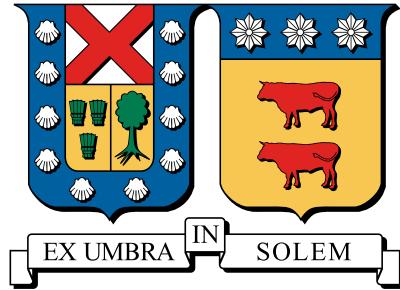


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**VALPARAÍSO - CHILE**



**IGNACIO ALBERTO APABLAZA BENAVIDES**

**TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL GRADO DE:**  
**MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MECÁNICA**  
**Y AL TITULO DE:**  
**INGENIERO CIVIL MECÁNICO**

Profesor Guia: Ph.D. Franco Perazzo Maggi

Profesor Correferente: Ph.D. Oscar Orellana Estay

Evaluador Externo: Ph.D. -

**MARZO - 2020**



TÍTULO DE LA TESIS:

**Desarrollo de una metodología sin malla de Formulación fuerte utilizando funciones  
de forma tipo MAXENT**

AUTOR:

**Ignacio Alberto Apablaza Benavides**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Grado  
de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica Federico  
Santa María.

Ph.D. Franco Perazzo Maggi .....  
.....

Ph.D. Oscar Orellana Estay .....  
.....

Ph.D. - .....  
.....

VALPARAÍSO, CHILE , MARZO - 2020



*Cita*

*Autor*

---

# **Agradecimientos**

( Agradecimientos )

---

# Abstract

( Abstract (resumen en ingles) )

**Keywords** *Meshfree Methods, Collocation Scheme, FWLS, Maximum Entropy*

---

# Resumen

( Resumen , abstract en español)

**Palabras Clave** *Métodos sin malla, Esquema de colocación, FWLS, Máxima Entropía*

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XII</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	1
1.3. Estructura del Documento . . . . .	2
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>3</b>
2.1. Simulación Multiescala y Zona Gris . . . . .	4
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
<b>4. Funcional de Máxima Entropía y su implementación como función de forma</b>	<b>6</b>
4.1. Aspectos Generales . . . . .	6
<b>5. Metodología de la Investigación</b>	<b>7</b>
5.1. Nube de aproximación . . . . .	7
5.1.1. Criterio de creación de nube . . . . .	7
5.1.2. Verificación de la calidad de la nube . . . . .	7
5.1.3. Generación de nube . . . . .	8
5.2. Pruebas numéricas en espacios unidimensionales y bidimensionales	9
5.2.1. Test 1D 1 . . . . .	9
5.2.2. Test 1D 2 . . . . .	9
5.2.3. Test 1D 3, ElasticBar . . . . .	9
5.2.4. Test 1D 4, RW . . . . .	9

5.2.5. Test 1D 5, AxialTruss . . . . .	9
5.2.6. Test 1D 6, Waveprop . . . . .	10
5.2.7. Test 1D 1, T1 . . . . .	10
<b>6. Resultados Obtenidos y Análisis</b>	<b>11</b>
<b>7. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>12</b>
<b>A. Cálculo de Resultados para Bolund y Comparación Ciega</b>	<b>13</b>
<b>B. Incorporación de Bases de Datos de Alta Resolución</b>	<b>18</b>
<b>C. Eficiencia Computacional de las Simulaciones</b>	<b>22</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>24</b>

---

# Índice de figuras

A.1. Perfil del viento no perturbado en el punto referencial M0 (ver Figura ??). En línea negra está el perfil entregado por los desarrolladores (para utilizar como condición de borde) y el resto corresponde a distintos modelos. La línea sólida roja corresponde a simulaciones LES. . . . .	14
A.2. Speedup medido y simulado a través de la sección transversal a $240^\circ$ . Arriba: valores para $z = 5$ [m]. Abajo: valores para $z = 2$ [m]. . . . .	14
A.3. Perfil de speedup medido y simulado en los distintos mástiles M1-M4. . . . .	15
A.4. $\Delta k$ medido y simulado a través de la sección transversal a $240^\circ$ . Arriba: valores para $z = 5$ [m]. Abajo: valores para $z = 2$ [m]. . . . .	16
A.5. Perfil de $\Delta k$ medido y simulado en los distintos mástiles M1-M4. . . . .	17
B.1. Orografía (MSNM) y uso de suelo (categoría USGS24) de alta resolución para cada uno de las mallas anidadas (d01-d07) en Høvsøre. . . . .	20
B.2. Orografía (MSNM) y uso de suelo (categoría USGS24) de alta resolución para cada uno de las mallas anidadas (d01-d08) en Bolund. . . . .	21

