Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

## 3.6 Formas Bilineales

Veremos para finalizar el capítulo de Producto Interno una generalización, que será útil para muchas aplicaciones. Vimos que las transformaciones lineales nos permiten describir objetos de naturaleza lineal, como por ejemplo rectas en el plano y planos y rectas en el espacio. A partir de la noción de producto interno podemos dar una mirada geométrica a entes algebraicos, y con las formas bilineales podremos dar una descripción de objetos de naturaleza cuadrática, como por ejemplo curvas cónicas en el plano y superficies cuádricas en el espacio.

**Definición 1** *Sea $V$ un $F-$ev. Una **forma bilineal** es una aplicación $\mathcal{B}: V \times V \to F$ que es lineal en ambas variables, esto es para todos $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in F$:*

1. $\mathcal{B}(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\mathcal{B}(u, w) + \beta\mathcal{B}(v, w)$,
2. $\mathcal{B}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\mathcal{B}(u, w) + \beta\mathcal{B}(u, w)$.

**Desafío 1** *Los productos internos reales **son** formas bilineales, no así los productos internos complejos. ¿Por qué?*

**Ejemplos 1**

1. *$V$ $F$-ev, $T_1, T_2 \in V^*$. Definimos el producto tensorial de $T_1$, $T_2$ como $\mathcal{B}: V \times V \to F$ tal que $\mathcal{B}(u, v) = T_1(u)T_2(v)$. $\mathcal{B}$ es bilineal (EJERCICIO).*
2. ***Very Important Example 1** $A \in F^{n\times n}$, $\mathcal{B}: F^n \times F^n \to F$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = xAy^t$ es una forma bilineal (EJERCICIO).*
3. *$\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$ es un pi (EJERCICIO). Ashuda-spoiler: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*
4. *$\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ es un pi (EJERCICIO). Esta forma bilineal se llama forma simpléctica y la usó hace 100 años Werner Heisenberg que luego ganó el Nobel de Física por la creación de la mecánica cuántica. En $\mathbb{C}^n$ esta forma bilineal se expresa como $\mathfrak{Im}(z\overline{w})$.*

En un espacio vectorial de dimensión finita, las formas bilineales pueden describirse matricialmente:

**Definición 2** *Sea $V$ un $F$-ev de dimensión finita $\dim V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $V$ y sea $\mathcal{B}: V \times V \to F$ una forma bilineal. La matriz de $\mathcal{B}$ en la base $B$ es la matriz $[\mathcal{B}]_B = (\mathcal{B}(v_i, v_j)) \in F^{n\times n}$.*

**Ejemplo 1** *Si $B$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, en el ejemplo 3 anterior sigue que $[\mathcal{B}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

La matriz de una forma bilineal en una base nos permite calcular en coordenadas:

**Proposición 1** *Sea $V$ un $F$-ev de dimensión finita $\dim V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $V$ y sea $\mathcal{B}: V \times V \to F$ una forma bilineal. Entonces para cada $x, y \in V$,*

$$\mathcal{B}(x, y) = [x]_B[\mathcal{B}]_B[y]^t_B.$$

**Demostración:** $x, y \in V$, $x = \sum_i \alpha_i v_i$, $y = \sum_j \beta_j v_j$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x,y) =& \mathcal{B}\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_i\right)\\ =& \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j)\\ =& \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[x]_B[\mathcal{B}]_B[y]_B^t =& (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\left(\mathcal{B}(v_i, v_j)\right)(\beta_1, \ldots, \beta_n)^t\\ =& \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \mathcal{B}(v_i, v_j)\beta_j\right)\\ =& \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j).\end{aligned}$$

$\square$

**Desafío 2** *Con la notación de la proposición anterior, probar que si $A \in F^{n\times n}$ es tal que para todo $x, y \in V$, $[x]_B A[y]_B^t = \mathcal{B}(x,y)$. Ayuda: calcular en los elementos de la base.*

