ASIGNATURA: Dinámica de fluidos computacional - IPM468
PROFESOR: Dr. Romain Gers, Dr. Olivier Skurtys
FECHA: 27 de septiembre de 2017

Proyecto 1

1. Comentario general para entregar el informe

1.1. El informe

Cuidar la redacción y la presentación de los resultados.
El informe del proyecto debe incluir:

1. Un resumen, una introducción, una sección metodología (donde se detallarán los programas, algoritmos, ecuaciones discretizadas, y desarrollos teóricos), una discusión y conclusión.
2. Una sección bibliografía.
3. Se pide utilizar Latex para escribir el informe.

Ademas, entregue sus resultados con los análisis y sus conclusiones correspondientes.

1.2. La notación

1. Es un trabajo personal. En consecuencia, copiar implica un 0.
2. Se sacan puntos en caso de mala presentación, faltas de ortografía.
3. No se aceptan retrasos en la entrega. El informe se entrega el 15 de noviembre.

2. Ejercicios en Fortran

2.1. Ejercicio 1

Escribir un programa que permite calcular el real A:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1}$$

1. Escribir en un archivo algunos valores elegidos de A. Dibujar con Gnuplot la curva $A = f(n)$.
2. Comentar sus resultados, tomando en cuenta los parámetros (simple, doble precisión etc.) que determinan el calculo de A.

2.2. Ejercicio 2

Escribir un programa que lee un valor entero n, después calcula y escribe en un archivo los n primeros términos de la serie de Fibonacci:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{tal que } u_0 = 0 \; u_1 = 1 \tag{2}$$

1. Dibujar el comportamiento de la serie con Gnuplot.
2. Comentar sus resultados.

2.3. Ejercicio 3

La subrutina interna $matrix - mult$ realiza el producto de 2 matrices A y B que tienen las dimensiones respectivas (m_a, n_a) (lineas, columnas) y (m_b, n_b).

- El resultado del producto es entregado en una matriz C de dimension (m_a, n_b).
- Los argumentos de entrada de $matrix - mult$ son A, B y sus dimensiones.
- Los argumentos de salida es C.

Se pregunta:

1. Escribir esta subrutina.
2. Escribir y probar el programa $prog - mult$ que realiza una multiplicación con esta subrutina.
3. Modificar la subrutina para evitar de pasar las dimensiones de las matrices en argumentos. Modificar el programa principal en consecuencia y prueba lo.

3. Estudio del comportamiento mecánico de una arteria

3.1. Parte 1: Movimientos de la pared arterial

Se puede modelar una arteria por un cilindro flexible de base circular, de longitud L y de radio R_0. La pared del cilindro tiene un espesor H y es constituido de un material elástico incompresible, homogéneo y isotropico.

- Se obtiene un modelo simple que describe el comportamiento mecánico de la pared arterial en interacción con la sangre si se supone que el cilindro es constituido de un conjunto de anillos independientes los unos de los otros.
- Eso permite despreciar las acciones internas longitudinales y axiales a lo largo de la arteria y a suponer que la arteria se deforma solamente según la dirección radiale.

El radio de la arteria es dado por:

$$R(t) = R_0 + y(t) \tag{3}$$

donde t es el tiempo y y es el desplazamiento radial del anillo respecto a un radio de circunferencia R_0

La aplicación de la ley de Newton al sistema de anillos independientes conduce a una ecuación que modela el comportamiento mecánico de la pared en función del tiempo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \beta\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \gamma(p(t) - p_0) \tag{4}$$

donde

$$\alpha = \frac{E}{\rho_w R_0^2} \qquad \gamma = \frac{1}{\rho_w H} \qquad \beta = constante > 0 \tag{5}$$

ρ_w es la masa especifica y E es el modulo de Young de la pared cilíndrica. La función $p - p_0$ modela el esfuerzo generado por la diferencia de presión entre el interior de la arteria, donde se encuentra la sangre, y el exterior, donde se encuentra otros órganos.

- Al reposo, cuando $p = p_0$, la arteria tiene una configuración cilíndrica de radio $R_0(y = 0)$.

3.1.1. Algunas preguntas preliminares

1. Escribir la ecuación 4 de la forma:

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \tag{6}$$

   donde $\vec{y} = [y, y']^t$ donde t es la traspuesta y $\vec{b}(t)$ un vector función del tiempo. Calcular analíticamente los valores propios de la matriz A.

