



Universidad Técnica Federico Santa
María



Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto 2

Dinámica de fluidos computacional

Nombre : Ignacio Apablaza
Rol : 201141007-6
Profesores : Romain Gers
: Olivier Skurtys
Asignatura : IPM468

Índice

1	Introducción	3
2	Discretización de las ecuaciones	4
2.1	Ecuación de Navier Stokes discretizado	4
2.2	Discretización espacial	4
2.2.1	Término convectivo	5
2.2.2	Término difusivo	6
3	Procedimiento computacional	7
3.1	Predicción del campo de velocidad no solenoidal \mathbf{v}^*	7
3.1.1	Primer paso en la dirección x ($\delta\bar{V}$)	8
3.1.2	Segundo paso en la dirección y (δV)	8
3.2	Corrección de la presión	9
3.3	Corrección del campo de velocidad	10
4	Descripción del problema	11
4.1	Dominio físico y numérico	11
4.2	Algoritmo de resolución	11
5	Resultados	14
6	Conclusiones	18

1 Introducción

Se estudia el perfil de velocidad de un flujo dentro de una tubería de sección circular. Se emplea el método de volúmenes finitos para la resolución numérica y se contrastan los resultados con los resultados analíticos.

En la Sección 2 se estudian los esquemas de discretización flujos convectivos y difusivos, además del esquema de integración temporal a utilizar en la implementación computacional, describiéndose de manera general los pasos a seguir en la resolución de la ecuación de Navier-Stokes aplicado a un fluido newtoniano incompresible (Sección 3).

Para la integración temporal se emplea un esquema de Euler de orden 2 o esquema de Gear. Esta discretización permite integrar un intervalo de tiempo mediante el método de paso fraccionados o método ADI. En la Sección 4 se nombran algunas consideración al momento de discretizar el dominio físico, para lo cual se utilizan mallas desplazadas (*staggered grid*). Como se busca obtener un flujo completamente desarrollado se plantea condiciones de borde adecuadas para obtener estas características: Se emplean condición de presión conocida en la entrada y salida del tubo; y condición de periodicidad.

Los resultados numéricos y teóricos se analizan en la Sección 5. Finalmente se realizan algunas observaciones en la Sección 6.

2 Discretización de las ecuaciones

2.1 Ecuación de Navier Stokes discretizado

La ecuación de conservación de la masa y de cantidad de movimiento para un fluido Newtoniano incompresible, despreciando los términos asociados al peso se pueden representar como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\vec{\nabla} P + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} \quad (2)$$

La ecuación (2) se expresa en forma adimensional. En coordenadas rectangulares se escribe:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (3)$$

Donde v_i^* , P^* , x_j^* , t^* representa a la variable adimensionadas respectivas. Para precindir de la notación (*) se asume que todas las variables a utilizar están adimensionadas

2.2 Discretización espacial

Ecuación de conservación/transporte de un escalar pasivo ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = S_\phi \quad (4)$$

donde S_ϕ representa el término fuente asociado a ϕ y \mathbf{J} a la contribución del flujo convectivo y difusivo:

$$\mathbf{J} = \mathbf{v}\phi - \frac{1}{Re} \vec{\nabla} \phi \quad (5)$$

Para obtener la formulación en volúmenes finitos se aplica el método de residuos ponderados a la ecuación, con soporte compacto y utilizando el método de Galerkin. Se recurre al teorema de valor medio representar la integral en función de terminos centrales. Sea ϕ_J un valor aproximado que caracteriza al escalar dentro del volumen de control $\Omega_{cv} = \Omega_J$. La ecuación discretizada resulta [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_J \Omega_J) + \sum (F_i A_i)_J = (S_\phi)_J \quad (6)$$

Donde F_i corresponde la contribución del flujo convectivo y difusivo en la cara A_i .

$$F = \underbrace{H(\phi)_C}_{\mathbf{v}\phi} + \underbrace{G(\phi)_D}_{-\vec{\nabla}\phi/Re} \quad (7)$$

2.2.1 Término convectivo

La discretización del término convectivo viene dado por

$$\iiint_{\Omega} H(\phi) dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}\phi) dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}\phi \cdot \mathbf{n} dA \quad (8)$$

Aplicando el método de volúmenes finitos resulta la siguiente expresión:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}\phi \cdot \mathbf{n} dA \approx [(\phi u)_e - (\phi u)_w] \Delta y + [(\phi v)_n - (\phi v)_s] \Delta x \quad (9)$$

Donde,

$$\begin{aligned} (u)_e &= \frac{1}{2}(u_E + u_P) \\ (u)_w &= \frac{1}{2}(u_P + u_W) \\ (v)_n &= \frac{1}{2}(v_N + v_P) \\ (v)_s &= \frac{1}{2}(v_P + v_S) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\phi)_e &= \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \\ (\phi)_w &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \\ (\phi)_n &= \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \\ (\phi)_s &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \end{aligned} \quad (11)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} H(\phi) dV &\approx \left[\frac{\phi_E + \phi_P}{2} \frac{u_E + u_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \frac{u_P + u_W}{2} \right] \Delta y \\ &+ \left[\frac{\phi_N + \phi_P}{2} \frac{v_N + v_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \frac{v_P + v_S}{2} \right] \Delta x \end{aligned} \quad (12)$$

