
Planaridad

Grafos planares

Para el diseño de cierto circuito electrónico, se pretende decidir de qué manera disponer las distintas componentes y los cables o conexiones entre ellas. Si estas conexiones se cruzan, se pueden ocasionar problemas en el funcionamiento del circuito. Se desea, entonces, determinar si es posible hallar una disposición en la cual no haya cruces entre los cables.

Esta situación se puede modelar mediante un grafo donde los vértices representan las componentes del circuito, y las aristas aquellas conexiones que debemos realizar entre ellas.

Lo que buscamos es determinar si es posible encontrar una manera de dibujar el grafo en el plano de manera que las aristas no se intersequen. A un grafo con esta característica, es decir, que podemos dibujar en el plano de manera que sus aristas no se crucen, lo llamaremos grafo *planar*. Para formalizar esta definición, vamos a precisar esta noción de “dibujar en el plano”.

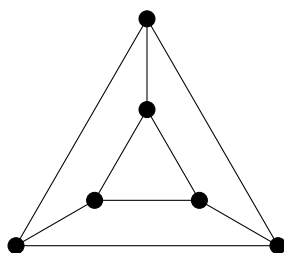
Definición 1. Una *curva* es la imagen de una función continua del intervalo $[0, 1]$ al plano \mathbb{R}^2 . Diremos que es una *u, v -curva* cuando comienza en u y termina en v . Una *u, v -curva* es *cerrada* si $u = v$, y es *simple* si no repite puntos, excepto quizás los extremos.

Un *dibujo* de un grafo G es una función f definida en $V(G) \cup E(G)$ que le asigna a cada vértice v un punto $f(v)$ en el plano y asigna a cada arista con extremos u y v una $f(u), f(v)$ -curva. Además, las imágenes de vértices distintos son distintas. Dadas dos aristas e y e' , un punto en $f(e) \cap f(e')$ que no es un extremo en común diremos que es un *cruce*.

Observación 2. Dado un dibujo de un grafo, moviendo ligeramente las aristas podemos asegurar que no hay tres aristas que tengan un punto interior en común, que ninguna arista pasa por un vértice que no sea su extremo y que dos aristas no sean tangentes. Además, si dos aristas se cruzan más de una vez, entonces es posible modificarlas reduciendo el número de cruces, por lo que requerimos que las aristas se crucen a lo sumo una vez. Consideramos solamente dibujos con estas propiedades.

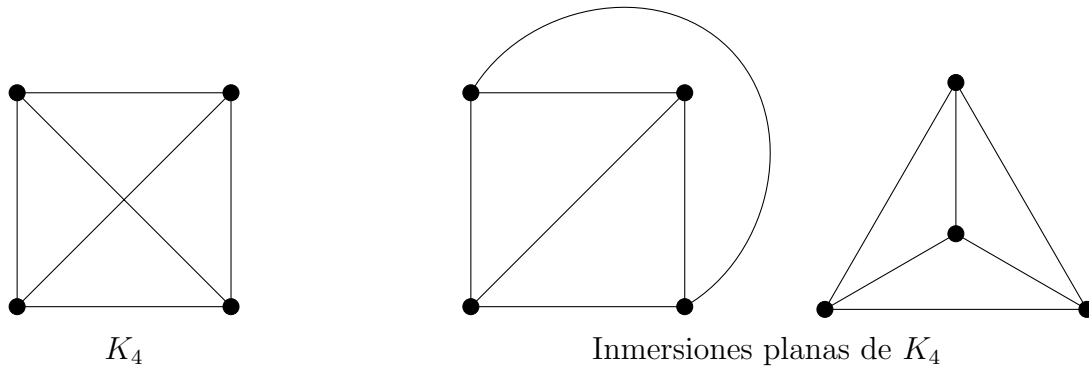
Definición 3. Un grafo G es *planar* si admite un dibujo sin cruces. Un tal dibujo es una *inmersión plana* de G . Diremos que G es un *grafo plano* si es un grafo planar dado con una inmersión plana particular.

Ejemplo. El siguiente grafo G es un grafo plano.



G

Ejemplo. K_4 es un grafo planar. Podemos considerar inmersiones planas distintas para el mismo grafo.



Ejemplo. ■ El camino P_n es planar para todo $n \in \mathbb{N}$.

- El ciclo C_n es planar para todo $n \geq 3$.
- El grafo rueda W_n es planar para todo $n \geq 3$.

