Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingenieria Mecánica

Proyecto 2
Dinámica de fluidos computacional

Flujo monofásico newtoniano en una confluencia

Nombre	:	Ignacio Apablaza
Rol	:	201141007-6
Profesores	:	Romain Gers
	:	Olivier Skurtys
Asignatura	:	IPM468

Índice

1 Resumen

La presente entrega tiene como finalidad exponer un avance en el desarrollo del Proyecto 2: *Flujo monofásico newtoniano en un confluencia* de la Asignatura Dinámica de Fluidos Computacional.

Se estudia los esquemas de discretización flujos convectivos y difusivos, además del esquema de integración temporal a utilizar en la implementación computacional, describiendose de manera general los pasos a seguir en la resolución de la ecuación de Navier-Stokes aplicado a un fluido newtoniano incompresible utilizando el método de volúmenes finitos, sin profundizar en los conceptos físicos propios del problema ni en los detalles de la programación.

Se emplea la discretización de los flujos de convección y difusión propuesta por Patankar [1]. El dominio físico se discretiza utilizando mallas desplazadas (*staggered grid*). Para la integración temporal se emplea un esquema de Euler de orden 2 o esquema de Gear. Esta discretización permite integrar un intervalo de tiempo mediante el método de paso fraccionados o método ADI.

Se sigue un procedimiento de resolución que consiste en:

1. Cálculo de un predictor del campo de velocidad $\vec{v}^*$.

2. Resolución de la ecuación de Poisson sobre el campo de presión.

3. Corrección de campo de velocidad en el paso de tiempo t_{n+1}.

Además se explica de manera acotada el procedimiento que se llevara a cabo en la entraga final, basandose en el desarrollo metodológico expuesto.

2 Discretización de las ecuaciones

2.1 Ecuación de Navier Stokes discretizado

La ecuación de conservación de la masa y de cantidad de movimiento para un fluido Newtoniano incompresible, despreciando los términos asociados al peso se pueden representar como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\vec{\nabla} P + \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2} \tag{2}$$

La ecuación (2) se expresa en forma adimensional. En coordenadas rectangulares se escribe:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^* \, \partial x_j^*} \tag{3}$$

Donde v_i^*, P^*, x_j^* , t^* representa a la variable adimensionadas respectivas. Para precindir de la notación (*) se asume que todas las variables a utilizar están adimensionadas

2.2 Discretización espacial

Ecuación de conservación/transporte de un escalar pasivo ϕ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J = S_\phi \tag{4}$$

donde S_ϕ representa el término fuente asociado a ϕ y J a la contribución del flujo convectivo y difusivo:

$$J = \boldsymbol{v}\phi - \frac{1}{Re} \vec{\nabla} \phi \tag{5}$$

Para obtener la formulación en volumenes finitos se aplica el método de residuos ponderados a la ecuación, con soporte compacto y utilizando el método de Galerkin [CITAR LIBRO]. Se recurre al teorema de valor medio representar la integral en función de terminos centrales. Sea ϕ_J un valor aproximado que caracteriza al escalar dentro del volumen de control $\Omega_{cv} = \Omega_J$. La ecuación discretizada resulta [CITAR LIBRO]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_J \Omega_J \right) + \sum \left(F_i \, A_i \right)_J = \left(S_\phi \right)_J \tag{6}$$

Donde F_i corresponde la contribución del flujo convectivo y difusivo en la cara A_i.

$$F = \underbrace{H(\phi)_C}_{\boldsymbol{v}\phi} + \underbrace{G(\phi)_D}_{-\vec{\nabla}\phi / Re} \tag{7}$$

2.2.1 Término convectivo

La discretización del término convectivo viene dado por

$$\iiint_{\Omega} H(\phi)\, dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\phi)\; dV = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\phi \cdot \boldsymbol{n}\, dA \tag{8}$$

Aplicando el método de volumenes finitos resulta la siguiente expresión:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\phi \cdot \boldsymbol{n}\, dA \approx [(\phi u)_e - (\phi u)_w]\,\Delta y + [(\phi v)_n - (\phi v)_s]\,\Delta x \tag{9}$$

Donde,

$$\begin{aligned} (u)_e &= \frac{1}{2}(u_E + u_P) \\ (u)_w &= \frac{1}{2}(u_P + u_W) \\ (v)_n &= \frac{1}{2}(v_N + v_P) \\ (v)_s &= \frac{1}{2}(v_P + v_S) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} (\phi)_e &= \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \\ (\phi)_w &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \\ (\phi)_n &= \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \\ (\phi)_s &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \end{aligned} \tag{11}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} H(\phi)\, dV \approx & \left[\frac{\phi_E + \phi_P}{2}\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_W}{2}\frac{u_P + u_W}{2}\right]\Delta y \\ & + \left[\frac{\phi_N + \phi_P}{2}\frac{v_N + v_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_S}{2}\frac{v_P + v_S}{2}\right]\Delta x \end{aligned} \tag{12}$$

