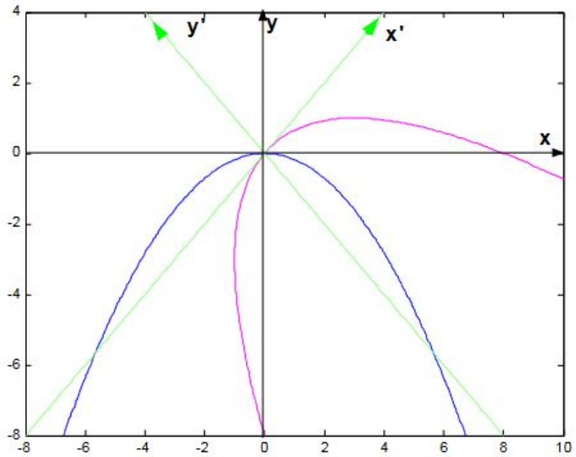
    y sustituyendo $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$ resulta

$$\lambda_2 y''^2 + K = 0,$$

    donde $K = d - \frac{c^2}{\lambda_2}$.

- Si $K\lambda_2 < 0$, se obtienen dos rectas paralelas.
- Si $K = 0$, se obtienen dos rectas coincidentes.
- Si $K\lambda_2 > 0$, se obtiene el conjunto vacío.

Ejemplo 1 *Identificar el lugar geométrico* $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$.



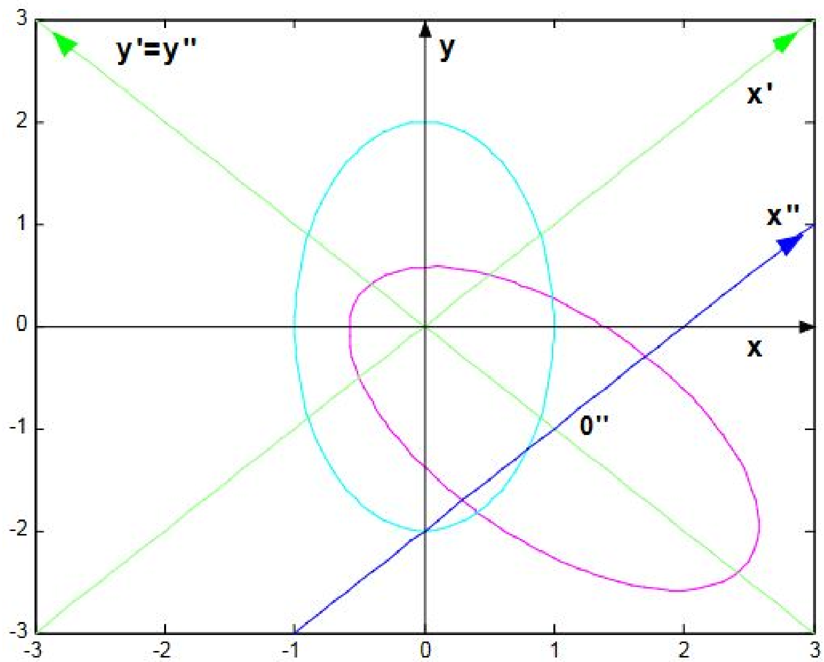
$x'^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}y'$.

EJERCICIOS

- $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$.
- $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$.

Soluciones

- Elipse $x''^2 + \frac{y''^2}{4} = 1$.



- Dos rectas paralelas $26y'^2 - 1 = 0$.