Particularmente si se considera $\mathbf{H}(\mathbf{v}) = (h(u), h(v))$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(u) &\approx \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u_E + u_P}{2} \frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_P + u_W}{2} \frac{u_P + u_W}{2} \right]}_{\partial u^2 / \partial x} \Delta x \Delta y \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\Delta y} \left[\frac{u_N + u_P}{2} \frac{v_N + v_P}{2} - \frac{u_P + u_S}{2} \frac{v_P + v_S}{2} \right]}_{\partial uv / \partial y} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
h(v) \approx & \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{v_E + v_P}{2} \frac{u_E + u_P}{2} - \frac{v_P + v_W}{2} \frac{u_P + u_W}{2} \right]}_{\partial uv / \partial x} \Delta x \Delta y \\
& + \underbrace{\frac{1}{\Delta y} \left[\frac{v_N + v_P}{2} \frac{v_N + v_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \frac{v_P + v_S}{2} \right]}_{\partial v^2 / \partial y} \Delta x \Delta y
\end{aligned} \tag{14}$$

2.2.2 Término difusivo

Análogo a la discretización anterior, se aproxima el término difusivo utilizando el método de volúmenes finitos.

$$\iiint_{\Omega} G(\phi) dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\nabla} \phi dV = \iint_{\partial \Omega} \vec{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} dA \tag{15}$$

Donde,

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} dA \approx \frac{1}{Re} \left[(\vec{\nabla} \phi)_e - (\vec{\nabla} \phi)_w \right] \Delta y + \frac{1}{Re} \left[(\vec{\nabla} \phi)_n - (\vec{\nabla} \phi)_s \right] \Delta x \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \phi)_e &= \frac{1}{\Delta x} (\phi_E - \phi_P) \\
(\vec{\nabla} \phi)_w &= \frac{1}{\Delta x} (\phi_P - \phi_W) \\
(\vec{\nabla} \phi)_n &= \frac{1}{\Delta y} (\phi_N - \phi_P) \\
(\vec{\nabla} \phi)_s &= \frac{1}{\Delta y} (\phi_P - \phi_S)
\end{aligned} \tag{17}$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$\iiint_{\Omega} G(\phi) dV \approx \frac{1}{Re} \frac{\Delta y}{\Delta x} [\phi_E - 2\phi_P + \phi_W] + \frac{1}{Re} \frac{\Delta x}{\Delta y} [\phi_N - 2\phi_P + \phi_S] \tag{18}$$

3 Procedimiento computacional

Se plantea un esquema BFD2 (*Backward Differentiation Formula 2nd Order*). La derivada temporal $\partial \mathbf{v} / \partial t$ se aproxima mediante,

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{n+1}}{\partial t} = \frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} + \Theta(\Delta t^2) \quad (19)$$

El término convectivo en t_{n+1} se obtiene por extrapolación de los términos en los instantes t_n y t_{n-1}

$$H(\mathbf{v}^{n+1}) = 2H(\mathbf{v}^n) - H(\mathbf{v}^{n-1}) \quad (20)$$

La ecuación a resolver mediante el método de volúmenes finitos es:

$$\frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\mathbf{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\mathbf{v}^{n+1}) \quad (21)$$

3.1 Predicción del campo de velocidad no solenoidal \mathbf{v}^*

La resolución de (21) requiere del cálculo de un predictor de la velocidad \mathbf{v} dado por:

$$\frac{3\mathbf{v}^* - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\mathbf{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P + G(\mathbf{v}^*) \quad (22)$$

Sea $\delta \mathbf{V} = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n$ y mediante una manipulación algebraica de la ecuación (21) se obtiene una ecuación equivalente.

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \Delta \right) \delta \mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3} \left(2H(\mathbf{v}^n) - H(\mathbf{v}^{n-1}) + \vec{\nabla} P - G(\mathbf{v}^n) \right) \quad (23)$$

Aplicando el método ADI (*Alternating Direction Implicit*) para descomponer al operador de Helmholtz $(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \Delta)$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \Delta \right) \approx \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (24)$$

Luego, resolver (23) es equivalente de manera aproximada a resolver

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \mathbf{V} = \frac{\bar{\mathbf{v}}^n - \bar{\mathbf{v}}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3} \left(H(\bar{\mathbf{v}}^{n+1}) + \vec{\nabla} P \right) \quad (25)$$

O bien,

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta \bar{\mathbf{V}} = RHS^n \quad (26)$$

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3 Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta \mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} \quad (27)$$

3.1.1 Primer paso en la dirección x ($\delta\bar{V}$)

Explicitando los términos de RHS^n de la ecuación (26)

$$\left(I - \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \delta\bar{V} = \frac{\bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3} \left(H(\bar{v}^{n+1}) + \vec{\nabla} P\right) = RHS^n \quad (28)$$

Recurriendo al método de residuos ponderados,

$$\iiint_{\Omega} \Psi_i \left[\left(I - \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \delta\bar{V}_i - RHS^n \right] dV = 0 \quad (29)$$

Y aplicando la formulación para volúmenes finitos, desarrollando el primer término de la izquierda

