17) Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Probar que G tiene un matching M tal que

$$|M| \geqslant \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}.$$

Sugerencia:

a) *Probar el enunciado para un árbol T con $|V(T)| \geqslant 2$, usando el teorema de König-Egerváry.*
b) *Probar el enunciado para un grafo simple conexo G con $|V(G)| \geqslant 2$, recordando que todo grafo conexo tiene un árbol recubridor.*
c) *Finalmente, probar el enunciado para todo grafo G simple sin vértices aislados.*

a) Sea T un árbol con $|V(T)| \geqslant 2$.
Como T es bipartito $\alpha'(T) = \beta(T)$, por el Teorema de König-Egerváry.
Sea C un cubrimiento de aristas por vértices con $|C| = \beta(T)$. Notemos que, por definición

$$\sum_{u \in C} d(u) \geqslant |E(T)| = |V(T)| - 1$$

Luego, tenemos que

$$|V(T)| \leqslant (\sum_{u \in C} d(u)) + 1 \leqslant \sum_{u \in C} (d(u) + 1) \leqslant |C|(\Delta(T) + 1) = \alpha'(T)(\Delta(T) + 1)$$

$$\therefore\ \alpha'(T) \geqslant \frac{|V(T)|}{\Delta(T)+1}$$

b) Sea G un grafo simple conexo, con $|V(G) \geqslant 2$. Sabemos que G tiene un árbol recubridor.
Recordemos que $V(T) = V(G)$, en particular, $|V(T)| = |V(G)|$.
Por un lado, $\alpha'(G) \geqslant \alpha'(T)$.
Por otro lado, $\Delta(T) \leqslant \Delta(G)$, entonces $\frac{1}{\Delta(T)+1} \geqslant \frac{1}{\Delta(G)+1}$.
Luego,

$$\alpha'(G) \geqslant \alpha'(T) \geqslant \frac{|V(T)|}{\Delta(T)+1} = \frac{|V(G)|}{\Delta(T)+1} \geqslant \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$$

c) Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Como cada componente conexa $G_1, \ldots G_k$ tiene al menos una arista, valen las hipótesis del ítem b).
Luego

$$\alpha'(G_i) \geqslant \frac{|V(G_i)|}{\Delta(G_i)+1}$$

Además, $\alpha'(G) = \sum_{i=1}^{k} \alpha'(G_i)$ y $\Delta(G_i) \leqslant \Delta(G) \quad \forall\, i = 1, \ldots, k$.
Luego, tenemos

$$\alpha'(G) = \sum_{i=1}^{k} \alpha'(G_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{|V(G_i)|}{\Delta(G_i)+1} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{|V(G_i)|}{\Delta(G)+1} = \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$$