



Universidad Técnica Federico Santa María



Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto 1

Dinámica de fluidos computacional

Nombre : Ignacio Apablaza
Rol : 201141007-6
Profesores : Romain Gers
: Olivier Skurtys
Asignatura : IPM468

Índice

1	Resumen	3
2	Introducción	4
3	Metodología	5
3.1	'para la preguntita 1'	5
3.2	'para la preguntita 2'	5
3.3	'para la preguntita 3'	5
4	Desarrollo y Análisis	6
4.1	Ejercicios en Fortran	6
4.1.1	Ejercicio 1	6
4.1.2	Ejercicio 2	7
4.2	Estudio del comportamiento mecánico de una arteria	7
4.3	Parte 1: Movimiento de una pared arterial	7
4.3.1	Simulación 1	8
4.4	Parte 2: Un modelo hiperbólico para la interacción de la sangre con la pared . . .	10
4.5	Atractor de Lorenz	10
5	Conclusiones y Observaciones	11

1 Resumen

2 Introducción

3 Metodología

3.1 'para la preguntita 1'

- hablar de fortran, programación orientada a objetos
- hablar de la precision de la maquina
- hablar de inestabilidad numerica
- hablar de las series numericas (convergencia)
- hablar de la serie fibbonacci
- hablar de las subrutinas

3.2 'para la preguntita 2'

- hablar de euler implicito, familia esquema theta (crank nicolson), leapfrog, newmark
- hablar de estabilidad espacio-tiempo (pasos de tiempo, dx,etc)
- hablar de hablar de las arterias desde el punto de vista mec de fluidos
- estimación del error
- razon de convergencia de la malla (como afecta la malla en los resultados)
- ...

3.3 'para la preguntita 3'

- LEER!!!

Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f \quad (1)$$

Esquema de discretización Newmark

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Luego, el desarrollo de Taylor de $v(t + \Delta t) = t^{n+1}$ para un paso de tiempo Δt es

$$v^{n+1} = v^n + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial v}{\partial t}(t = \xi) \quad (3)$$

para $\xi \in [t, t + \Delta t]$.como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (4)$$

Reemplazando en la (ECUACION!) se tiene

4 Desarrollo y Análisis

4.1 Ejercicios en Fortran

4.1.1 Ejercicio 1

Sea $A(n)$ un número real tal que

$$A(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (5)$$

Se implementa una programa en Fortran que permite calcular y graficar $A(n)$ para ciertos valores de n . En la Figura 1 se grafica A para simple y doble precisión. En la Figura 2 Para doble y cuádruple precisión

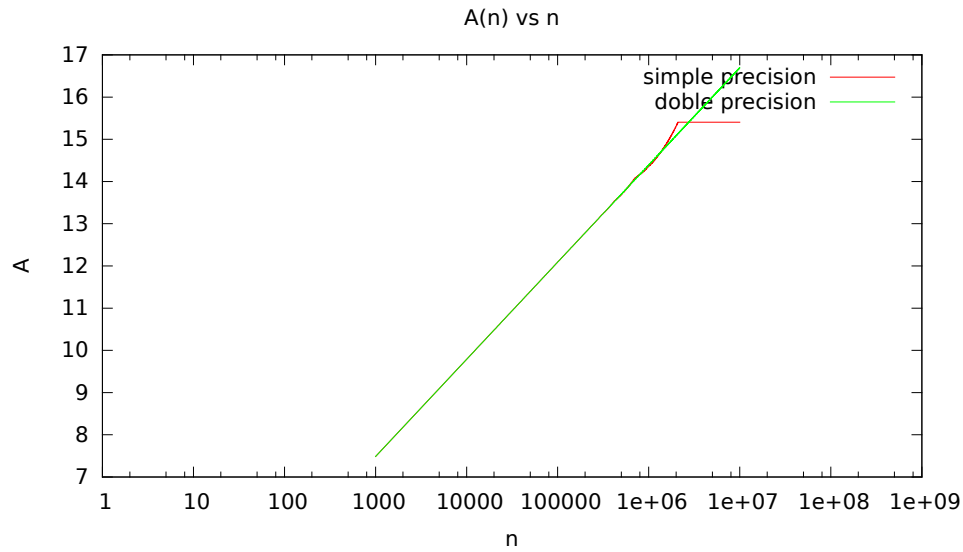


Figura 1.