0.2. Superficies cuádricas

Una superficie cuádrica responde a una ecuación cuadrática con tres variables cuya expresión es:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

donde el coeficiente de al menos un término de grado dos es distinto de cero. La ecuación anterior se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{14}, a_{24}, a_{34})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0,$$

o de otra forma,

$$(x, y, z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C = 0.$$

Nuevamente, sea D la matriz diagonal semejante a A, por lo tanto $D = Q^{-1}.A.Q$, donde Q es la matriz ortogonal de cambio de bases entre dos bases ortonormales E (base canónica) y B, por lo que se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = C_{B\to E}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B ,$$

y trasponiendo

$$(x, y, z)_E = (x', y', z')_B Q^t_{B\to E}.$$

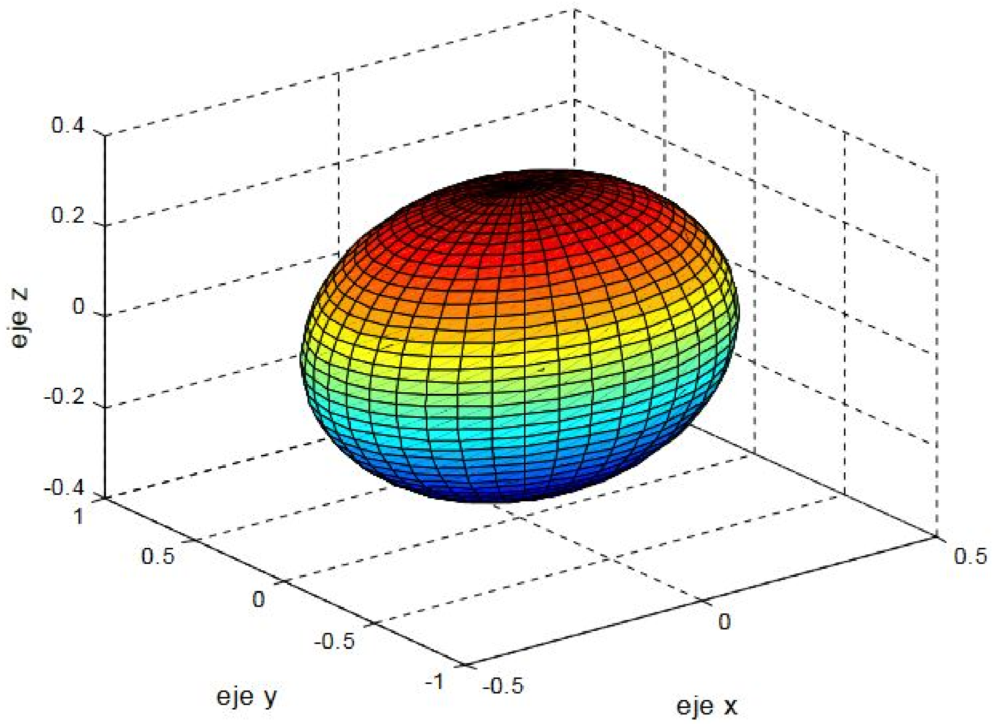
Reemplazando, obtenemos finalmente

$$(x', y', z')D\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + BQ\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + C = 0.$$

Esta expresión permite eliminar los términos rectangulares xy; xz y el yz; si se efectúa una traslación de ejes paralelos conveniente, se obtiene la ecuación canónica de la cuádrica dada. La matriz diagonal D está formada por los autovalores asociados a la matriz A. Se presenta un esquema de clasificación de las Superficies Cuádricas:

Autovalores: $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3$	Superficie cuádrica. (o Cuádricas degeneradas)
Todos del mismo signo.	Elipsoide.
Signos distintos.	Hiperboloide de una o dos hojas. Superficie cónica.
Uno nulo y dos del mismo signo .	Paraboloide elíptico o circular. Cilindro elíptico o circular.
Uno nulo y dos de distinto signo.	Paraboloide hiperbólico o cilindro hiperbólico.
Dos nulos.	Cilindro Parabólico o dos planos paralelos.

Ejemplo 2 *Identificar el lugar geométrico* $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz - 1 = 0$.



