



Universidad Técnica Federico Santa María



Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto 1

Dinámica de fluidos computacional

Nombre : Ignacio Apablaza
Rol : 201141007-6
Profesores : Romain Gers
: Olivier Skurtys
Asignatura : IPM468

Índice

1	Resumen	3
2	Introducción	4
3	Metodología	5
3.1	Precisión numérica en Fortran	5
3.2	Método de Diferencias Finitas	5
3.3	Esquema de integración temporal	6
3.3.1	Esquema Euler Implícito	6
3.3.2	Esquema integración de Θ	7
3.3.3	Esquema Leap-Frog	7
3.3.4	Esquema Newmark	7
3.3.5	Método Runge Kutta de orden 4	7
3.4	Análisis Espectral	8
3.4.1	Factor de Amplificación	8
4	Desarrollo y Análisis	9
4.1	Ejercicios en Fortran	9
4.1.1	Ejercicio 1	9
4.1.2	Ejercicio 2	10
4.2	Ejercicio 3	11
4.3	Estudio del comportamiento mecánico de una arteria	13
4.4	Parte 1: Movimiento de una pared arterial	13
4.4.1	Simulación 1: Euler Implícito	14
4.4.2	Simulación 1: Crank Nicolson	17
4.4.3	Simulación 2	22
4.5	Parte 2: Un modelo hiperbólico para la interacción de la sangre con la pared . . .	25
4.5.1	Simulación 1: Leap-Frog	26
4.5.2	Simulación 1: Newmark	27
4.5.3	Discretización espacial	27
4.6	Atractor de Lorenz	28
5	Conclusiones y Observaciones	29

1 Resumen

2 Introducción

3 Metodología

3.1 Precisión numérica en Fortran

Fortran (*Formula Translator* o *Traductor de Fórmulas*) es un lenguaje de programación orientado a objetos y de alto nivel utilizado para la computación científica en distintas disciplinas del área de las ciencias. Fortran posee distintos tipos de objetos:

character cadena de uno o varios caracteres
integer números enteros positivos y negativos
logical valores lógicos o booleanos (**.true.** o **.false.**)
real números reales positivos y negativos
complex números complejos compuestos de una parte real y una imaginaria
tipos derivados tipos especificados por usuario

Los objetos de clase **real** poseen ciertos parámetros que describen sus características. Un parámetro relevante a estudiar es la precisión que describe a un objeto declarado como **real**

Entero	$-2.147.483.648 \leq i \leq 2.147.483.647$	—
Real Simple Precisión	$1.2 \times 10^{-38} \leq x \leq 3.4 \times 10^{38}$	7 cifras significativas
Real Doble Precisión	$2.2 \times 10^{-308} \leq x \leq 1.8 \times 10^{308}$	16 cifras significativas

Tabla 1. Características de precisión de reales en Fortran

La especificación del parámetro precisión especificará el tamaño de memoria asignada al objeto. Dependiendo de la naturaleza del cálculo empleado será más conveniente utilizar una u otra precisión.

3.2 Método de Diferencias Finitas

Una manera de aproximar numéricamente derivadas presentes en una ecuación diferencial ordinaria o parcial es mediante el método de Diferencias Finitas, que consiste representar las razones de cambio como una diferencia de valores nodales discretos. Se desprende del desarrollo de series de Taylor de la función incógnita: Sea $\phi(x)$ una función diferenciales en una dimensión en un dominio de interés, entonces el valor de $\phi(x + \Delta x)$ se puede expresar mediante el desarrollo en series de Taylor:

$$\phi(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \Big|_x \quad (1)$$

Para una diferencia $+\Delta x$ se tiene,

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_x + \dots \quad (2)$$

Para una diferencia $-\Delta x$ se tiene

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_x - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_x + \dots \quad (3)$$

Distintas combinaciones de las ecuaciones (2) y (3) permiten obtener las aproximaciones de distintos ordendes de derivada.

Truncando el desarrollo de la serie se obtiene la aproximación. Al conocer la expresión analítica en (1) se puede determinar el orden el error obtenido. El desarrollo en una dimensión se extiende a dimensiones superiores. A continuación se exponen los tipos de aproximaciones utilizados en este trabajo:

Diferencia hacia atras (Backward) Aproximando la primera derivada de $\phi(x)$ mediante diferencias hacia atras resulta:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{\Delta x} + o(\Delta x^1) \quad (4)$$

$o(\Delta x)$ agrupa el términos truncados de la serie y representa el error de la aproximación, de tal manera que,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (5)$$

Donde ϕ_i denota el valor nodal que discretiza a la función en el dominio ($\phi(x_i) = \phi_i$), En este caso se tiene un error de orden 1

Diferencias centradas Aproximando la segunda derivada de $\phi(x)$ utilizando diferencias finitas centradas resulta:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (6)$$

Este esquema de aproximación posee un error de orden 2. Análogo al caso anterior la aproximación se plantea como,

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x_i} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

El método de diferencias finitas se aplica para discretizar derivadas espaciales y temporales. Estas últimas determinan los esquemas de integración temporales.

3.3 Esquema de integración temporal

Sea una ecuación diferencial de $\phi(t)$ tal que,

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t=0) = \phi_0 \end{cases} \quad (8)$$

Se tiene un problema de Cauchy o de valor inicial. La solución de ϕ está dada por,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi(t)}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \quad (9)$$

Del teorema fundamental del cálculo se tiene,

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \quad (10)$$

Según como se integre el término de la derecha de la ecuación en (10) se obtienen los distintos esquemas de integración.

3.3.1 Esquema Euler Implícito

El esquema de Euler Implícito (Backward) se define como,

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t f(t_{n+1}, \phi(t_{n+1})) \quad (11)$$

Este esquema requiere conocer el valor del pasos t_n y t_{n+1} . Este tipo de esquemas son conocidos como esquemas de dos pasos (*two level scheme*)

3.3.2 Esquema integración de Θ

La familia de esquemas Θ se describen como,

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Theta f(t_n, \phi(t_n)) + (1 - \Theta) f(t_{n+1}, \phi(t_{n+1})) \quad (12)$$

Para el valor de $\Theta = \frac{1}{2}$ se tiene el esquema de Crank Nicolson:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, \phi(t_n)) + f(t_{n+1}, \phi(t_{n+1}))) \quad (13)$$

3.3.3 Esquema Leap-Frog

Los esquemas Leap-Frog corresponden a una discretización central de la derivada temporal.

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} + 2\Delta t f(t_n, \phi(t_n)) \quad (14)$$

Se calcula el valor de ϕ en el tiempo t_{n+1} a partir de dos valores anteriores t_n y t_{n-1} . Estos tipos de esquema son llamadas de tres pasos (*three level scheme*)

3.3.4 Esquema Newmark

Consiste en un esquema de dos pasos para el cálculo de ϕ y su derivada $\partial\phi(t)/\partial t$. Sea $\psi(t) = \partial\phi(t)/\partial t$, se integra ψ utilizando un esquema Θ ,

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta t \left[\Theta \frac{\partial\psi^n}{\partial t} \Big|_t + (1 - \Theta) \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial t} \Big|_t \right] \quad (15)$$

Para integrar ϕ se utiliza un esquema explícito donde el último término utiliza un esquema Θ

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t \psi + (\Delta t)^2 \left[\beta \frac{\partial\psi^n}{\partial t} \Big|_t + (1 - \beta) \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial t} \Big|_t \right] \quad (16)$$

donde β es un parámetro que reemplaza a Θ e integra al factor 2 del desarrollo de la serie de Taylor.

3.3.5 Método Runge Kutta de orden 4

Los métodos de Runge Kutta conocidos como métodos *Predictor-Corrector*: Se calcula uno o varios valores intermedios de la función incógnita ϕ^* , llamados predictores, para finalmente calcular el resultado final $\phi(t + \Delta t)$ (corrector).

El método Runge Kutta de orden 4 consiste en calcular tres pasos de predicción y el último paso de corrección:

- 1^{ra} predicción: Euler Explícito
- 2^{da} predicción: Euler Implícito
- 3^{ra} predicción: Leap-Frog
- Corrección: Método de integración de Simpson

Luego, se puede expresar como:

$$\phi_{n+1/2}^* = \phi_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \phi_n) \quad (17)$$

$$\phi_{n+1/2}^{**} = \phi_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^*) \quad (18)$$

$$\phi_{n+1}^* = \phi_n + \Delta t f(t_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^{**}) \quad (19)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\Delta t}{6} \left[f(t_n, \phi_n) + 2f(t_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^*) + 2f(t_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^{**}) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*) \right] \quad (20)$$

3.4 Análisis Espectral

La discretización de una ecuación diferencial de $u = u(\vec{x}, t)$ se puede expresar en una notación matricial: Sea \vec{U} el vector que contiene los valores u_i ($i = 1, \dots, n$).

