FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9) 2024

2.1 - Transformaciones lineales

El corazón del álgebra lineal son las transformaciones lineales. Es lo más importante y será nuestro objeto de estudio por el resto de la asignatura. Una transformación lineal es una función entre ev's que respeta la estructura de ev. Ya conocemos funciones que son tl. Vamos a ver cómo las definimos y caracterizamos.

Definición 1 *$(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos F-ev. $T : V \to W$ función se dice que es una* ***transformación lineal*** *(tl) si:*

1. *$T(u + v) = T(u) \oplus T(v)$ $\forall\, u, v \in V$, (preserva la suma)*
2. *$T(\alpha \cdot u) = \alpha \odot T(u)$ $\forall\, \alpha \in F, u \in V$. (preserva el producto por escalar)*

Very Important 1 *Ambos espacios deben estar definidos sobre el* ***mismo*** *cuerpo. Cuando se sobreentiende no será necesario escribirlo.*

Cuando se sobreentiende, ambas operaciones suma y producto por escalar serán denotadas con los mismos símbolos: $+$ y $\cdot$.

Ejercicios 1

1. *Si $T : V \to W$ tl ents. $T(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$.*
2. *Si $T : V \to W$ tl sii $\forall \alpha, \beta \in F$, $\forall u, v \in V$, $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$.*
3. *Si $T : V \to W$ tl ents. preserva cl: para $\alpha_i \in F$, $v_i \in V$,*

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

Conocemos muchisisísimas funciones que son tl y otras muchisisisísimas que no lo son. Veremos algunos ejemplos. **Recordatorio:** siempre que veamos ejemplos queda como EJERCICIO desarrollarlos.

Ejemplos 1

1. ***Transformación nula****: V, W F-ev. $T_0 : V \to W$ definida por $T(v) = \overline{0}_W$ pt $v \in V$ es una tl.*
2. ***Transformación identidad****: V F-ev. $id : V \to V$ definida por $T(v) = v$ pt $v \in V$ es una tl.*
3. ***VERY VERY MUY MUCHO IMPORTANT EXAMPLE: Transformación definida a partir de una matriz****: Sean $A \in F^{m\times n}$, $T_A : F^n \to F^m$ definida por $T_A(x) = Ax$ es una tl. Más aún, veremos que toda tl $F^n \to F^m$ está definida a partir de una matriz.*
4. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tq $D(p(x)) = p'(x)$ transformación* ***derivación*** *es una tl en el espacio de polinomios.*
5. *$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua$\}$, $I : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ transformación* ***integración****, definida por $I(f(x)) = \int_0^x f(y)dy$ es una tl en el espacio de funciones continuas.*
6. ***Shifts*** *$L : F^\infty \to F^\infty$ definida por $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ es una tl en el espacio de sucesiones.*

   $R : F^\infty \to F^\infty$ definida por $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ es una tl en el espacio de sucesiones.

7. ***Rotaciones en*** $\mathbb{R}^2$: *sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *un ángulo, definimos la transformación rotación en el plano como la transformación matricial* $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida a partir de la matriz* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
   Luego T_α *es tl. En coordenadas:* $T_\alpha(x, y) = A(x, y) = (\cos\alpha x - \sin\alpha y, \sin\alpha x + \cos\alpha y)$.
8. ***Proyecciones canónicas***: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por* $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ *es una tl.*
9. *HAY FUNCIONES QUE NO SON TL. Por ejemplo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sin(x)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x^2$.

La siguiente proposición nos dice que la imagen por una tl de un sev es un sev, y que la preimagen por una tl de un sev también es un sev.

Proposición 1 $T : V \to W$ *tl. Ents.*

1. *Si* $S \subset V$ *sev ents.* $T(S) \subset W$ *sev.*
2. *Si* $R \subset W$ *sev ents.* $T^{-1}(R) \subset V$ *sev.*

Demostración:

1. Si $\alpha, \beta \in F$ y $w_1, w_2 \in T(S)$ ents. existen $v_1, v_2 \in S$ tq $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Veamos que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in T(S)$. En efecto, $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in T(S)$ puesto que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in S$ al ser S sev.
2. Si $\alpha, \beta \in F$ y $v_1, v_2 \in T^{-1}(R)$ ents. existen $w_1, w_2 \in R$ tq $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Veamos que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in T^{-1}(R)$, esto es, que $T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in R$. En efecto, $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 \in R$ puesto que R sev.

