



Universidad Técnica Federico Santa
María



Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto 2

Dinámica de fluidos computacional

Flujo monofásico newtoniano en una confluencia

Parte 1: Discretización de ecuaciones

Nombre : Ignacio Apablaza
Rol : 201141007-6
Profesores : Romain Gers
: Olivier Skurtys
Asignatura : IPM468

Índice

1	Resumen	3
2	Ecuación de Navier Stokes discretizado	4
3	Desarrollo: Discretización de ecuaciones	5
3.1	Discretización del flujo convectivo/difusivo en 2D	5
3.1.1	Término convectivo	7
3.1.2	Término difusivo	7
4	Discretización temporal	9
4.1	Predicción del campo de velocidad no solenoidal \vec{v}^*	9
4.1.1	1er paso en la dirección x ($\delta\bar{V}$)	10
4.1.2	2do paso en la dirección y (δV)	11
4.2	Resolución de la ecuación de Poisson sobre la presión	12
4.3	Corrección del campo de velocidad	13
5	Malla Desplazada (Staggered Grid)	14
5.1	Condiciones de contorno	14
6	Plan de trabajo	16
6.1	Perfil de Poiseuille	16
6.2	Confluencia	16

1 Resumen

La presente entrega tiene como finalidad exponer un avance en el desarrollo del Proyecto 2: *Flujo monofásico newtoniano en un confluencia* de la Asignatura Dinámica de Fluidos Computacional.

Se estudia los esquemas de discretización flujos convectivos y difusivos, además del esquema de integración temporal a utilizar en la implementación computacional, describiéndose de manera general los pasos a seguir en la resolución de la ecuación de Navier-Stokes aplicado a un fluido newtoniano incompresible utilizando el método de volúmenes finitos, sin profundizar en los conceptos físicos propios del problema ni en los detalles de la programación.

Se emplea la discretización de los flujos de convección y difusión propuesta por Patankar [1]. El dominio físico se discretiza utilizando mallas desplazadas (*staggered grid*). Para la integración temporal se emplea un esquema de Euler de orden 2 o esquema de Gear. Esta discretización permite integrar un intervalo de tiempo mediante el método de paso fraccionados o método ADI.

Se sigue un procedimiento de resolución que consiste en:

1. Cálculo de un predictor del campo de velocidad \vec{v}^* .
2. Resolución de la ecuación de Poisson sobre el campo de presión.
3. Corrección de campo de velocidad en el paso de tiempo t_{n+1} .

Además se explica de manera acotada el procedimiento que se llevara a cabo en la entrega final, basándose en el desarrollo metodológico expuesto.

2 Ecuación de Navier Stokes discretizado

Ecuación de Navier-Stokes adimensional para un fluido monofásico, newtoniano e incompresible en coordenadas cartesianas:

$$St \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \Gamma^* \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (1)$$

Donde St y Re son los números de Strouhal y Reynolds. El número de Strouhal permite describir el comportamiento oscilatorio de un fluido. Este parametro depende. Si $St \rightarrow 1$ predomina la viscosidad respecto a la oscilación. Suponiendo obtener un flujo laminar desarrollado se asume $St \approx 1$. Además, como la información de la viscosidad está contenida en el número adimensional Re se simplifica la ecuación haciendo $\Gamma^* = 1$, luego:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (2)$$

Para prescindir de la notación (*) se asume que todas las variables a utilizar están adimensionadas

3 Desarrollo: Discretización de ecuaciones

Ecuación de conservación/transporte de un escalar pasivo:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J = \vec{\nabla} P \quad (3)$$

donde J representa la contribución del flujo convectivo y difusivo.

$$J = \rho u \phi - \Gamma \Delta \phi \quad (4)$$

Para obtener la formulación en volúmenes finitos se aplica el método de residuos ponderados a la ecuación, con soporte compacto y utilizando el método de Galerkin,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{cv}} \rho \phi d\Omega = - \oint\!\!\!\oint_{A_{cv}} \vec{F} \cdot \vec{n} dA_n + \iiint_{\Omega_{cv}} S_\phi d\Omega \quad (5)$$