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \mathbf{S}\vec{U} + \vec{Q} \quad (21)$$

Donde \mathbf{S} es la matriz asociada a la discretización espacial y \vec{Q} es el vector que contiene los componentes del término fuente. Esta ecuación se descompone a partir de sus valores propios (Descomposición modal), en ella se desacopla la incógnita en espacio y tiempo. Para cada componente del vector \vec{U} se tiene,

$$\frac{d\bar{U}_j}{dt} = \Omega_j \bar{U}_j + Q_j \quad (22)$$

donde,

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \vec{U}_j(t) V^{(j)}(\vec{x}) \quad \text{y} \quad Q = \sum_{j=1}^N Q_j V^{(j)} \quad (23)$$

Ω_j son los autovalores asociados a la dirección del vector propio $V^{(j)}$ de la matriz \mathbf{S} ; N es el número de dimensiones de la ecuación (21). Luego, su solución analítica en función de sus valores propios viene dado por,

$$\bar{U}_j(t) = \left(U^0 + \frac{Q_j}{\Omega_j} \right) e^{\Omega_j t} - \frac{Q_j}{\Omega_j} \quad (24)$$

Donde U^0 es la condición inicial del problema de Cauchy.

3.4.1 Factor de Amplificación

Es de interés conocer el comportamiento de la solución transiente de \vec{U} . Para ello se supone $Q = 0$ (solución homogénea) y se denota como U^T la solución transiente,

$$U_j^T(t) = U^0 e^{\Omega_j t} \quad (25)$$

Se define el factor de amplificación $G(\Omega_j)$,

$$\bar{U}_j^T(n\Delta t) = G(\Omega_j) \bar{U}_j^T([n-1]\Delta t) \quad (26)$$

Notar que $G = G(\Omega_j)$ es función de la discretización espacial. Reemplazando (25) en (26),

$$\bar{U}_j^0 e^{\Omega_j n \Delta t} = G(\Omega_j) \bar{U}_j^0 e^{\Omega_j (n-1) \Delta t} \quad (27)$$

Despejando $G(\Omega_j)$ se obtiene el factor de amplificación para un paso de tiempo (de $(n-1)\Delta t$ a $n\Delta t$)

$$G = e^{\Omega_j \Delta t} \quad (28)$$

Entonces, el factor de amplificación G calculado desde la solución inicial U^0 hasta el paso de tiempo $n\Delta t$ se obtiene,

$$G = e^{\Omega_j n \Delta t} \quad (29)$$

Para garantizar que la solución transiente sea estable se debe cumplir que,

$$|G(\Omega_j)| = |e^{[\Re(\Omega_j)] + [\Im(\Omega_j)n\Delta t]i}| < 1 \quad (30)$$

lo que implica que

$$\Re(\Omega_j) \leq 0 \quad (31)$$

Se desprende la ecuación anterior que $\Re(\Omega_j)$ está asociado al error de disipación (exponencial), mientras que $\Im(\Omega_j)$ al error de dispersión (oscilación)

4 Desarrollo y Análisis

4.1 Ejercicios en Fortran

4.1.1 Ejercicio 1

Sea $A(n)$ un número real tal que,

$$A(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (32)$$

Se implementa una programa en Fortran que permite calcular y graficar $A(n)$ para ciertos valores de n . Esta serie geométrica es divergente, es decir, $A(n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En la Figura 1 se grafica la función A en simple precisión y doble precisión (A_{sp} y A_{dp} , respectivamente). El desarrollo de A es prácticamente el mismo, salvo una diferencia decimal, hasta aproximadamente $n = 100000$. Como se observa A_{sp} y A_{dp} empiezan a mostrar diferencias que se vuelven más prominentes en la medida que incrementa n . Para $n_{crit} = 2097151$, el valor de A_{sp} se estanca, ya que,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2097151} \approx 0,000000477...$$

Los reales de simple precisión con los que trabaja Fortran poseen 7 cifras significativas, luego por redondeo $1/n_{crit}$ no contribuye a la sumatoria, resultando en $A_{sp}|_{n=k} = 15.4036827$ para $k \geq n_{crit}$. La diferencia entre los valores obtenidos con la simple y doble precisión se muestran en la Figura 2, donde se grafica un error porcentual respecto a A_{dp} :

$$E(\%) = \frac{A_{dp}(n) - A_{sp}(n)}{A_{dp}(n)} \quad (33)$$

donde se asume que el valor con doble precisión es el valor más exacto.

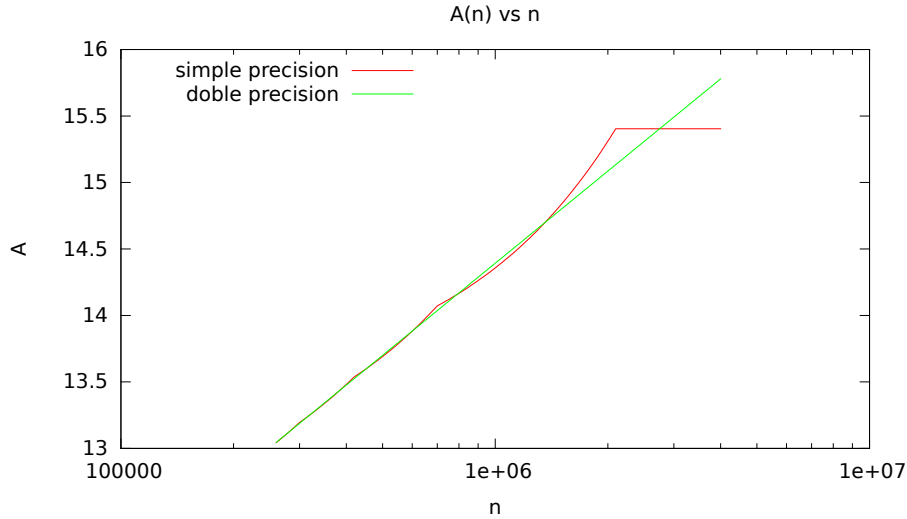


Figura 1. Gráfica de A_{sp} y A_{dp} para algunos valores de n . Abscisa en escala logarítmica



Figura 2. Error relativo $E(\%)$ de A_{sp} respecto a A_{dp} . Abscisa en escala logarítmica

4.1.2 Ejercicio 2

Se implementa una rutina en Fortran que permite calcular los $n+1$ valores de la serie Fibonacci

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{tal que} \quad u_0 = 0 ; u_1 = 1 \quad (34)$$

En las Figuras 3 y 4 se representa los elementos de la serie. Se observa en la primera gráfica que la serie presenta un crecimiento exponencial. Para $n = 46$ se presenta una inestabilidad numérica, lo cual se explica por la memoria asignada a un objeto real (Tabla 1).

Se utiliza un real de doble precision en vez de un entero y se grafica la serie (Figura 5). Se vuelve a apreciar el comportamiento exponencial. La serie se grafica hasta que el se alcanza el tope de memoria, arrojando *inf*

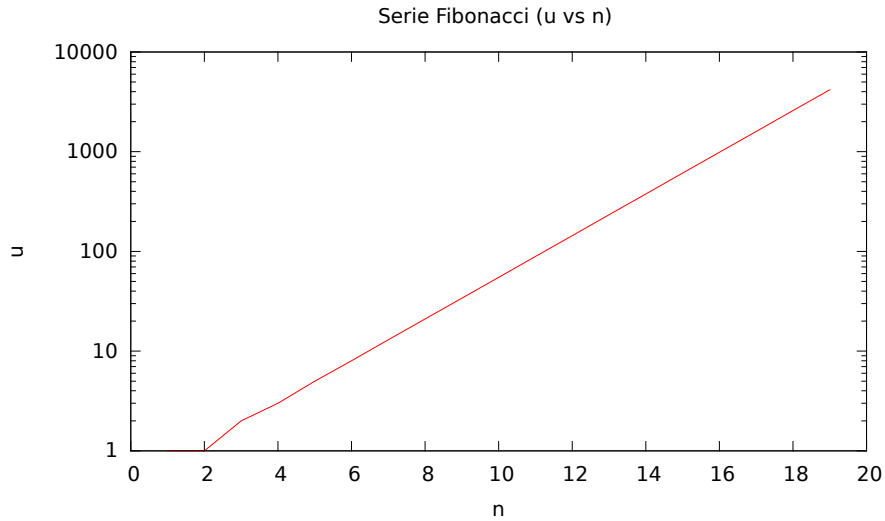


Figura 3. Gráfica de la serie Fibonacci para $n \in [0, \dots, 20]$. Ordenanda en escala logarítmica

