



Dinámica de Fluidos Computacional IPM-468.1

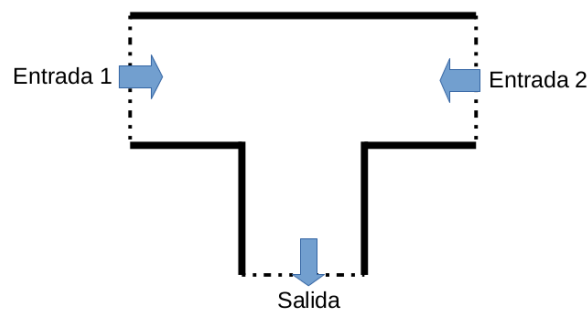
Tarea de Volúmenes Finitos 2017:

Flujo monofásico Newtoniano en una confluencia

Dr Romain Gers, Dr Olivier Skurtys

1. Objetivos

- El objetivo numérico de la tarea es resolver por el método de Volúmenes Finitos las ecuaciones de Navier Stokes en dos dimensiones.
- Es una primera introducción a la escritura de un código personal.
- El objetivo físico es abordar un flujo laminar en la siguiente confluencia:



- Los objetivos profesionales son: aprender a presentar un problema y su resolución por la Mecánica de Fluidos Computacional, exponer y analizar resultados numéricos, interpretar e predecir las capacidades de un código comercial, buscar información en la literatura.

2. El modelo físico

- Consideramos el flujo isotérmico de un fluido monofásico Newtoniano, en un plano (x, y) .
- El flujo es descrito por el campo de velocidad $\vec{v} = \{u(x, y, t), v(x, y, t)\}$ y el campo de presión $P(x, y, t)$.
- El fluido es incompresible, es decir $\rho(x, y, t) = \rho_0$ ($\rho_0^{agua} = 1e^3 \text{ kg.m}^{-3}$ por ejemplo).
- Tomando en cuenta las hipótesis precedentes, se calculan los campos de velocidad y presión por las siguientes ecuaciones de conservación (ecuaciones de Navier-Stokes):

- Conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

- Conservación de la cantidad de movimiento sin fuerza de cuerpo:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{v}$$

Para poder representar los fenómenos independientemente de las dimensiones del problema, se trabajarán estas ecuaciones en **forma adimensional**.

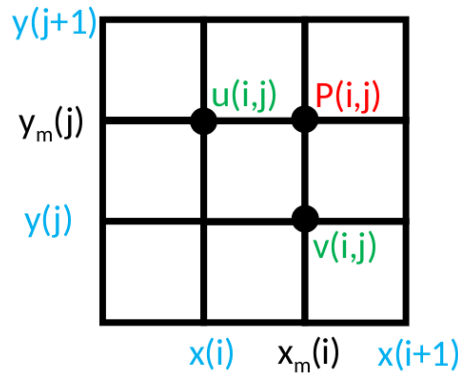
- Por una de las entradas, seguiremos el transporte de un escalar pasivo cuya concentración nos va a permitir visualizar los dos flujos entrando mezclarse:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \Phi \right) = \Gamma \Delta \Phi$$

Típicamente $\Gamma/\rho_0 = 1e^{-5} \text{ m}^2.s^{-1}$.

3. Discretización del dominio físico

- Se considera un dominio de tamaño $L_x * L_y$ (donde x es la coordenada horizontal).
- El dominio es delimitado por 3 paredes, 2 entradas de mismo ancho atravesadas por 2 flujos diferentes, y una salida.
- Se utilizarán dos mallas para calcular la presión y la velocidad (staggered grid), como lo ilustra la siguiente figura:



La malla principal se construye con:

$$x(i) = (i - 1)\Delta x \quad \Delta x = \frac{L_x}{n_x - 1} \quad \forall i = 1, n_x - 1$$

$$y(j) = (j - 1)\Delta y \quad \Delta y = \frac{L_y}{n_y - 1} \quad \forall j = 1, n_y - 1$$

La malla secundaria a partir de las siguientes relaciones:

$$x_m(i) = (i - \frac{1}{2})\Delta x \quad \Delta x = \frac{L_x}{n_x - 1} \quad \forall i = 1, n_x - 1$$

$$y_m(j) = (j - \frac{1}{2})\Delta y \quad \Delta y = \frac{L_y}{n_y - 1} \quad \forall j = 1, n_y - 1$$