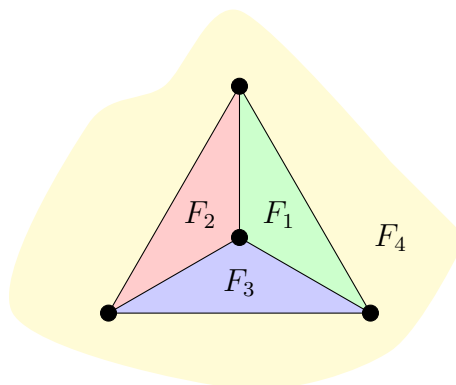
Pregunta. ¿Para qué valores de $n, m \in \mathbb{N}$ son los grafos K_n y $K_{m,n}$ planares?

Observación 4. Dado un grafo G que no es simple, i.e. que tiene aristas múltiples y/o bucles, si G' es el grafo simple subyacente, i.e. el grafo que se obtiene borrando los bucles y borrando las aristas repetidas, resulta que G es planar si y solamente si G' es planar.

Dado un grafo planar, una inmersión plana determina una partición de los puntos del plano, en “regiones”, que jugarán un papel fundamental en el estudio de este tipo de grafos.

Definición 5. Un *conjunto abierto* en el plano es un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que para cada $p \in U$, existe un valor $\varepsilon > 0$ de manera que todos los puntos del plano que estén a distancia menor a ε de p , también están en U . Una *región* es un conjunto abierto U tal que para cada par de puntos u y v de U , hay una u, v -curva contenida en U . Las *caras* de un grafo plano son las regiones maximales del plano que no contienen puntos que sean imágenes del dibujo de G .

Ejemplo. En la siguiente inmersión plana de K_4 , nos quedan determinadas 4 caras.



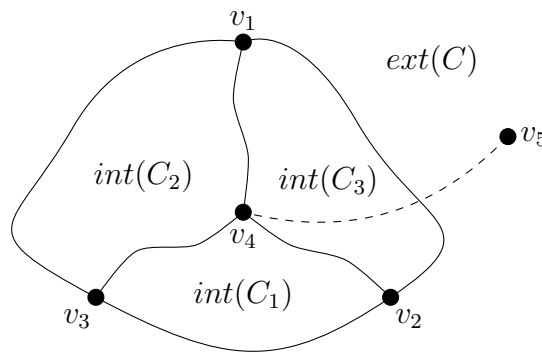
Todo grafo plano G tiene una cara no acotada, que llamaremos *cara exterior*. Las caras que define G son disjuntas dos a dos. Y dos puntos p y q del plano están en la misma cara F si y sólo si existe una p, q -curva totalmente contenida en F .

En un grafo plano, todo ciclo está representado por una curva cerrada y simple. Un resultado conocido que utilizaremos, es el *Teorema de la curva de Jordan*, que nos dice que toda curva cerrada simple C divide el plano en dos regiones: una acotada que llamaremos el interior de C , $int(C)$, y una región no acotada, que llamaremos exterior de C , y denotamos $ext(C)$. Además, si p y q son dos puntos tales que $p \in int(C)$ y $q \in ext(C)$, entonces toda p, q -curva interseca a C .

Proposición 6. K_5 no es planar.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que K_5 sí es planar. Sea G una inmersión plana de K_5 , con vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Como G es un grafo completo, cualquier par de vértices están conectados por una arista. Consideremos el ciclo $C : v_1, v_2, v_3, v_1$. C es una curva cerrada simple en el plano. Entonces, el vértice v_4 debe estar en $int(C)$ o en $ext(C)$.

Si $v_4 \in int(C)$. Luego, las aristas v_1v_4 , v_2v_4 y v_3v_4 también deben estar en $int(C)$. Consideremos ahora los ciclos $C_1 : v_2v_3v_4v_2$, $C_2 : v_3v_1v_4v_3$ y $C_3 : v_1v_2v_4v_1$.