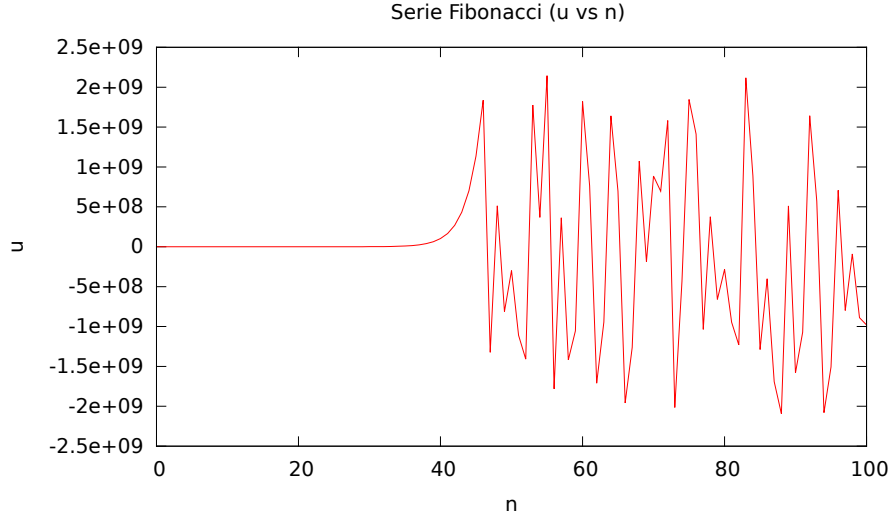


Figura 4. Gráfica de la serie Fibonacci para $n \in [0, \dots, 100]$ definiendo u como un objeto **integer**. Para $n = 46$ se presenta una inestabilidad numérica: se obtiene números negativos en una serie estrictamente creciente. Ordenanda en escala logarítmica

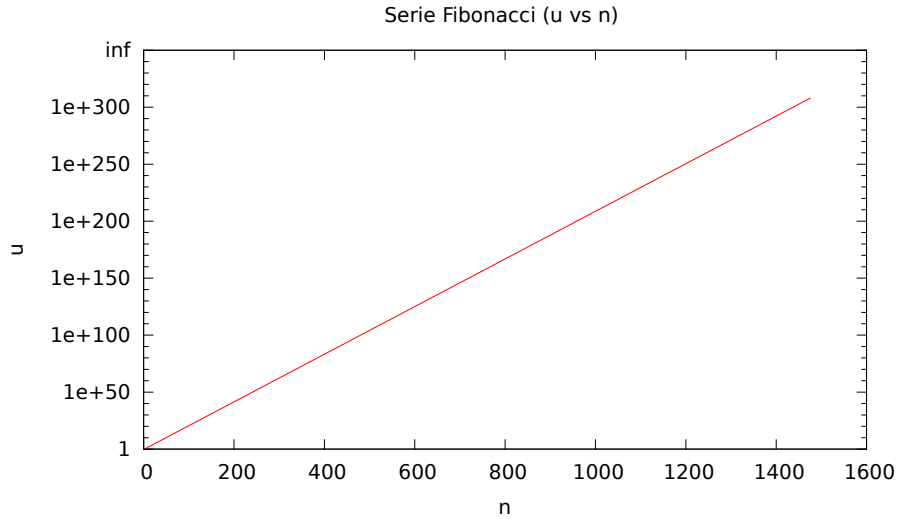


Figura 5. Gráfica de la serie Fibonacci para $n \in [0, \dots, 1600]$ definiendo u como un objeto **real** de doble precisión. El resultado crece exponencialmente hasta alcanzar el máximo de memoria permitido, arrojando *inf*. Ordenanda en escala logarítmica

4.2 Ejercicio 3

Se escribe una rutina *matrix-mult* que realiza el producto entre dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de dimensiones (m_a, n_a) y (m_b, n_b) respectivamente. El algoritmo implementado es el siguiente:

1. Se ingresan los valores de las matrices \mathbf{A}_{n_a, m_a} y \mathbf{B}_{n_b, m_b} .
2. Se verifica la dimensión entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . Si $m_a \neq n_b$ entonces $l = 1$ y se sale de la subrutina.

En el caso contrario, las dimensiones son consistente con la multiplicación matricial, $l = 0$, y se pasa al siguiente paso (l : indicador del error)

3. Se define el tamaño y se asigna la memoria para arreglo C_{n_a, m_b}
4. Se realiza la multiplicación matricial entre A y B . Se asigna a la matriz C
5. Salida de la subrutina C_{n_a, m_b} y l

En la Figura 6 se expone un diagrama de flujo que explica la subrutina

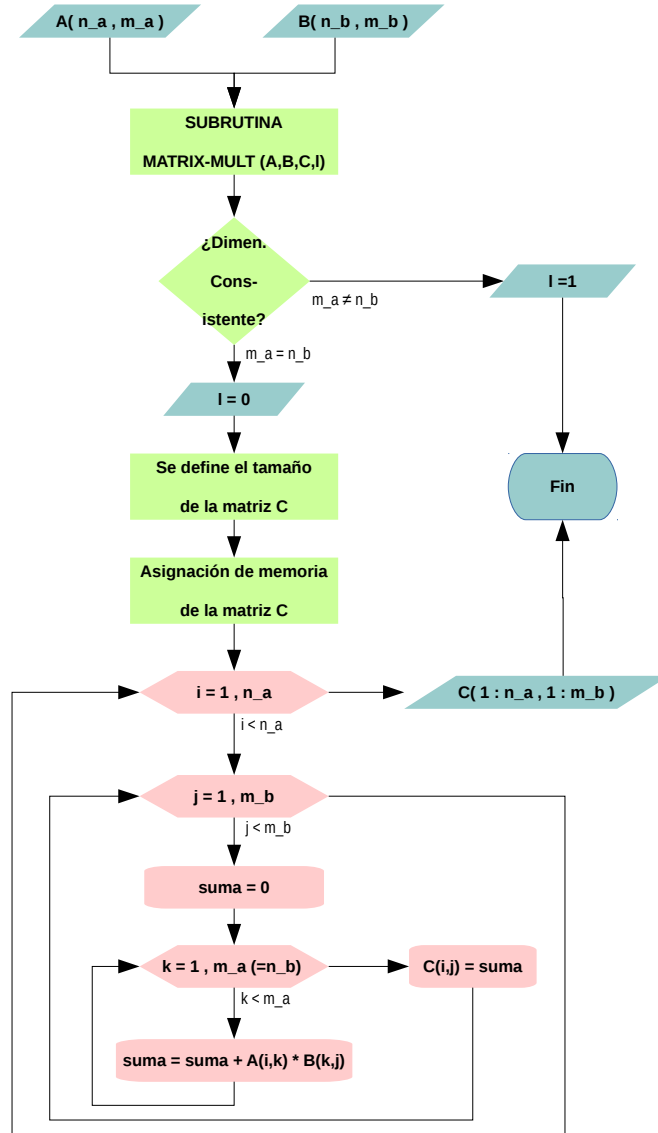


Figura 6. Diagrama de flujo de la subrutina *matrix-mult*. Variables de entrada: Matrices A_{n_a, m_a} y B_{n_b, m_b} . Variables de salida: Matriz C_{n_a, m_b} y el indicador de error l

4.3 Estudio del comportamiento mecánico de una arteria

4.4 Parte 1: Movimiento de una pared arterial

Una arteria puede modelarse por un cilindro flexible de base circular, longitud L , radio R_0 , cuyas paredes poseen un espesor H . Se supone que está constituido de un material elástico, incompresible, homogéneo e isotrópico.

Un modelo simplificado que describe el comportamiento mecánico de la pared arterial en interacción con el flujo sanguíneo se obtiene considerando que el cilindro es constituido por un conjunto de anillos independientes uno de otros. De esta manera se puede desprestigiar las interacciones longitudinales y axiales a lo largo de la arteria. Luego, se supone que la arteria se deforma solamente en la dirección radial.