---

# Índice de tablas

C.1. Especificaciones técnicas de los recursos computacionales utilizados.	22
C.2. Tiempos de cálculo para cada experimento.	23

---

# Nomenclatura

## Símbolo      Descripción

$\phi$	Función de forma
$L$	Operador diferencia
$\sigma$	Esfuerzos mecánico
$\varepsilon$	Deformación unitaria
$u$	Función incógnita general
$w$	Función de peso (ponderación)
$h_{car}$	Distancia característica internodal
$np$	Número de puntos por nuve
$A$	Matriz de momentos
$B$	
$\vec{x}_c, \vec{x}$	Coordenadas puntos de colocación (Collocation points)
$\vec{x}_s$	Coordenadas puntos fuentes (Sources points)
$p(\vec{x})$	Base polinomial
$H$	Funcional de entropía
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange asociado al problema MaxEnt

**Subíndice Descripción**

**Superíndice Descripción**

---

# **Capítulo 1**

## **Introducción**

### **1.1. Hipótesis**

La función de forma obtenida mediante la optimización del función de entropía representa una mejor opción respecto a la metodología de mínimos cuadrados ponderados fijos.

### **1.2. Objetivos**

#### **Objetivo Principal**

- Implementar un código que permita utilizar distintas funciones de forma y comparar sus resultados

#### **Objetivos Secundarios**

- Hallar alternativas de soluciones prácticas que permita subsanar los problemas que presentan los esquemas de colocación directo, particularmente en la imposición de condiciones naturales o de Neumann

### **1.3. Estructura del Documento**

La estructura de esta tesis se organiza de la siguiente manera:

- Cap. 2: Se exponen los últimos avances de investigación asociados al uso de metodologías MeshFree en la resolución de problemas de interés de Ingeniería.
- Cap. 3: Sienta las bases conceptuales del presente trabajo, entre sus tópicos se encuentra la formulación MeshFree, los esquemas de colocación puntual. Se introduce la función de forma FWLS (Fixed Weighted Least Squares) exponiendo sus ventajas y desventajas que buscan ser subsanas por el presente método propuesto.
- Cap. 4: Se presenta formalmente el funcional de Máxima Entropía, su origine como estimador de la incertimbre y su implementación como función de forma.
- Cap. 5: Se explica el funcionamiento del código implementado. Se presentan soluciones a los problemas prácticos presentes en la implementación MeshFree de colocación, Se exponen ensayos numéricos con solución teórica conocida para evaluar el desempeño del programa computacional. Se implementan pruebas en 1D y en 2D donde se consideran tanto condiciones de borde esenciales o de Dirichlet como condiciones naturalez o de Neumann
- Cap. 6: Se presentan y analizan detalladamente los resultados mas relevantes.
- Cap. 7: Conclusiones, trabajo futuro y propuestas de mejora para el trabajo/método implementado.

