

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)

2024

6.3 Transformaciones unitarias y ortogonales

Recordemos la última definición de la sección anterior:

Si $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible y tal que $U^{-1} = U^*$ se llama *matriz unitaria*,

Si $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y tal que $O^{-1} = O^t$ se llama *matriz ortogonal*.

A nivel de transformaciones lineales, esto significa que $T \circ T^* = T^* \circ T = id_V$. Estos endomorfismos preservan el producto interno y por lo tanto las distancias. Toda esta información se resume en un teorema, cuya demostración no veremos pero dejamos como ejercicio intentarlo. Al menos algunas implicancias deberían salir.

Teorema 1 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un F -ev con $\dim(V) = n$, $T \in L(V)$. Son equivalentes:

1. Existe B bon de V t.q. $T(B)$ bon de V .
2. P.t. $v, u \in V$, $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle$.
3. P.t. B bon de V , $T(B)$ bon de V .
4. P.t. $v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$.
5. $T^* \circ T = T \circ T^* = id_V$.

Desafío 1 Probar el teorema. Vale buscar en la bibliografía.

Una t.l. que verifica cualquiera de las condiciones del teorema se dice **unitaria** (en el caso complejo) u **ortogonal** (en el caso real). Se desprende de todo lo que hemos estudiado que, dada una B bon de V , T es unitaria sii $[T]_B$ es unitaria (caso complejo), ortogonal sii $[T]_B$ es ortogonal (caso real).

Una t.l. que preserve la norma (item (vi) del teorema) se llama **isometría**.

El item (v) del teorema dice que T es un isomorfismo.

Estudiaremos a continuación el caso real en dimensiones 2 y 3: clasificaremos las transformaciones ortogonales. En el caso de dimensión 2, estudiaremos las isometrías del plano y en dimensión 3 las isometrías del espacio. Éstas serán, en ambos casos, rotaciones y simetrías.

Tenemos dos resultados inmediatos, muy interesantes

Proposición 1 $T : V \rightarrow V$ t.l. ortogonal, $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de T . Entonces $\lambda = \pm 1$.

Demostración: Sabemos que existe $v \in V$ no nulo autovector de T asociado a λ . Como T es ortogonal, $\|Tv\| = \|v\|$. Así,

$$\|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

de donde $\lambda = \pm 1$.

□

La siguiente proposición la hemos usado mil veces, y la hemos probado mil veces.

Proposición 2 $T : V \rightarrow V$ t.l. ortogonal, $U \subset V$ sev T -invariante. Entonces U^\perp también es T -invariante.

Desafío 2 Escribir la prueba.

Simetrías en dimensión 2

Sea V espacio euclídeo con $\dim(V) = 2$, T t.l. ortogonal. $B = \{v_1, v_2\}$ bon de V .

Tenemos que $\{Tv_1, Tv_2\}$ bon de V y más aún, si $Tv_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y $Tv_2 = \alpha' v_1 + \beta' v_2$, entonces $\{(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')\}$ bon de \mathbb{R}^2 , luego $\|(\alpha, \beta)\| = \|(\alpha', \beta')\| = 1$ y $(\alpha, \beta) \times (\alpha', \beta') = \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$. Sigue que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y o bien $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$ o bien $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$.

En el primer caso, $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$, tenemos que $[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, y $\chi_T(X) = (X - \alpha)^2 + \beta^2 =$

$X^2 - 2\alpha X + 1$. El caso $[T]_B$ diagonal se da sólo cuando $\alpha = \pm 1$, pues en otro caso χ_T no tiene raíces reales. Más aún, como $\|(\alpha, \beta)\| = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ t.q.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Y más aún, si cambiamos base $\{v_1, v_2\}$ a $\{v_1, -v_2\}$ podemos elegir $\theta \in [0, \pi]$.

En el segundo caso, $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$, tenemos que $[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$, o sea que T es simétrica, y

$\chi_T(X) = (X - \alpha)(X + \alpha) - \beta^2 = X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$. O sea,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.l. ortogonal es una **rotación** si $\det(T) = 1$,
2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.l. ortogonal y $H \subset \mathbb{R}^2$ sev de dimensión 1, T es una **simetría respecto de H** si $T|_H = id_H$ y $T|_{H^\perp} = -id_{H^\perp}$.