2. Escribir la discretización de la Ec. 6 para los esquemas de Euler implícito (Backward Euler) y Crank-Nicolson.

3.1.2. Simulaciones

Supongamos que $\vec{y}(t=0)=0$ y que tomamos los valores realistas siguientes para los parámetros físicos: $L = 5\times10^{-2}$m, $R_0 = 5\times10^{-3}$m, $\rho_w = 10^3$kg.m^{-3}, $H = 3\times10^{-4}$m y $E = 9\times10^5$N.m^{-2}. Además consideramos para modelar la variación de presión a lo largo de la arteria, una función sinusoidal en función de x y de t:

$$p - p_0 = x\Delta p(a + b\cos(\omega_0 t)) \tag{7}$$

donde $b = 133,32$ N.m^{-2}, $a = 10\times b$ N.m^{-2}, $\Delta p = 0,25\times b$ N.m^{-2} y la pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{0,8}$ rad.s^{-1} que corresponde al frecuencia cardíaca.

1. Escribir una subrutina que permite calcular los valores propios de la matriz A y implementarla en un programa principal.
2. Escribir una subrutina que permite modelar la Ec. 6 usando el método de Euler implícito (Backward Euler) para 2 valores de β:
   a) $\beta = \sqrt{\alpha}$
   b) $\beta = \alpha$
3. Escribir una subrutina que permite modelar la Ec. 6 usando el método de Crank-Nicolson para 2 valores de β:
   a) $\beta = \sqrt{\alpha}$
   b) $\beta = \alpha$

3.1.2.1. Simulación 1: solución transitoria

1. Dibujar la evolución de $y(t)$ sobre el intervalo de tiempo $t\in[0;2,5\times10^{-3}]$ con los pasos de tiempo $\Delta t = 10^{-4}$ con Gnuplot. Comparar con una solución analítica si posible. Comentar el valor de los valores propios, el influencia del paso de tiempo, etc, sobre el comportamiento de la solución. ¿Se podría usar un método explicito?

3.1.2.2. Simulación 2: solución para grande tiempo

1. Dibujar la solución del sistema diferencial integrado para cada de los esquema sobre el intervalo de tiempo $t\in[0;10]$ con un paso $\Delta t = 0,1$ con Gnuplot. Dibujar igualmente el comportamiento de la velocidad.
2. Evaluar el valor de las componentes y y $z = y'$ de la solución $\vec{y}$ en función de los valores propios y de Δt para el esquema de Crank-Nicolson (y_k^{CN}, z_k^{CN}) y el esquema implícito (y_k^{BE}, z_k^{BE}).
3. Comentar sus resultados, en particular la estabilidad de los métodos numéricos usados.

3.2. Parte 2: un modelo hiperbólico para la interacción de la sangre con la pared arterial

Notamos x la coordenada longitudinal. Si ahorra no despreciamos la interacción axial entre los anillos, la ecuación 4 se escribe de la manera siguiente:

$$\rho_w H \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sigma_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{HE}{R_0^2} y = p - p_0 \qquad t > 0 \qquad 0 < x < L \tag{8}$$

donde σ_x es la componente radial del esfuerzo axial y L es el largo del cilindro considerado. En particular si se desprecia el tercer termino de la parte izquierda de 8 encontramos un ecuación de onda de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad x \in]\alpha;\beta[\qquad t > 0 \tag{9}$$

3.2.1. Preguntas conceptuales

1. Escribir la discretización de la ecuación 9 para los esquemas de Leap-frog y de Newmark.
2. ¿Qué es un esquema de Newmark? determinar los criterios de estabilidad de este esquema.

3.2.2. Simulación 1

Consideramos como dominio de integración, el cilindro en espacio-tiempo $]0;1[\times]0;1[$ y como termino fuente $f = (1+\pi^2\gamma^2)e^{-t}\sin(\pi x)$. En estas condiciones la solución exacta es $u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$.

1. Escribir un programa Fortran con el esquema leap-frog (LF).
2. Escribir un programa Fortran con el esquema de Newmark (NW).
3. Rellenar la tabla siguiente:

$t_j^{(0)}$	$p_{LF}^{(1)}$	$p_{LF}^{(2)}$	$p_{LF}^{(3)}$	$t_j^{(0)}$	$p_{NW}^{(1)}$	$p_{NW}^{(2)}$	$p_{NW}^{(3)}$
0,1	•	•	•	0,1	•	•	•
0,2	•	•	•	0,2	•	•	•
0,3	•	•	•	0,3	•	•	•
0,4	•	•	•	0,4	•	•	•
0,5	•	•	•	0,5	•	•	•
0,6	•	•	•	0,6	•	•	•
0,7	•	•	•	0,7	•	•	•
0,8	•	•	•	0,8	•	•	•
0,9	•	•	•	0,9	•	•	•
1	•	•	•	1	•	•	•

Por eso, para cada programa:

- Implementar una subrutina que permite eligir una de las 4 discretización espacial y temporal siguientes:

$$\Delta x = \Delta t = \frac{1}{2^k \times 10} \tag{10}$$

donde $k = 0, \ldots, 3$.