□

Very Important 2 ***Una tl queda unívocamente determinada por sus valores en una base.***

Este resultado es fundamental. Lo veremos, por simplicidad, sólo en el caso finito.

Proposición 2 V, W *dos* F*-ev con* V *finito dimensional. Sea* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V *y sean* $w_1, \ldots, w_n \in W$. *Entonces* $\exists!$ *tl* $T : V \to W$ *tq* $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Demostración: Veamos existencia. Esto implica definir la función T, ver que está bien definida, y que es lineal. Para eso haremos uso de la base B: sea entonces $T : V \to W$ definida para $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ como $T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$. Veamos que T es lineal. En efecto, si $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, y $\alpha, \beta \in F$, entonces $\alpha v + \beta u = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n$ (¿porqué?), de donde

$$\begin{aligned} T(\alpha v + \beta u) =& (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n \\ =& \alpha\alpha_1 w_1 + \beta\beta_1 w_1 + \cdots + \alpha\alpha_n w_n + \beta\beta_n w_n \\ =& \alpha(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) + \cdots + \beta(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) \\ =& \alpha T(v) + \beta T(u). \end{aligned}$$

Veamos unicidad. Supongamos que hay una función $\tilde{T} : V \to W$ tq $\tilde{T}(v_i) = w_i$. Entonces para $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ tenemos que $T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \cdots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) = \tilde{T}(v)$. Luego $T = \tilde{T}$.

□

2.2 - Núcleo e Imagen de una tl

Vamos a estudiar ahora dos importantes sev asociados a una tl, que además nos darán información sobre la tl y la estructura de ev de ambos dominio y codominio.

Las tl se nombran de acuerdo a las características como función:

Definición 2 *$T : V \to W$ tl. Decimos que:*

1. *T es un **monomorfismo** si T es inyectiva.*
2. *T es un **epimorfismo** si T es sobreyectiva.*
3. *T es un **isomorfismo** si T es biyectiva.*
4. *T es un **endomorfismo** si $V = W$.*
5. *T es un **automorfismo** si $V = W$ y T es biyectiva.*

Observaciones 1 *T automorfismo sii T endomorfismo e isomorfismo.*

Desafío 1 *Buscar 2 ejemplos de cada una de las definiciones anteriores.*

El núcleo de una transformación lineal

Definición 3 *$T : V \to W$ tl. Llamamos **núcleo** o **kernel** de T al conjunto $\ker(T) = Nu(T) = T^{-1}(\overline{0}) = \{v \in V : T(v) = \overline{0}\}$.*

Desafío 2 *Justificar porqué podemos asegurar que $\ker(T)$ es un sev de V.*

Ejemplos 2

1. *Si $o : V \to W$ es la tl nula, $\ker(o) = V$.*
2. *$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y, z) = 2x + 3y + z$ tl (¿porqué podemos dar esta definición?). $\ker(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\}$ es un plano por el origen.*
3. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ transformación derivación. $\ker(D)$ son los polinomios constantes.*

Very Important 3 *¡¡El **núcleo** de una tl nos sirve para caracterizar los **monomorfismos**!!*

Proposición 3 *$T : V \to W$ tl. T monomorfismo sii $\ker(T) = \{\overline{0}\}$.*

Demostración: =>) T monomorfismo, o sea, T tl inyectiva. Veamos que si $v \in \ker(T)$ ents $v = \overline{0}$. En efecto, como $v \in \ker(T)$, $T(v) = \overline{0}$, además $T(\overline{0}) = \overline{0}$ y T inyectiva, de donde debe ser $v = \overline{0}$.