Así, toda t.l. ortogonal en \mathbb{R}^2 es una simetría o una rotación.

Ejemplos 1 1. En \mathbb{R}^2 consideremos la recta L de ecuación $x + y = 0$. Buscamos la simetría respecto de L . Como $L = \text{span}\{(1, -1)\}$ y $L^\perp = \text{span}\{(1, 1)\}$, podemos definir T en la base $\{(1, -1), (1, 1)\}$ como $T(1, -1) = (1, -1)$ y $T(1, 1) = (-1, -1)$. Luego $T|_L = id_L$ y $T|_{L^\perp} = -id_{L^\perp}$. Así, $T(x, y) = (-y, -x)$, como era esperable.

2. Hallar una rotación T en \mathbb{R}^2 tal que $T(2, 1) = (1, 2)$.

Para esto, recordemos que una rotación es una simetría, así que $\|T(2, 1)\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{5} = \|(2, 1)\|$, es decir, ambos puntos $(2, 1)$ y $(1, 2)$ se ubican en la misma circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{5}$. Normalicemos por este radio, y completamos a una bon: $B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$, como T t.l. debe ser $T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$. En coordenadas, tenemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$. Resulta entonces que, puesto que T es una rotación,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sigue que $T\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Simetrías en dimensión 3

Sea V espacio euclídeo con $\dim(V) = 3$. Si $T : V \rightarrow V$ t.l. ortogonal, como $\chi_T \in \mathbb{R}[X]$ es de grado $\text{gr}(\chi_T) = 3$, debe tener una raíz real, o sea T tiene un autovalor real λ . Hemos visto que $|\lambda| = 1$, luego $\lambda = \pm 1$.

Definimos en forma análoga:

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.l. ortogonal es una **rotación** si $\det(T) = 1$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.l. ortogonal y $H \subset \mathbb{R}^3$ sev de dimensión 2, T es una **simetría respecto de H** si $T|_H = \text{id}_H$ y $T|_{H^\perp} = -\text{id}_{H^\perp}$.

Si $\lambda = 1$, y v_1 autovector asociado de norma 1, $U = \text{span}\{v_1\}$ es T -invariante, luego también su ortogonal U^\perp , de dimensión 2. Entonces $T|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ y por el estudio anterior $T|_{U^\perp}$ es o bien una rotación o bien una simetría. Si $B_1 = \{v_2, v_3\}$ bon de U^\perp , sigue que para $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, o bien

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

o bien

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y en el primer caso T es una rotación con **eje de rotación** el sev $\text{span}\{v_1\}$ y en el segundo caso T es una simetría respecto del sev $\text{span}\{v_2, v_3\}$.

Si $\lambda = -1$ no es un autovalor de T , tenemos que $\lambda = -1$ sí lo es. Sean en forma análoga v_1 autovector asociado de norma 1, $U = \text{span}\{v_1\}$ y $U^\perp = \text{span}\{v_2, v_3\}$. $T|_{U^\perp}$ es ortogonal, y más aún, una rotación. Entonces, en $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tenemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

y más aún,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

es decir, una rotación compuesta con una simetría.

Así, toda t.l. ortogonal en \mathbb{R}^3 es una simetría o una rotación o una rotación compuesta con una simetría.

Ejemplo 1 Definir una rotación T en \mathbb{R}^3 t.q. $T(1, 1, 0) = (0, 1, 1)$ y el eje de la rotación sea ortogonal a $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

Sea $H = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ y $H^\perp = \text{span}\{(1, -1, 1)\}$. Queremos que H sea el eje de la rotación: $T|_{H^\perp} = \text{id}_{H^\perp}$.

Construimos una base de \mathbb{R}^3 tal que el primer vector sea base de H^\perp y los dos siguientes de H :

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

Definimos T en la base como sigue:

$$T \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

$$T \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Así,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observaciones 1 Se puede hacer un razonamiento análogo para $\dim(V) = n$.