---

## **Capítulo 2**

### **Estado del Arte**

( Explicar como se va a llevar a cabo el estado del arte )

## **2.1. Simulación Multiescala y Zona Gris**

( Escribir solo aquello )

---

# **Capítulo 3**

## **Marco Teórico**

( Aqui va el Marco Teórico )

---

# **Capítulo 4**

## **Funcional de Máxima Entropía y su implementación como función de forma**

### **4.1. Aspectos Generales**

( Hablar de lo que corresponga acá )

---

# Capítulo 5

## Metodología de la Investigación

( Hablar sobre la metodología, como crear nubes, verificar calidad, explicar los test )

### 5.1. Nube de aproximación

Triangulación de Delaunay

#### 5.1.1. Criterio de creación de nube

#### 5.1.2. Verificación de la calidad de la nube

Para verificar la calidad de la nube se implementan dos pruebas, la primera consiste en verificar el cumplimiento de las condiciones de consistencia, es decir, (\*\*\*\*\*)

$$\sum_{i=1}^{np} \phi_i - 1 = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \phi_i \vec{x}_i = \vec{x} \quad (5.1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{x}} = \vec{0} \quad (5.1.3)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \{\phi_i \vec{x}_i\}}{\partial \vec{x}} - \mathbf{Id} = \mathbf{0} \quad (5.1.4)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \mathbf{0} \quad (5.1.5)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial^2 \{\phi_i \vec{x}_i\}}{\partial \vec{x}^2} = \mathbb{M}_0 \quad (5.1.6)$$

donde  $\mathbb{M}_0$  es un tensor nulo de orden 3

Mediante una aproximación de espacios convexo se verifica la calidad de la aproximación, la función de forma debiera aproximar :

$$\sum_{i=1}^{np} f(\vec{x}_i) \phi_i(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 0 \quad (5.1.7)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \{f(\vec{x}_i) \phi_i(\vec{x})\}}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{0} \quad (5.1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial^2 \{f(\vec{x}_i) \phi_i(\vec{x})\}}{\partial \vec{x}^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial \vec{x}^2} = \mathbf{0} \quad (5.1.9)$$

Se utiliza la siguiente función como test:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \quad (5.1.10)$$

es decir,  $x^2$  y  $x^2 + y^2$  en 1D y 2D respectivamente.

### 5.1.3. Generación de nube

Entre las alternativas para generar nubes de aproximación se encuentran (citar a rainald). En este trabajo se utilizó el algoritmo propuesto por Rainald (citar libro), rutina que crea una colección de puntos discretos cercanos previamente triangulados (Triangulación de Delaunay).

## 5.2. Pruebas numéricas en espacios unidimensionales y bidimensionales

### 5.2.1. Test 1D 1

cuya solución exacta es

$$u = \sin(2\pi x) \quad (5.2.1)$$

$$du = 2\pi \cos(2\pi x) \quad (5.2.2)$$

### 5.2.2. Test 1D 2

cuya solución exacta es

$$u = 1 - x^3 + \exp(-100x^2) \quad du = -3x^2 - 200x \exp(-100x^2) \quad (5.2.3)$$

### 5.2.3. Test 1D 3, ElasticBar

cuya solución exacta es

$$u = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} \right) \quad du = \frac{(1-x^2)}{2} \quad (5.2.4)$$

### 5.2.4. Test 1D 4, RW

cuya solución exacta es

$$u = (1-x)(\arctan(a * (x - xo)) + \arctan(a * xo)) \quad du = (1-x) * \frac{a}{(1+a^2(x-xo)^2)} - \arctan(a * (x - xo)) \quad (5.2.5)$$

### 5.2.5. Test 1D 5, AxialTruss

La ecuación governante es

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + b(x) = 0 \quad (5.2.6)$$

y su término fuente es:

$$b(x) = -(2,3\pi)^2 \sin(2,3\pi x) \quad (5.2.7)$$

donde su extremo izquierdo ( $x = 0$ ) se encuentra fijo y su extremo derecho ( $x = 1$ ) se le aplica una fuerza sinusoidal a lo largo del eje  $x$ , es decir:

$$u|_{x=0} = 0 \quad (5.2.8)$$

$$f = A\sigma_x|_{x=1} = EA \frac{du}{dx}|_{x=1} = -2,3\pi \cos(2,3\pi x), \quad (5.2.9)$$

o bien,  $\frac{du}{dx}|_{x=1} = -2,3\pi \cos(2,3\pi x)$

cuya solución exacta es

$$u = -\sin(2,3\pi x) du = -2,3\pi \cos(2,3\pi x) \quad (5.2.10)$$

### 5.2.6. Test 1D 6, Waveprop

cuya solución exacta es

$$u = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sin(\sqrt{\lambda})} du = \sqrt{\lambda} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{(\sin(\sqrt{\lambda}))} \quad (5.2.11)$$