Veremos ahora cómo cambiar la base:

**Desafío 3** *Tratar de enunciar cómo sería cambiar la base ANTES de leer la siguiente proposición.*

**Proposición 2** *Sea $V$ un $F$-ev de dimensión finita $\dim V = n$. Sean $B_1, B_2$ dos bases de $V$ y sea $\mathcal{B} : V \times V \to F$ una forma bilineal. Entonces*

$$[\mathcal{B}]_{B_2} = C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}.$$

**Demostración:** Llamemos $A = C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}$. Veamos que $[x]_{B_2}A[y]^t_{B_2} = \mathcal{B}(x,y)$:

$$\begin{aligned}[x]_{B_2}A[y]^t_{B_2} =& [x]_{B_2}C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}[y]^t_{B_2}\\ =& (C_{B_2B_1}[x]_{B_2})^t[\mathcal{B}]_{B_1}(C_{B_2B_1}[y]^t_{B_2})\\ =& [x]_{B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}[y]^t_{B_1} = \mathcal{B}(x,y).\end{aligned}$$

$\square$

**Ejemplo 2** *Volviendo al ejemplo, si $B_1$ es la base canónica $B_2 = \{(1,1),(1,2)\}$, tenemos que $C^t_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $[\mathcal{B}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.*

## Formas bilineales simétricas y antisimétricas

**Definición 3** *Sea $V$ un $F$-ev. Una forma bilineal $\mathcal{B}$ se dice*

- ***simétrica*** *si $\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x)$ para todo $x, y \in V$,*
- ***antisimétrica*** *si $\mathcal{B}(x,y) = -\mathcal{B}(y,x)$ para todo $x, y \in V$.*

Un producto interno real es una forma bilineal simétrica, claramente. Construiremos más ejemplos a partir de la siguiente proposición:

**Proposición 3** *Sea $V$ un $F$-ev de dimensión finita $\dim V = n$. Sea $B$ una base de $V$ y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal. Entonces:*

- *$\mathcal{B}$ es **simétrica** sii $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica,*
- *$\mathcal{B}$ es **antisimétrica** sii $[\mathcal{B}]_B$ es antisimétrica.*

**Demostración:** Veamos la caracterización matricial de formas bilineales simétricas. La otra queda como

**Desafío 4** *Probar la caracterización matricial de formas bilineales antisimétricas.*

Supongamos que $\mathcal{B}$ es una fbs. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$. Entonces,

$$([\mathcal{B}]_B)_{ij} = \mathcal{B}(v_i, v_j) = \mathcal{B}(v_j, v_i) = ([\mathcal{B}]_B)_{ji},$$

luego la matriz $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica. Recíprocamente, si la matriz $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x,y) =& [x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t \\ =& ([x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t)^t \\ =& [y]_B[\mathcal{B}]^t[x]_B^t \\ =& [y]_B[\mathcal{B}][x]_B^t = \mathcal{B}(y,x),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad sigue de que $[x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t \in F$.

$\square$

## Formas bilineales no degeneradas

**Definición 4** *Sea $V$ un $F$-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica. Llamamos **núcleo** al conjunto*

$$ker(\mathcal{B}) = \{x \in V : \mathcal{B}(x,y) = 0 \,\forall\, y \in V\}.$$

*Decimos que $\mathcal{B}$ es **no degenerada** si su **núcleo** es trivial.*

**Desafío 5** *¿El núcleo de una forma bilineal en $V$ es un sev de $V$?*

Otra forma de enunciar la definición anterior es la siguiente: $\mathcal{B}$ es no degenerada sii no existe $x \in V$, $x \neq \overline{0}$ tal que $\mathcal{B}(x,y) = 0$ para todo $y \in V$.