Donde

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_C}_{\rho \phi \vec{u}} + \underbrace{\vec{F}_D}_{-D \nabla \phi} \quad (6)$$

Se recurre al teorema de valor medio representar la integral en función de terminos centrales. Sea ϕ_J un valor aproximado que caracteriza al escalar dentro del volumen de control $\Omega_{cv} = \Omega_J$. La ecuación discretizada resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi_J \Omega_J) + \sum (F_i A_i)_J = (S_\phi)_J \quad (7)$$

3.1 Discretización del flujo convectivo/difusivo en 2D

Se escoge la discretización propuesta por Patankar [1] para dominios en dos dimensiones ($\Delta z = 1$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta x \Delta y = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_P \phi_P + b \quad (8)$$

Los coeficientes a están dados por,

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_P &= -a_E - a_W - a_N - a_S \\ b &= S \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
F_e &= (\rho u)_e \Delta y \\
F_w &= (\rho u)_w \Delta y \\
F_n &= (\rho v)_n \Delta x \\
F_s &= (\rho v)_s \Delta x
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e}{\Delta x \rho u_e} \Delta y = \frac{1}{Re_e} \Delta y \\
D_w &= \frac{\Gamma_w}{\Delta x \rho u_w} \Delta y = \frac{1}{Re_w} \Delta y \\
D_n &= \frac{\Gamma_n}{\Delta y \rho v_n} \Delta x = \frac{1}{Re_n} \Delta x \\
D_s &= \frac{\Gamma_s}{\Delta y \rho v_s} \Delta x = \frac{1}{Re_s} \Delta x
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\
P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\
P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
P_s &= \frac{F_s}{D_s}
\end{aligned} \tag{12}$$

Donde S representa las fuerzas externas independientes de ϕ . Particularmente estará asociado al gradiente de presión $\vec{\nabla} P$. los términos F_{nb} , D_{nb} y P_{nb} están asociados al flujo convectivo, flujo difusivo y el número de Peclet, respectivamente. En la Tabla 1 se exponen distintas fórmulas para calcular la función $A(|P|)$.

Esquema	Fórmula para $A(P)$
CDS	$1 - 0.5 p $
UDS	1
Hybrid	$\max(0, 1 - 0.5 P)$
Power law	$\max(0, (1 - 0.1 P)^5)$
Exponential	$ P / [\exp(P) - 1]$

Tabla 1. Funciones de $A(|P|)$ para distintos esquemas de discretización [1]. (P : número de Peclet)

Este conjunto de ecuaciones discretiza el campo ϕ mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y la ecuación de conservación de la cantidad lineal. Sea $\vec{v} = \{u, v\}^T$ el campo de velocidad en el dominio de control entonces se

plantean los sistemas de ecuaciones donde $\phi = u$ y $\phi = v$, donde u y v son escalares asociados a cada malla desplazada (*staggered grid*). Los coeficientes de la ecuación (8) se calculan de acuerdo a la malla deslaza asociada a la variable ϕ a evaluar. Si $\phi = u$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y = a_E^u u_E + a_W^u u_W + a_N^u u_N + a_S^u u_S + a_P^u u_P + b^u \quad (13)$$

Análogo para $\phi = v$

3.1.1 Término convectivo

Agrupando los términos convectivos de la ecuación 8 se obtiene,

$$H(u) = \underbrace{\max(F_w^u, 0)u_W \Delta y - (\max((F_w^u, 0)) + \max(-F_e^u, 0))u_P \Delta y + \max(-F_e^u, 0)u_E \Delta y + \max(F_s^u, 0)u_S \Delta x - (\max((F_s^u, 0)) + \max(-F_n^u, 0))u_P \Delta x + \max(-F_n^u, 0)u_N \Delta x}_{\partial u^2 / \partial x} + \underbrace{\quad}_{\partial uv / \partial y} \quad (14)$$

$$H(v) = \underbrace{\max(F_w^v, 0)v_W \Delta y - (\max((F_w^v, 0)) + \max(-F_e^v, 0))v_P \Delta y + \max(-F_e^v, 0)v_E \Delta y + \max(F_s^v, 0)v_S \Delta x - (\max((F_s^v, 0)) + \max(-F_n^v, 0))v_P \Delta x + \max(-F_n^v, 0)v_N \Delta x}_{\partial v^2 / \partial y} + \underbrace{\quad}_{\partial uv / \partial x} \quad (15)$$