Particularmente si se considera $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v}) = (h(u), h(v))$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(u) \approx & \underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u_E + u_P}{2}\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_P + u_W}{2}\frac{u_P + u_W}{2}\right]}_{\partial u^2/\partial x}\Delta x\,\Delta y \\ & + \underbrace{\frac{1}{\Delta y}\left[\frac{u_N + u_P}{2}\frac{v_N + v_P}{2} - \frac{u_P + u_S}{2}\frac{v_P + v_S}{2}\right]}_{\partial uv/\partial y}\Delta x\,\Delta y \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
h(v) \approx &\underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{v_E+v_P}{2}\frac{u_E+u_P}{2}-\frac{v_P+v_W}{2}\frac{u_P+u_W}{2}\right]}_{\partial uv/\partial x}\Delta x\,\Delta y \\
&+\underbrace{\frac{1}{\Delta y}\left[\frac{v_N+v_P}{2}\frac{v_N+v_P}{2}-\frac{\phi_P+\phi_S}{2}\frac{v_P+v_S}{2}\right]}_{\partial v^2/\partial y}\Delta x\,\Delta y
\end{aligned}
\tag{14}
$$

2.2.2 Término difusivo

Análogo a la discretización anterior, se aproxima el término difusivo utilizando el método de volúmenes finitos.

$$
\iiint\limits_{\Omega} G(\phi)\,dV = \iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{\nabla}\phi\,dV = \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{n}\,dA \tag{15}
$$

Donde,

$$
\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{n}\,dA \approx \frac{1}{Re}\left[(\vec{\nabla}\phi)_e-(\vec{\nabla}\phi)_w\right]\Delta y+\frac{1}{Re}\left[(\vec{\nabla}\phi)_n-(\vec{\nabla}\phi)_s\right]\Delta x \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\phi)_e &= \frac{1}{\Delta x}(\phi_E-\phi_P)\\
(\vec{\nabla}\phi)_w &= \frac{1}{\Delta x}(\phi_P-\phi_W)\\
(\vec{\nabla}\phi)_n &= \frac{1}{\Delta y}(\phi_N-\phi_P)\\
(\vec{\nabla}\phi)_s &= \frac{1}{\Delta y}(\phi_P-\phi_S)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$
\iiint\limits_{\Omega} G(\phi)\,dV \approx \frac{1}{Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left[\phi_E-2\phi_P+\phi_w\right]+\frac{1}{Re}\frac{\Delta x}{\Delta y}\left[\phi_N-2\phi_P+\phi_S\right] \tag{18}
$$

3 Procedimiento computacional

Se plantea un esquema BFD2 (*Backward Differentiation Formula 2nd Order*). La derivada temporal $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ se aproxima mediante,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}^{n+1} = \frac{3\boldsymbol{v}^{n+1} - 4\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{v}^{n-1}}{2\Delta t} + \Theta(\Delta t^2) \tag{19}$$

El término convectivo en t_{n+1} se obtiene por extrapolación de los términos en los instantes t_n y t_{n-1}

$$H(\boldsymbol{v}^{n+1}) = 2H(\boldsymbol{v}^{n}) - H(\boldsymbol{v}^{n-1}) \tag{20}$$

La ecuación a resolver mediante el método de volumenes finitos es:

$$\frac{3\boldsymbol{v}^{n+1} - 4\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\boldsymbol{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\boldsymbol{v}^{n+1}) \tag{21}$$

3.1 Predicción del campo de velocidad no solenoidal $\boldsymbol{v}^*$

La resolución de 21 requiere del cálculo de un predictor de la velocidad $\boldsymbol{v}$ dado por:

$$\frac{3\boldsymbol{v}^{*} - 4\boldsymbol{v}^{n} + \boldsymbol{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\boldsymbol{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\boldsymbol{v}^{*}) \tag{22}$$

Sea $\boldsymbol{\delta V} = \boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{v}^n$ y mediante una manipulación algebráica de la ecuación (21) se obtiene una ecuación equivalente.