El radio de la arteria está dado por,

$$R(t) = R_0 + y(t) \quad (35)$$

donde $y(t)$ es la deformación radial en función del tiempo t . Al aplicar la ley de Newton en el sistema de anillo independientes conduce a una ecuación que permite modelar el comportamiento mecánico de la pared de la arteria en función del tiempo,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \gamma(p(t) - p_0) \quad (36)$$

donde,

$$\alpha = \frac{E}{\rho_w R_0^2} \quad \gamma = \frac{1}{\rho_w H} \quad \beta = \text{constante} > 0 \quad (37)$$

Particularmente se modela la variación de la presión a lo largo de la arteria como una función sinusoidal que depende de la posición x y el instante de tiempo t ,

$$(p - p_0) = x \Delta p (a + b \cos(\omega_0 t)) \quad (38)$$

Simulación 1

Se calcula numericamente la ecuación (36) con el término fuente (38). Se utilizan los siguientes valores realistas para los parámetros físicos:

L	$= 5 \times 10^{-2} \text{ m}$	b	$= 133.32 \text{ N m}^{-2}$
R_0	$= 5 \times 10^{-3} \text{ m}$	a	$= 1333.2 \text{ N m}^{-2}$
ρ_w	$= 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	Δp	$= 33.33 \text{ N m}^{-2}$
H	$= 3 \times 10^{-4} \text{ m}$	w_0	$= 2\pi/0.8$
E	$= 9 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$		

Tabla 2. Parametros utilizados para la simulación 1

Y considerando a su vez dos parametros de β :

(a) $\beta = \sqrt{\alpha}$

(b) $\beta = \alpha$

Se reescribe la ecuación (36) como un sustema de ecuaciones lineales. En forma matricial,

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b} \quad (39)$$

donde $\vec{y} = [y \quad y']^T$ (T significa transpuesta), y $\vec{b}(t)$ es un vector fuente dependiente del tiempo t . La matriz \mathbf{A} resultante es,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \quad (40)$$

Los valores propios de \mathbf{A} se obtienen del desarrollo del polinomio característico,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda - \beta \end{vmatrix} \rightarrow \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0 \quad (41)$$

Luego, los valores propios se calculan como la raíz del polinomio,

$$\lambda_{1,2} = \frac{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha})}{2} \quad (42)$$

Notar que para valores de $\beta \geq 2\sqrt{\alpha}$ ambos valores, λ_1 y λ_2 , resultan reales y negativos, mientras que para valores de $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ ambos autovalores resultan números complejos con su componente real negativa.

Se implementa una subrutina que permite calcular los valores propios de la matriz \mathbf{A} . Utilizando los valores de la Tabla 2 se obtiene:

(a) $\beta = \sqrt{\alpha} = 6.0 \times 10^3$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 36.0 \times 10^6 & 6.0 \times 10^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = & -3000.00 + 5196.15i \\ \lambda_2 = & -3000.00 - 5196.15i \end{matrix} \quad (43)$$

(b) $\beta = \alpha = 36.0 \times 10^6$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 36.0 \times 10^6 & 36.0 \times 10^6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = & -1.0 \\ \lambda_2 = & -36.0 \times 10^6 \end{matrix} \quad (44)$$

4.4.1 Simulación 1: Euler Implícito

Discretización de la ecuación diferencial Se implementa una subrutina que permite calcular la ecuación (36) usando el método de Euler Implícito para dos valores de β . Sea $y(x, t) = y_j^n$ y $\partial y / \partial t(x, t) = z_j^n$, recurriendo a la expresión (39) e implementando un esquema de integración implícito se tiene que,

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} = z^n \quad (45)$$

$$\frac{z^n - z^{n-1}}{\Delta t} = -\alpha y^n - \beta z^n + \gamma(p_n - p_0) \quad (46)$$

Reordenando los valores en los pasos de tiempo n y $n - 1$ en los lados izquierdo y derecho respectivamente, se expresa la relación anterior en forma matricial como,

$$\mathbf{A} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y^{n-1} \\ z^{n-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma(p_n - p_0) \end{Bmatrix} \quad (47)$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ \Delta t\alpha & 1 + \Delta t\beta \end{pmatrix} \quad (48)$$

Despenjando las incognitas $\{y^n \ z^n\}^T$ se obtiene,

$$\begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} y^{n-1} \\ z^{n-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma(p_n - p_0) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

donde

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 + \beta\Delta t + \alpha(\Delta t)^2} \begin{pmatrix} 1 + \beta\Delta t & \Delta t \\ -\Delta t\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Estabilidad de la solución Se quiere estudiar la estabilidad de la solución transiente de (39). Para ello se recurre a las expresiones (21) y (22). Luego,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \Omega_1 y^{n+1} \quad (51)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = \Omega_2 z^{n+1} \quad (52)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \mathbf{S}\vec{U} + \vec{Q} \rightarrow \begin{cases} (y^{n+1} - y^n)/\Delta t = \Omega_1 y^{n+1} \\ (z^{n+1} - z^n)/\Delta t = \Omega_2 z^{n+1} \end{cases} \quad (53)$$

Despejando los terminos evaluados en t_{n+1} en la izquierda de la ecuación

$$y^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \Omega_1} y^n \quad (54)$$

$$z^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \Omega_2} z^n \quad (55)$$

Se reconocen los términos \vec{z}_p para y y z . Teniendo en cuenta los valores propios Ω antes calculado

$$z_p = \frac{1}{1 - \Omega_j \Delta t} \quad (56)$$

$$= \frac{1}{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t] - [\Im(\Omega_j) \Delta t] i} \quad (57)$$

$$= \frac{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t] + [\Im(\Omega_j) \Delta t] i}{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t]^2 + [\Im(\Omega_j) \Delta t]^2} \quad (58)$$

El módulo de z_p viene dado por

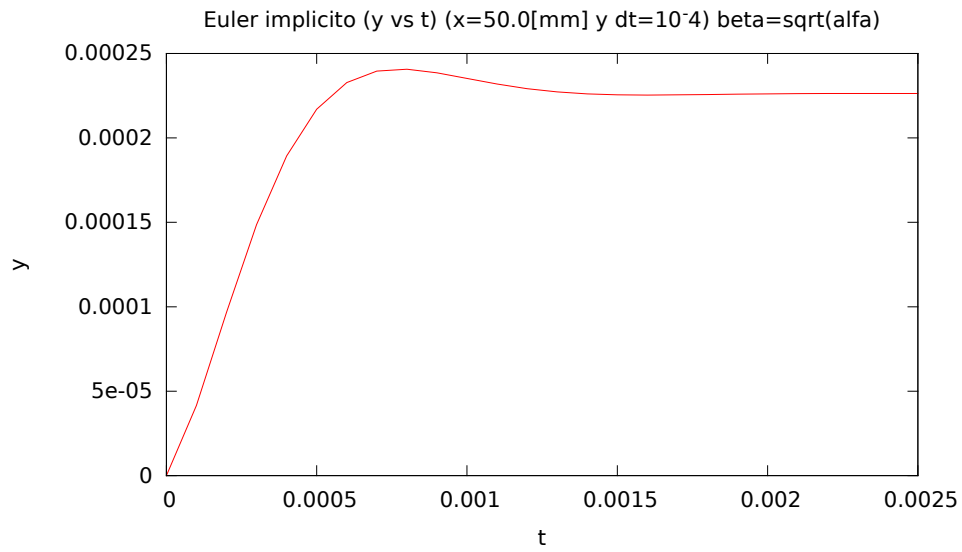
$$||z_p|| = \frac{\sqrt{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t]^2 + [\Im(\Omega_j) \Delta t]^2}}{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t]^2 + [\Im(\Omega_j) \Delta t]^2} \quad (59)$$

(a) $\beta = \alpha$ y $\Delta t = 10^4$

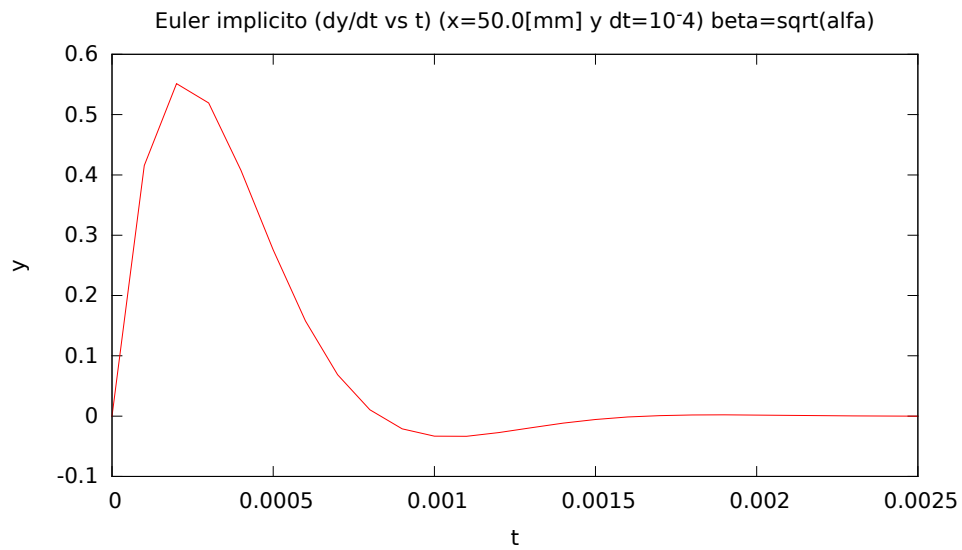
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -3000.00 + 5196.15i \rightarrow z_{p1} = \\ \Omega_2 &= -3000.00 - 5196.15i \rightarrow z_{p2} = \end{aligned}$$

(b) $\beta = \sqrt{\alpha}$ y $\Delta t = 10^4$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -1.0 \rightarrow z_{p1} = \\ \Omega_2 &= -36.0 \times 10^6 \rightarrow z_{p2} = \end{aligned}$$