**Definición 5** *Sea $V$ un $F$-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal antisimétrica. Decimos que $\mathcal{B}$ es **no degenerada** si $\mathcal{B}(x,y) = 0$ para todo $y \in V$ implica que $x = \overline{0}$.*

Una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada se llama *forma simpléctica.*

## Formas cuadráticas

**Definición 6** *Sea $V$ un $F$-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica. Se define la **forma cuadrática** $\mathcal{Q}$ asociada a $\mathcal{B}$ como $\mathcal{Q} : V \to F$ definida por $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x,x)$.*

**Observaciones 1**

1. *$\mathcal{Q}$ no es lineal, luego no es un elemento de $V^*$. Más aún,*

$$\mathcal{Q}(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \mathcal{Q}(x) + 2\alpha\beta\mathcal{B}(x,y) + \beta^2\mathcal{Q}(y).$$

2. *Si $F \subset \mathcal{C}$ subcuerpo, $\mathcal{B}$ queda completamente determinada por $\mathcal{Q}$. En efecto, tenemos la siguiente identidad de polarización*

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{1}{4}\mathcal{Q}(x+y) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}(x-y).$$

   ***Desafío 6*** *Probar la identidad de polarización.*

**Ejemplos 2**

- *En $V = \mathbb{R}^n$, el producto interno usual es una fbsnd y su forma cuadrática asociada es la norma al cuadrado.*
- *En $V = F^n$, si $A \in F^{n\times n}$ y $\mathcal{B}_A(x,y) := xAy^t$ tiene asociada la forma cuadrática $\mathcal{Q}_A(x) := xAx^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.*

- ***Desafío 7*** *En* $V = \mathbb{R}^2$ *si* $\mathcal{Q}(x) := ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, *hallar* $\mathcal{B}$ *fbs tal que* $\mathcal{Q}$ *es su forma cuadrática asociada (usando la identidad de polarización). Probar además que es no degenerada sii* $b^2 - 4ac \neq 0$.

  *Sean* $b = 0$, $a = 1$ *y* $c = \frac{1}{4}$. *El conjunto* $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{Q} = 1$ *describe una elipse centrada en el origen.*

- *Sea* $V = C^{2\times 2}$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

  *Sea* $H = \{A \in C^{2\times 2} : A = A^*\}$ *(recordemos que las* $A^* = \overline{A^t}$ *y si* $A = A^*$ *decimos que* $A$ *es hermítica compleja). Si definimos* $\mathcal{Q} : H \to \mathbb{R}$ *por* $\mathcal{Q}(A) = det(A)$, *tenemos que* $\mathcal{Q}$ *es una forma cuadrática.*

**Observaciones 2** *Si* $\mathbb{B}$ *es una forma bilineal, no tenemos asociada una forma cuadrática.*

**Desafío 8** *Si* $V$ *es un* $F$*-ev con* $F \subset \mathbb{C}$. *Probar que toda forma bilineal se descompone en la suma de una forma bilineal simétrica con una antisimétrica.*

## Definición

La clasificación de las fbs reales se usan para clasificar extremos locales de funciones multivaluadas:

**Definición 7** $V$ *un* $\mathbb{R}$*-ev.* $\mathcal{B}$ *fbs. Decimos que* $\mathcal{B}$ *es*

- ***definida positiva*** *si* $\mathbb{B}(x, x) > 0$ *para todo* $x \neq \overline{0}$,
- ***semidefinida positiva*** *si* $\mathbb{B}(x, x) \geq 0$ *para todo* $x \neq \overline{0}$,
- ***definida negativa*** *si* $\mathbb{B}(x, x) < 0$ *para todo* $x \neq \overline{0}$,
- ***semidefinida negativa*** *si* $\mathbb{B}(x, x) \leq 0$ *para todo* $x \neq \overline{0}$,
- ***indefinida*** *si no vale ninguna de las anteriores.*

Si $F = \mathbb{R}$, una forma bilineal, definida positiva, simétrica y no degenerada es un producto interno.