Por simplicidad,

$$H(u) = h_W^u u_W + h_E^u u_E + h_S^u u_S + h_N^u u_N + h_P^u u_P \quad (16)$$

$$H(v) = h_W^v v_W + h_E^v v_E + h_S^v v_S + h_N^v v_N + h_P^v v_P \quad (17)$$

3.1.2 Término difusivo

Agrupando los términos difusivos de la ecuación 8 se obtiene,

$$G(u) = \frac{1}{Re_w^u} A(|P_w^u|) u_W \Delta y + \frac{1}{Re_e^u} A(|P_e^u|) u_E \Delta y + \frac{1}{Re_s^u} A(|P_s^u|) u_S \Delta x + \frac{1}{Re_n^u} A(|P_n^u|) u_N \Delta x - \left[\left(\frac{1}{Re_n^u} A(|P_n^u|) + \frac{1}{Re_s^u} A(|P_s^u|) \right) \Delta x + \left(\frac{1}{Re_w^u} A(|P_w^u|) + \frac{1}{Re_e^u} A(|P_e^u|) \right) \Delta y \right] u_P \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
G(v) = & \frac{1}{Re_w^v} A(|P_w^v|) v_W \Delta y + \frac{1}{Re_e^v} A(|P_e^v|) v_E \Delta y \\
& + \frac{1}{Re_s^v} A(|P_s^v|) v_S \Delta x + \frac{1}{Re_n^v} A(|P_n^v|) v_N \Delta x \\
& - \left[\left(\frac{1}{Re_n^v} A(|P_n^v|) + \frac{1}{Re_s^v} A(|P_s^v|) \right) \Delta x \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{Re_w^v} A(|P_w^v|) + \frac{1}{Re_e^v} A(|P_e^v|) \right) \Delta y \right] v_P
\end{aligned} \tag{19}$$

Por simplicidad,

$$G(u) = g_W^u u_W + g_E^u u_E + g_S^u u_S + g_N^u u_N + g_P^u u_P \tag{20}$$

$$G(v) = g_W^v v_W + g_E^v v_E + g_S^v v_S + g_N^v v_N + g_P^v v_P \tag{21}$$

4 Discretización temporal

Se plantea un esquema BFD2 (*Backward Differentiation Formula 2nd Order*), también llamado esquema de Gear. La derivada en (8) se aproxima mediante,

$$\frac{\partial \vec{v}^{n+1}}{\partial t} = \frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + \Theta(\Delta t^2) \quad (22)$$

El término convectivo en t_{n+1} se obtiene por extrapolación:

$$H(\vec{v}^{n+1}) = 2H(\vec{v}^n) - H(\vec{v}^{n-1}) \quad (23)$$

La ecuación a resolver mediante el método de volúmenes finitos es:

$$\frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla}P + G(\vec{v}^{n+1}) \quad (24)$$

Los pasos a seguir son los siguientes

1. Predicción del campo de velocidad no solenoidal \vec{v}^*
2. Resolución de la ecuación de Poisson sobre la presión
3. Corrección del campo de velocidad

4.1 Predicción del campo de velocidad no solenoidal \vec{v}^*

$$\frac{3\vec{v}^* - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla}P + G(\vec{v}^*) \quad (25)$$

Sea $\delta V = \vec{v}^* - \vec{v}^n$ y mediante una manipulación algebraica de la ecuación (24) se obtiene una ecuación equivalente.