<=) $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Veamos que si $u, v \in V$ son tq $T(u) = T(v)$ ents $u = v$. En efecto, sean $u, v \in V$ tq $T(u) = T(v)$. Ents. $T(u) - T(v) = \overline{0}$, de donde $T(u - v) = \overline{0}$. Luego, $u - v = \overline{0}$ y por lo tanto $u = v$.

□

La imagen de una transformación lineal

Definición 4 *$T : V \to W$ tl. Llamamos **imagen** o **recorrido** de T al conjunto $Im(T) = T(V) = \{T(v) \in W : v \in V\}$.*

Desafío 3 *Justificar porqué podemos asegurar que $Im(T)$ es un sev de W.*

Ejemplos 3

1. *Si $\overline{o} : V \to W$ es la tl nula, $Im(\overline{o}) = \{\overline{0}\}$.*
2. *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$ tl (¿porqué podemos dar esta definición?).*

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(2x, 5y, x + y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 0, 1) + y(0, 5, 1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= span\{(2, 0, 1), (0, 5, 1)\}. \end{aligned}$$

3. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ transformación derivación. $Im(D) = \mathbb{R}[x]$.*

Very Important 4 *¡¡La **imagen** de una tl nos sirve para caracterizar los **epimorfismos**!!*

Ejercicio 1 ***Proposición 4*** *$T : V \to W$ tl. T epimorfismo sii $Im(T) = W$.*

El Teorema de la Dimensión

Si un Teorema además de tener status de Teorema (así, con mayúsculas) *además* tiene nombre, es obviamente importante y carne de parcial, recuperatorio, final, formulario de . Así que le prestamos extra atención.

Definición 5 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional, llamamos:*

1. ***nulidad** de T a la dimensión de su núcleo: $nul(T) = dim(\ker(T))$,*
2. ***rango** de T a la dimensión de su imagen: $ran(T) = dim(Im(T))$.*

De las proposiciones anteriores sigue que:

Corolario 1

1. *T monomorfismo sii $nul(T) = 0$,*
2. *T epimorfismo sii $ran(T) = dim(W)$.*

Teorema 1 (Teorema de la dimensión) *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional,*

$$ran(T) + nul(T) = dim(V).$$

Demostración: Sea $nul(T) = k$ y $B_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ base de $\ker(T)$. Completamos B_k a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V. Veamos que $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ es base de $Im(T)$.

Puesto que B es base de V, sabemos que $span\{T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} = Im(T)$.

Como $T(v_1) = \dots = T(v_k) = \overline{0}$, sigue que $span\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} = Im(T)$. Veamos que no sólo generan sino que también son li.

Planteamos para $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$ la cl $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \overline{0}$.

Aplicando T tenemos que $\alpha_{k+1}T(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \overline{0}$ de donde $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker(T)$.

Como B_k es base de $\ker(T)$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ tq $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, de donde $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1}v_{k+1} - \dots - \alpha_n v_n = \overline{0}$. Como B es base de V, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n = 0$.

Así, $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ base de T. Luego, $k + (n - (k+1)) = n$, esto es,

$$nul(T) + ran(T) = dim(V).$$

□

Veamos dos corolarios:

Corolario 2 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional con $dim(V) > dim(W)$. Entonces T no puede ser monomorfismo.*

Demostración: Si T monomorfismo, $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Como $Im(T) \subset W$ sev, $dim(Im(T)) \leq dim(W)$, luego $dim(\ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T)) > 0$, lo cual es una contradicción. Luego T no puede ser un monomorfismo.

□

Corolario 3 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional con $dim(V) < dim(W)$. Entonces T no puede ser epimorfismo.*

Demostración: Tenemos que $dim(Im(T)) = dim(V) - nul(T) \leq dim(V) < dim(W)$, luego $Im(T) \subsetneq W$.

□

2.3 - El espacio L(V,W)

Vamos a definir y estudiar un ev importantísimo: el espacio de las tl de V en W, que denotaremos por $L(V,W)$. La estructura de ev con la cual dotaremos a este espacio se basará en las estructuras de ev de V y W. El caso $V = W$ tendrá un poco más de estructura, y el caso $W = F$ tiene nombre (o sea, ¡¡es re importante!!).