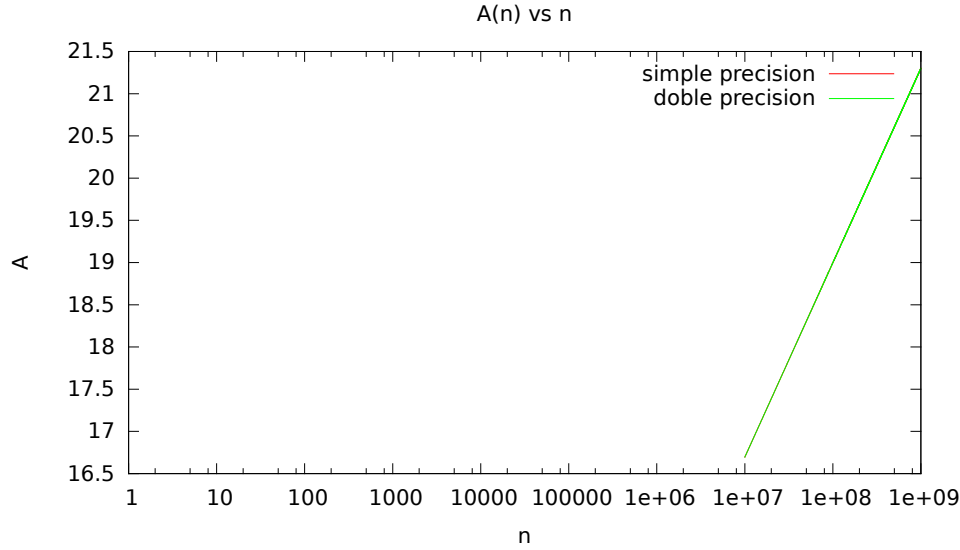


Figura 2.

4.1.2 Ejercicio 2

Se implementa una rutina en Fortran que permite calcular los $n+1$ valores de la serie Fibonacci

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{tal que} \quad u_0 = 0 ; u_1 = 1 \quad (6)$$

La serie se grafica para $n = 100$

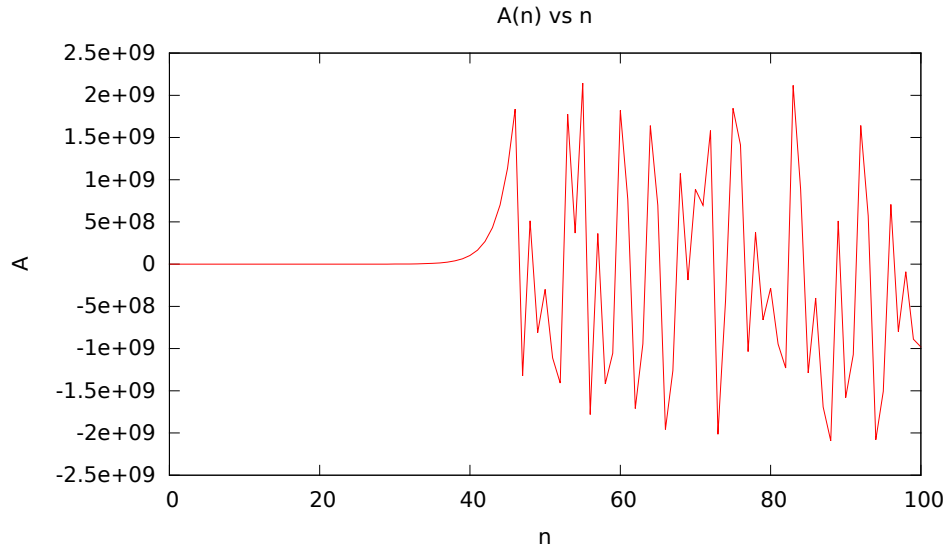


Figura 3.

4.2 Estudio del comportamiento mecánico de una arteria

4.3 Parte 1: Movimiento de una pared arterial

Una arteria puede modelarse por un cilindro flexible de base circular, longitud L , radio R_0 , cuyas paredes poseen un espesor H . Se supone que está constituido de un material elástico,

L	$= 5 \times 10^{-2} \text{ m}$	b	$= 133.32 \text{ N m}^{-2}$
R_0	$= 5 \times 10^{-3} \text{ m}$	a	$= 1333.2 \text{ N m}^{-2}$
ρ_w	$= 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	Δp	$= 33.33 \text{ N m}^{-2}$
H	$= 3 \times 10^{-4} \text{ m}$	w_0	$= 2\pi/0.8$
E	$= 9 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$		

Tabla 1. Parametros utilizados para la simulación 1

incompresible, homogéneo e isotrópico.

Un modelo simplificado que describe el comportamiento mecánico de la pared arterial en interacción con el flujo sanguíneo se obtiene considerando que el cilindro es constituido por un conjunto de anillos independientes uno de otros. De esta manera se puede desprejar las interacciones longitudinales y axiales a lo largo de la arteria. Luego, se supone que la arteria se deforma solamente en la dirección radial.