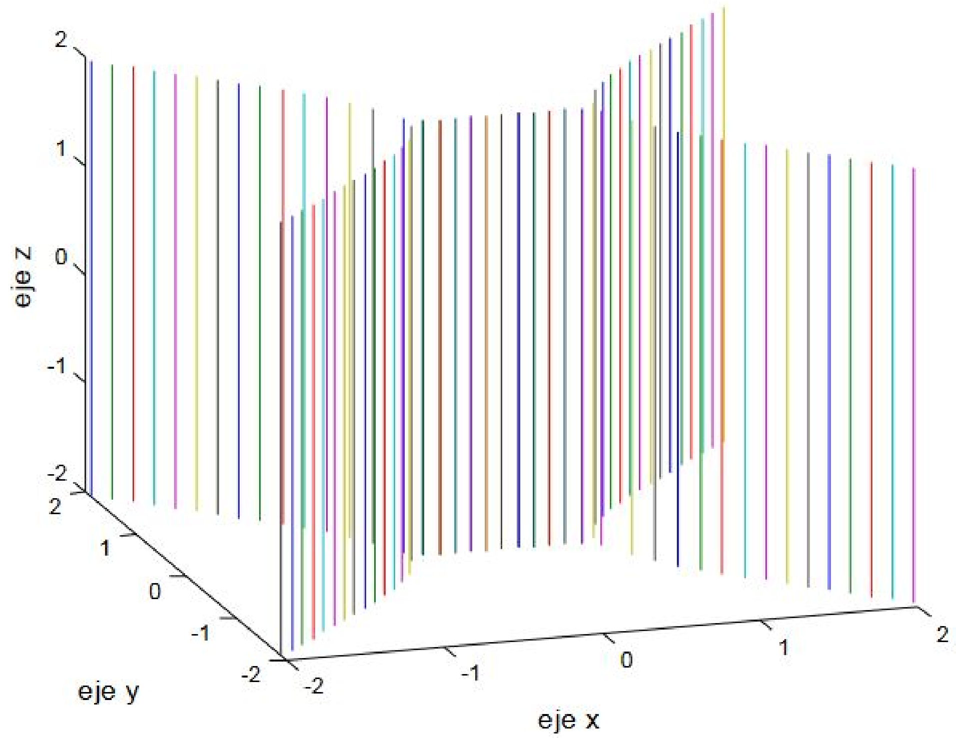
$6x'^2 + 3y'^2 + 9z'^2 = 1$.

EJERCICIOS

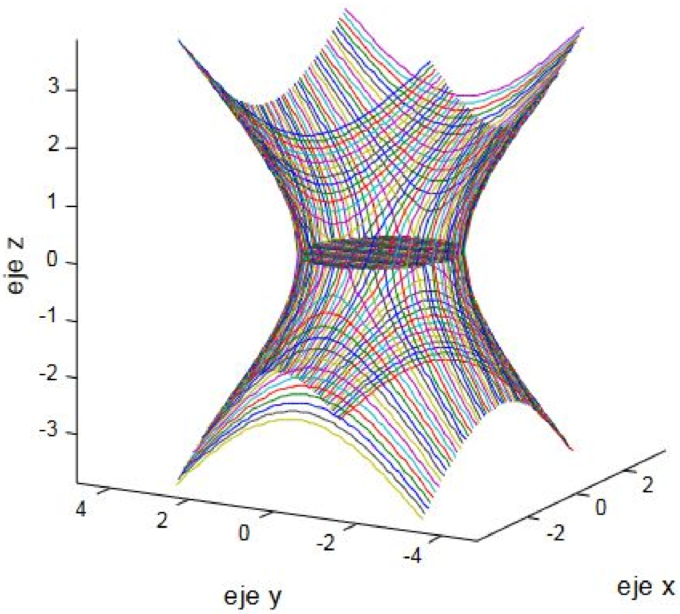
- $4xy + 4xz = 1$.
- $x^2 + 2yz + 4x + 1 = 0$.

Soluciones

- Cilindro hiperbólico $\sqrt{8}x'^2 - \sqrt{8}y'^2 - 1 = 0$.

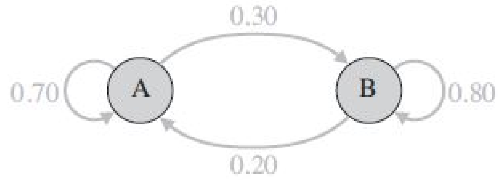


- Hiperboloide de una hoja $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 3$.