### 5.2.7. Test 1D 1, T1

---

## **Capítulo 6**

# **Resultados Obtenidos y Análisis**

( Hablar de los resultados )

---

## **Capítulo 7**

# **Conclusiones y Trabajo Futuro**

( Conclusiones, etc )

---

## Apéndice A

# Cálculo de Resultados para Bolund y Comparación Ciega

A modo de tener resultados comparables para el ejercicio de comparación ciega organizado por los desarrolladores del experimento de Bolund (?), se introducen ciertas métricas para la velocidad y para la energía cinética turbulenta.

Para el caso de la velocidad, se adimensionaliza esta de la siguiente forma:

$$\Delta S_s = \frac{\bar{s} - \bar{s}_0}{\bar{s}_0}, \quad (\text{A.0.1})$$

donde  $\Delta S_s$  corresponde al *Speedup* simulado, calculado en función de  $\bar{s}_0$  que es un valor de referencia para la velocidad ubicado en un punto no perturbado por el terreno (en el experimento de Bolund se utiliza el valor en el mástil M0). Para los resultados presentados en esta tesis los valores de referencia se toman en las coordenadas (55.70313, 12.0970) que caen dentro del dominio d08 de simulación.

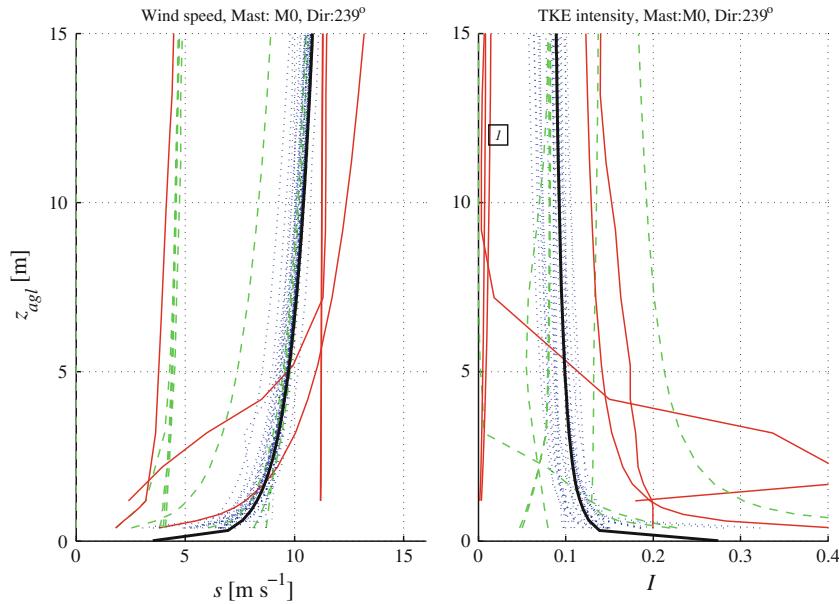
El valor de  $\bar{s}_0$ , operativamente, se toma como el promedio temporal entre las 12:00 y 15:00 horas y se calcula para cada nivel vertical del modelo.

Con respecto a la energía cinética turbulenta, esta se adimensionaliza como:

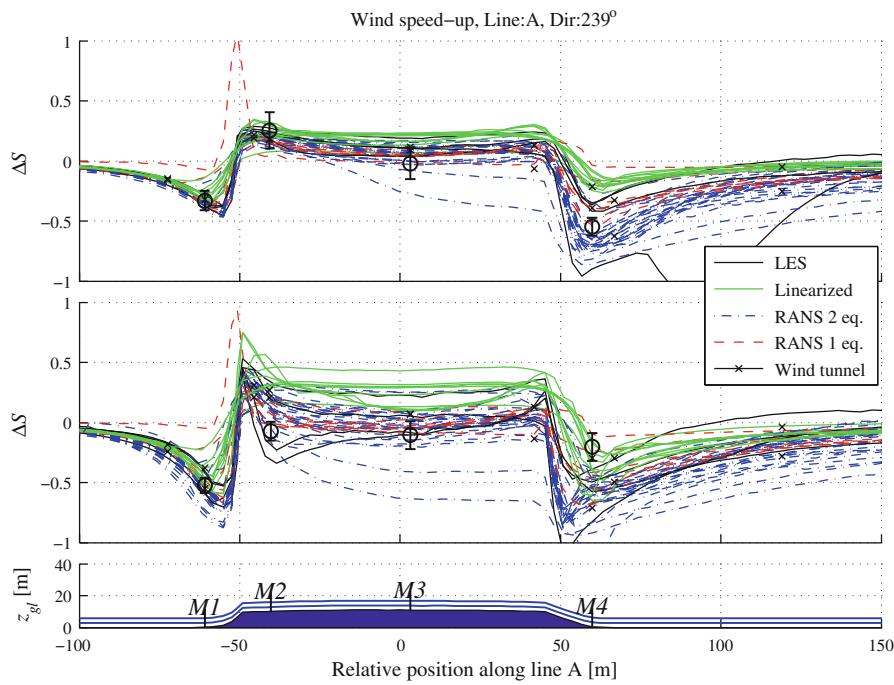
$$\Delta k_s = \frac{\bar{k}}{\bar{s}_0^2} - \frac{\bar{k}_0}{\bar{s}_0^2}.$$

Análogamente al caso anterior,  $\bar{k}_0$  es un valor de referencia para la energía cinética turbulenta en el punto del dominio donde hay flujo no perturbado.

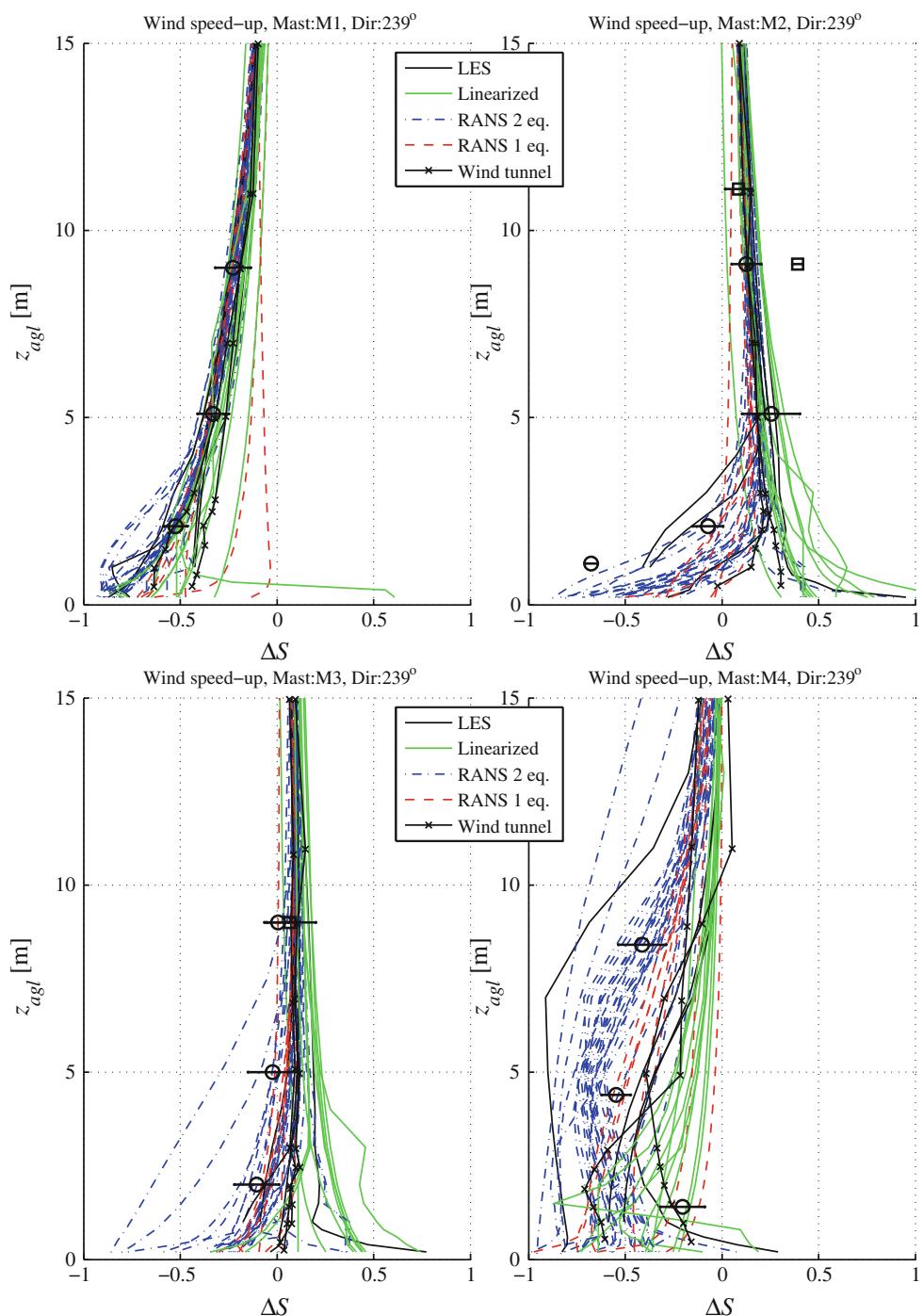
De manera referencial, los desarrolladores presentan los siguientes resultados para su comparación ciega de modelos numéricos:



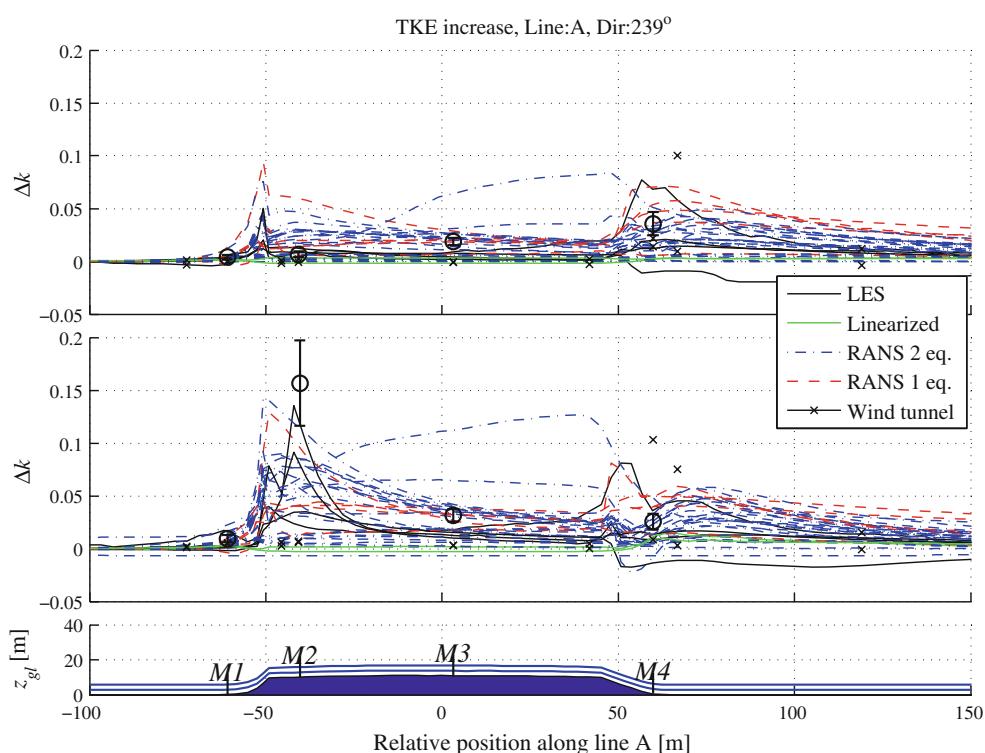
**Figura A.1:** Perfil del viento no perturbado en el punto referencial M0 (ver Figura ??). En línea negra está el perfil entregado por los desarrolladores (para utilizar como condición de borde) y el resto corresponde a distintos modelos. La línea sólida roja corresponde a simulaciones LES.



