Ejercicios resueltos - Práctica 9

Resolución de los ejercicios 4, 6 y 8

4. Sea G un grafo conexo, planar y tal que determina 53 caras. Si para alguna inmersión plana de G la frontera de cada cara tiene longitud al menos 5, demostrar que $|V(G)| \geqslant 82$.

Resolución:

Sea G un grafo conexo, planar y tal que determina 53 caras. Supongamos que G admite una inmersión plana tal que cada cara tiene longitud al menos 5, y consideremos dicha inmersión plana.

Por un lado, tenemos que como G es conexo y planar, vale la fórmula de Euler,

$$n - m + f = 2,$$

donde $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ y $f = 53$, la cantidad de caras de una inmersión plana de G.

Por otro lado, por la Proposición 12, tenemos que si $F_1, \ldots, F_{53}$ son las caras de esta inmersión plana, entonces

$$2m = \sum_{i=1}^{53} \underbrace{long(F_i)}_{\geqslant 5} \geqslant 5 \cdot 53 = 265.$$

Luego, tenemos que

$$n = 2 + m - f = m - 51 \geqslant \frac{265}{2} - 51 = \frac{163}{5} = 81{,}5.$$

Pero, como $n \in \mathbb{N}$, resulta que $n \geqslant 82$, como queríamos probar.

6. Probar que si G es un grafo simple planar con al menos 3 vértices y además es K_3-free, entonces $|E(G)| \leqslant 2|V(G)| - 4$.

Resolución:

Para resolver este ejercicio, vamos a seguir la idea de la demostración del Teorema 15. Solo que ahora, tenemos una hipótesis extra sobre el grafo G. Además de ser un grafo simple y planar, es K_3-free.

Sea G un grafo simple planar con $|V(G)| \geqslant 3$ y K_3-free, y consideremos una inmersión plana de G. Supongamos en primer lugar que G es conexo. Luego, tenemos que si f es la cantidad de caras de G, entonces vale la fórmula de Euler

$$|V(G)| - |E(G)| + f = 2.$$

Por otro lado, observemos que como $|V(G)| \geqslant 3$, cada cara de G tiene longitud al menos 3. Además, al ser K_3-free, ninguna cara tiene longitud exactamente 3. Luego, cada cara de G tiene longitud al menos 4. Entonces, si $F_1, \ldots, F_f$ son las caras de G, tenemos

$$2|E(G)| = \sum_{i=1}^{f} \underbrace{long(F_i)}_{\geqslant 4} \geqslant 4f.$$

O, equivalentemente, $f \leqslant \frac{1}{2}|E(G)|$. Luego, nos queda

$$2 = |V(G)| - |E(G)| + f \leqslant |V(G)| - |E(G)| + \frac{1}{2}|E(G)| = |V(G)| - \frac{1}{2}|E(G)|$$

Es decir, $|V(G)| - \frac{1}{2}|E(G)| \geqslant 2$, o lo que es lo mismo

$$|E(G)| \leqslant 2|V(G)| - 4.$$

Si G no es conexo, de la misma manera que hicimos en la demostración del Teorema 15, observemos que podemos agregar sucesivamente aristas conectando componentes conexas distintas sin perder la planaridad, y así obtener un nuevo grafo G' planar y conexo con $|E(G')| > |E(G)|$ y $|V(G')| = |V(G)|$ con lo cual

$$|E(G)| < |E(G')| \leqslant 2|V(G')| - 4 = 2|V(G)| - 4.$$

Por lo tanto, para todo grafo simple, planar y K_3-free, vale $|E(G)| \leqslant 2|V(G)| - 4$.

8. *a*) Probar que si G es un grafo (simple) planar, entonces existe $v \in V(G)$ con $d(v) \leqslant 5$.
   b) Probar que si G es un grafo (simple) planar, entonces $\chi(G) \leqslant 6$ (sin usar el teorema de los 5 o los 4 colores).

Resolución:

a) Sea G un grafo simple y planar. Supongamos que $d(v) \geqslant 6$ para cada $v \in V(G)$. Tenemos que

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \underbrace{d(v)}_{\geqslant 6} \geqslant 6|V(G)|.$$

Luego, $|E(G)| \geqslant 3|V(G)|$. Pero como G es planar, por el Teorema 15 tenemos que $|E(G)| \leqslant 3|V(G)| - 6 < 3|V(G)|$, y llegamos a una contradicción.
La contradicción surge de suponer que todo vértice de G tiene grado al menos 6. Luego, existe algún vértice $v \in V(G)$ tal que $d(v) \leqslant 5$.

b) Lo probaremos por inducción sobre $n = |V(G)|$.

Caso base. Observemos que si G es un grafo planar con $n \leqslant 6$ vértices, entonces como $\chi(G) \leqslant |V(G)|$, resulta que $\chi(G) \leqslant 6$.

Hipótesis Inductiva. Supongamos que para todo grafo G simple planar de orden n, con $n \geqslant 6$, vale $\chi(G) \leqslant 6$.

Paso inductivo. Sea G un grafo simple y planar de orden $n+1$. Por lo hecho en el ítem anterior, tenemos que existe un vértice $w \in V(G)$ con $d(w) \leqslant 5$. Sea $G' = G - w$. G', al ser subgrafo de un grafo planar (y simple), es también planar (y simple), y $|V(G')| = |V(G)| - 1 = k$. Luego, vale la hipótesis inductiva para G', y resulta que $\chi(G') \leqslant 6$. Sea $f' : V(G') \to \{1, \ldots, \chi(G')\}$ un coloreo óptimo de G'. Observemos que como w tiene a lo sumo 5 vecinos, entonces por el principio del palomar, existe $x \in \{1, \ldots, 6\}$ tal que $f'(u) \neq x$ para todo u vecino de w. Consideremos la siguiente función f:

$$f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, 6\}$$
$$u \mapsto f(u) = \begin{cases} x & \text{si } u = w \\ f'(u) & \text{si } u \neq w \end{cases}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Veamos que f es un coloreo de G. Para eso, debemos ver que a cada para de vértices adyacentes, la función f le asigna valores diferentes.
Sean $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G)$.

- Si $u = w$, entonces tenemos que $f(u) = f(w) = x$, y por la elección de x, como v es vecino de w, $f(v) = f'(v) \neq x$. Luego, $f(u) \neq f(v)$.
- Análogamente si $v = w$.
- Si $u \neq w$ y $v \neq w$, entonces $f(u) = f'(u)$ y $f(v) = f'(v)$. Como $u, v \in V(G')$, $uv \in E(G')$. Al ser f' un coloreo de G', resulta que $f'(u) \neq f'(v)$. Luego, $f(u) \neq f(v)$.

Por lo tanto, f es un coloreo de G que usa a lo sumo 6 colores. Luego, $\chi(G) \leqslant 6$.

Hemos probado por inducción que para todo grafo G simple y planar vale $\chi(G) \leqslant 6$.