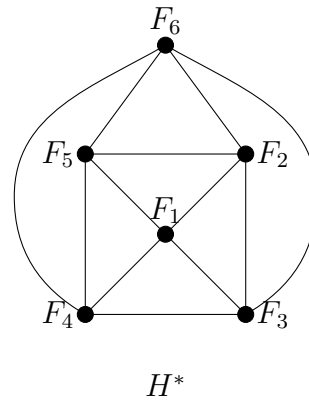
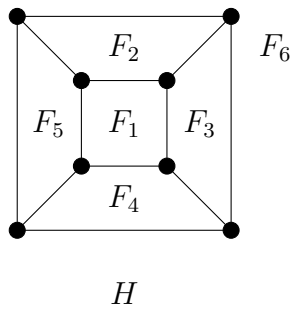
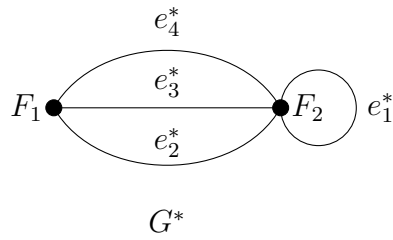
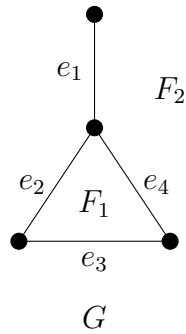
Observemos que $v_i \in ext(C_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$. Además, como $v_iv_5 \in E(G)$ para cada $i = 1, 2, 3$, entonces v_5 también está en $ext(C_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$. Luego, resulta que $v_5 \in ext(C)$. Tenemos $v_4 \in int(C)$, $v_5 \in ext(C)$, $v_4v_5 \in E(G)$. Entonces, la arista v_4v_5 interseca al ciclo C . Pero esto contradice la planaridad de G .

Si $v_4 \in ext(C)$, con un razonamiento similar, llegamos a que $v_4 \in ext(C)$, $v_5 \in int(C)$ y $v_4v_5 \in E(G)$. Luego, la arista v_4v_5 interseca al ciclo C , lo que contradice la planaridad de G . En cualquier caso, llegamos a una contradicción que surge de suponer que K_5 no es planar. Por lo tanto, queda demostrado el enunciado. \square

Grafos duales

Definición 7. Dado un grafo plano G , el *grafo dual* G^* es un grafo plano que tiene como conjunto de vértices a las caras de G , y por cada arista $e \in E(G)$ que está en la frontera de las caras X de un lado e Y del otro, tenemos la arista $e^* = XY \in E(G^*)$.

Ejemplo. Consideremos G y H los grafos *paw* y Q_3 respectivamente. Ambos grafos son planares. A continuación damos una inmersión plana de cada uno de ellos, y a partir de dicha inmersión construimos sus duales G^* y H^* .

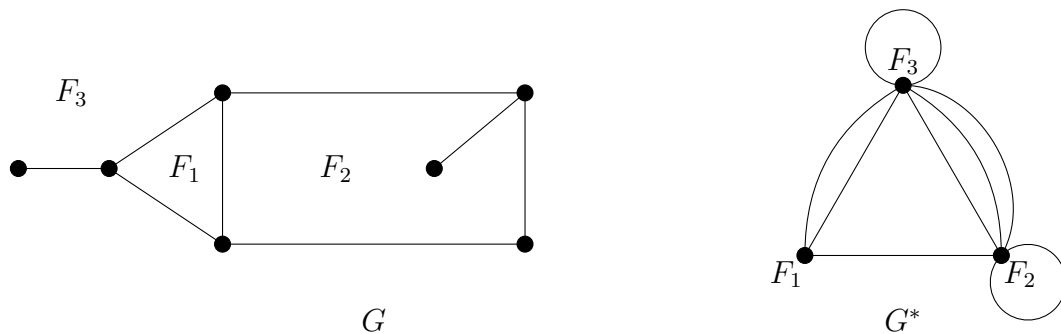


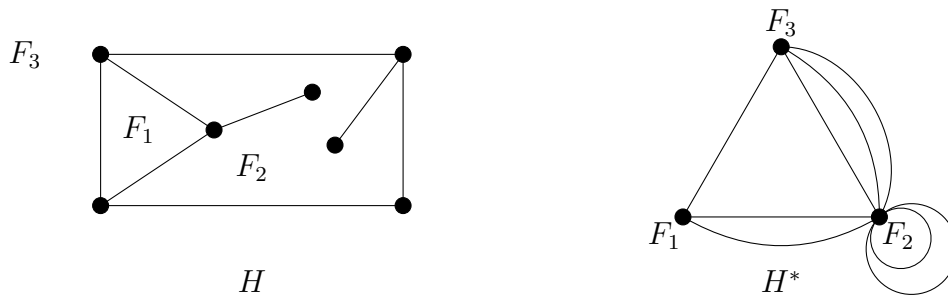
Observación 8. El grafo dual de un grafo plano simple G no necesariamente es simple.

- Si v es un vértice de grado 1 que limita con una cara F , entonces F tiene un bucle en G^* .
- Si v es un vértice de grado 2 en la frontera de dos caras F_1 y F_2 , entonces en G^* hay aristas múltiples conectando F_1 y F_2 .

Observación 9. Si G es un grafo plano conexo, entonces G^* admite una inmersión plana de manera que su dual, es decir $(G^*)^*$ sea isomorfo a G .

