ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9) 2024

1.3 Subespacios

Comenzamos esta sección con algunos ejemplos que motivarán la definición de la estructura de subespacio de un ev. Esto nos permitirá ampliar considerablemente los ev conocidos.

Aclaración: en general, cuando trabajemos con los espacios usuales (F^n, $F[X]$, etc.) los interpretaremos como F-ev con la suma y producto por escalar habituales, salvo que indiquemos lo contrario.

Ejemplos 1

1. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$. *Sea* $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset V$ *el plano xy. Tenemos que si* $v = (x, y, 0), u = (x', y', 0) \in U$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$,
   a) $v + u = (x + x', y + y', 0) \in U$,
   b) $\alpha v = (\alpha x, \alpha y, 0) \in U$.

   En particular, $\overline{0} = (0, 0, 0) \in U$. *Si chequeamos los axiomas de ev restantes, vemos que* U *es un ev con las operaciones suma y producto por escalar de* $\mathbb{R}^3$ *restringidas al plano xy.*
2. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$. *Sea ahora* $W = \{(x, y, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset V$ *el plano* $z = 2$. *¿Se verifican los axiomas de ev para la suma y producto por escalares restringidos a* W*?*
3. *Sea* $V = \mathbb{R}[x]$ *el ev de los polinomios. Consideremos* $U = \mathbb{R}_2[x]$ *los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes reales. Tenemos que* $U \subset V$, *y si chequeamos los axiomas de ev con las operaciones suma y producto por escalar restringidas, sabemos que* $\mathbb{R}_2[x]$ *es un ev.*
4. *Sea* $V = \mathbb{R}[x]$ *el ev de los polinomios. Consideremos* $W = \{p \in \mathbb{R}[x] : \; gr(p) = 2\}$. *¿Se verifican los axiomas de ev para la suma y producto por escalares restringidos a* W*?*
5. *Sea ahora* $V = \mathbb{R}^2$ *y consideremos el subconjunto* $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *con la suma definida según* $v + u = \overline{0}$ *y el producto por escalar definido para* $\alpha \in \mathbb{R}$ *por* $\alpha v = v$ *(EJERCICIO: chequear que con estas operaciones queda definido un* $\mathbb{R}$*-ev). ¿Es el mismo razonamiento que el anterior?*
6. *Tenemos también que* $\mathbb{C}^n$ *es un* $\mathbb{C}$*-ev y es un* $\mathbb{R}$*-ev, con las operaciones restringidas a este campo. ¿Es el mismo razonamiento que el anterior?*

Definición 1 *Sean* $(V, +, \cdot)$ *un* F*-ev y* $U \subset V$. *Decimos que* U *es un* ***F-subespacio vectorial de*** V *si con las operaciones restringidas es un* F*-ev.*

Observaciones 1 *En la definición de sev* U *de* V *se debe considerar:*

1. $U \subset V$,
2. *las operaciones suma y producto por escalar restringidas,*
3. *el mismo cuerpo.*

Notación: Escribiremos $U \subset V$ sev, sobreentendiendo el cuerpo.

En la práctica, cuando queremos ver si $U \subset V$ es un sev, lo primero que tenemos que chequear es si $\overline{0} \in U$. En muchos casos con este simple hecho descartamos la posibilidad de que lo sea. Si resulta verdadero, **debemos** chequear los 10 axiomas. O no tanto, en realidad algunos menos, como veremos en la siguiente caracterización.

Proposición 1 *Sea* V *un* F*-ev. Sea* $U \subset V$. *Tenemos que* $U \subset V$ *sev sii se satisfacen:*

1. *la suma es cerrada en U: $u, v \in U$ para todo $u, v \in U$,*
2. *el producto por escalar es cerrado en U $\alpha u \in U$ para todo $\alpha \in F$ y $u \in U$.*

Demostración: EJERCICIO.

Ejemplos 2 *Dejamos como EJERCICIO probar todos los ejemplos.*

1. *V F-ev. Los subespacios triviales o impropio son V y $\{\overline{0}\}$.*

   $\emptyset$ no es un sev de V.