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\Delta\right)\delta V = \frac{\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla}P\right) \quad (26)$$

Aplicando el método ADI (*Alternating Direction Implicit*) para descomponer al operador de Helmholtz $(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\Delta)$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\Delta\right) \approx \left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \quad (27)$$

Luego, resolver (26) es equivalente de manera aproximada a resolver

$$\underbrace{\left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(I - \frac{2\Delta t}{3Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)}_{\Delta\delta\vec{V}} \delta V = \underbrace{\frac{\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla}P\right)}_{RHS^n} \quad (28)$$

O bien

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \bar{V} &= RHS^n \\ \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta V &= \bar{V} \end{aligned} \quad (29)$$

4.1.1 1er paso en la dirección x ($\delta \bar{V}$)

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \bar{V} = \frac{\bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3} \left(H(\bar{v}^{n+1}) + \vec{\nabla} P \right) = RHS^n \quad (30)$$

Se recurre al método de residuos ponderados,

$$\iiint_{\Omega} \Psi_i \left[\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \bar{V}_i - RHS^n \right] dV = 0 \quad (31)$$

Aplicando la formulación para volúmenes finitos y desarrollando el primer término de la izquierda

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \bar{V} dV = \underbrace{\iiint_{\Omega_{cv}} \delta \bar{V} dV}_{(**)} - \underbrace{\frac{2\Delta t}{3 Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta \bar{V})}{\partial x^2} dV}_{(***)} \quad (32)$$

Resolviendo (**)

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \delta \bar{V} dV = (\delta \bar{V})_P \Delta x \Delta y \quad (33)$$

Resolviendo (***)

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta t}{3 Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta \bar{V})}{\partial x^2} dV &= \frac{2\Delta t}{3 Re} \iint_{\partial \Omega_{cv}} \frac{\partial(\delta \bar{V})}{\partial x} \cdot \vec{n} dA \\ &= \frac{2\Delta t}{3 Re} \left[- \left(\frac{\delta \bar{V}_E - \delta \bar{V}_P}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\delta \bar{V}_P - \delta \bar{V}_W}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta y \\ &= \frac{2\Delta t \Delta y}{3 Re} [-\delta \bar{V}_E + 2\delta \bar{V}_P - \delta \bar{V}_W] \end{aligned}$$

Reemplazando (**) y (***) en la (31) se obtiene:

$$(\delta \bar{V})_P \Delta x \Delta y - \frac{2\Delta t \Delta y}{3 Re} [-\delta \bar{V}_E + 2\delta \bar{V}_P - \delta \bar{V}_W] = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n dV \quad (34)$$

El término RHS^n se reemplaza por la ecuación la discretización planteada en la Sección 3.1.1 y por el campo de presión definido arbitrariamente *a priori*. La ecuación anterior se traduce en resolver un sistemas de ecuaciones tridiagonal dado por,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\Delta t \Delta y}{3 Re} \right) \delta \bar{V}_E + \left(\Delta x \Delta y - \frac{4\Delta t \Delta y}{3 Re} \right) \delta \bar{V}_P + \left(\frac{2\Delta t \Delta x}{3 Re} \right) \delta \bar{V}_W \\ = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n dV \end{aligned} \quad (35)$$

4.1.2 2do paso en la dirección y (δV)

Se procede al igual que en el primer paso:

$$\iiint_{\Omega} \Psi_i \left[\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta V_i - \delta \bar{V}_i \right] dV = 0 \quad (36)$$

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta V dV = \underbrace{\iiint_{\Omega_{cv}} \delta V dV}_{(')} - \underbrace{\frac{2\Delta t}{3 Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta \bar{V})}{\partial y^2} dV}_{(')} \quad (37)$$

Resolviendo $(')$

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \delta V dV = (\delta V)_P \Delta x \Delta y \quad (38)$$