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \left(I - \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \delta\bar{V} dV = \underbrace{\iiint_{\Omega_{cv}} \delta\bar{V} dV}_{(*)} - \underbrace{\frac{2\Delta t}{3Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta\bar{V})}{\partial x^2} dV}_{(**)} \quad (30)$$

Resolviendo (*)

$$\iiint_{\Omega_{cv}} \delta\bar{V} dV \approx (\delta\bar{V})_P \Delta x \Delta y \quad (31)$$

Resolviendo (**)

$$\frac{2\Delta t}{3Re} \iiint_{\Omega_{cv}} \frac{\partial^2(\delta\bar{V})}{\partial x^2} dV \approx \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\Delta y}{\Delta x} (\delta\bar{V}_E - 2\delta\bar{V}_P + \delta\bar{V}_W) \quad (32)$$

Reemplazando (**) y (***) en la (26) se obtiene:

$$(\delta\bar{V})_P \Delta x \Delta y - \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\Delta y}{\Delta x} (\delta\bar{V}_E - 2\delta\bar{V}_P + \delta\bar{V}_W) = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n dV \quad (33)$$

El término RHS^n se reemplaza por la ecuación la discretización planteada en la Sección 2 y por el campo de presión definido arbitrariamente *a priori*. La ecuación anterior se traduce en resolver un sistemas de ecuaciones tridiagonal dado por,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \delta\bar{V}_E + \left(\Delta x \Delta y + \frac{4\Delta t}{3Re} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \delta\bar{V}_P + \left(-\frac{2\Delta t}{3Re} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \delta\bar{V}_W \\ = \iiint_{\Omega_{cv}} RHS^n dV \end{aligned} \quad (34)$$

3.1.2 Segundo paso en la dirección y (δV)

Se procede similar al paso anterior, con la diferencia de que no se recurre al método de volúmenes finitos, ya que se aplica sólo a un factor de la descomposición.

$$(\delta\bar{V})_P - \frac{2\Delta t}{3Re} \frac{1}{(\Delta y)^2} (\delta V_E - 2\delta V_P + \delta V_W) = \delta\bar{V}_P \quad (35)$$

Reordenando los términos para obtener un sistema de ecuaciones tridiagonal

$$\left(-\frac{2\Delta t}{3Re} \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) \delta V_E + \left(1 + \frac{4\Delta t}{3Re} \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) \delta V_P + \left(-\frac{2\Delta t}{3Re} \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) \delta V_W = \delta\bar{V}_P \quad (36)$$

Los pasos anteriores se realizan tanto para u como para v ya que $\mathbf{v} = \{u, v\}^T$ y $\delta\mathbf{V} = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n$. Cada paso de tiempo implica resolver 4 sistemas tridiagonales: 2 sistemas para la componente horizontal y 2 sistemas para la componente vertical de la velocidad. Finalmente se obtiene el predictor de la velocidad:

$$\mathbf{v}^* = \begin{cases} u^* = u^n + \delta V_x \\ v^* = v^n + \delta V_y \end{cases} \quad (37)$$

Observación En la ecuación (34) se deben considerar los esfuerzos cortantes debido las fuerzas externas. En caso de haber una pared se debe considerar la condición de no deslizamiento. En este trabajo se implementó una aproximación lineal de la fuerza utilizando el procedimiento explicado por Versteeg [2]

3.2 Corrección de la presión

Una vez calculada la predicción de velocidad se corrige el campo de presión P establecido *a priori*. Como $G(\mathbf{v}) = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}$ entonces se escribe la ecuación de conservación de momento para la predicción de \mathbf{v}^* y para el instante de tiempo $t = n + 1$:

$$\frac{3\mathbf{v}^* - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\mathbf{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P^n + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{v}^* \quad (38)$$

$$\frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\mathbf{v}^{n+1}) = -\vec{\nabla} P^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{v}^{n+1} \quad (39)$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{3}{2\Delta t} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*) = - \underbrace{\left[\vec{\nabla} P^{n+1} - \vec{\nabla} P^n - \frac{1}{Re} (\Delta \mathbf{v}^{n+1} - \Delta \mathbf{v}^*) \right]}_{\nabla \phi} \quad (40)$$

Al aplicar el operador divergencia en ambos lados de la igualdad y considerando que $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ resulta entonces:

$$\Delta \phi = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (41)$$

Tomando el lado derecho de la ecuación (40) y desarrollando el operador laplaciano de \mathbf{v} se observa que:

$$\nabla\phi = \vec{\nabla}P^{n+1} - \vec{\nabla}P^n - \frac{1}{Re}(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^*) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^*)) \quad (42)$$

Si imponemos que $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ y $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^*) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^{n+1})$ entonces la expresión se reduce a:

$$\phi = (P^{n+1} - P^n) + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (43)$$

Aplicando el método de volúmenes finitos a la ecuación (41) se tiene entonces,

$$\left(\frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_N - 2\phi_P + \phi_S}{(\Delta y)^2} \right) \Delta x \Delta y = \frac{3}{2\Delta t} [(u_e^* - u_w^*)\Delta y + (v_n^* - v_s^*)\Delta x] \quad (44)$$

Obviando los términos vecinos del punto central ϕ_P entonces la ecuación se puede simplificar,

$$\phi_P = - \frac{\frac{3}{2\Delta t} [(u_e^* - u_w^*)\Delta y + (v_n^* - v_s^*)\Delta x]}{\frac{1}{2}(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y})} \quad (45)$$

De esta manera se evita imponer condiciones de contorno para ϕ , ya que estas se desprenden implícitamente de las condiciones de borde y resolución de la variable \mathbf{v} . Finalmente la corrección de la presión se realiza despejando P^{n+1} de la ecuación (43).