El radio de la arteria está dado por,

$$R(t) = R_0 + y(t) \quad (7)$$

donde $y(t)$ es la deformación radial en función del tiempo t . Al aplicar la ley de Newton en el sistema de anillo independientes conduce a una ecuación que permite modelar el comportamiento mecánico de la pared de la arteria en función del tiempo,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \gamma(p(t) - p_0) \quad (8)$$

donde,

$$\alpha = \frac{E}{\rho_w R_0^2} \quad \gamma = \frac{1}{\rho_w H} \quad \beta = \text{constante} > 0 \quad (9)$$

Particularmente se modela la variación de la presión a lo largo de la arteria como una función sinusoidal que depende de la posición x y el instante de tiempo t ,

$$(p - p_0) = x \Delta p (a + b \cos(\omega_0 t)) \quad (10)$$

4.3.1 Simulación 1

Se calcula numericamente la ecuación 8 con el término fuente 10 y considerando los siguientes valores realistas para los parámetros físicos:

Y considerando a su vez dos parametros de β :

(a) $\beta = \sqrt{\alpha}$

(b) $\beta = \alpha$

Se reescribe la ecuación (8) como un sistema de ecuaciones lineales. En forma matricial,

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A} \vec{y} + \vec{b} \quad (11)$$

donde $\vec{y} = [y \quad y']^T$ (T significa transpuesta), y $\vec{b}(t)$ es un vector fuente dependiente del tiempo t . La matriz \mathbf{A} resultante es,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \quad (12)$$

Se implementa una subrutina que permite calcular los valores propios de la matriz \mathbf{A} de la ecuación 11. Utilizando los valores de la Tabla 1 se obtiene:

(a) $\beta = \sqrt{\alpha} = 6.0 \times 10^3$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 36.0 \times 10^6 & 6.0 \times 10^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = & -3000.00 + 5196.15i \\ \lambda_2 = & -3000.00 - 5196.15i \end{matrix} \quad (13)$$

(b) $\beta = \alpha = 36.0 \times 10^6$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 36.0 \times 10^6 & 6.0 \times 10^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = & -3000.00 + 5196.15i \\ \lambda_2 = & -3000.00 - 5196.15i \end{matrix} \quad (14)$$

Se implementa una subrutina que permite calcular la ecuacion (AGREGAR ECUACION) usando el método de Euler Implícito para dos valores de β

HABLAR DE LOS VALORES PROPIOS

Discretizacion de la ecuación por el método Euler Implícito

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} = z^n \quad (15)$$

$$\frac{z^n - z^{n-1}}{\Delta t} = -\alpha y^n - \beta z^n + \gamma(p_n - p_0) \quad (16)$$

$$(17)$$

Reordenando los valores en los pasos de tiempo n $n - 1$ en el lado izquierdo y derecho respectivamente, se expresa la relacion (ECUACION ANTERIOR) en forma matricial como,

$$\mathbf{A} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y^{n-1} \\ z^{n-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma(p_n - p_0) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ \Delta t \alpha & 1 + \Delta t \beta \end{pmatrix} \quad (19)$$

Despenjando las incognitas se obtiene,

$$\begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} y^{n-1} \\ z^{n-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma(p_n - p_0) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

donde

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 + \beta \Delta t + \alpha (\Delta t)^2} \begin{pmatrix} 1 + \beta \Delta t & \Delta t \\ -\Delta t \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Discretizacion de la ecuación por el método Crank Nicolson

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (z^{n+1} + z^n) \quad (22)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (-\alpha y^{n+1} - \beta y^{n+1} + \gamma(p_{n+1} - p_0)) + \frac{1}{2} (-\alpha y^n - \beta y^n + \gamma(p_n - p_0)) \quad (23)$$

Reordenando los valores en los pasos de tiempo n $n - 1$ en el lado izquierdo y derecho respectivamente, se expresa la relacion (ECUACION ANTERIOR) en forma matricial como,

$$\mathbf{A} \cdot \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\gamma(p_{n+1} - p_0) + \gamma(p_n - p_0)) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 + \frac{\beta \Delta t}{2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 - \frac{\beta \Delta t}{2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Despejando las variables incognitas se obtiene,

$$\begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ (\gamma(p_{n+1} - p_0) + \gamma(p_n - p_0)) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

donde

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\Delta t}{2} + \alpha \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta \Delta t}{2} & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

4.4 Parte 2: Un modelo hiperbólico para la interacción de la sangre con la pared

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad x \in]\alpha, \beta[\quad (29)$$

Esquema de discretización de Leapfrog

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = (\gamma \lambda)^2 (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + f_j^n \quad (30)$$

donde $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

4.5 Atractor de Lorenz

5 Conclusiones y Observaciones

Referencias

- [1] DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T., *An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method*, Archives of Computational Methods in Engineering vol. 5, 3, 207-241 (1998)
- [2] G.R. LIU y Y.T. GU, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Editorial Springer, 2005, capítulos 1-3 y 6, ISBN-10 1-4020-3228-5
- [3] G.R. LIU, *Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method*, 2da edición, Editorial CRC Press, 2010, capítulos 1 y 2, ISBN 978-1-4200-8209-8