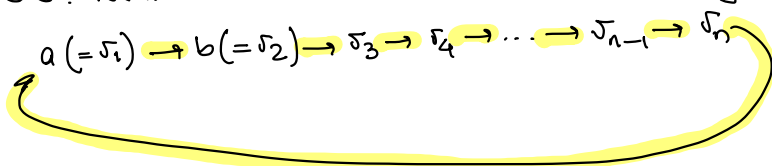


then $gr(v) + gr(w) \geq n$ $\nexists v, w$ node $\Rightarrow G$ ciclo hamiltoniano

D/ Supongamos que G no tiene ciclo hamiltoniano y agregamos aristas hasta que llegamos a un grafo H no tiene un ciclo hamiltoniano pero para cualquier $e \in E$, $H+e$ tiene ciclo hamiltoniano

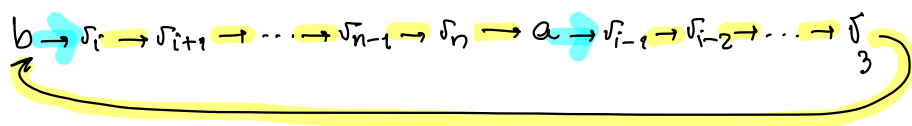
Como $H \neq K_n$, existen $a, b \in V$ / $ab \notin E(H)$ pero $H+ab$ tiene ciclo hamiltoniano C . El grafo H no tiene ciclo $\Rightarrow ab \in C$. Nombremos los nodos de C como sigue



Para cualquier $i = 3, \dots, n$

$$bv_i \in E(H) \Rightarrow av_{i-1} \notin E(H)$$

ya que si $bv_i \in E(H) \wedge av_{i-1} \in E(H)$ hay un ciclo hamiltoniano



Contradicción del hecho que H no tiene ciclo hamilt.

Por lo tanto, sólo 1 de las aristas bv_i o av_{i-1} están en H

y entonces

$$gr_H(a) + gr_H(b) < n$$

Además, como H se obtuvo agregando aristas

$$gr_H(v) \geq gr_G(v) = gr(v) + d$$

$$\therefore gr(a) + gr(b) \leq gr_H(a) + gr_H(b) < n$$

Como a y b son no ady. contradicción



Corolario $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2 \Rightarrow G$ tiene ciclo hamiltoniano

D/ Sea $ab \notin E$. { vamos a ver que $gr(a) + gr(b) \geq n$ }

A partir de G hacemos:

i) las aristas ax , $x \in V$

ii) las aristas yb , $y \in V$

iii) los nodos a y b

obtenemos el grafo

$$H = (V', E')$$

$\therefore |E| = |E'| + gr(a) + gr(b)$ ya que $ab \notin E$.

$$|V'| = n - 2 \Rightarrow |E'| \leq \binom{n-2}{2}$$

$$\binom{n-1}{2} + 2 \leq |E| = |E'| + gr(a) + gr(b) \leq \binom{n-2}{2} + gr(a) + gr(b)$$

\uparrow
hip

$$\begin{aligned} \therefore gr(a) + gr(b) &\geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{2}(n-2)(\cancel{n-1} - \cancel{n+3}) + 2 = \frac{1}{2}(n-2) \cdot 2 + 2 = n-2 + 2 = n \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos aplicar el resultado anterior
y existe ciclo hamiltoniano. 