3.3 Corrección del campo de velocidad

La corrección de la presión es un proceso iterativo donde se vuelve a calcular el predictor de la velocidad \mathbf{v}^* . Como criterio de detención se reemplaza la ecuación (41) en la ecuación de conservación de masa

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}^* - \underbrace{\frac{2\Delta t}{3}\Delta\phi}_{\text{fuente de masa}} = 0 \quad (46)$$

Cuando el término de fuente de masa es igual a cero entonces se puede decir que las variables iteradas convergen. Luego se corrige el campo de velocidad $\bar{\mathbf{v}}^{n+1} = \bar{\mathbf{v}} - \Delta t \nabla \phi$. Alcanzada la convergencia se pasa al siguiente paso de tiempo hasta terminar la iteración al tiempo T .

4 Descripción del problema

El perfil parabólico de velocidad que resulta de un fluido que circula dentro de una tubería de sección circular se puede calcular analíticamente (Ley de Poiseuille). Este perfil se obtiene por la acción de los esfuerzos cortantes debido a la viscosidad del fluido. La ecuación que describe este perfil viene dada por:

$$u = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (47)$$

donde ΔP es el gradiente de presión entre ambos extremos de la tubería, μ es la viscosidad dinámica, L y R corresponde a la longitud y al radio de la tubería, $r \in [0, R]$ es una posición dentro de la tubería.

4.1 Dominio físico y numérico

Se estudia el comportamiento de un fluido en tubería de radio L_y y longitud L_x . Su modelo discretizado se representa mediante una malla regular desplazada (ver Figura 1). Los puntos negros corresponden a las coordenadas de la presión (o de escalar pasivo ϕ) y los puntos azules y rojos a las componentes horizontales y verticales de la velocidad, respectivamente.

Para facilitar el procedimiento de resolución, se incluyen nodos ficticios en la discretización, representados por los volúmenes de color ($i = 1, ny + 2$ para $j = 1$ y $j = nx + 2$; $j = 1, nx + 2$ para $i = 1$ e $i = ny + 2$) que contienen las condiciones de contorno del problema. Notar de la Figura que las variables $u(i, j = 1)$ y $v(i = ny + 2, j)$ no aportan información al problema, pero se conservan para respetar la nomenclatura de los puntos de la malla.

4.2 Algoritmo de resolución

En la Figura 2 se muestra un diagrama de flujo del código implementado. El preámbulo (dimensiones, número de nodos, parámetros físicos, etc.) está incluido de un módulo.

1. Inicio programa CFD_POISEUILLE (Preámbulo contenido en el módulo)
2. Se imponen las condiciones iniciales
3. Se imponene las condiciones de contorno
4. Inicio de la iteración de k desde 1 a nt (nt : número de pasos de tiempo)
5. Se calcula la predicción de la velocidad
6. Se corrige la presión mediante la resolución de la ecuación de Poisson de ϕ