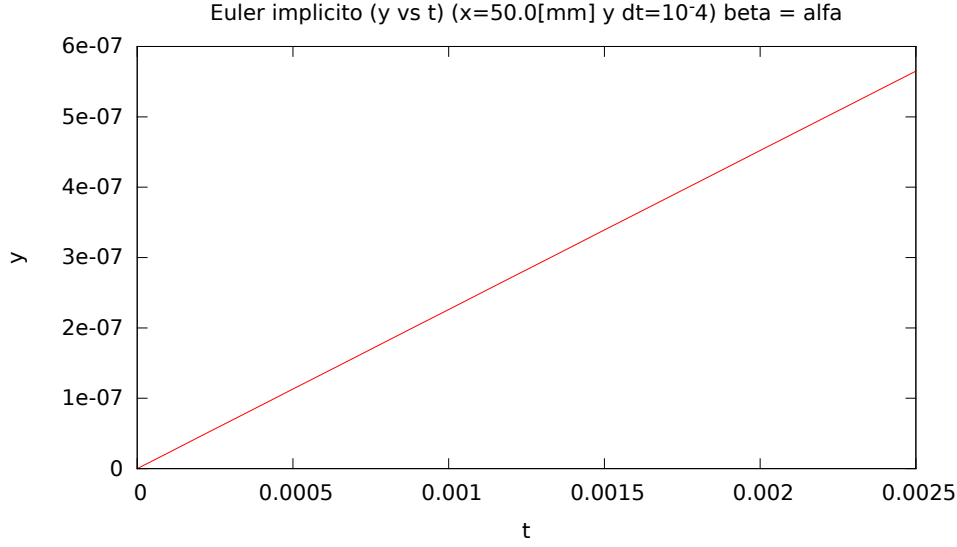


(a)

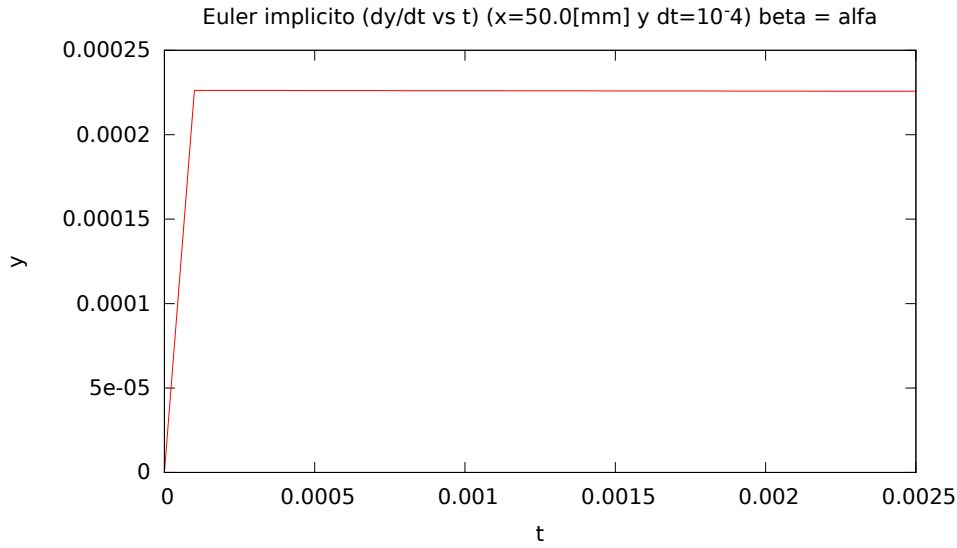


(b)

Figura 7.



(a)



(b)

Figura 8.

4.4.2 Simulación 1: Crank Nicolson

Discretización de la ecuación por el método Crank Nicolson

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (z^{n+1} + z^n) \quad (60)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (-\alpha y^{n+1} - \beta y^{n+1} + \gamma(p_{n+1} - p_0)) + \frac{1}{2} (-\alpha y^n - \beta y^n + \gamma(p_n - p_0)) \quad (61)$$

La relación anterior se escribe en forma matricial,

$$\mathbf{A} \cdot \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\gamma(p_{n+1} - p_0) + \gamma(p_n - p_0)) \end{Bmatrix} \quad (62)$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 + \frac{\beta \Delta t}{2} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 - \frac{\beta \Delta t}{2} \end{pmatrix} \quad (64)$$

Despejando las variables incognitas se obtiene,

$$\begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{Bmatrix} y^n \\ z^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ (\gamma(p_{n+1} - p_0) + \gamma(p_n - p_0)) \end{Bmatrix} \quad (65)$$

donde

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\Delta t}{2} + \alpha \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta \Delta t}{2} & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\alpha \Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Se grafican los resultados y se exponen en las Figura 9 y 10

Se quiere estudiar la estabilidad de la solución transiente (homogénea) de (QUE ECUACIÓN).

Para ello se ...

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \Omega_1 \frac{1}{2} (y^{n+1} + y^n) \quad (67)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = \Omega_2 \frac{1}{2} (z^{n+1} + z^n) \quad (68)$$

Despejando los terminos evaluados en t_{n+1} en la izquierda de la ecuación

$$y^{n+1} = \frac{1 + \Delta t \Omega_1}{1 - \Delta t \Omega_1} y^n \quad (69)$$

$$z^{n+1} = \frac{1 + \Delta t \Omega_2}{1 - \Delta t \Omega_2} z^n \quad (70)$$

Se reconocen los términos \vec{z}_p para y y z . Teniendo en cuenta los valores propios Ω antes calculado

$$z_p = \frac{1 + \Omega_j \Delta t}{1 - \Omega_j \Delta t / 2} \quad (71)$$

$$= \frac{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t / 2] + [\Im(\Omega_j) \Delta t / 2] i}{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t / 2] - [\Im(\Omega_j) \Delta t / 2] i} \quad (72)$$

$$= \frac{[(1 - \Re(\Omega_j) \Delta t / 2) + (\Im(\Omega_j) \Delta t / 2) i] \cdot [(1 + \Re(\Omega_j) \Delta t / 2) + (\Im(\Omega_j) \Delta t / 2) i]}{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t / 2]^2 + [\Im(\Omega_j) \Delta t / 2]^2} \quad (73)$$

$$= \frac{[1 - \Re(\Omega_j) \Delta t / 2 - \Im(\Omega_j) \Delta t / 2] + [\Im(\Omega_j) \Delta t / 2] i}{[1 - \Delta t \Re(\Omega_j)]^2 + [\Delta t \Im(\Omega_j)]^2} \quad (74)$$

El módulo de z_p viene dado por

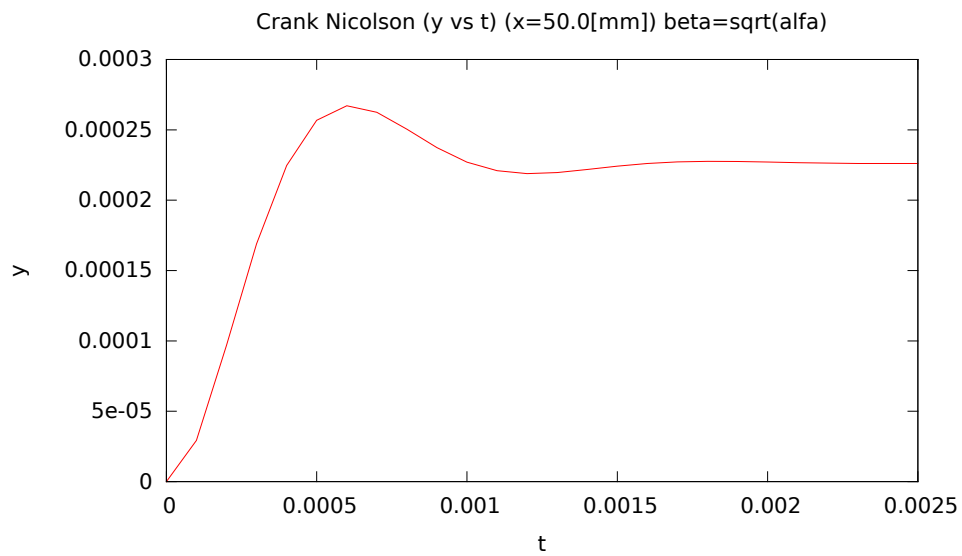
$$||z_p|| = \frac{\sqrt{\left[1 - \frac{\Re(\Omega_j)\Delta t}{2} - \frac{\Im(\Omega_j)\Delta t}{2}\right]^2 + \left[\frac{\Im\Delta t}{2}\right]^2}}{\left[\frac{1 - \Delta t\Re(\Omega_j)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\Delta t\Im(\Omega_j)}{2}\right]^2} \quad (75)$$