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\Delta\right)\boldsymbol{\delta V} = \frac{\boldsymbol{v}^{n} - \boldsymbol{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(2H(\boldsymbol{v}^{n}) - H(\boldsymbol{v}^{n-1}) + \vec{\nabla} P - G(\boldsymbol{v}^{n})\right) \tag{23}$$

Aplicando el método ADI (*Alternating Direction Implicit*) para descomponer al operador de Helmholtz $(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\Delta)$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\Delta\right) \approx \left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{24}$$

Luego, resolver (23) es equivalente de manera aproximada a resolver

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta V = \frac{\vec{v}^{n} - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla} P)\right) \tag{25}$$

O bien,

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta\overline{V} = RHS^n \tag{26}$$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta V = \overline{V} \tag{27}$$

3.1.1 Primer paso en la dirección x ($\delta\overline{V}$)

Explicitando los términos de RHS^n de la ecuación (26)

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta\overline{V} = \frac{\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(H(\vec{v}^{n+1}) + \vec{\nabla}P)\right) = RHS^n \tag{28}$$

Recurriendo al método de residuos ponderados,

$$\iiint_\Omega \Psi_i\left[\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta\overline{V}_i - RHS^n\right]dV = 0 \tag{29}$$

Y aplicando la formulación para volúmenes finitos, desarrrollando el primer término de la izquierda

$$\iiint_{\Omega_{cv}}\left(I - \frac{2\Delta t}{3\,Re}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta\overline{V}\,dV = \underbrace{\iiint_{\Omega_{cv}}\delta\overline{V}\,dV}_{(*)} - \underbrace{\frac{2\Delta t}{3\,Re}\iiint_{\Omega_{cv}}\frac{\partial^2(\delta\overline{V})}{\partial x^2}\,dV}_{(**)} \tag{30}$$

Resolviendo $(*)$

$$\iiint_{\Omega_{cv}}\delta\overline{V}\,dV \approx (\delta\overline{V})_P\,\Delta x\Delta y \tag{31}$$

Resolviendo $(**)$

$$\frac{2\Delta t}{3\,Re}\iiint_{\Omega_{cv}}\frac{\partial^2(\delta\overline{V})}{\partial x^2}\,dV \approx \frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\delta\overline{V}_E - 2\delta\overline{V}_P + \delta\overline{V}_W\right) \tag{32}$$

Reemplazando $(**)$ y $(***)$ en la (26) se obtiene:

$$(\delta\overline{V})_P\,\Delta x\Delta y - \frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\delta\overline{V}_E - 2\delta\overline{V}_P + \delta\overline{V}_W\right) = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n\,dV \tag{33}$$

El término RHS^n se reemplaza por la ecuación la discretización planteada en la Sección 2 y por el campo de presión definido arbitrariamente a *priori*. La ecuación anterior se traduce en resolver un sistemas de ecuaciones tridiagonal dado por,

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\delta\overline{V}_E + \left(\Delta x\,\Delta y + \frac{4\,\Delta t}{3\,Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\delta\overline{V}_P + \left(-\frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\delta\overline{V}_W \\ = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n\,dV\end{aligned} \tag{34}$$

3.1.2 Segundo paso en la dirección y (δV)

Se procede similar al paso anterior, con la diferencia de que no se aplica el método de volúmenes finitos, ya que se aplica sólo a un factor de la descomposición.

$$(\delta\overline{V})_P - \frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\delta V_E - 2\delta V_P + \delta V_W\right) = \delta\overline{V}_P \tag{35}$$

Reeordenando los términos para obtener un sistema de ecuaciones tridiagonal

$$\begin{split}\left(-\frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\delta V_E + \left(1 + \frac{4\,\Delta t}{3\,Re}\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\delta V_P + \left(-\frac{2\,\Delta t}{3\,Re}\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\delta V_W \\ = \delta\overline{V}_P\end{split} \tag{36}$$

Observación los pasos anteriores se realizan tanto para u como para v ya que $\vec{v} = \{u, v\}^T$ y $\delta V = \vec{v}^* - \vec{v}^n$. Cada paso de tiempo implica resolver 4 sistemas tridiagonales: 2 sistemas para la componente horizontal y 2 sistemas para la componente vertical de la velocidad. Finalmente se obtiene el predictor de la velocidad:

$$\vec{v}^* = \left| \begin{array}{l} u^* = u^n + \delta V_x \\ v^* = v^n + \delta V_y \end{array} \right. \tag{37}$$

Referencias

[1] Patankar, .S. , *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (Series in computational methods in mechanics and thermal sciences)*, Taylor & Francis, ISBN 0-89116-522-3

[2] Versteeg, H., Malalasekera, W., , *An introduction to Computational Fluid Dynamics*, John Wiley & Sons Inc., 1995, ISBN 0-582-21884-5

[3] Ferziger, J., Peric, M., , *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2002, ISBN 3-540-42074-6

[4] Liu, G., R., , *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press ,2010, ISBN 978-1-4200-8209-8