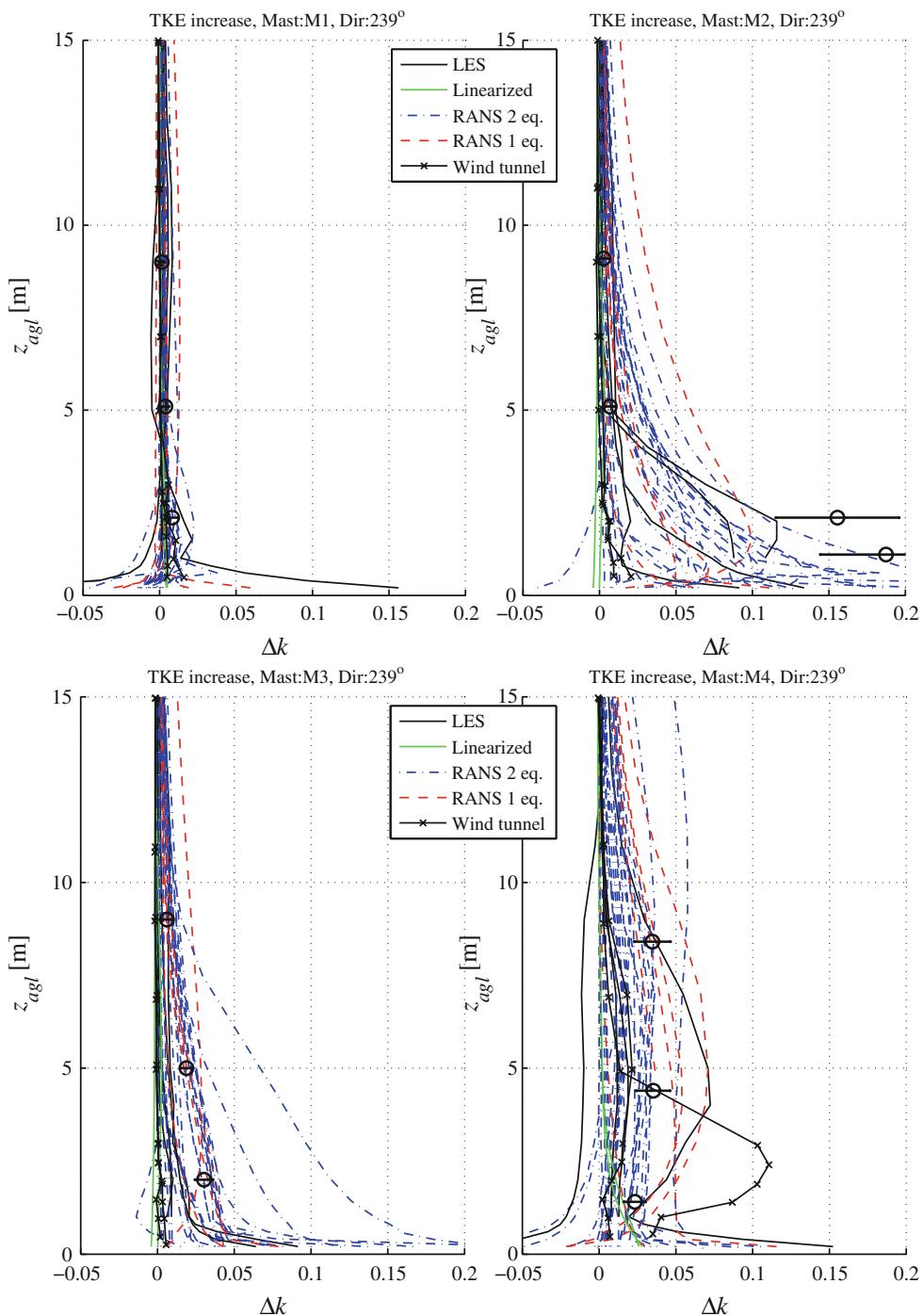
**Figura A.2:** Speedup medido y simulado a través de la sección transversal a  $240^\circ$ . Arriba: valores para  $z = 5$  [m]. Abajo: valores para  $z = 2$  [m].