0.3. Cadenas de Markov (Probabilidad)

Un equipo de investigación de mercado realiza un estudio controlado para determinar qué dentífricos prefieren las personas. La muestra consiste de 200 personas, y a cada una se le pide probar dos marcas de dentífrico durante un periodo de varios meses. Con base en las respuestas de la encuesta, el equipo de investigación compila las siguientes estadísticas acerca de las preferencias de dentífrico. De quienes usan la marca A en cualquier mes, 70 porciento siguen usándola el mes siguiente, mientras que 30 porciento cambia a la marca B; de quienes usan la marca B en cualquier mes, 80 porciento siguen usándolo el mes siguiente, mientras que 20 porciento cambian a la marca A. Estos hallazgos se resumen en la figura, en la que los porcentajes se convirtieron en decimales; se pensará en ellos como probabilidades.



La figura es un ejemplo simple de una **cadena de Markov** (finita). Representa un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados. En cada paso o punto en el tiempo, el proceso puede estar en cualquiera de los estados; en el paso siguiente, el proceso puede permanecer en su estado presente o cambiar a uno de los otros estados. El estado hacia donde avanza el proceso en el siguiente paso y la probabilidad de hacerlo depende solamente del estado presente y no de la historia pasada del proceso. Estas probabilidades se conocen como probabilidades de transición y se suponen constantes (esto es: la probabilidad de moverse del estado i al estado j siempre es la misma).

En el estudio de dentífricos descrito anteriormente, existen sólo dos estados (usar la marca A y usar la marca B) y las probabilidades de transición son las indicadas en la figura. Suponga que, cuando comienza el estudio, 120 personas usan la marca A y 80 personas usan la marca B. ¿Cuántas personas usarán cada marca 1 mes más tarde? ¿Y 2 meses más tarde?

Veamos. El número de usuarios de la marca A después de 1 mes será 70 porciento de los que inicialmente usan la marca A (quienes siguen siendo leales a la marca A) más 20porciento de los usuarios de la marca B (quienes cambian de B a A):

$$0{,}70 \cdot 120 + 0{,}20 \cdot 80 = 100.$$

De igual modo, el número de usuarios de la marca B después de 1 mes será una combinación de quienes cambian a la marca B y quienes siguen usándola:

$$0{,}30 \cdot 120 + 0{,}80 \cdot 80 = 100.$$

Estas dos ecuaciones pueden resumirse en una sola ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Esto lo resumimos con $PX_0 = X_1$, donde las componentes de cada vector son el número de usuarios de las marcas A y B, en ese orden, después del número de meses indicado por el subíndice.

Extendemos esta notacipon: sea X_k el vector cuyas componentes registran la distribución de usuarios de dentífrico después de k meses. Para determinar el número de usuarios de cada marca después de transcurridos 2 meses, simplemente aplique el mismo razonamiento comenzando con X_1 en lugar de X_0:

$$X_2 = PX_1 = \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Los vectores X_k se llaman vectores de estado de la cadena de Markov, y la matriz P se llama matriz de transición. Una cadena de Markov satisface la relación

$$X_{k+1} = PX_k, \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Así, es posible calcular un vector de estado arbitrario de manera iterativa una vez se conoce X_0 y P. En otras palabras, una cadena de Markov está completamente determinada por sus probabilidades de transición y su estado inicial.

Para trabajar con estos datos generalmente es preciso normalizarlos, de modo de trabajar con los números relativos que usan cada marca en lugar de los números reales de usuarios de dentífrico. Es decir, convertir los datos en porcentajes o fracciones al dividir el número total de usuarios entre 200. Trabajaremos entonces con, por ejemplo

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{120}{200} \\ \\ \frac{80}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}60 \\ \\ 0{,}40 \end{pmatrix}.$$

Los vectores como este, con componentes no negativos que suman 1, se llaman vectores de probabilidad.