(a) $\beta = \alpha$ y $\Delta t = 10^4$

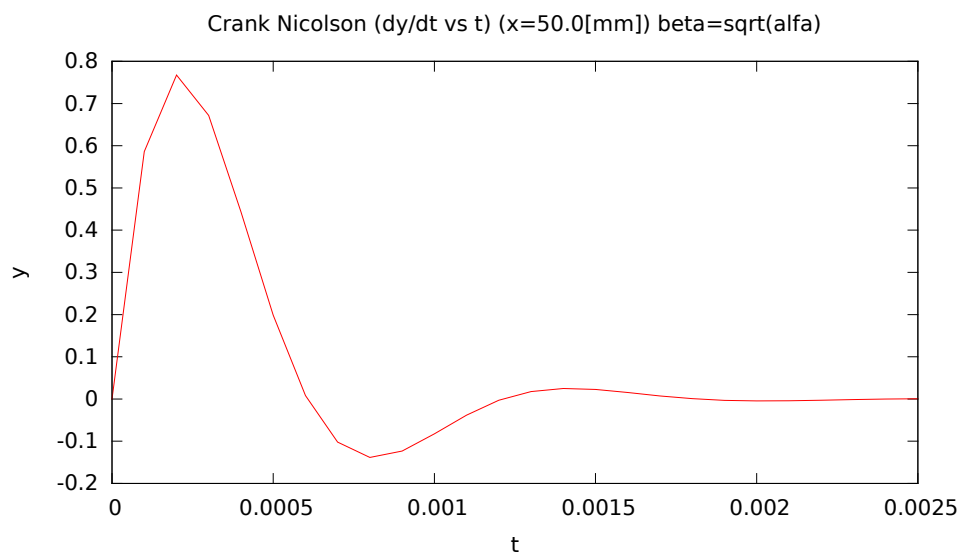
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -3000.00 + 5196.15i & \rightarrow & z_{p1} = \\ \Omega_2 &= -3000.00 - 5196.15i & \rightarrow & z_{p2} = \end{aligned}$$

(b) $\beta = \sqrt{\alpha}$ y $\Delta t = 10^4$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -1.0 & \rightarrow & z_{p1} = \\ \Omega_2 &= -36.0 \times 10^6 & \rightarrow & z_{p2} = \end{aligned}$$

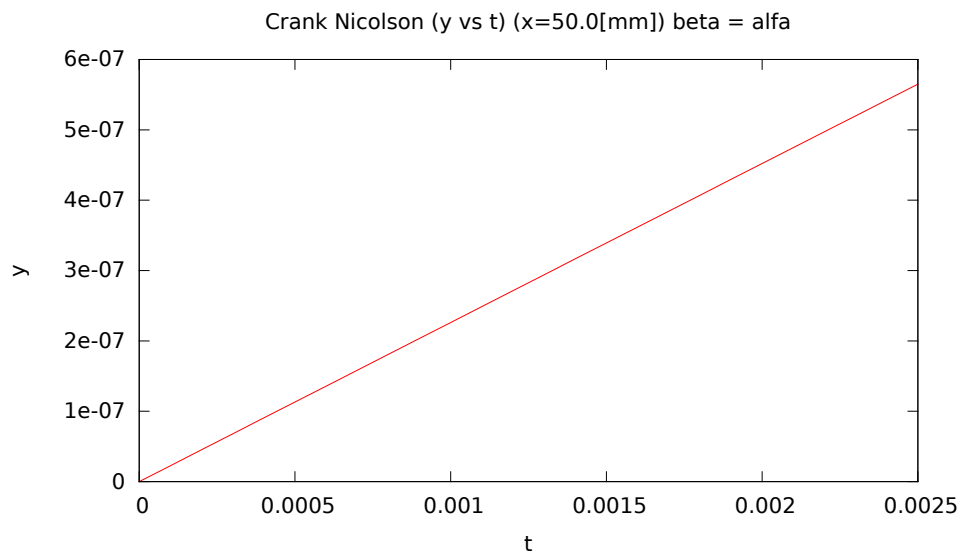


(a)

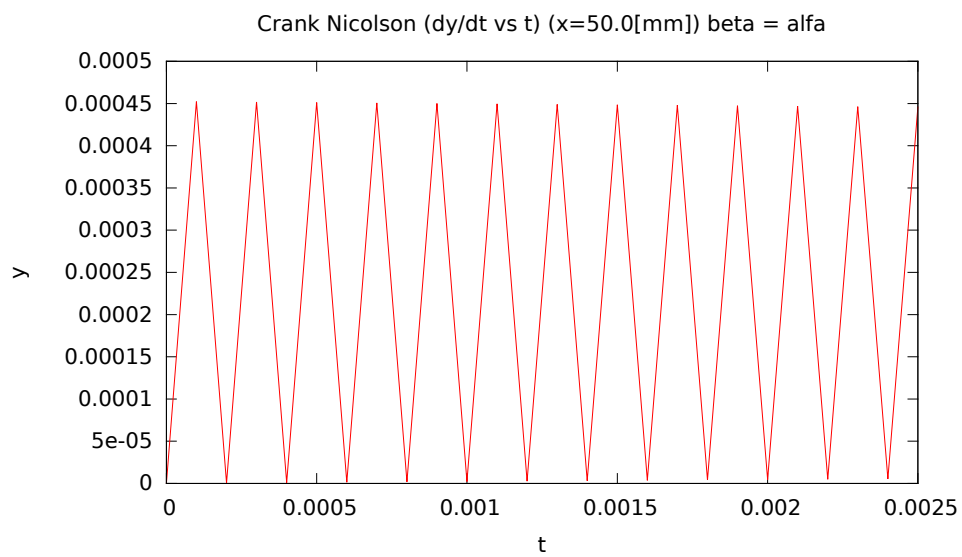


(b)

Figura 9.



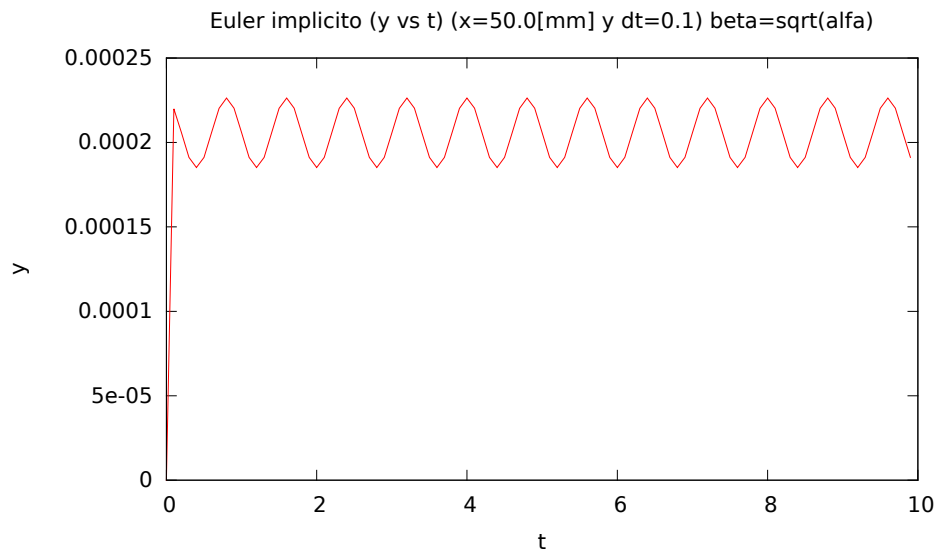
(a)



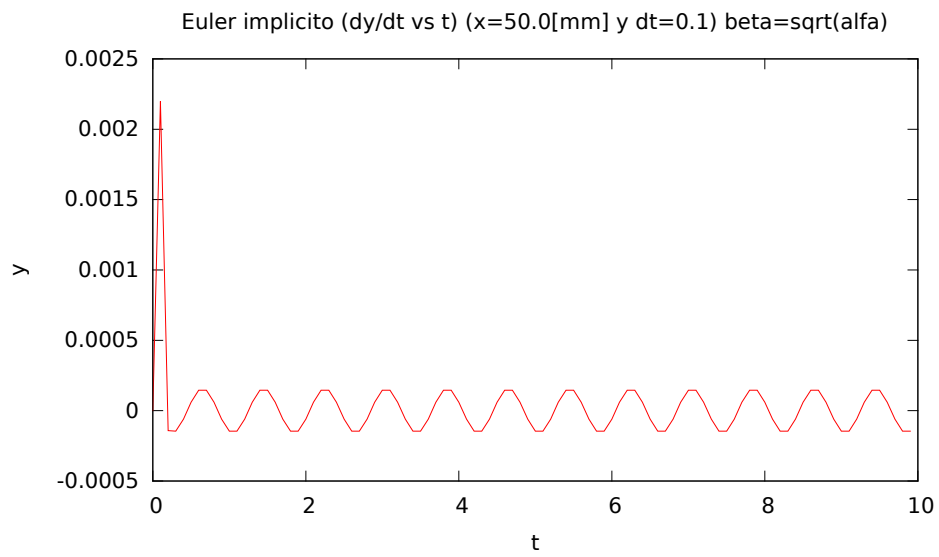
(b)

Figura 10.