   Si $\{\overline{0}\} \subsetneq U \subsetneq V$ sev se dice no trivial o propio.
2. *El plano xy es un sev de $\mathbb{R}^3$*
3. *Si $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ es un subcuerpo,*
$$U_b = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\},$$
   ¿para qué valores de $b \in \mathbb{F}$ se tiene que $U_b \subset \mathbb{C}^4$ sev?
4. *$C([0,1]) \subset \mathbb{F}^{[0,1]}$ sev.*
5. *$D(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sev (las funciones diferenciables).*
6. *$U_b = \{f : (0,3) \to \mathbb{R} :$ diferenciable y $f'(2) = b\} \subset \mathbb{R}^{(0,3)}$ sev sii $b \in \{....\}$.*
7. *$U = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty} : \lim_{j\to\infty} x_j = 0\} \subset \mathbb{C}^{\infty}$ sev.*
8. *¿Cuáles son todos los sev de $\mathbb{R}^2$? Los triviales: $\{\overline{0}\}$ y $\mathbb{R}^2$ y las rectas por el origen. Son los únicos, pero esto es más difícil de probar, lo veremos más adelante.*
9. *¿Cuáles son todos los sev de $\mathbb{R}^3$? Los triviales: $\{\overline{0}\}$ y $\mathbb{R}^3$ y las rectas y planos por el origen.*

Desafío 1 *En el último ejemplo, recordemos que una recta puede expresarse como intersección de dos planos. Pensar: ¿Ocurre en general que intersección de sev es sev? ¿Qué ocurre con la unión de sev? Ayuda: considerar la unión del eje x y del eje y.*

Spoiler: en el práctico se verá que en todo ev (no sólo en $\mathbb{R}^3$) la intersección de sev es, efectivamente un sev; que la unión de sev en general no es sev (la ayuda ya nos daba una pauta). Pero sí podremos definir un sev a partir de la unión: la suma de sev. De esto se trata la siguiente sección.

1.4 Suma de sev

En esta sección estudiaremos un concepto muy importante que utilizaremos a lo largo de toda la asignatura y que nos permitirá construír muchísimos ev y sev, proporcionándonos muchos ejemplos nuevos y sofisticados.

Nuevamente comenzaremos con ejemplos sencillos para empezar a entender qué queremos definir:

Ejemplos 3 1. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ el eje x y el eje y, respectivamente. Hemos visto que $U \cup W$ no es un sev, a pesar de que ambos son sev. Por otro lado, sabemos que $T = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, que es el plano xy, es un sev. ¿Cómo se relacionan los elementos del plano xy con los del eje x y el eje y? Bueno, es claro que todo elemento del plano es suma de un elemento del eje x y uno del eje y:*
$$(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0).$$
Y en este sentido podríamos escribir $U + W = T$. Consideremos ahora el sev $W' = \{(x, 2x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. ¿Podemos decir que todo elemento de T es suma de un elemento de U y uno de W'? Si, en efecto, $(x, y, 0) = (x - y/2, 0, 0) + (y/2, y, 0)$. En este caso, también tiene sentido $U + W' = T$.

2. *Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$. Sean $U_1 = \{ax+b : a, b \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{cx^2 : c \in \mathbb{R}\}$ y $U_3 = \{dx + dx^2 : d \in \mathbb{R}\}$. Tenemos que $U_1, U_2, U_3 \subset V$ sev (EJERCICIO!). Definimos $U = \{p = p_1 + p_2 + p_3 \in \mathbb{R}_2[x] : p_1 \in U_1, p_2 \in U_2, p_3 \in U_3\}$, es decir, el conjunto de todos los polinomios que se obtienen sumando un polinomio de cada espacio. Así, $U \subset V$ sev (EJERCICIO). ¿Qué más puede decir de U?.*

3. *En el primer ejemplo observemos que descompusimos cualquier vector del plano como suma de un vector en el eje x y un vector sobre el eje y, y esta elección de vectores es única: no podemos elegir otro par que resulte en el mismo vector del plano. En cambio, en el ejemplo de los polinomios, tenemos la siguiente situación: si denotamos por $o(x)$ al polinomio nulo, resulta*

$$o(x)_{\in U} = o(x)_{\in U_1} + o(x)_{\in U_2} + o(x)_{\in U_3},$$

es decir, lo escribimos como suma del polinomio nulo mirándolo en cada sev. Pero también tenemos que

$$o(x)_{\in U} = (1 \cdot x + 0)_{\in U_1} + (1 \cdot x^2)_{\in U_2} + (-x - x^2)_{\in U_3},$$

o sea, lo escribimos como suma de polinomios (al menos alguno de ellos no nulo) en cada sev. Esto nos dice que puede haber distintas formas de escribir a un mismo vector como suma de vectores de los sev.