Ejemplo. Dos inmersiones planas distintas de un mismo grafo planar pueden tener grafos duales que no son isomorfos. Por ejemplo consideremos las siguientes inmersiones planas G y H de un mismo grafo y sus grafos duales G^* y H^* .

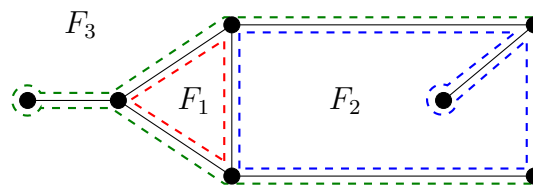




Si un grafo plano es conexo, entonces la frontera de cada cara es un camino cerrado. Lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 10. Sea G un grafo plano y F una cara de G . La *longitud* de F , que notaremos $long(F)$, es la longitud del camino cerrado más corto que contenga a todas las aristas que limiten con la cara F .

Ejemplo. En el grafo G del ejemplo anterior



tenemos que $long(F_1) = 3$, $long(F_2) = 6$ y $long(F_3) = 7$. Además, notemos que el borde o frontera de la cara F_1 es un ciclo, mientras que la frontera de las caras F_2 y F_3 no lo son.

Observación 11. En un grafo plano G , la longitud de una cara F coincide con el grado del vértice correspondiente a F en el grafo dual G^* . Esto es,

$$long(F) = d_{G^*}(F)$$

En efecto, por cada arista e que está en la frontera de la cara F , tenemos que e contribuye en una unidad al grado de F en el grafo dual G^* si e separa F de otra cara del grafo, mientras que si e limita a ambos lados con la cara F , contribuye en dos unidades tanto al grado de F en G^* como a la longitud de la cara F .

Proposición 12. Si G es un grafo plano con caras F_1, \dots, F_f , entonces $\sum_{i=1}^f long(F_i) = 2|E(G)|$.

Demostración. Sea G un grafo plano con caras F_1, \dots, F_f . Consideremos el grafo dual G^* . Por un lado, tenemos que $|E(G)| = |E(G^*)|$. Por otro lado, la longitud de cada cara F_i de G coincide con el grado del vértice F_i en G^* . Luego, tenemos

$$\sum_{i=1}^f long(F_i) = \sum_{i=1}^f d_{G^*}(F_i) = 2|E(G^*)| = 2|E(G)|.$$

□

Fórmula de Euler

Teorema 13 (Fórmula de Euler). Si G es un grafo plano conexo con n vértices, m aristas y f caras, entonces $n - m + f = 2$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción en la cantidad de vértices n .

Caso base. $n = 1$.

El grafo G tiene un único vértice v . Si $m = 0$, entonces hay una única cara que es la cara exterior y tenemos $n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$.

Si G tiene aristas, estas son bucles, cada uno de los cuales tiene como imagen en la inmersión plana una curva simple cerrada. Si trazamos de a uno estos bucles, por el Teorema de la curva de Jordan, cada uno de ellos estará contenido en una cara que dividirá en dos nuevas caras. Así, cada una de las aristas aumenta en 1 la cantidad de caras. Es decir, $f = m + 1$. Resulta entonces $n - m + f = 1 - m + m + 1 = 2$.

Hipótesis inductiva. Supongamos que el resultado es válido para todo grafo plano conexo con a lo sumo n vértices.

Paso inductivo. Sea G un grafo plano conexo con $n + 1$ vértices, m aristas y f caras. Como G es conexo y tiene más de un vértice, existe al menos una arista $e = uv$ que no es un bucle. Consideremos el grafo G' que se obtiene al contraer la arista e . Es decir, el grafo que se obtiene borrando los vértices u y v , agregando un nuevo vértice w , por cada arista xu o xv de G , agregamos una arista xw a G' y por cada arista repetida uv un bucle en w . Observemos que el grafo resultante G' es también un grafo plano con n' vértices, m' aristas y f' caras. Además, notemos que este procedimiento no modifica la cantidad de caras (sólo reduce la longitud de aquellas caras que tenían a la arista e en su frontera), pero reduce la cantidad de aristas y vértices de G en una unidad. Es decir, $n' = (n + 1) - 1$, $m' = m - 1$ y $f' = f$. Aplicando la hipótesis inductiva para G' , obtenemos

$$2 = n' - m' + f' = (n + 1) - 1 - (m - 1) + f = (n + 1) - m + f$$

Luego, para todo grafo plano conexo de n vértices, m aristas y f caras, vale $n - m + f = 2$. \square

Observación 14. ■ Si G es un grafo planar, entonces por la fórmula de Euler, toda inmersión plana de G tiene la misma cantidad de caras.