Resolviendo $(')$

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta t}{3 Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta V)}{\partial x^2} dV &= \frac{2\Delta t}{3 Re} \iint_{\partial \Omega_{cv}} \frac{\partial(\delta V)}{\partial y} \cdot \vec{n} dA \\ &= \frac{2\Delta t}{3 Re} \left[- \left(\frac{\delta V_N - \delta V_P}{\Delta y} \right) + \left(\frac{\delta V_P - \delta V_S}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y \\ &= \frac{2\Delta t \Delta x}{3 Re} [-\delta V_N + 2\delta V_P - \delta V_S] \end{aligned}$$

Reemplazando $(')$ y $(')$ en la (36) se obtiene:

$$(\delta V)_P \Delta x \Delta y - \frac{2\Delta t \Delta x}{3 Re} [-\delta V_N + 2\delta V_P - \delta V_S] = \iiint_{\Omega_{cv}} (\delta \bar{V}) dV \quad (39)$$

El término del lado derecho de la ecuación se obtuvo del primer paso de tiempo. Luego, se resuelve el sistema tridiagonal dado por,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\Delta t \Delta x}{3 Re} \right) \delta V_N + \left(\Delta x \Delta y - \frac{4\Delta t \Delta x}{3 Re} \right) \delta V_P + \left(\frac{2\Delta t \Delta x}{3 Re} \right) \delta V_S \\ = \iiint_{\Omega_{cv}} (\delta \bar{V}) dV \end{aligned} \quad (40)$$

Observación los pasos anteriores se realizan tanto para u como para v ya que $\vec{v} = \{u, v\}^T$ y $\delta V = \vec{v}^* - \vec{v}^n$. Cada paso de tiempo implica resolver 4 sistemas tridiagonales: 2 sistemas para la componente horizontal y 2 sistemas para la componente vertical de la velocidad. Finalmente se obtiene el predictor de la velocidad:

$$\vec{v}^* = \begin{cases} u^* = u^n + \delta V_x \\ v^* = v^n + \delta V_y \end{cases} \quad (41)$$

4.2 Resolución de la ecuación de Poisson sobre la presión

$$\Delta \phi = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}^* \quad (42)$$

$$\phi = (P^{n+1} - P^n) + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \vec{v}^* \quad (43)$$

Nuevamente se aplica el método de residuos ponderados con formulación para volúmenes finitos.

$$\iiint_{\Omega} \Psi_i \left[\Delta \phi - \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_i^* \right] dV = 0 \quad (44)$$

Luego,

$$\iiint_{\Omega_J} \Delta \phi dV = \iiint_{\Omega_J} \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_i^* dV \quad (45)$$

Recurriendo al teorema de Green-Ostrogradsky se rescribe la ecuación:

$$\iint_{\partial\Omega_J} \vec{\nabla} \phi \vec{n} dA = \frac{3}{2\Delta t} \iint_{\partial\Omega_J} \vec{v}^* \cdot \vec{n} dA \quad (46)$$

Discretización La función auxiliar ϕ se discretiza en la malla desplazada asociada a la presión. Luego, los valores de los flujos de ϕ se aproximan en los bordes de cada volumen finito Ω_J , mientras que los valores de las velocidad en $\partial\Omega_J$ son conocidos, sin necesidad de aproximarlos.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w \right] \Delta y + \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s \right] \Delta x = \\ \frac{3}{2\Delta t} (u_e^* - u_w^*) + \frac{3}{2\Delta t} (v_n^* - v_s^*) \end{aligned} \quad (47)$$

Se discretizan las derivadas de ϕ implementando un esquemas CDS, obteniendose:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x} \right] \Delta y - \left[\frac{\phi_N - 2\phi_P + \phi_S}{\Delta y} \right] \Delta x = \\ \frac{3}{2\Delta t} (u_e^* - u_w^* + v_n^* - v_s^*) \end{aligned} \quad (48)$$