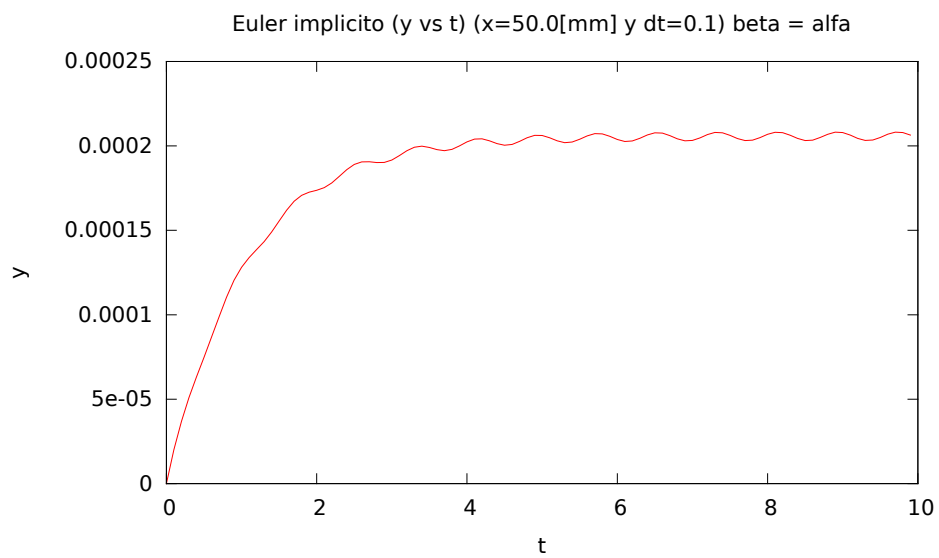
4.4.3 Simulación 2



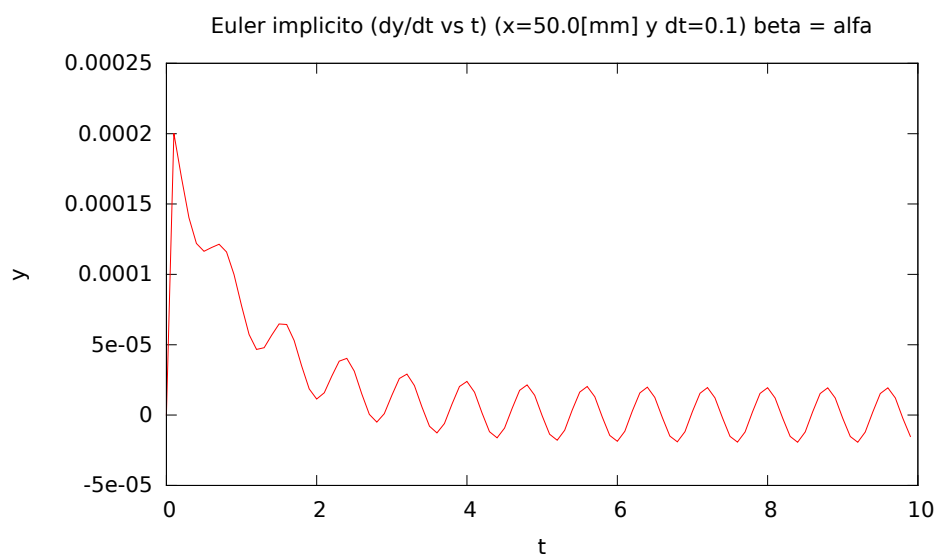
(a)



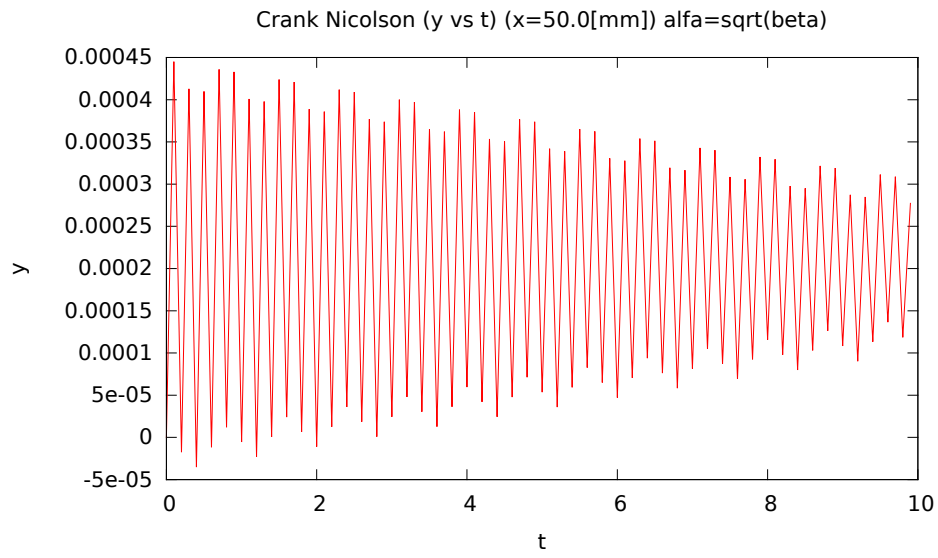
(b)



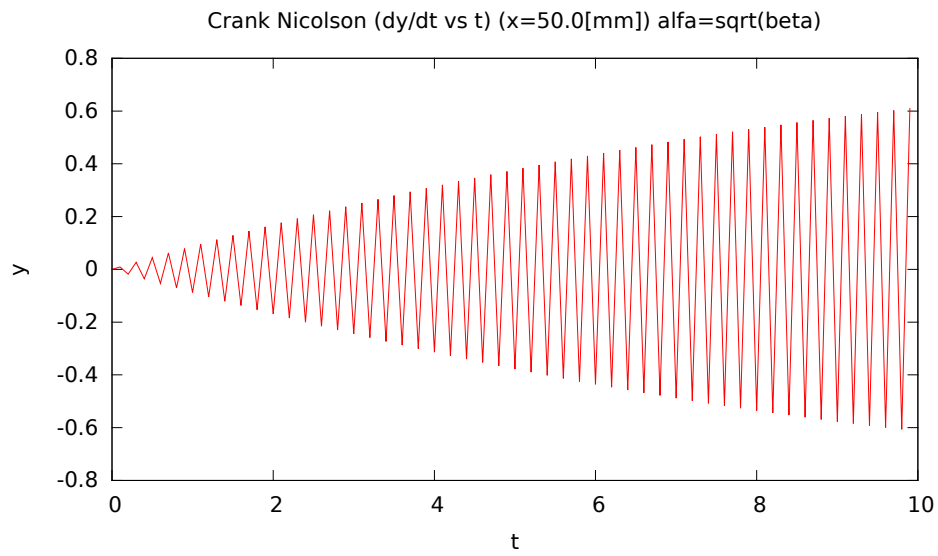
(a)



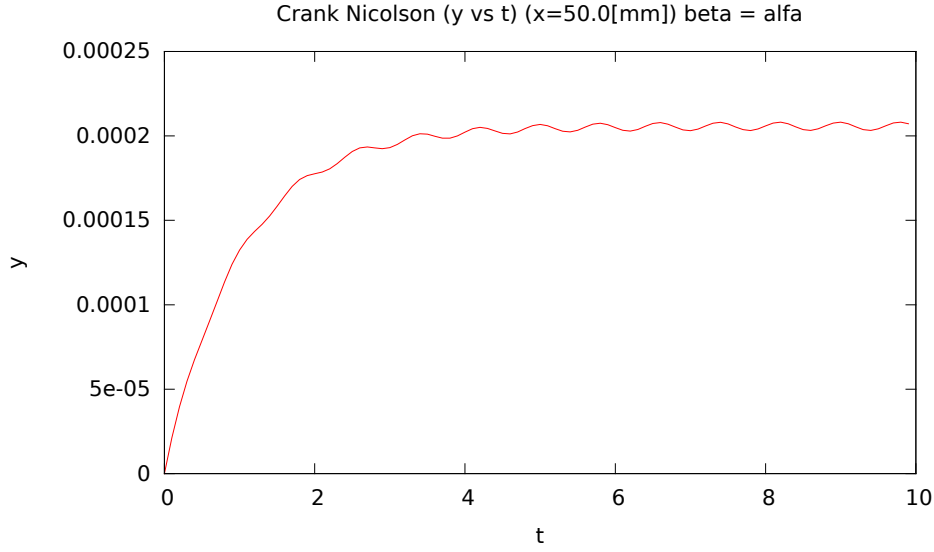
(b)