■ La fórmula de Euler no es cierta para grafos no conexos.

Ejercicio. Probar que si G es un grafo plano no conexo con n vértices, m aristas, f caras y k componentes conexas, entonces $n - m + f = k + 1$.

Teorema 15. Si G es un grafo simple planar con al menos 3 vértices, entonces

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Demostración. Sea G un grafo simple planar con $|V(G)| \geq 3$, y consideremos una inmersión plana del mismo. Supongamos en primer lugar que G es conexo. Luego, tenemos que si f es la cantidad de caras de G , entonces vale la fórmula de Euler

$$|V(G)| - |E(G)| + f = 2.$$

Por otro lado, observemos que como $|V(G)| \geq 3$, cada cara de G tiene longitud al menos 3. Entonces, si F_1, \dots, F_f son las caras de G , tenemos

$$2|E(G)| = \sum_{i=1}^f \underbrace{\text{long}(F_i)}_{\geq 3} \geq 3f.$$

O, equivalentemente, $f \leq \frac{2}{3}|E(G)|$. Luego, nos queda

$$2 = |V(G)| - |E(G)| + f \leq |V(G)| - |E(G)| + \frac{2}{3}|E(G)| = |V(G)| - \frac{1}{3}|E(G)|$$

Es decir, $|V(G)| - \frac{1}{3}|E(G)| \geq 2$, o lo que es lo mismo

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Si G no es conexo, observemos que podemos agregar sucesivamente aristas conectando componentes conexas distintas sin perder la planaridad, y así obtener un nuevo grafo G' planar y conexo con $|E(G')| > |E(G)|$ y $|V(G')| = |V(G)|$ con lo cual

$$|E(G)| < |E(G')| \leq 3|V(G')| - 6 = 3|V(G)| - 6.$$

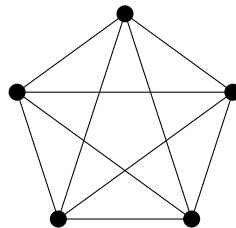
□

Corolario 16. Si G es un grafo planar, entonces existe un vértice $v \in V(G)$ con $d(v) \leq 5$.

Demostración. Ejercicio.

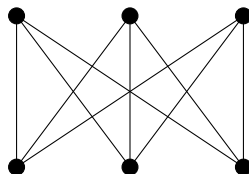
□

Ejemplo. Notemos que K_5 tiene 5 vértices y 10 aristas. Si K_5 fuera planar, entonces por el Teorema 15, tendríamos $|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$. Pero $|E(K_5)| = 10 > 9 = 3|V(K_5)| - 6$. Por lo tanto, K_5 no es planar.



Ejercicio. Probar que si G es un grafo simple planar con al menos 3 vértices y además es K_3 -free, entonces $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Ejemplo. Notemos que $K_{3,3}$ tiene 6 vértices y 9 aristas. Vale $|E(K_{3,3})| = 9 \leq 12 = 3|V(K_{3,3})| - 6$, pero esto no es suficiente para decidir si $K_{3,3}$ es planar. Observemos que al ser $K_{3,3}$ un grafo bipartito, no tiene ciclos impares como subgrafos. En particular, es K_3 -free. Si $K_{3,3}$ fuera planar, entonces por el Ejercicio anterior, tendríamos $|E(K_{3,3})| \leq 2|V(K_{3,3})| - 4$. Pero $|E(K_{3,3})| = 9 > 8 = 2|V(K_{3,3})| - 4$. Por lo tanto, $K_{3,3}$ no es planar.



Caracterización de grafos planares

Ejemplo. Consideremos el grafo completo K_6 . Notemos que al borrar cualquier vértice, obtenemos a K_5 como subgrafo inducido de K_6 . Si K_6 fuese planar, a partir de una inmersión plana de K_6 borrando un vértice cualquiera y las aristas incidentes en él, obtendríamos una inmersión plana de K_5 . Pero K_5 no es planar. Por lo tanto, tampoco lo es K_6 .