Agrupando los términos ϕ_{nb} resulta un sistema de ecuaciones lineales que en forma matricial se representa por una matriz pentadiagonal. Para resolverlo se utiliza el algoritmo TDMA (*Tri-Diagonal MAtrix Algorithm*). Para ellos se define el término B como,

$$B = \frac{3}{2\Delta t} (u_e^* - u_w^* + v_n^* - v_s^*) \quad (49)$$

Se calcula un predictor (I):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \phi_E^I - \left(2\frac{\Delta y}{\Delta x} + 2\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_P^I + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \phi_W^I = \\ \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_N + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_S + B \end{aligned} \quad (50)$$

Se calcula una corrección (II):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_N^{II} - \left(2\frac{\Delta y}{\Delta x} + 2\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_P^{II} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \phi_S^{II} = \\ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \phi_E^I + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \phi_W^I + B \end{aligned} \quad (51)$$

Un criterio de detención que suele utilizarse en establece lo siguiente: En cada punto de la malla se calcula un residuo R como,

$$R = \sum a_{nb} \phi_{nb} + B - a_P \phi_P \quad (52)$$

La solución converge en la medida que R tiende a cero. Más detalles del algoritmo se explican en [1] y [2].

4.3 Corrección del campo de velocidad

Una vez resuelto la ecuación de Poisson se procede a corregir la velocidad predicha en el primer paso:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v} - \Delta t \nabla \phi \quad (53)$$

Se recurre a la misma discretización utilizada en la ecuación (48) para el campo auxiliar ϕ .

5 Malla Desplazada (Staggered Grid)

5.1 Condiciones de contorno

Se utilizan nodos ficticios para establecer las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann. Se utiliza la Figura 1 como referencia.

Condiciones de Dirichlet Utilizando una malla deslaza se observa que para ciertos bordes las condiciones se pueden implementar naturalmente. Sin embargo las condiciones de no deslizamiento en la pared superior no se pueden imponer directamente para u (de la misma manera, en el lado izquierdo del borde no se pueden imponer directamente la condición de $v = 0$) Para lograr ello se emplean nodos ficticios que sobresalen los contornos del dominio. Utilizando esquemas CDS se puede imponer que la velocidad u en $\partial\Omega$ sea nulo

$$\frac{1}{2}(u + u_f) = 0 \rightarrow u_f = -u \quad (54)$$

análogo para la componente vertical

$$\frac{1}{2}(v + v_f) = 0 \rightarrow v_f = -v \quad (55)$$

El ejemplo se extiende a cualquier valor de velocidad $\vec{v} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$ en el contorno

Condiciones de Neumann Se utiliza la misma lógica para imponer las condiciones de flujo en los contornos. Por ejemplo, para la variable u se fija una condiciones de flujo nulo en los contornos y empleando un esquema CDS en el lado izquierdo se tiene:

$$\left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right|_{\Gamma_u} \approx \frac{\hat{u} - \hat{u}_f}{\Delta x} = 0 \rightarrow \hat{u}_f = \hat{u} \quad (56)$$