La unicidad de escritura les sonará de otro concepto relacionado, pero no lo veremos hasta dentro de dos secciones. Por ahora lo tendremos en cuenta al hacer una distinción muy sutil entre definiciones: suma de sev y suma directa de sev. Antes de dar estas definiciones, hagamos un par de observaciones más:

En el primer ejemplo sumamos dos sev, y en el segundo sumamos tres. Haremos las definiciones para n cantidad de sev, PERO al ser conceptos difíciles **sugerimos fuertemente** escribirlas para $n = 2$ y para $n = 3$. Esto ayudará a reforzar los conceptos.

Definición 2 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$. Definimos el conjunto **suma** de $U_1, \dots, U_n$ como*

$$S = U_1 + \dots U_n := \{u_1 + \dots u_n \in V : u_i \in U_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n\} \subset V.$$

Proposición 2 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$ sev. Si S es el conjunto suma de $U_1, \dots, U_n$, entonces $S \subset V$ sev. Más aún, es el sev de V más chico que contiene a $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ en el sentido de que si $U \subset W \subset V$ sev entonces $S \subset W$.*

Demostración:

Desafío 2 *Intentar hacer la prueba.*

1. Veamos que $S \subset V$ sev. Para esto, sean $u = u_1 + \dots + u_n, w = w_1 + \dots + w_n \in S$, donde $u_i, w_i \in U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, y sea $\alpha \in F$. Entonces:

   a) $u + w = (u_1 + \dots + u_n) + (w_1 + \dots + w_n) = (u_1 + w_1) + \dots + (u_n + w_n) \in S$, puesto que cada U_i es sev con lo cual $u_i + w_i \in U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

   b) $\alpha u = \alpha \cdot (u_1 + \dots + u_n) = (\alpha \cdot u_1 + \dots + \alpha \cdot u_n) \in S$, por la misma razón.

   Por la caracterización de sev, sigue que $S \subset V$ sev.

2. Sea $U \subset W \subset V$ sev. Veamos que $S \subset W$. En efecto, si $u = u_1 + \dots + u_n \in S$ con $u_i \in U_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$ tenemos que $u_i \in U_i \subset U \subset W$ para todo $i = 1, \cdot, n$. Luego $S \subset W$.

Observaciones 2 *Bajo las hipótesis de la proposición anterior,*

1. *cada $U_i \subset S$ sev, $i = 1, \dots, n$;*

2. *$U \subset S$, aunque no necesariamente U es un sev;*

3. *si $U = S$ entonces U es un sev.*

Definición 3 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$ sev. Decimos que el sev suma $S = U_1 + \dots U_n$ es **suma directa** si para cada vector $u \in S$ existen únicos $u_1 \in U_1 \dots u_n \in U_n$ tales que $u = u_1 + \dots + u_n$. En tal caso, denotamos*

$$S = U_1 \oplus \dots \oplus U_n.$$

Ejemplos 4 *1. Sea $V = \mathbb{C}^{3\times 3}$. Sean los conjuntos:*

$$\begin{aligned}
T_s &= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \text{ triangular superior}\}\\
&= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \quad \forall i \leq j\},\\
T_{se} &= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \text{ triangular superior estricta}\}\\
&= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \quad \forall i < j\},\\
T_i &= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \text{ triangular inferior}\}\\
&= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \quad \forall i \geq j\},\\
T_{ie} &= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \text{ triangular inferior estricta}\}\\
&= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \quad \forall i > j\},\\
D &= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \text{ diagonal}\}\\
&= \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j\}.
\end{aligned}$$

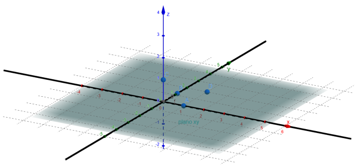
Cada uno de estos conjuntos es un sev de V (EJERCICIO). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{3\times 3} &= T_{se} \oplus D \oplus T_{ie},\\
\mathbb{C}^{3\times 3} &= T_s + T_i.
\end{aligned}$$

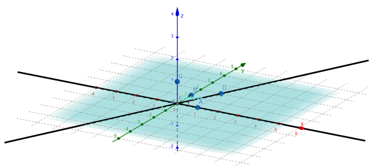
Además ***no es cierto que*** $\mathbb{C}^{3\times 3} = T_s \oplus T_i$.