Las dos mallas son necesarias porque se calculan :

- la presión en el nodo $(x_m(i), y_m(j))$
 - la componente horizontal de la velocidad $u(i, j)$ en el nodo $(x(i), y_m(j))$
 - la componente vertical de la velocidad $v(i, j)$ en el nodo $(x_m(i), y(j))$
- Se implementarán las siguientes condiciones de contorno:
- No deslizamiento sobre las paredes.
 - Velocidad impuesta en las 2 entradas, diferente para cada entrada, asegurando un flujo laminar en la confluencia.
 - Condición de flujo nulo en la salida.
 - Concentración del colorante impuesta en una de las entradas $C = 1$.

4. Resolución numérica

Se discretizarán las ecuaciones de Navier-Stokes por el método de Volúmenes Finitos, utilizando los esquemas y técnicas de resolución vistos en clase.

4.1. Discretización temporal

La discretización temporal será semi-implícita para no tener una condición de estabilidad tan restrictiva.

- Se utilizará un esquema de Euler de orden 2 (BFD2: Backward Differentiation Formula) o esquema de Gear para la integración temporal:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + \Theta(\Delta t^2)$$

- La discretización semi-implícita para los otros términos se presenta a continuación:
- El término convectivo $H(\vec{v})$ se calcula al tiempo t^{n+1} por una extrapolación lineal de su valor a los instantes t^n y t^{n-1} :

$$H(\vec{v})^{n+1} = 2H(\vec{v})^n - H(\vec{v})^{n-1}$$

- El término viscoso se calcula al tiempo t^{n+1} .
- El gradiente de presión se calcula al tiempo t^n .

Es decir resolvemos de la siguiente manera:

$$\frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v})^{n+1} = -\nabla P^n + \nu \Delta \vec{v}^{n+1}$$

Esta discretización implica resolver una ecuación de Helmholtz para cada componente de la velocidad:

$$\left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\Delta\right)\vec{v}^{n+1} = \frac{4\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}(H(\vec{v})^{n+1} + \nabla P^n)$$

y en consecuencia recurrir a una técnica apropiada.

4.2. Algoritmo general

Para calcular los campos de velocidad y de presión, se elegirá un método de proyección a dos pasos, cuya base es la descomposición de Hodge-Helmholtz:

1. Predicción del campo de velocidad no solenoidal:

$$\frac{3\vec{v}^* - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v})^{n+1} = -\nabla P^n + \nu\Delta\vec{v}^* \quad (1)$$

donde $\vec{H} = (H_u, H_v)$ con:

$$h_u = \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right)$$

$$h_v = \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right)$$

El campo \vec{v}^* no es a divergencia nula.

2. Resolución de la ecuación de Poisson sobre la presión:

Para obtener una ecuación para la presión, restamos las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{3\vec{v}^* - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v})^{n+1} = -\nabla P^n + \nu\Delta\vec{v}^*$$

$$\frac{3\vec{v}^{n+1} - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} + H(\vec{v})^{n+1} = -\nabla P^{n+1} + \nu\Delta\vec{v}^{n+1}$$

y le aplicamos la divergencia. Obtenemos una ecuación de Poisson sobre un auxiliar ϕ :

$$\Delta\phi = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}^*$$

con

$$\phi = (P^{n+1} - P^n) + \nu \nabla \cdot \vec{v}^*$$

Una vez conocido ϕ , calcularemos P^{n+1} . Es el primer paso de la proyección.

3. Corrección del campo de velocidad:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^* - \Delta t \nabla \phi$$

Es el segundo paso de la proyección.

4.3. Calculo del campo de velocidad predicho

La ecuación del paso (1) se resolverá por el método ADI (Alternating Direction Implicit). Para mantener un orden 2 en tiempo se debe modificar un poco la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes: la incognita es $\delta V = \vec{v}^* - \vec{v}^n$ y no \vec{v}^* . δV se obtiene por:

$$\begin{aligned} \frac{3\vec{v}^* - 4\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1}}{2\Delta t} &= -\nabla P^n + \nu\Delta\vec{v}^* - H(\vec{v})^{n+1} \\ &= -\nabla P^n + \nu\Delta\vec{v}^* - \nu\Delta\vec{v}^n + \nu\Delta\vec{v}^n - H(\vec{v})^{n+1} \\ &= -\nabla P^n + \nu\Delta(\vec{v}^* - \vec{v}^n) + \nu\Delta\vec{v}^n - H(\vec{v})^{n+1} \end{aligned}$$

El sistema inicial de Helmholtz se vuelve a:

$$\left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\Delta\right)\delta V = \frac{\bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}(H(\bar{v})^{n+1} + \nabla P^n - \Delta \bar{v}^n) \quad (2)$$

donde $(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\Delta)$ el operador de Helmholtz.