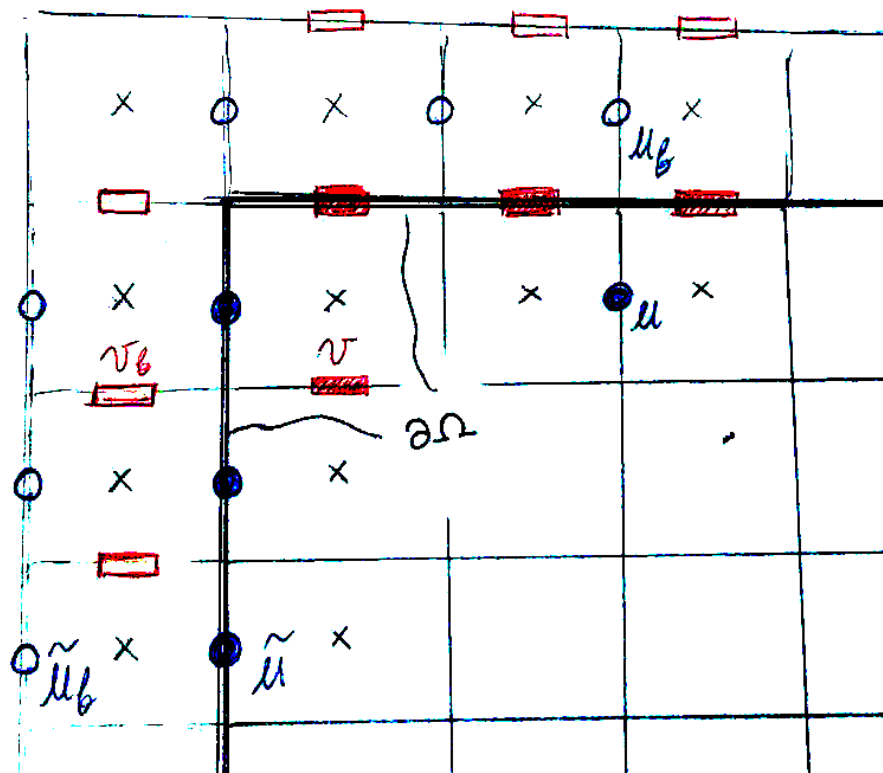


Figura 1. Esquema representativo. Círculos azules: u ; Rectángulos rojos: v ; Equis : P

6 Plan de trabajo

6.1 Perfil de Poiseuille

Se busca que en la confluencia exista un flujo de entrada con régimen laminar. Para ello se escoge como volumen de control la entrada de la tubería, como se muestra en la Figura 2. Las condiciones de contorno son:

- Velocidad entrada constante en la entrada
- Condición de flujo nulo en la salida ($\partial u / \partial x = 0 \rightarrow u = cte$)

Utilizando la metodología antes expuesta se busca calcular el perfil de velocidad a la salida del volumen de control. Una vez obtenido el perfil de velocidad se puede trabajar en la confluencia

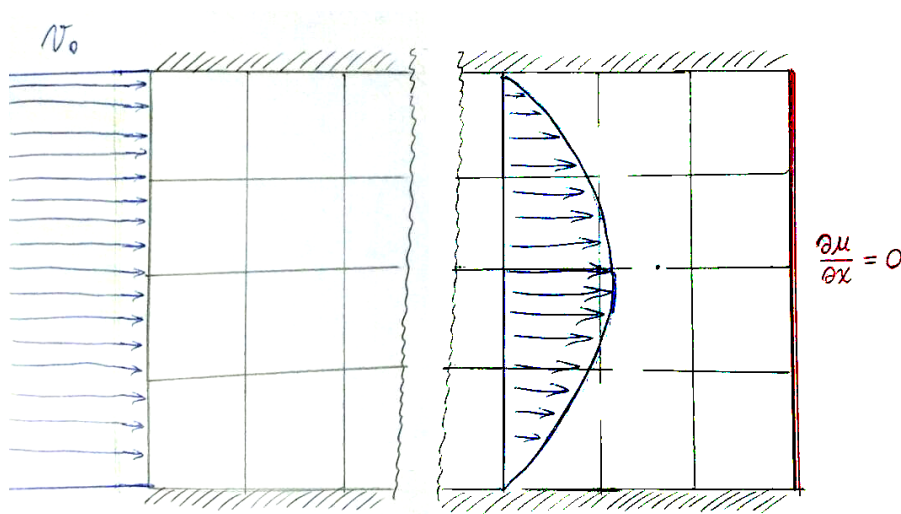


Figura 2.

6.2 Confluencia

Con el perfil de velocidad previamente calculado a la salida de la tubería, naturalmente se impone el mismo perfil como condición de entrada en la confluencia en ambos extremos, como se ve en la Figura 3. De esta manera la resolución del problema es computacionalmente más sencilla y sin perder sustento físico.

Se resuelve el campo de velocidad dentro del volumen de control Ω . Conociendo el \vec{v} en cada punto se emplea la ecuación de conservación/transporte de un escalar pasivo (ecuación (3)). Por ejemplo, se puede imponer $C = 0$ en $t = 0$, y tener un sumidero constante $C = 1$ en una o en las dos entradas de la confluencia (ver Figura). Calcular el campo $C(x, y)$ permite visualizar el comportamiento del fluido.