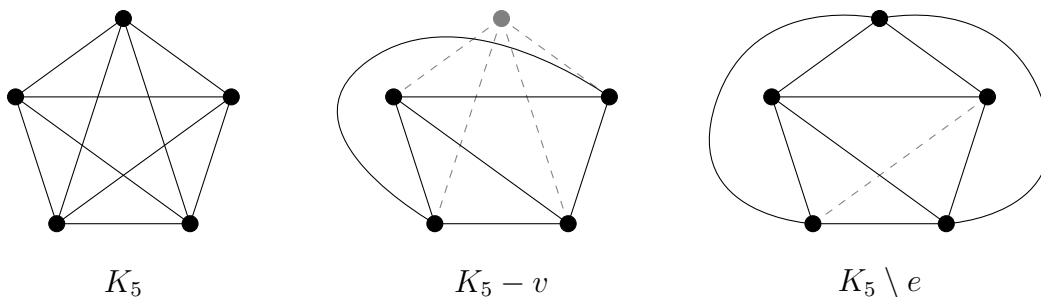
Con un razonamiento similar podemos probar que K_n no es planar para $n \geq 5$.

Proposición 17. Si G es un grafo planar, entonces todo subgrafo de G es planar.

Demostración. Ejercicio. □

Ya hemos visto, por ejemplo, que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planares. Luego, todo grafo que tenga a alguno de ellos como subgrafo inducido no es planar. Es decir, K_5 y $K_{3,3}$ son *estructuras prohibidas* para los grafos planares. Cabe preguntarnos si son las más chicas, o las únicas, e incluso si es posible describir todas las estructuras prohibidas “minimales”.

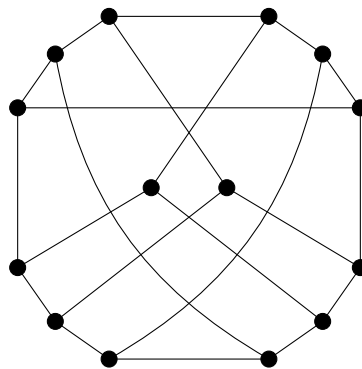
Ejemplo. Observemos que si a K_5 le borramos una arista o un vértice, entonces el grafo resultante es planar.



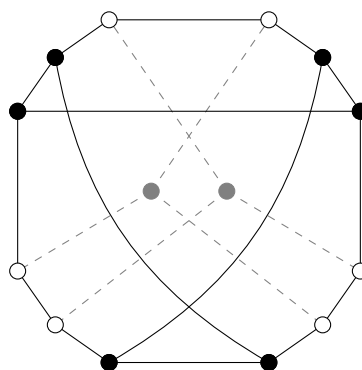
Ejercicio. Probar que $K_{3,3} - v$ y $K_{3,3} \setminus e$ son grafos planares para todo vértice $v \in V(K_{3,3})$ y toda arista $e \in E(K_{3,3})$.

Ejercicio. Concluir que todo subgrafo de K_5 o de $K_{3,3}$ es planar.

Ejemplo. Consideremos el siguiente grafo G . Queremos determinar si es o no un grafo planar.



Observemos que si borramos los dos vértices centrales y las aristas incidentes en ellos, obtenemos un subgrafo H con 6 vértices de grado 2 y 6 vértices de grado 3. Este subgrafo tiene una particularidad. Si bien no es isomorfo a $K_{3,3}$, podemos trazar un dibujo de $K_{3,3}$ que pase por los vértices y aristas de este subgrafo, que tendrá como vértices los 6 vértices de grado 3.

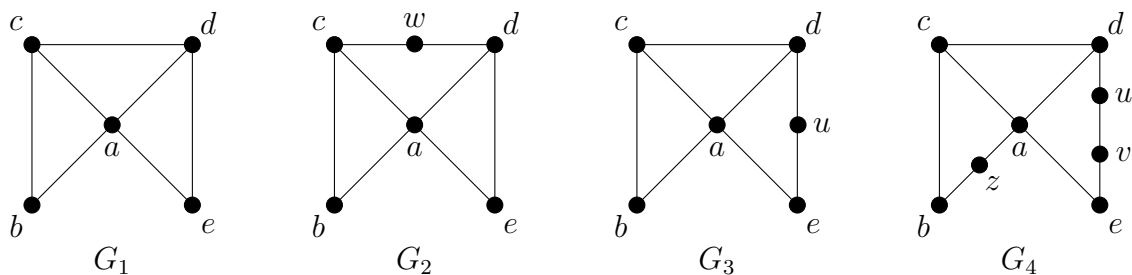


Si G fuera planar, entonces a partir de una inmersión plana de G , hallaríamos una inmersión plana de $K_{3,3}$. Como esto no es posible, G no es planar.

Para formalizar la situación del ejemplo anterior, introducimos la siguiente definición.

Definición 18. Sea G un grafo sin lazos y con al menos una arista. Diremos que un grafo H se obtiene por una *subdivisión* de una arista $e = uv$ de G , si H se obtiene a partir de G borrando la arista e y agregando un nuevo vértice w conectándolo a u y v .