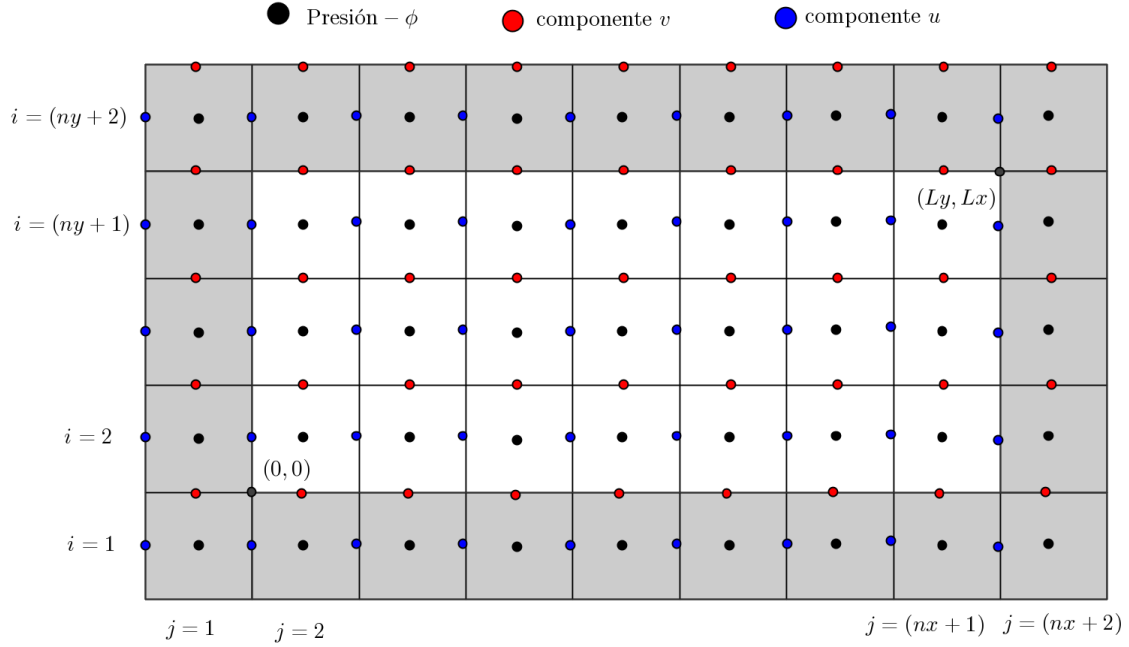


Figura 1. Malla regular de discretización del dominio

7. Se verifica la convergencia de las variables. Si el término de fuente de masa o el número de iteraciones satisfacen cierto criterio, se regresa al paso 5. Caso contrario, continua con el siguiente paso
8. Se corrige el campo de velocidad
9. Se verifica si se logra un flujo estacionario. Si está en estado transiente, se imponen las condiciones de contorno y se vuelve al paso 4. Caso contrario, se exportan los datos y se grafican.
10. Fin del programa CFD_POISEUILLE

Condiciones de contorno Establece condición de no deslizamiento en la cara inferior ($i=2, j$) y simetría en la cara superior ($i=ny+1, j$).

Condición de entrada y salida Se plantean dos alternativas de resolución

- Se imponen condición de presión en la entrada y salida de la tubería, de tal manera de poder calcular directamente ΔP y poder comparar el perfil de velocidad con la solución analítica de Poiseuille.
- Se imponen condición periódica para obtener el perfil desarrollado

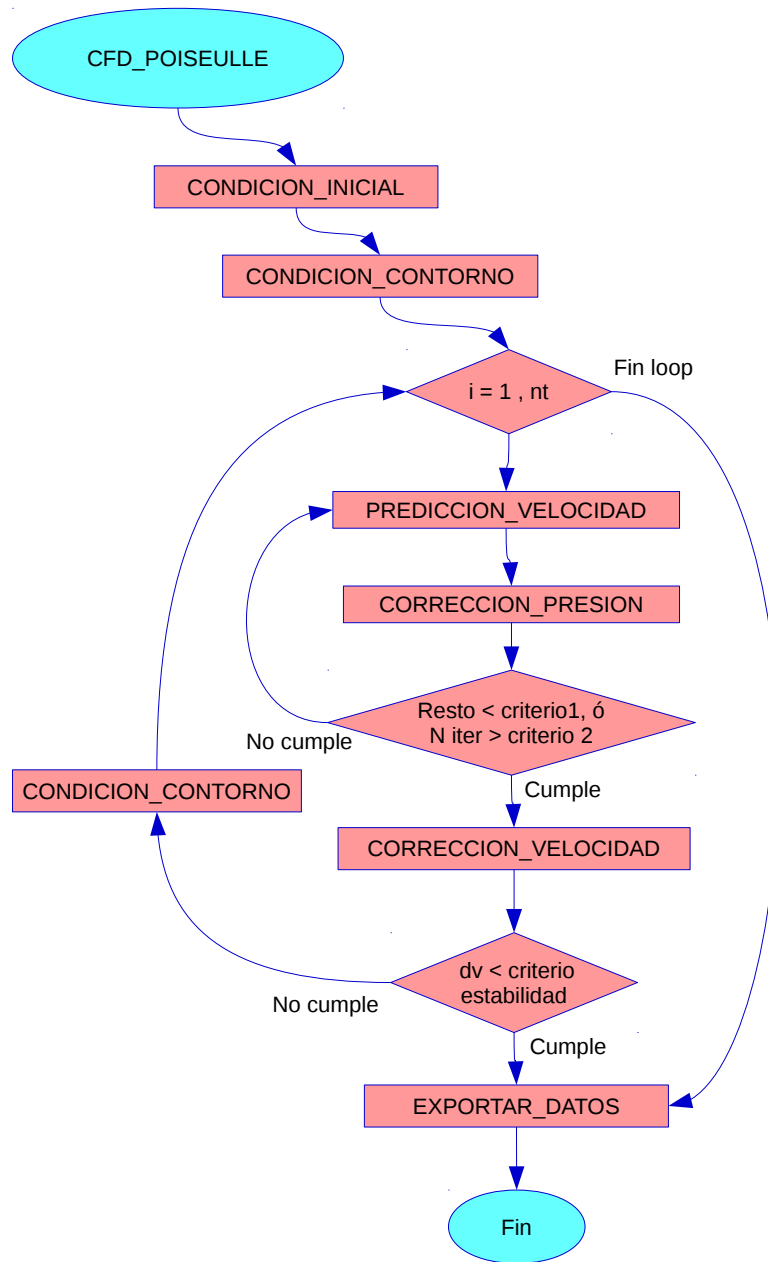


Figura 2. Algoritmo de resolución para el problema de Poiseuille

5 Resultados

Se muestra a continuación los resultados numéricos obtenidos. En la Figuras 3 y 4 se muestra el campo de velocidad y de presión de la mitad inferior de la tubería. Se observan leves diferencia en los perfiles de velocidad: El primer caso presenta componentes verticales de velocidad mientras que en el segundo caso son prácticamente nulos. Notar que el gradiente de presión es aproximadamente el doble que en el segundo caso (lo que es relevante es la diferencia de presión, no la presión en sí)

En la Figura 5 se comparan los resultados de perfil de velocidad en $x = Lx/2$ para modificando la razón de proporción de los volúmenes. En la medida que se vuelven menos regulares (alejándose de la relación 1:1, $Lx = 5$, $nx = 50$, $Ly = 1$, $ny = 10$) los resultados se alejan de la solución analítica.