Ejercicio 2 ***Proposición 5*** *V, W F-ev. $T, S : V \to W$ tl, $\lambda \in F$. Ents.:*

1. *$T + S : V \to W$ definida para $v \in V$ por $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ es una tl.*
2. *$\lambda T : V \to W$ definida para $v \in V$ por $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$ es una tl.*

Definición 6 *V, W F-ev. Llamamos $L(V,W)$ al conjunto de todas las tl de V en W.*

Teorema 2 *$(L(V,W), +, \cdot)$ es un F-ev.*

Demostración:

Desafío 4 *Hacer la demostración completa. Sí, hay que probar los 10 axiomas. En realidad ahora sólo 8 (porqué?). Ayuda: usar las estructuras de ev de V y W.*

$\square$

Observaciones 2

1. *El vector nulo del espacio $L(V,W)$ es la transformación nula.*
2. *Por si no lo dijimos antes: TODO se basa en las estructuras de F-ev de V y W.*
3. *$L(V,W)$ se llama **el espacio de las transformaciones F-lineales de V en W.**.*
4. *Cuando es importante destacar el cuerpo, se denota $L_F(V,W)$. Cuando F se sobreentiende, prescindimos del subíndice.*
5. *Caso V, W finito dimensionales: será el que nos ocupe más en este curso. Tanto que arracamos con un teorema fuerte.*

El teorema que sigue no tiene nombre pero tiene status de Very Important Theorem. La prueba ES DIFÍCIL, no nos vamos a engañar. Pero vamos de a poquito. Trataremos de indicar cuándo se pone áspera la cosa, así prestamos más atención.

Very Important Theorem 1 *V, W F-ev finito dimensionales, con $dimV = n$ y $dimW = m$. Ents. $L(V,W)$ es finito dimensional y $dimL(V,W) = nm$.*

Demostración: Sean $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Vamos a definir una base para $L(V,W)$. Recordemos que una tl está unívocamente determinada por los valores que asuma en una base de su dominio. Como además queremos probar que su dimensión es mn, sabemos que necesitamos definir mn funciones de $L(V,W)$.

Definiremos cada una de ellas dando el valor que asumen en la base de V: pc $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ definimos

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{ik} w_j,$$

donde δ_{ik} es la función Delta de Kronecker: $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ y $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$. Veamos que $B := \{E_{ij} : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$ es base de $L(V,W)$.

—ATENCIÓN AHORA: si no entendimos bien lo anterior, volver a leer el razonamiento, una vez comprendido, avanzar.

1) Veamos que $span(B) = L(V,W)$. Sea $T : V \to W$ tl. Pc $k = 1, \ldots, n$, puesto que $T(v_k) \in W$, existen $a_{kj} \in F$ tq $T(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j$. Luego, puesto que $a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \delta_{ik}$ (¿porqué?)

$$T(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \delta_{ik} \right) w_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \delta_{ik} w_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_{ij}(v_k),$$

de donde $T = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, vd, $T \in span(B)$.

2) Veamos que B es li. Si $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = o$ (la transformación nula), en particular tenemos que pt $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij}(v_k) = o(v_k) = \bar{0}_W$, luego $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}w_j = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}w_j = \bar{0}_W$ pt $k = 1, \ldots, n$. Como los w_j son li, sigue que $a_{kj} = 0$ pt $j = 1, \ldots, m$, pt $k = 1, \ldots, n$.

□

Tenemos otra operación definida entre tl.

Proposición 6 *U, V, W F-ev's. $T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$. Ents. $S \circ T \in L(U, W)$.*

Demostración: $S \circ T : U \to W$. Veamos que es tl: $(S \circ T)(\alpha u + \beta v) = S(T(\alpha u + \beta v)) = S(\alpha T(u) + \beta T(v)) = \alpha(S(T(u)) + \beta(S(T(v)) = \alpha(S \circ T)(u) + \beta(S \circ T)(v)$.