Observemos cómo se ordenan las probabilidades de transición dentro de la matriz de transición P. Podemos considerar a las columnas como etiquetadas con los estados presente y los renglones o filas como etiquetados con los estados siguiente:

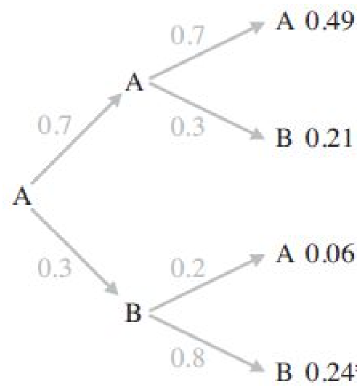
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \textit{Presente} \\ A \quad\; B \end{matrix} \\ \textit{Siguiente} \quad \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las columnas de P son vectores de probabilidad; cualquier matriz cuadrada con esta propiedad se llama matriz estocástica.

Hay otra forma en que podemos describir a las cadenas de Markov. Observemos que $X_2 = PX_1 = P^2 X_0$, y

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}30 \\ \\ 0{,}45 & 0{,}70 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que, por ejemplo, la entrada $[P^2]_{21} = 0{,}45$. Una forma de ver de dódne provienen estas probabilidades es con el siguiente diagrama de árbol:



Existen cuatro posibles cambios de estado que pueden ocurrir durante 2 meses y corresponden a las cuatro ramas (o rutas) de longitud 2 en el árbol. Alguien que inicialmente use la marca A puede terminar usando la marca B dos meses después en dos formas diferentes: la persona puede seguir usando A después de 1 mes y luego cambiar a B (con probabilidad $0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$, o la persona puede cambiar a B después de 1 mes y luego seguir con B (con probabilidad $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$. La suma de estas probabilidades produce una probabilidad global de 0,45. Observe que dichos cálculos son exactamente lo que se hizo cuando se calculó $[P^2]_{21}$. Se tiene que $[P^2]_{21} = 0{,}45$ representa la probabilidad de moverse del estado 1 (marca A) al estado 2 (marca B) en dos transiciones. Notemos que el orden de los subíndices es el inverso del que pudo suponer.

En general:

- $X_k = P^k X_0, \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$

- Se puede probar que P^k es otra matriz estocástica.
- $[P^k]_{ij}$ es la probabilidad de moverse del estado j al estado i en k transiciones.

¿Qué sucederá con la distribución de usuarios de dentífrico a largo plazo? Iteremos:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.425 \\ 0.575 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.412 \\ 0.588 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.406 \\ 0.594 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.403 \\ 0.597 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.598 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.599 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.600 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.600 \end{bmatrix}$$

Parece que los vectores de estado se aproximan (o convergen) al vector $\begin{pmatrix} 0{,}40 \\ \\ 0{,}60 \end{pmatrix}$, lo que implica que, a la larga, 40 porciento de los usuarios de dentífrico en el estudio usarán la marca A y 60 porciento usarpan la marca B. De hecho, es fácil comprobar que, una vez alcanzada esta distribución, nunca cambiará.

Un vector de estado x con la propiedad de que $PX = X$ se llama vector de estado estacionario.

En general, si P es la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces P tiene un vector de estado estacionario X. Esto es, existe un vector X tal que $PX = X$. Y esto no es otra cosa que decir que P tiene 1 como autovalor.

Proposición 1 *Si P es la matriz de transición de $n \times n$ para una cadena de Markov, entonces 1 es un autovalor de P.*

Y más aún, para la mayoría de las matrices de transición, todo autovalor λ satisface $|\lambda| \leq 1$ y el autovalor 1 es dominante; esto es, si $\lambda \neq 1$, entonces $|\lambda| < 1$. Una matriz se llama positiva si todas sus entradas son positivas, y una matriz cuadrada se llama regular si alguna de sus potencias es positiva.

Proposición 2 *Si P es la matriz de transición de $n \times n$ para una cadena de Markov y λ es un autovalor, entonces $|\lambda| \leq 1$. Si además P es reuglar y $\lambda \neq 1$ entonces $|\lambda| < 1$.*