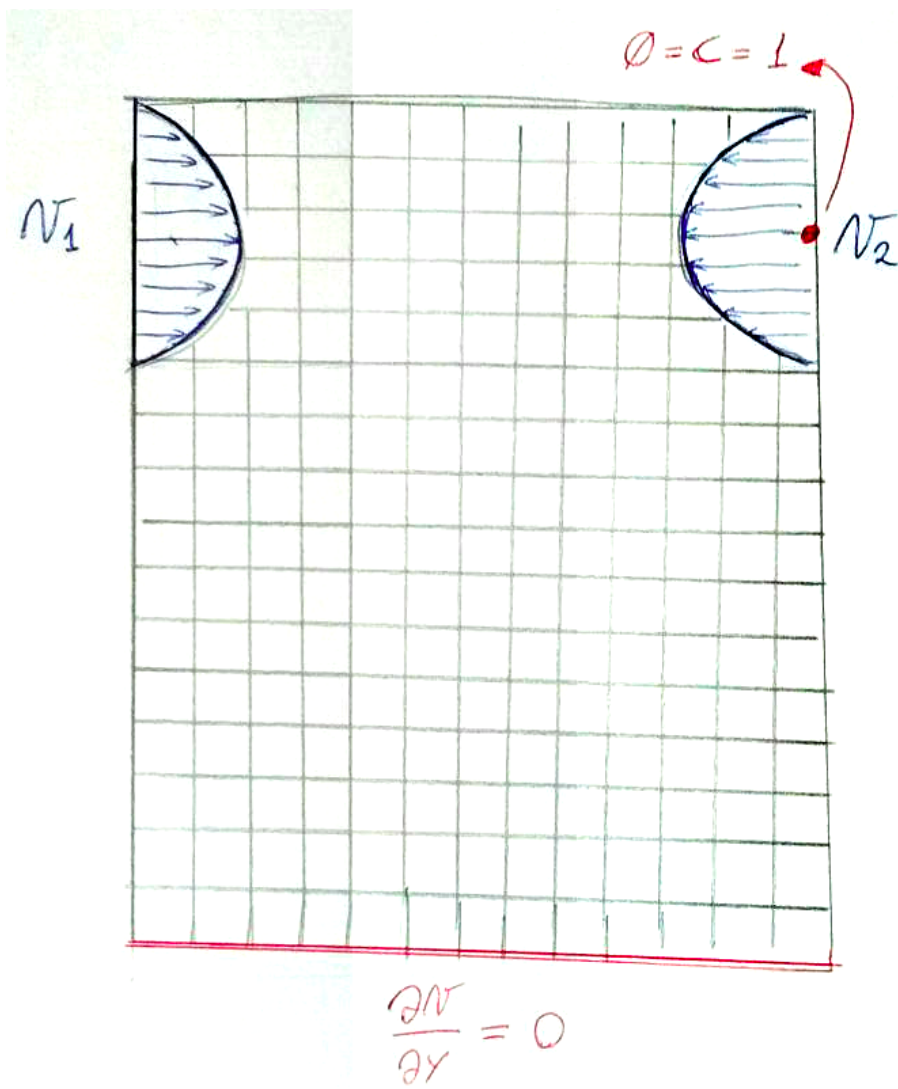


Figura 3.

Referencias

- [1] PATANKAR, .S. , *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (Series in computational methods in mechanics and thermal sciences)*, Taylor & Francis, ISBN 0-89116-522-3
- [2] VERSTEEG, H., MALALASEKERA, W., , *An introduction to Computational Fluid Dynamics*, John Wiley & Sons Inc., 1995, ISBN 0-582-21884-5
- [3] FERZIGER, J., PERIC, M., , *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2002, ISBN 3-540-42074-6
- [4] LIU, G., R., , *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press ,2010, ISBN 978-1-4200-8209-8