Aplicando el método ADI, aproximamos el operador de Helmholtz por:

$$\left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\Delta\right) \approx \left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Es decir resolvemos la ecuación (2) en dos pasos:

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\bar{\delta V} &= RHS^n \\ \left(I - \frac{2\nu\Delta t}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta V &= \bar{\delta V} \end{aligned}$$

donde RHS es el segundo miembro de la ecuación (2) (right hand side).

Cada paso se traduce por un sistema lineal a matriz tridiagonal.

4.4. Calculo del campo de presión

La ecuación de Poisson sobre el auxiliar ϕ se representa en 2D por un sistema pentadiagonal. Su resolución se hará por un algoritmo de Gauss-Seidel visto en el ramo de Computación científica o el algoritmo TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) que descompone en 2 sistemas tridiagonales el sistema pentadiagonal según cada dirección del espacio:

1. Se estima un predictor resolviendo un sistema tridiagonal en la dirección y :

$$\phi_P^I = a_N\phi_N^I + a_S\phi_S^I + (a_E\phi_{E,U} + a_W\phi_{W,U} + B)$$

donde $(a_E\phi_{E,U} + a_W\phi_{W,U} + B)$ es conocido.

2. Se corrige el predictor:

$$\phi_P^{II} = a_E\phi_E^{II} + a_W\phi_W^{II} + (a_N\phi_N^I + a_S\phi_S^I + B)$$

4.5. Condiciones iniciales

1. Validación del perfil de Poiseuille en un conducto recto:

- Se impondrá un campo de velocidad nulo en todo el dominio como condición inicial ($t = 0$).
- Se impondrá un campo de velocidad uniforme no nulo en todo el dominio como condición inicial ($t = 0$).
- Se impondrá un campo de velocidad idéntico al analítico en todo el dominio.

4.6. Cálculo del paso de tiempo

La condición de estabilidad será calculada de la siguiente manera:

$$\Delta t = \frac{CFL}{\max\left(\left|\frac{u_0}{\Delta x}\right| + \left|\frac{v_0}{\Delta y}\right|\right)}$$

con CFL número de Courant-Friedrich-Levy menor a 1.

5. Trabajos a realizar

- Escribir las ecuaciones en forma adimensional.
- Discretizar las ecuaciones necesarias a la resolución, en forma conservativa. Entregar la parte del informe que presenta las discretizaciones después de 2 semanas.
- Programar en Fortran 90 con módulos y Makefile (obligatorio), haciendo un programa muy claro, bien comentado para que cualquier persona pueda entenderlo.
- Programar las diferentes tareas necesarias a la resolución en diferentes subprogramas escritos en ficheros independientes. Se prohíbe poner argumentos de entrada-salida a las subrutinas.
- Asegurarse que cada subprograma funciona antes de correr el programa principal. Por ejemplo, validar el algoritmo Gauss-Seidel/TDMA con una matrix cualquiera, validar la resolución de la ecuación de Poisson.
- Redactar y entregar un informe que contiene:
 - Introducción: tema, método numérico, plan del documento.
 - Presentación de los dominios físico y numérico.
 - Presentación del modelo físico.
 - Explicación e justificación de la discretización (modelo numérico).
 - Presentación del algoritmo general explicando el programa.
 - Validación de su código completo, simulando en un canal recto de tamaño $L_x * L_y$, comparando con el perfil analítico de Poiseuille.
 - Presentación de los resultados de las simulaciones del flujo en la confluencia.
 - Estudio paramétrico para medir el efecto del paso espacial, del CFL, de la condición inicial, etc ...
 - Cualquier extensión a este trabajo: variación del esquema temporal de los flujos numéricos, comparación con un código tipo FLUENT o OPENFOAM, ...
 - Conclusión.
 - En los anexos se pondrá el texto de todos los programas.
 - Se adjuntará en un CD una copia digital del informe, las animaciones y los programas listos para correr.
- Duración: 5 semanas.