- Notamos $u_h^{(k)}$ la solución numérica obtenida sobre la malla k y para $j = 1, \ldots, 10$ se nota $t_j^{(0)} = \frac{j}{10}$ los nodos de discretización en tiempo de la malla la más gruesa $k = 0$.

- Implementar una subrutina que permite calcular el error e_j^k (entre la solución discretizada y la solución exacta). Determinar el error máximo, $\max(e_j^k)$, sobre la malla k en espacio a los tiempos $t_j^{(0)}$.

- Implementar una subrutina que permite calcular el orden de convergencia p_j^k definida según:

$$p_j^k = \frac{\log(\frac{e_j^0}{e_j^k})}{\log(2^k)} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{11}$$

- Comentar sus resultados.

3.2.3. Simulación 2

Para la simulación 2, tomamos $\gamma^2 = \frac{\sigma_z}{\rho_w H}$ con $\sigma_z = 1\text{kg.s}^{-2}$ y $f = \frac{x\Delta p.\sin(\omega_0 t)}{\rho_w H}$. Los parámetros ρ_w, H y L son los mismos que a la sección 3.1. El dominio en espacio-tiempo es $]0; L[\times]0; T[$ con $T = 1$s.

1. Realizar una simulación con el esquema de de Leap-frog y el esquema de Newmark para $\Delta x = \frac{L}{10}$ y $\Delta t = \frac{T}{100}$. Dibujar en un grafico 2D la evolución de u en función de x y t. Comentar sus resultados.

2. Realizar una simulación con el esquema de de Leap-frog y el esquema de Newmark para $\Delta x = \frac{L}{10}$ y $\Delta t = \frac{T}{400}$. Dibujar en un grafico 2D la evolución de u en función de x y t.

3. Comentar sus resultados.

4. Atractor de Lorenz

El sistema de ecuaciones de Lorenz es un ejemplo fundamental de un sistema de ecuación diferencial de orden 1, tridimensional, no lineal, que tiene un comportamiento caótico para algunos valores de sus parámetros. Este sistema de ecuaciones permite modelar los rollos de convección que se producen en la atmósfera terrestre. Es un modelo simplificado de la convección de Rayleigh-Benard (ecuaciones de Navier-Stokes con hipótesis de Boussinesq). Edward Lorenz publicó sus trabajos en 1963 en la revista *Journal of the Atmospheric Sciences* [1] (Ver articulo adjunto).

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Pr.\big(y(t) - x(t)\big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = Ra.\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \end{cases} \tag{12}$$

donde Pr es el número de Prandtl y Ra se llama el número de Rayleigh. Las variables dinámicas x, y y z representan el estado del sistema a cada instante t:

- $x(t)$ es proporcional al intensidad del movimiento de convección
- $y(t)$ es proporcional a la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes.
- $z(t)$ es proporcional a la diferencia entre el perfil vertical de temperatura y un perfil vertical de temperatura lineal.

4.1. Trabajo a realizar

1. Buscar en la literatura ¿Que es un sistema dinámico caótico? ¿ Qué es un atractor extraño?
2. Indicar los puntos fijos del sistema de ecuación (ver articulo de Lorenz).
3. Escribir un programa que permite simular el comportamiento del sistema de Lorenz para una condición inicial y los parámetros de control Pr, Ra y β usando un esquema de Runge Kutta de orden 4.
4. Generalmente, para estudiar este sistema dinámico se fija $Pr = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ y se hace variar el número de Rayleigh Ra (Ver section 7 del articulo: numerical integration of the convection equations).
   a) Reproducir (usando Gnuplot) las figuras 1 y 2 del articulo de Lorenz.
   b) Dibujar usando Gnuplot las soluciones obtenidas en el espacio (x,y,z) para $Ra = 0, 5$, $Ra = 10$ y $Ra = 28$.
   c) Dibujar (x, t), (y, t) y (z, t) haciendo varia lentamente Ra entre 0 y 30.
5. Comentar sus resultados. Comparar con los resultados obtenidos por Lorenz.

[1] *Journal of the Atmospheric Sciences, Deterministic Nonperiodic Flow, 20, 130-141, 1963*

5. Anexo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad x \in \,]\alpha;\beta[\qquad t > 0 \tag{13}$$

- Leap-frog

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = (\gamma\lambda)^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{14}$$

con $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ y $f = 0$

- Newmark

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t\, v_j^n + (\gamma\lambda)^2 \left[\beta w_j^{n+1} + (\frac{1}{2} - \beta) w_j^n\right] \tag{15}$$

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{(\gamma\lambda)^2}{\Delta t}\left[\theta w_j^{n+1} + (1-\theta) w_j^n\right] \tag{16}$$

con $f = 0$, $w_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ y donde los parámetros β y θ satisfacen $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta \leq 1$.