En la Tabla 1 se determinan los número CFL que aseguran la estabilidad. Notar CFL disminuye en la medida que Re disminuye.

	Condición 1				Condición 2		
Re	2000	1500	1000	Re	2000	1500	1000
CFL	0.30	0.23	0.15	CFL	0.30	0.23	0.15
T[s]	18.908	45.036	19.840	T[s]	124.16	-	90.427

Tabla 1. Número CFL que asegura la convergencia para cada Re ($Lx = 5$, $Ly = 1$, $Nx = 50$, $Ny = 10$). Condición 1: Presión impuesta en la entrada y salida; Condición 2: Condición periódica. El valor omitido es debido a que diverge para ese caso.

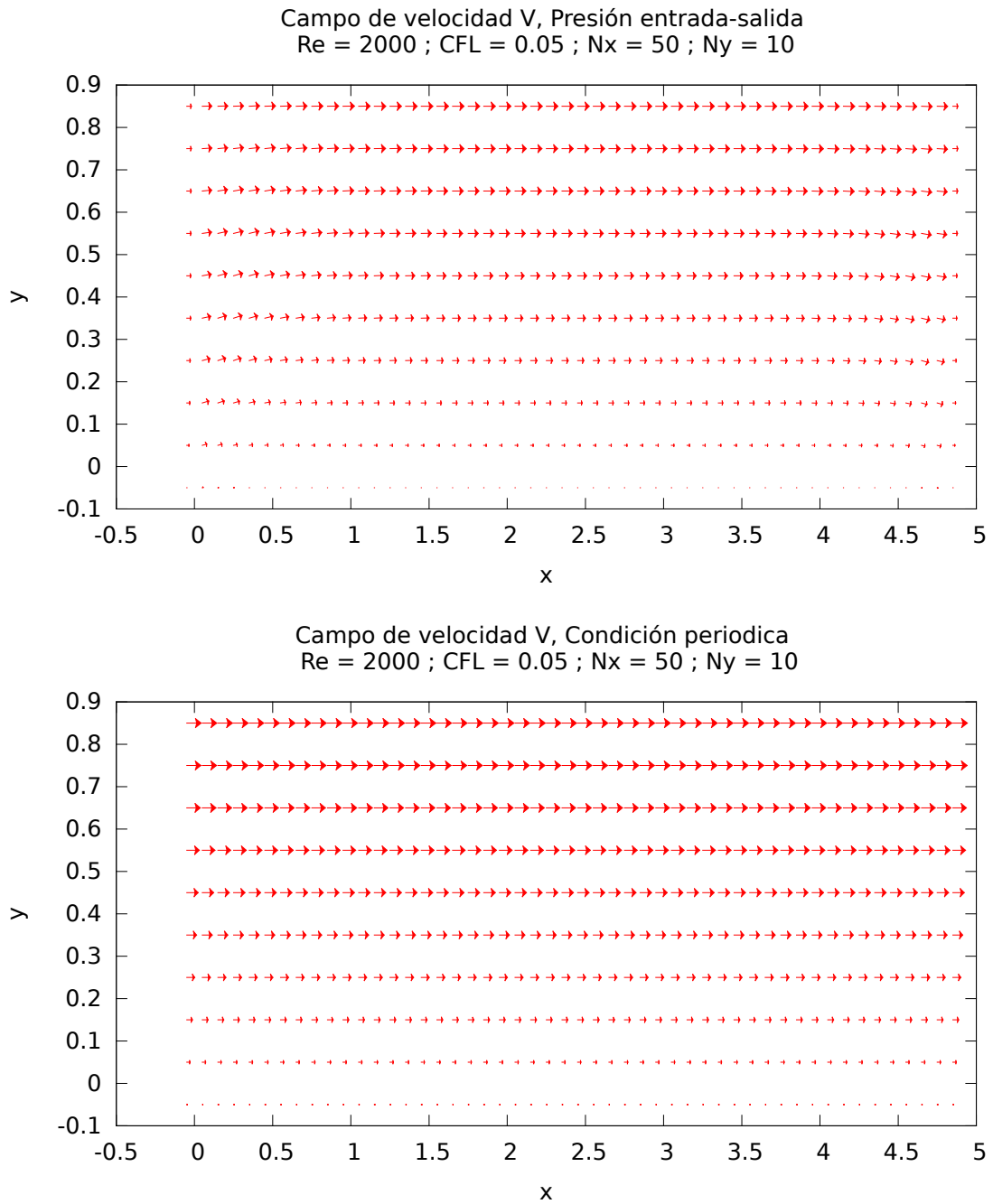


Figura 3. Se observa que para el primer caso el perfil presenta componentes verticales del flujo