□

Observaciones 3 *En el caso particular que $V = W$, escribimos $L(V) := L(V, V)$ y las $T \in L(V)$ se llaman **operadores lineales**. Luego, para $S, T \in L(V)$, $S \circ T \in L(V)$.*

La operación composición de funciones en este caso la interpretamos como un *producto* en $L(V)$, y a veces escribimos directamente $ST := S \circ T$. Podemos deducir varias propieadades para este producto.

Desafío 5 *Probar las propiedades enunciadas en la siguiente Proposición:*

Proposición 7 *V F-ev. $T, T_1, T_2, T_3 \in L(V)$, $\lambda \in F$. Ents.*

1. *Asociativa: $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$.*
2. *Existencia de neutro: $id_V \in L(V)$ es tq $id_V T = T id_V = T$.*
3. *Distributivas con respecto a la suma: $T_1(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$ y $(T_1 + T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$.*
4. *Propiedad asociativa de los productos: $\lambda(T_1T_2) = (\lambda T_1)T_2 = T_1(\lambda T_2)$.*

Observaciones 4

1. *Decimos que $(L(V), +, \cdot, \circ)$ es un $F-$álgebra asociativa con identidad.*
2. *La asociatividad para la composici ón de transformaciones lineales vale más generalmente.*

   Desafío 6 *Enunciar y demostrar para $T_1 \in L(U, V)$, $T_2 \in L(V, W)$ y $T_3 \in L(W, Z)$.*
3. *La composición de funciones en general no es conmutativa.*

Ejercicios 2

1. *Sean $A, B \in F^{n\times n}$ y consideramos las tl $T_A, T_B : F^n \to F^n$ definidas a partir de las matrices. Probar que $T_A \circ T_B = T_{AB}$. En general, $T_AT_B \neq T_BT_A$.*
2. *$V = \mathbb{R}[x]$, $D \in L(\mathbb{R}[x])$ operador derivación, $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Probar que T es lineal. Aquí $DT \neq TD$, es decir, la composición de funciones en general NO es conmutativa.*
3. *$L : F^\infty \to F^\infty$ shift a izquierda. No es inyectiva puesto que $L(0, x_2, x_3, \ldots) = L(1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Luego, como función, no es invertible.*

Si $T \in L(V)$, no necesariamente existe $S \in L(V)$ tq $TS = ST = id_V$, y si existe en principio nada indica que sea lineal. Por suerte las cosas funcionan bien y podremos probarlo. Veamos entonces todo esto:

Definición 7 *$T : V \to W$ función es **invertible** si existe $S : W \to V$ tq $Ts = id_W$ y $ST = id_V$.*

Ejercicios 3 *Las siguientes afirmaciones, si no son conocidas, completar los detalles. Si ya están claras quizás no haga falta.*

1. *Si T es invertible, su inversa es única, y la denotamos por T^{-1}. .*
2. *T invertible sii T inyectiva y sobreyectiva.*

3. *Si $T \in L(V,W)$ invertible, para $v \in V$ $\exists! w \in W$ tq $T(v) = w$.*

4. *Si $T \in L(V,W)$ invertible, para $w \in W$ $\exists! v \in V$ tq $T^{-1}(w) = v$.*

El siguiente teorema es el que nos asegura que si una tl es invertible, su inversa también es una tl.

Teorema 3 *V, W F-ev. $T \in L(V,W)$ invertible, ents. $T^{-1} \in L(W,V)$.*

Ejercicio 3 *Demostrar el Teorema. Falta ver que T^{-1} es lineal.*

Y finalmente, el último teorema nos dice que el producto de funciones invertibles es invertible, y nos da su inversa.

Teorema 4 *U, V, W F-ev. Si $T \in L(U,V)$ invertible y $S \in L(V,W)$ invertible, entonces $ST \in L(U,W)$ invertible y $(ST)^{-1} = T^1 S^{-1} \in L(W,U)$.*

Ejercicio 4 *Demostrar el Teorema.*

Ejercicio 5 *Sea $A \in F^{n \times n}$ una matriz invertible, y consideremos la tl asociada a esta matriz $T_A : F^n \to F^n$. Entonces T_A invertible y su inversa es $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.*