Ejemplo. Consideremos los siguientes grafos.



G_2 se obtiene a partir de G_1 mediante una subdivisión de la arista cd . G_3 se obtiene a partir de G_1 mediante una subdivisión de la arista de . G_4 se obtiene a partir de G_3 subdividiendo la arista ue y a continuación subdividiendo la arista ab .

Si G' se obtiene a partir de G mediante la subdivisión de una arista de G , entonces tenemos que $|V(G')| = |V(G)| + 1$ y $|E(G')| = |E(G)| + 1$.

Definición 19. Dos grafos G_1 y G_2 son *homeomorfos* si ambos se obtienen a partir de un mismo grafo sin lazos mediante una sucesión de subdivisiones de aristas.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, cada par de grafos es un par de grafos homeomorfos, ya que todos se obtienen a partir de G_1 mediante una sucesión de subdivisiones de aristas.

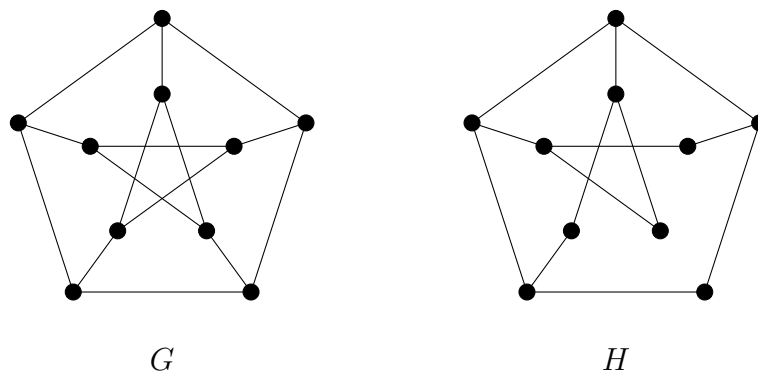
Proposición 20. Un grafo G es planar si y sólo si todo grafo homeomorfo a G es planar.

Demostración. Ejercicio. □

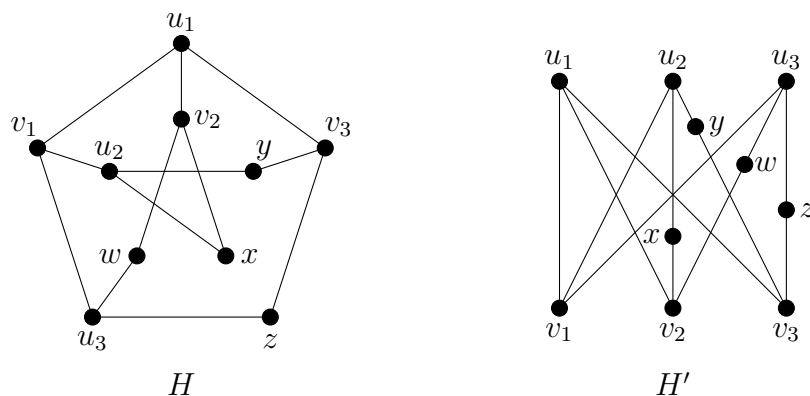
Teorema 21 (Kuratowski). Un grafo G es planar si y sólo si no tiene ningún subgrafo que sea homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Ejemplo. Queremos determinar si el grafo de Petersen es o no un grafo planar. Para probar que es planar, nos basta con dar una inmersión plana. Para probar que no es planar, por el *teorema de Kuratowski*, nos basta con encontrar un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Sea G el grafo de Petersen, y consideremos el siguiente subgrafo H (no inducido) de G .



Notemos que H es homeomorfo a $K_{3,3}$. En efecto, si consideramos a $K_{3,3}$ con conjunto de vértices $V(K_{3,3}) = \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ y aristas $E(K_{3,3}) = \{u_i v_j : i, j \in [3]\}$, y H' es el grafo que se obtiene a partir de $K_{3,3}$ subdividiendo, sucesivamente, las aristas $u_2 v_2$, $u_2 v_3$, $u_3 v_2$ y $u_3 v_3$, podemos ver que H y H' son isomorfos.



Luego, el grafo de Petersen tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, por lo que no es planar.

Coloreo de grafos planares

Ya hemos visto que todo grafo planar G tiene al menos un vértice v con $d(v) \leq 5$. Esto es una consecuencia del Teorema 15. Usando este hecho, es posible demostrar por inducción sobre la cantidad de vértice de G que $\chi(G) \leq 6$.

Ejercicio. Probar que todo grafo planar es 6-coloreable.

Pero esta cota superior para el número cromático de los grafos planares fue mejorada por Heawood.