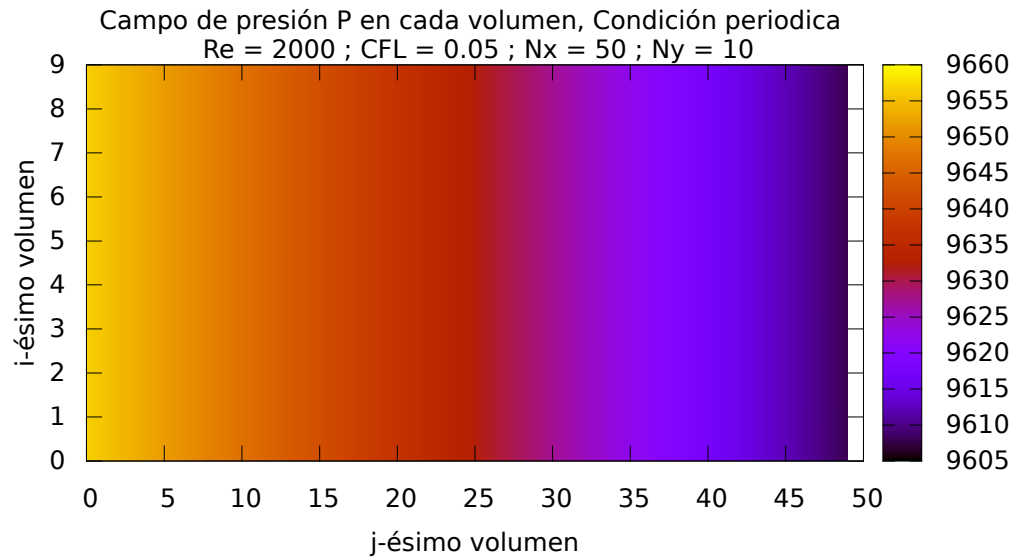
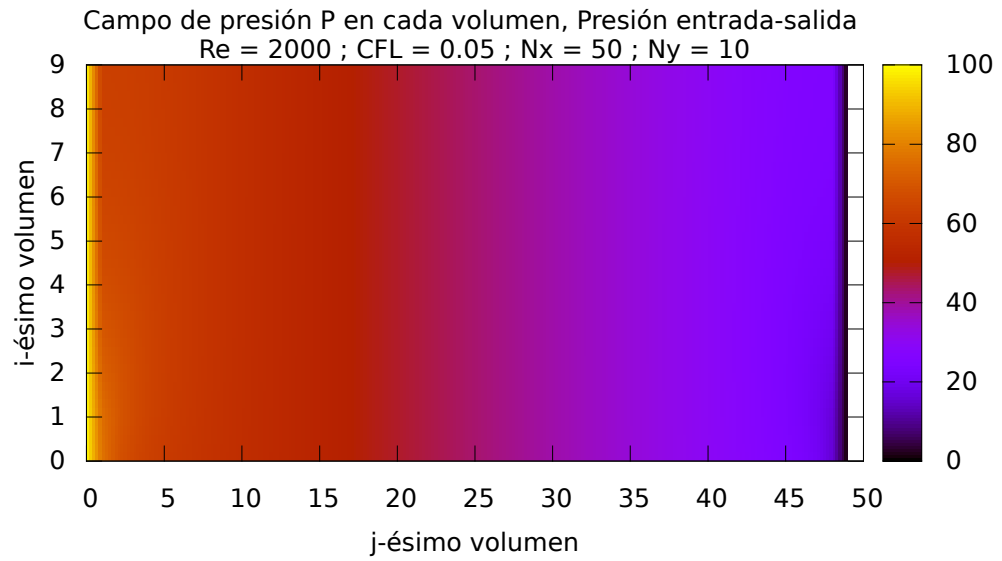


Figura 4. El gradiente de presión en el primer caso es aproximadamente el doble que el segundo caso