2. Las siguientes gráficas de $\mathbb{R}^3$ y subespacios representan distintas sumas y sumas directas:

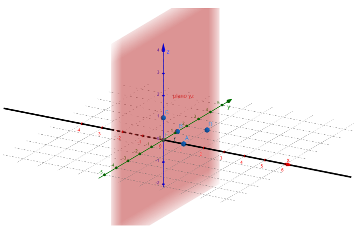
a) *En esta gráfica vemos pl xy = eje $x \oplus$ eje y:*



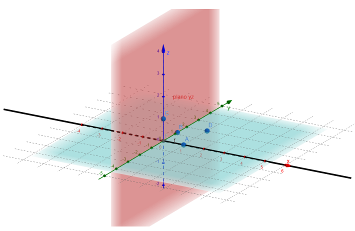
b) *En esta gráfica vemos pl xy = eje $x \oplus r$:*



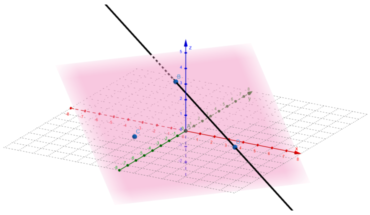
c) *En esta gráfica vemos $\mathbb{R}^3$ = eje $x \oplus$ pl yz:*



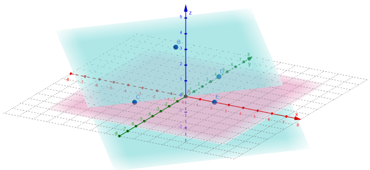
d) *En esta gráfica vemos $\mathbb{R}^3$ = pl xy + pl yz:*



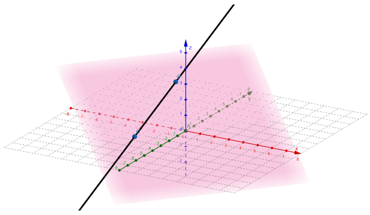
e) *En esta gráfica vemos* $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$.



f) *En esta gráfica vemos* $\mathbb{R}^3 = pl\ xy + \pi$.



g) *En esta gráfica vemos* $\pi = r + \pi$.



Desafío 3 *Conjeturar acerca de las diferencia entre los casos c y d, o entre los casos e, f y g del ejemplo anterior.*

La suma directa es una suma, pero no necesariamente un espacio suma es suma directa. Esta diferencia, como seguramente han conjeturado, se debe a la unicidad de escritura: ésta obliga a que los sev que sumamos tengan intersección trivial (no disjunta, trivial). Esto caracteriza la suma directa, como veremos en la siguiente proposición:

Proposición 3 *Sea* V *un* F*-ev y sean* $U, W \subset V$ *sev. Consideremos el subespacio suma* $S = U + W$. *Tenemos que* $S = U \oplus W$ *sii* $U \cap W = \{\overline{0}\}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) $S = U \oplus W$, sea $u \in U \cap W$. Como $\overline{0} = u + (-u) = -u + u$ y la escritura es única, debe ser $u = -u$, luego $u = \overline{0}$.

$\Leftarrow$) Tenemos que si $v = u + w = u' + w' \in S$ con $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Luego $\overline{0} = u - u' + w - w' \in U \cap W$, de modo que $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{\overline{0}\}$. Esto nos dice que $u = u'$ y $w = w'$, de modo que la escritura es única.

$\square$

Ejemplo 1 *Volviendo al ejemplo de los polinomios, tenemos que* U_1, U_2, U_3 *no se suman de manera directa, aunque si es cierto que* $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{\overline{0}\}$. *Esto no contradice la proposición anterior y nos da una pauta de cómo generalizar a una suma de más términos.*

Un poco más generalmente,

Proposición 4 *Sean* V *un* F*-ev, ,*$U_1, \dots U_n \subset V$ *sev y* $S = U_1 + \cdots + U_n$. *Entonces* S *es suma directa sii el vector* $\overline{0}$ *sólo se puede obtener sumando el elemento trivial de cada sev* $U_1, \dots, U_n$.

Demostración:

$\Rightarrow$) $S = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Si $\overline{0} = u_1 + \oplus + u_n \in S$, por unicidad de escritura debe ser cada $u_i = \overline{0}$, $i = 1, \dots, n$.

$\Leftarrow$) Sea $u = u_1 + \oplus + u_n = v_1 + \cdots + v_n \in S$ con $u_i, v_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$. Entonces $\overline{0} = (u_1 - v_1) + \cdots + (u_n - v_n)$ y por hipótesis debe ser $u_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Luego la suma es directa.

□

Ejercicio 1 *Escribir las definiciones de suma y suma directa para* $n = 2$ *y para* $n = 3$.