1k) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

- **Veamos si A es nilpotente.**

Por definición $A \in F^{n\times n}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz es 2 pasos nilpotente.

- **Hallemos la base y la forma de Jordan de A:**

Tomamos $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base de $\mathbb{C}^4$

– *Calculamos $N(A)$:*

Sea $x \in \mathbb{C}^4$, por definición $N(A) = \{x \in \mathbb{C}^4 : Ax = 0\}$. Comencemos escalonando la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow ... \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasando al sistema de ecuaciones: $(S)\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 & = & 0 \end{cases}$

$Sol = \{(-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3; \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{C}\} = \text{span}\{(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, 0, 1); (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}, 1, 0)\}$

Entonces $N(A) = \text{span}\{(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, 0, 1); (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}, 1, 0)\}$, $\mathfrak{B}_1 = \{(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, 0, 1); (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}, 1, 0)\}$ es base y $\dim(N(A)) = 2$.

– *Calculamos el $N(A^2)$:*

Como $A^2 = 0$, $N(A^2) = \mathbb{C}^4 = spam\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y la $dim(N(A^2)) = 4$.

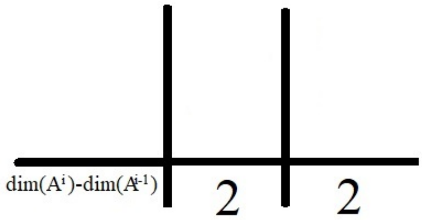
Una base de $N(A^2)$ es $\mathfrak{B}_2 = \{(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, 0, 1); (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}, 1, 0), e_1, e_2\}$.

Para construir la base de Jordan notemos que:

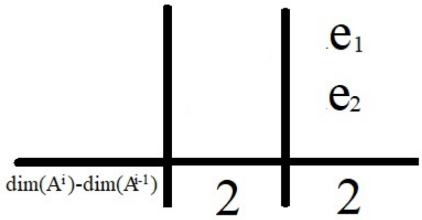
$$\{0\} \subsetneq N(A) \subsetneq N(A^2) = \mathbb{C}^4$$

Luego:

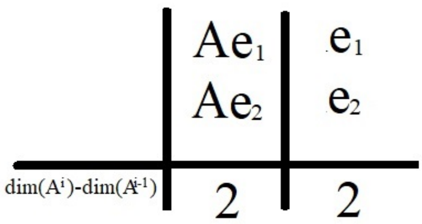
- $dim(A) - dim(\{0\}) = 2 - 0 = 2$, y $dim(A^2) - dim(A) = 4 - 2 = 2$, entonces

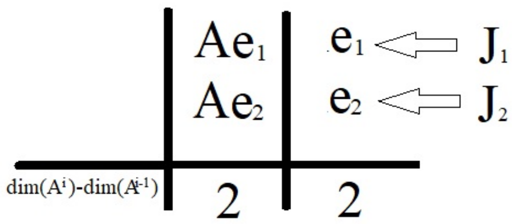


- $e_1, e_2 \in N(A^2)$ y $e_1, e_2 \notin N(A)$, entonces



- $Ae_1 = (3,\ -2,\ 1,\ -5)^t$ y $Ae_2 = (3,\ -1,\ -1,\ -4)^t$, por lo que





Entonces, una base de Jordan es:

$$B = \{e_1, Ae_1, e_2, Ae_2\} = \{(1,0,0,0); (3,-2,1,-5); (0,1,0,0); (3,-1,-1,4)\}$$

Siendo $\{e_1, Ae_1\}$ vectores que determinan el primer bloque de Jordan de tamaño 2×2 y siendo $\{e_2, Ae_2\}$ vectores que determinan el segundo bloque de Jordan de tamaño 2×2 obteniendo asi:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- **Veamos si A es nilpotente.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0_{5X5}.$$

Por lo tanto, A es 3 pasos nilpotente.

- **Hallemos la base y la forma de Jordan de A:**

Sea $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base canónica de $\mathbb{C}^5$

\- Hallemos $N(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{C}^5 : A\overline{x} = \overline{0}\}$. Escalonando A(hacer) obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$(S') \begin{cases} x_1 - x_5 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 - 5x_5 & = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $N(A) = \text{span}\{(0, -2, 1, 1, 0), (1, 5, -3, 0, 1)\}$ y $\dim(N(A)) = 2$.

\- Hallemos $N(A^2) = \{\overline{x} \in \mathbb{C}^5 : A^2\overline{x} = 0\}$. Escalonando A^2 (hacer) obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema:

$$(S'')\ x_1 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0$$

Por lo tanto, $N(A^2) = \text{span}\{(0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (4, 0, 0, 0, 1)\}$. Luego, como $\mathfrak{B}_2 = \{(0, -2, 1, 1, 0), (1, 5, -3, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}$ es LI (hacer), resulta una base de $N(A^2)$, y se tiene que

$$N(A^2) = \text{span}\{(0, -2, 1, 1, 0), (1, 5, -3, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}, \text{ y } \dim(N(A^2)) = 4.$$

\- Hallemos $N(A^3)$. Como $A^3 = 0_{5X5}$, $N(A^3) = \text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y $\dim(N(A^3)) = 5$. Ahora, el conjunto

$$\mathfrak{B}_3 = \{(0, -2, 1, 1, 0), (1, 5, -3, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0)\}$$

es una base de $N(A^3)$ (hacer).

\- Para construir la base de Jordan notemos que:

$$\{0\} \subsetneqq N(A) \subsetneqq N(A^2) \subsetneqq N(A^3).$$

Luego, sea $v = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$,

$$\begin{array}{r|c|c|cl} \{0\} \subsetneqq & N(A) \subsetneqq & N(A^2) \subsetneqq & N(A^3) = \mathbb{C}^5 & \\ & A^2 e_1 & A e_1 & e_1 & \longleftarrow J_1 \\ & Av & v & & \longleftarrow J_2 \\ \hline \dim N(A^i) - \dim N(A^{i-1}) = & 2 & 2 & 1 & \end{array}$$

Cálculos Auxiliares:

- $Ae_1 = (2, 3, -3, 3, 2)^t$

- $\mathfrak{B}_1 \cup \{Ae_1, e_2\}$ es LD (hacer)
- $\mathfrak{B}_1 \cup \{Ae_1, v\}$ es LI (hacer) y resulta base de $N(A^2)$, se elije v para agregar en la columna de $N(A^2)$.
- $A^2e_1 = (-1,-1,1,-2,-1)^t$
- $Av = (4,6,-5,7,4)^t$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B &= \{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2, Ae_2\} \\ &= \{(1,0,0,0,0),(2,3,-3,3,2),(-1,-1,1,-2,-1),(1,0,1,0,0),(4,6,-5,7,4)\} \end{aligned}$$

es una base de Jordan y la forma de Jordan J_A está dada por

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Repetir este proceso con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$