Teorema 22 (Teorema de los 5 colores). Todo grafo planar es 5-coloreable.

Demostración. Es suficiente probar el enunciado para grafos conexos. Sea G un grafo planar conexo. Queremos ver que G admite un coloreo con a lo sumo 5 colores. Haremos la prueba por inducción sobre la cantidad de vértices n del grafo.

Caso base. $n \leq 5$. Basta con asignar un color diferente a cada vértice y tenemos un coloreo válido de G con $n \leq 5$ colores.

Hipótesis inductiva. Supongamos que todo grafo planar con a lo sumo n vértices es 5-coloreable.

Paso inductivo. Sea G un grafo planar conexo con $n + 1$ vértices.

- Si existe un vértice v con $d(v) \leq 4$, entonces consideremos $G' = G - v$. G' es un grafo planar de n vértices. Luego, aplicando la hipótesis inductiva, tenemos que existe un coloreo válido $f' : V(G') \rightarrow [5]$. Como v tiene a lo sumo 4 vecinos en G , existe un color $x \in [5]$ que no fue asignado por f' a ningún vecino de v . Luego, $f : V(G) \rightarrow [5]$ dado por

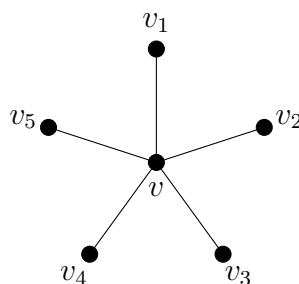
$$f(w) = \begin{cases} f'(w), & \text{si } w \neq v, \\ x, & \text{si } w = v, \end{cases}$$

es un coloreo válido para G .

- En caso contrario, es decir si $d(u) \geq 5$ para todo vértice $u \in V(G)$, entonces por el Corolario 16, existe un vértice v con $d(v) = 5$. Nuevamente, consideramos $G' = G - v$ que por hipótesis inductiva es 5-coloreable. Sea $f' : V(G') \rightarrow [5]$ un coloreo de G' .

Si hay algún color $x \in [5]$ que no fue asignado por f' a ningún vecino de v , entonces, como antes, podemos usarlo para colorear v y obtener un 5-coloreo válido de G .

Consideremos ahora el caso en que los 5 colores son usados para colorear algún vecino de v . Notemos a los vecinos de v como v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , con los subíndices ordenados en sentido horario. Sin perder generalidad, $f'(v_i) = i$, para $i \in [5]$.

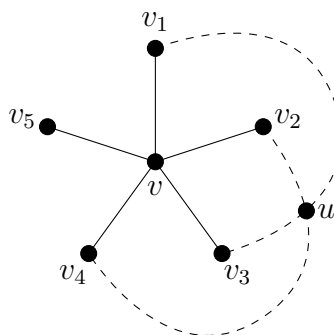


Analizamos los v_1, w caminos que usan de manera alternada los colores 1 y 3.

Supongamos que no existe ningún v_1, v_3 -camino con esta característica. Entonces, intercambiamos los colores 1 y 3 en todo camino que comienza en v_1 y que usa de manera alternada los colores 1 y 3. De esta manera, el color 1 queda libre y puede ser asignado al vértice v .

Si, por el contrario, existe un v_1, v_3 -camino (simple) P que alterna los colores 1 y 3, podemos probar que no existe ningún v_2, v_4 -camino que alterna los colores 2 y 4.

En efecto, observemos que P junto con v forman un ciclo en G , que determina una curva cerrada simple en el plano, que llamaremos C . El vértice v_2 está en el interior de la curva C y v_4 en el exterior (o viceversa). Luego, todo v_2, v_4 -camino interseca a la curva C . Pero como G es un grafo plano, entonces dicha intersección debe darse en un vértice u del ciclo, que tiene asignado el color 1 o 3. Luego, no existe ningún v_2, v_4 -camino que alterna los colores 2 y 4.



Entonces, es posible intercambiar los colores 2 y 4 en todo camino que comienza en v_2 y que usa de manera alternada los colores 2 y 4. De esta manera, el color 2 queda libre y puede ser asignado al vértice v .

Hemos probado entonces que todo grafo planar es 5-coloreable. □

Como ya hemos visto al estudiar coloreo en grafos, es posible mejorar aún más esta cota superior.

Teorema 23 (Teorema de los 4 colores). Todo grafo planar es 4-coloreable.

Ejemplo. Esta cota para el número cromático de grafos planares es ajustada. Es decir, existen grafos planares G para los cuales $\chi(G) = 4$. Un ejemplo es el grafo completo K_4 .