Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingenieria Mecánica

Proyecto 2
Dinámica de fluidos computacional

Flujo monofásico newtoniano en una confluencia
Parte 1: Discretización de ecuaciones

Nombre	:	Ignacio Apablaza
Rol	:	201141007-6
Profesores	:	Romain Gers
	:	Olivier Skurtys
Asignatura	:	IPM468

Índice

1 Introducción

HABLAR UN POCO DE LO QUE SE VA A HACER ACÁ

2 Ecuación de Navier Stokes discretizado

Ecuación de Navier-Stokes adimensional para un fluido monofásico, newtoniano e incompresible en coordenadas cartesianas:

$$St\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^*\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\Gamma^*\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^*\,\partial x_j^*} \tag{1}$$

Donde St y Re son los números de Strouhal y Reynolds. El número de Strouhal permite describir el comportamiento oscilatorio de un fluido. Este parametro depende. Si $St \to 1$ predomina la viscosidad respecto a la oscilación. Suponeniendo obtener un flujo laminar desarrollado se asume $St \approx 1$, luego:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^*\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\Gamma^*\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^*\,\partial x_j^*} \tag{2}$$

Para precindir de la notación $(^*)$ se asume que todas las variables a utilizar están adimensionadas

3 Desarrollo: Discretización de ecuaciones

Ecuación de conservación/transporte de un escalar pasivo:

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla\cdot J = \vec{\nabla}P \tag{3}$$

donde J representa la contribución del flujo convectivo y difusivo.

$$J = \rho u\phi - \Gamma\Delta\phi \tag{4}$$

Para obtener la formulación en volumenes finitos se aplica el método de residuos ponderados a la ecuación, con soporte compacto y utilizando el método de Galerkin se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega_{cv}}\rho\phi d\Omega = -\oiint_{A_{cv}}\vec{F}\cdot\vec{n}dA_n + \iiint_{\Omega_{cv}}S_\phi d\Omega \tag{5}$$

Donde,

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_C}_{\rho\phi\vec{u}} + \underbrace{\vec{F}_D}_{-D\nabla\phi} \tag{6}$$

Se recurre al teorema de valor medio representar la integral en función de terminos centrales. Sea ϕ_J un valor aproximado que caracteriza al escalar dentro del volumen de control $\Omega_{cv} = \Omega_J$. La ecuación discretizada resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\phi_J\Omega_J\right) + \sum\left(F_i\,A_i\right)_J = \left(S_\phi\right)_J \tag{7}$$

3.1 Discretización del flujo convectivo/difusivo en 2D

Se escoge la discretización propuesta por Patankar ($\Delta z = 1$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\rho_P^0 \Delta x \Delta y = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_E\phi_E + a_P\phi_P + b \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)\\
a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)\\
a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)\\
a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)\\
a_P &= -a_E - a_W - a_N - a_S\\
b &= S\Delta x \Delta y
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
F_e &= (\rho^* u^*)_e \, \Delta y\\
F_w &= (\rho^* u^*)_w \, \Delta y\\
F_n &= (\rho^* v^*)_n \, \Delta x\\
F_s &= (\rho^* v^*)_s \, \Delta x
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e}{\Delta x \, \rho \, u_e}\Delta y = \frac{\Gamma^*}{Re_e}\Delta y\\
D_w &= \frac{\Gamma_w}{\Delta x \, \rho \, u_w}\Delta y = \frac{\Gamma^*}{Re_w}\Delta y\\
D_n &= \frac{\Gamma_n}{\Delta y \, \rho \, v_n}\Delta x = \frac{\Gamma^*}{Re_n}\Delta x\\
D_s &= \frac{\Gamma_s}{\Delta y \, \rho \, v_s}\Delta x = \frac{\Gamma^*}{Re_s}\Delta x
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{F_e}{D_e}\\
P_w &= \frac{F_w}{D_w}\\
P_n &= \frac{F_n}{D_n}\\
P_s &= \frac{F_s}{D_s}
\end{aligned} \tag{12}$$

Esquema	Fórmula para $A(\|P\|)$
CDS	$1 - 0.5\|p\|$
UDS	1
Hybrid	$\max(0, 1 - 0.5\|P\|)$
Power law	$\max(0, (1 - 0.1\|P\|)^5)$
Exponential	$\|P\| / [\exp(\|P\|) - 1]$

Este conjunto de ecuaciones discretiza el campo ϕ mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y la ecuación de conservación de la cantidad lineal. Sea $\vec{v} = \{u, v\}^T$ el campo de velocidad en el dominio de control entonces se plantean los sistemas de ecuaciones donde $\phi = u$ y $\phi = v$, donde u y v son escalares asociados a cada malla desplazada (*staggered grid*). Si $\phi = u$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x \Delta y = a_E^u u_E + a_W^u u_W + a_N^u u_N + a_S^u u_S + a_P^u u_P + b^u \tag{13}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_E^u &= D_e^u A(|P_e^u|) + \max(-F_e^u, 0) \\
a_W^u &= D_w^u A(|P_w^u|) + \max(F_w^u, 0) \\
a_N^u &= D_n^u A(|P_n^u|) + \max(-F_n^u, 0) \\
a_S^u &= D_s^u A(|P_s^u|) + \max(F_s^u, 0) \\
a_P^u &= -a_E^u - a_W^u - a_N^u - a_S^u \\
b^u &= S^u \Delta x \Delta y
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
F_e^u &= (\rho^* u^*)_e \, \Delta y \\
F_w^u &= (\rho^* u^*)_w \, \Delta y \\
F_n^u &= (\rho^* v^*)_n \, \Delta x \\
F_s^u &= (\rho^* v^*)_s \, \Delta x
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
D_e^u &= \frac{\Gamma^*}{Re_e^u}\Delta y \\
D_w^u &= \frac{\Gamma^*}{Re_w^u}\Delta y \\
D_n^u &= \frac{\Gamma^*}{Re_n^u}\Delta x \\
D_s^u &= \frac{\Gamma^*}{Re_s^u}\Delta x
\end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
P_e^u &= \frac{F_e^u}{D_e^u} \\
P_w^u &= \frac{F_w^u}{D_w^u} \\
P_n^u &= \frac{F_n^u}{D_n^u} \\
P_s^u &= \frac{F_s^u}{D_s^u}
\end{aligned} \tag{17}
$$