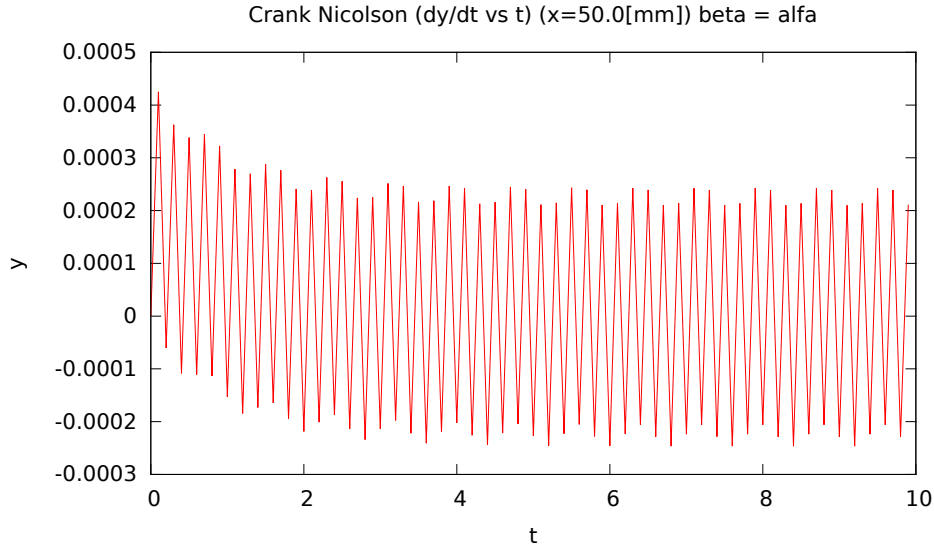
(a)



(b)



(a)



(b)

COMENTAR RESULTADOS Y ESTUDIAR SI ES POSIBLE UTILIZAR UNA SOLUCIÓN

4.5 Parte 2: Un modelo hiperbólico para la interacción de la sangre con la pared

Si para el mismo fenómeno descrito en la Parte 1 no se desprecia la interacción axial entre los anillos, entonces la ecuación (??) se modifica resultado en,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad x \in]\alpha, \beta[\quad (76)$$

Se denota la coordenada longitudinal x . σ_x es la componente radial del esfuerzo axial y L es el largo del cilindro considerado. Despreciando el factor de y de la ecuación (76) y considerando $p - p_0 = f$ entonces se obtiene la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (77)$$

Se emplean los esquemas de Leap-Frog y Newmark para discretizar la ecuación anterior.

4.5.1 Simulación 1: Leap-Frog

El termino fuente utilizado para la simulación es $f = (1 + \pi^2 \gamma^2) e^{-t} \sin(\pi x)$. Empleando un esquema de diferencias centradas en el espacio,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + (1 + \pi^2 \gamma^2) e^{-t} \sin(\pi x_j) \quad (78)$$

Se utiliza un esquema de integración de Leap-Frog,

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = (\gamma \lambda)^2 (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + f_j^n \quad (79)$$

donde $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Se estudia la estabilidad del método:

Discretización espacial

Se realiza una descomposición modal

$$\begin{aligned} S e^{ik_j p \Delta x} &= \frac{\gamma^2}{\Delta x^2} \left(e^{ik_j(p+1)\Delta x} - 2e^{ik_j p \Delta x} + e^{ik_j(p-1)\Delta x} \right) \\ &= \underbrace{\frac{2\gamma^2}{\Delta x^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1)}_{\Omega_j} e^{ik_j p \Delta x} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\Omega_j = \frac{2\gamma^2}{\Delta x^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1) \quad (80)$$

Notar que $\Omega = \Re(\Omega_j)$. Se debe cumplir que

$$\Re(\Omega_j) \leq 0 \quad (81)$$

luego,

$$\left| \frac{2\gamma^2}{\Delta x^2} \right| \leq 0 \quad (82)$$

$$\frac{-4\gamma^2}{\Delta x^2} \leq \Re(\Omega_j) \leq 0 \quad (83)$$

Discretización temporal

Estudia la estabilidad en el tiempo: se reemplaza $u_j = \omega$

$$\frac{\omega^{n+1} - 2\omega^n + \omega^{n-1}}{\Delta t^2} = \mathbf{S} = \Omega_j \omega^n \quad (84)$$

reordenando

$$\omega^{n+1} - (\Omega_j \Delta t^2 + 2)\omega^n + \omega^{n-1} \quad (85)$$

utilizando z_p (ver Sección 4.2, ecuación (4.2))

$$z_p^2 - (\Omega_j \Delta t^2 + 2) z_p + 1 = 0 \quad (86)$$

diviendiendo por z_p (supuesto: $z_p \neq 0$, el estado transiente)

$$(\Omega_j \Delta t^2 + 2) = \frac{1}{z_p} + z_p \quad (87)$$

Se impone como solución $z_p = e^{i\theta}$ (notar que $|z_p| \leq 1$). Reemplazando en la ecuación anterior,

$$(\Omega_j \Delta t^2 + 2) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad (88)$$

La estabilidad se consigue acotando el lado izquierdo de la ecuación, obteniendo

$$-4 \leq \Re(\Omega_j \Delta t^2) \leq 0 \quad (89)$$

reemplazando Ω_j obtenido de la ecuación (80) y considerando $\Omega_j = \Re(\Omega_j)$ resulta,

$$-4 \leq \frac{\gamma^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1) \leq 0 \quad (90)$$

El criterio de estabilidad es

$$\frac{\gamma^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 2 \quad (91)$$

$\gamma^2 \Delta t^2 / \Delta x^2$ se puede interpretar como $(CFL)^2$ donde CFL es el número de Courant-Friedrichs-Lewy

PENDIENTE -ESCRIBI LAS ECUACIONES, FALTA EXPLICARLAS !!!!!!!!!!!!!!!

4.5.2 Simulación 1: Newmark

De la ecuación (i?) (Sección 1) se tiene $\partial u / \partial t = v$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma^2 \left[\Theta \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) - (1 - \Theta) \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right] \quad (92)$$

4.5.3 Discretización espacial

Se utiliza $\Theta = 0.5$ (Esquema Crank Nicolson)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left[(\mathbf{S} e^{ik_j p \Delta x})^{n+1} + (\mathbf{S} e^{ik_j p \Delta x})^n \right] \quad (93)$$

Se resuelve $((S))^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} e^{ik_j p \Delta x} &= \frac{\gamma^2}{2\Delta x^2} \left(e^{ik_j (p+1) \Delta x} - 2e^{ik_j p \Delta x} + e^{ik_j (p-1) \Delta x} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\gamma^2}{\Delta x^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1)}_{\Omega_j} e^{ik_j p \Delta x} \end{aligned}$$

es decir,

$$\Omega_j = \frac{\gamma^2}{\Delta x^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1) \quad (94)$$

$$\frac{-2\gamma^2}{\Delta x^2} \leq \Re(\Omega_j) \leq 0 \quad (95)$$

Se obtiene el mismo resultado para $((S))^{n+1}$, Sumando $((S))^{n+1} + ((S))^n$ luego obtenemos la misma ecuación obtenida en la discretización Leap-Frog. Por lo tanto, la condición de $\Re(\Omega'_j)$ ($\Omega'_j = \Omega_j^{n+1} + \Omega_j^n$)

$$\frac{-4\gamma^2}{\Delta x^2} \leq \Re(\Omega'_j) \leq 0 \quad (96)$$

Como u_j y v_j emplean diferencias finitas centradas se obtienen los mismos valores propios de \mathbf{S}

Discretización temporal

Se integra la ecuación $\partial v / \partial t$. Se utiliza la notación $v_j = \omega$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} = \Omega_j^{n+1} \omega^{n+1} + \Omega_j^n \omega^n \quad (97)$$

agrupando términos

$$\omega^{n+1} = \underbrace{\frac{1 + \Omega_j \Delta t}{1 - \Omega_j \Delta t}}_{z_p} \omega^n \quad (98)$$

como $\Omega_j = \Re(\Omega_j)$, entonces

$$z_p = \frac{1 + \Omega_j}{1 - \Omega_j} \quad (99)$$

tomando en cuenta la condición 95 se verifica que

$$-1 \leq z_p \leq 1 \quad (100)$$

4.6 Atractor de Lorenz

5 Conclusiones y Observaciones

Referencias

- [1] LORENZ, E. , *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Science, vol. 20, pag. 130-141, 1963
- [2] CHAPMAN, S. , *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*, Editorial McGraw-Hill, 2003, ISBN-13: 978-0072922387
- [3] QUARTERONI, A. , SACCO, R. y SALERI, F. , *Numerical Mathematics*, Editorial Springer, 2000, ISBN 0-387-98959-5
- [4] CHAPRA, S. y CANALE, R. , *Métodos numéricos para ingenieros*, 5ta edición, Editorial McGraw-Hill, 2007, ISBN-13: 978-970-10-6114-5