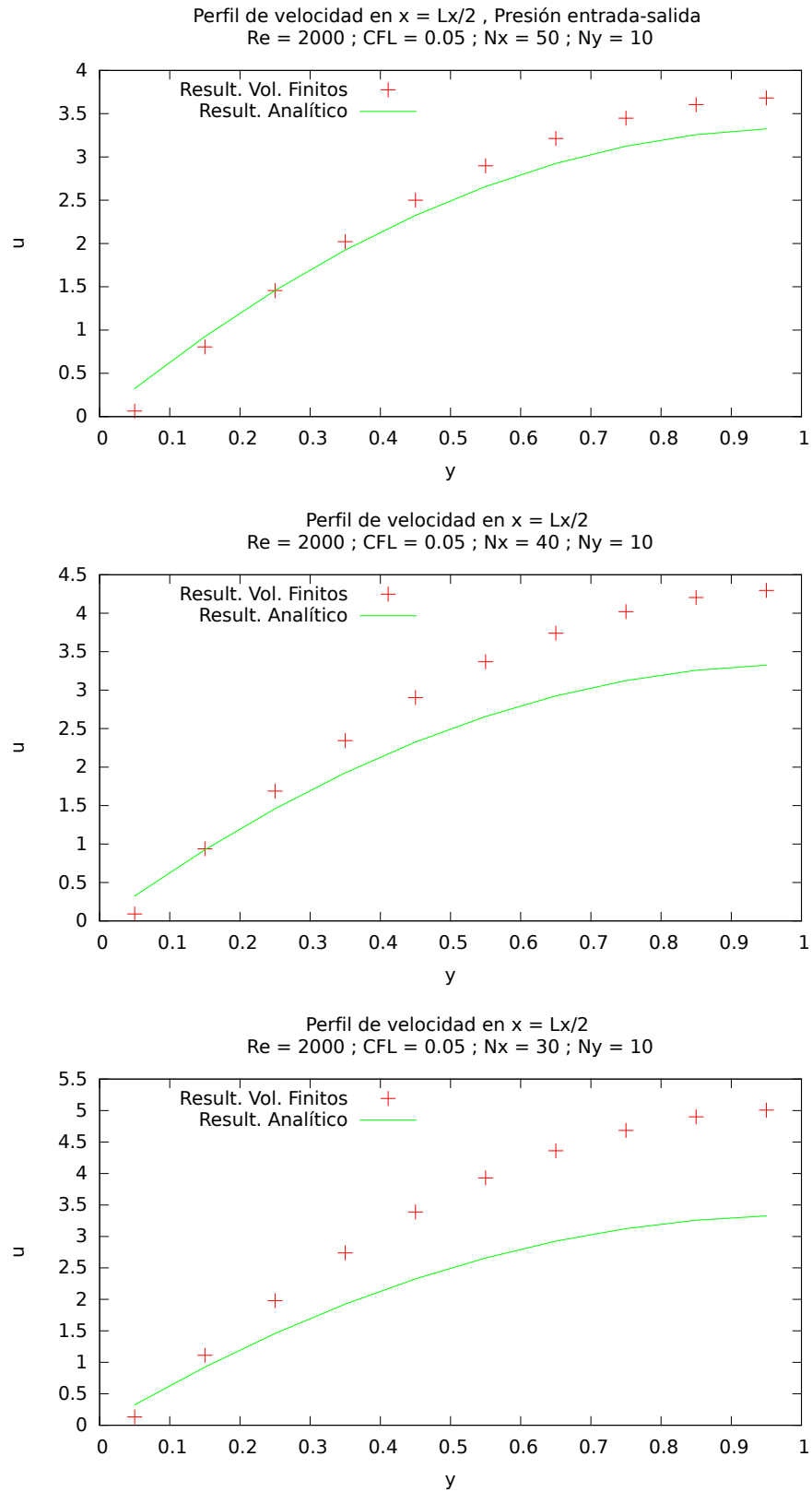


Figura 5. Perfil de velocidad en $x = L/2$ para distintos número de volúmenes y distinta proporción geométrica..

6 Conclusiones

Los resultados números se contrastaron con los resultados analíticos del perfil de velocidad de un fluido incompresible viscoso que fluye en una tubería de sección circular.

Se comparan los resultados al imponer dos tipos de condición de contorno para la entrada y salida: Imposición de presión y flujo periódico. Se observa que para la condición de flujo periódico se obtiene un perfil con componente vertical prácticamente nulo, mientras que para la condición de presión existen componentes considerables en esta dirección.

Sin embargo utilizando esta condición se observa que se acerca más al perfil parabólico teórico que en el caso de flujo periodico. De esta manera se puede ver cómo el problema presenta una sensibilidad a la elección de esta condición. Los tiempo de cálculo empleado con la condición periódica son mayores que las de la condición de presión: a ver las animaciones del flujo se observa que este *oscila* a lo largo del tubo hasta lograr ser estacionario. Estos cambios repentinos requieren de rápidos cambios en la presión, por lo que se requieren de más iteraciones (en este caso, iteraciones de ϕ) para lograr la convergencia de las variables.

El valor obtenido en la presión en ambos casos distan con creces, lo cual no tiene mayor relevancia al momento de resolver las ecuaciones que gobiernan al fluido ya que lo que influye es el gradiente de presión y no la presión en sí.

En la resolución de la ecuación de Poisson se utilizó una simplificación del operador laplaciano de ϕ : Se omiten los valores vecinos del valor central. De esta manera se evita imponer condición de contorno para dicha variable, ya que se entiende que la presión es una función implícita de la velocidad, por lo que al imponer condición en la velocidad se imponen implícitamente para la presión. Sin embargo como se pudo apreciar, el resultado depende fuertemente de la condición de contorno, por lo que intentar otra aproximación de esta operación puede mejorar los resultados.

Referencias

- [1] PATANKAR, .S. , *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (Series in computational methods in mechanics and thermal sciences)*, Taylor & Francis, ISBN 0-89116-522-3
- [2] VERSTEEG, H., MALALASEKERA, W., , *An introduction to Computational Fluid Dynamics*, John Wiley & Sons Inc., 1995, ISBN 0-582-21884-5
- [3] FERZIGER, J., PERIC, M., , *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2002, ISBN 3-540-42074-6
- [4] LIU, G., R., , *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press ,2010, ISBN 978-1-4200-8209-8