Análogo para $\phi = v$

3.2 Término convectivo

$$
H(u) = \underbrace{\max(F_w^u, 0)u_W \Delta y + \max(-F_e^u, 0)u_E \Delta y}_{\partial u^2/\partial x} + \underbrace{\max(F_s^u, 0)u_S \Delta x + \max(-F_n^u, 0)u_N \Delta x}_{\partial uv/\partial y} \tag{18}
$$

$$
H(v) = \underbrace{\max(F_w^v, 0)v_W \Delta y + \max(-F_e^v, 0)v_E \Delta y}_{\partial uv/\partial x} + \underbrace{\max(F_s^v, 0)v_S \Delta x + \max(-F_n^v, 0)v_N \Delta x}_{\partial v^2/\partial y} \tag{19}
$$

Por simplicidad,

$$
H(u) = h_W^u u_W + h_E^u u_E + h_S^u u_S + h_N^u u_N \tag{20}
$$

$$
H(v) = h_W^v v_W + h_E^v v_E + h_S^v v_S + h_N^v v_N \tag{21}
$$

3.3 Término difusivo

$$
G(u) = \frac{1}{Re_w^u} A(|P_w^u|) u_W \Delta y + \frac{1}{Re_e^u} A(|P_e^u|) u_E \Delta y + \frac{1}{Re_s^u} A(|P_s^u|) u_S \Delta x + \frac{1}{Re_n^u} A(|P_n^u|) u_N \Delta x \tag{22}
$$

$$
G(v) = \frac{1}{Re_w^v} A(|P_w^v|) v_W \Delta y + \frac{1}{Re_e^v} A(|P_e^v|) v_E \Delta y + \frac{1}{Re_s^v} A(|P_s^v|) v_S \Delta x + \frac{1}{Re_n^v} A(|P_n^v|) v_N \Delta x \tag{23}
$$

Por simplicidad,

$$
G(u) = g_W^u u_W + g_E^u u_E + g_S^u u_S + g_N^u u_N \tag{24}
$$

$$
G(v) = g_W^v v_W + g_E^v v_E + g_S^v v_S + g_N^v v_N \tag{25}
$$

4 Discretización temporal

Se plantea un esquema BFD2 (*Backward Differentiation Formula 2nd Order*), tambien llamado esquema de Gear. La derivada (8) se aproxima mediante

$$\frac{\partial \vec{v}^{n+1}}{\partial t} = \frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^{n} + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + \Theta(\Delta t^2) \tag{26}$$

El término convectivo en t_{n+1} se obtiene por extrapolación:

$$H(\vec{v}^{n+1}) = 2H(\vec{v}^{n}) - H(\vec{v}^{n-1}) \tag{27}$$

La ecuación a resolver mediante el método de volumenes finitos es:

$$\frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^{n} + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\vec{v}^{n+1}) \tag{28}$$

Los pasos a seguir son los siguientes

1. Predicción del campo de velocidad no solenoidal $\vec{v}^{*}$
2. Resolución de la ecuación de Poisson sobre la presión
3. Corrección del campo de velocidad

4.1 Predicción del campo de velocidad no solenoidal $\vec{v}^{*}$

$$\frac{3\vec{v}^{*} - 4\vec{v}^{n} + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\vec{v}^{*}) \tag{29}$$

Mediante una manipulación algebráica de la ecuación (28) se obtiene una ecuación equivalente. Sea $\delta V = \vec{v}^{*} - \vec{v}^{n}$

$$\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\Delta\right)\delta V = \frac{\vec{v}^{n} - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla} P - G(\vec{v}^{n})\right) \tag{30}$$

Aplicando el método ADI (pasos fraccionados) para descomponer al operador de Helmholtz $(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\Delta)$

$$\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\Delta\right) \approx \left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{31}$$

Luego, resolver (30) es equivalente de manera aproximada a resolver

$$\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\underbrace{\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta V}_{\Delta\delta\overline{V}} = \underbrace{\frac{\vec{v}^{n} - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla} P - G(\vec{v}^{n})\right)}_{RHS^{n}} \tag{32}$$

O bien

$$
\begin{aligned}
\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta\overline{V} &= RHS^n \\
\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta V &= \overline{V}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

en X

1er paso

$$
\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta\overline{V} = \frac{\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla}P - G(\vec{v}^n)\right) = RHS^n \tag{34}
$$

Se recurre al método de residuos ponderados y se aplica la formulación en volúmenes finitos

$$
\iiint_\Omega \Psi_i \left[\left(I - \frac{2\Gamma\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta\overline{V}_i - RHS^n\right] dV \tag{35}
$$