**Figura A.3:** Perfil de speedup medido y simulado en los distintos mástiles M1-M4.



**Figura A.4:**  $\Delta k$  medido y simulado a través de la sección transversal a  $240^\circ$ . Arriba: valores para  $z = 5$  [m]. Abajo: valores para  $z = 2$  [m].



**Figura A.5:** Perfil de  $\Delta k$  medido y simulado en los distintos mástiles M1-M4.

---

## Apéndice B

# Incorporación de Bases de Datos de Alta Resolución

La utilización del modelo WRF con dominios anidados hasta resoluciones del orden de los metros, exige la implementación de bases de datos no nativas del software para la información estática (orografía y uso de suelo) en los dominios.

En este anexo se presenta el mapeo de las bases de datos descritas en las Tablas ?? y ??, y una breve explicación acerca de cómo se manejaron las bases de datos.

Con respecto a la manipulación de los datos, esta se realizó a través un software GIS (*Geographic Information System*) y la librería GDAL para la conversión de la extensión de los archivos. En particular, se utilizó el programa QGIS que es gratuito y de código libre. Los trabajos hechos incluyen:

- Conversión de los datos Corine (CLC12) al formato de clasificación USGS24 y su correspondiente transformación a formato binario.
- Transformación del datúm de la base de datos orográfica entregada por la campaña de medición de Bolund a WGS84.
- Creación de la base de datos para el uso de suelo en Bolund según lo declarado por la campaña (?).
- Refinamiento de los datos CLC12 (hecho de manera manual) para ajustar al contorno de la colina de Bolund.
- Ajuste de alturas de la base de datos orográfica de Bolund para su correcta implementación en WPS (fijar la altura de agua en  $z = 0$ ).
- Transformación de todos los datos a formato binario para la lectura del WPS.

A continuación se presentan algunos ejemplos de códigos simples desarrollados para las tareas descritas.

Código en QGIS para la transformación de CLC12 a USGS24 según ?:

```
1 ("test@1" <=11)*1+("test@1"=12)*2+("test@1"=13)*3+("test@1"=14)*3+
2 ("test@1"=15)*6+("test@1"=16)*6+("test@1"=17)*6+("test@1"=18)*2+
3 ("test@1"=19)*6+("test@1"=20)*6+("test@1"=21)*6+("test@1"=22)*6+
4 ("test@1"=23)*11+("test@1"=24)*14+("test@1"=25)*15+("test@1"=26)*7+
5 ("test@1"= 27)*9+("test@1"=28)*9+("test@1"=29)*9+("test@1"=30)*19+
```

```

6   ("test@1"=31)*19+("test@1"=32)*19+("test@1"=33)*19+("test@1"=34)*24+
7   ("test@1"=35)*17+("test@1"=36)*17+("test@1"=37)*17+("test@1"=38)*17+
8   ("test@1"=39)*17+("test@1"=40)*16+("test@1"=41)*16+("test@1"=42)*16+
9   ("test@1"=43)*16+("test@1">>=44)*16

```

Código GDAL para la generación de uso de suelo en Bolund a partir de su orografía:

```

1 | gdal_calc.py -A bolund_rough_displaced_wgs84.tif --outfile=result.tif
2 | --calc="16*(A<0.01)+2*(A>0.01)"

```

Código GDAL para la conversión del uso de suelo de Bolund de GeoTIFF a binario:

```

1 | gdal_translate -of ENVI -ot Int16 result.tif BOLUND_LANDUSE.bil

```

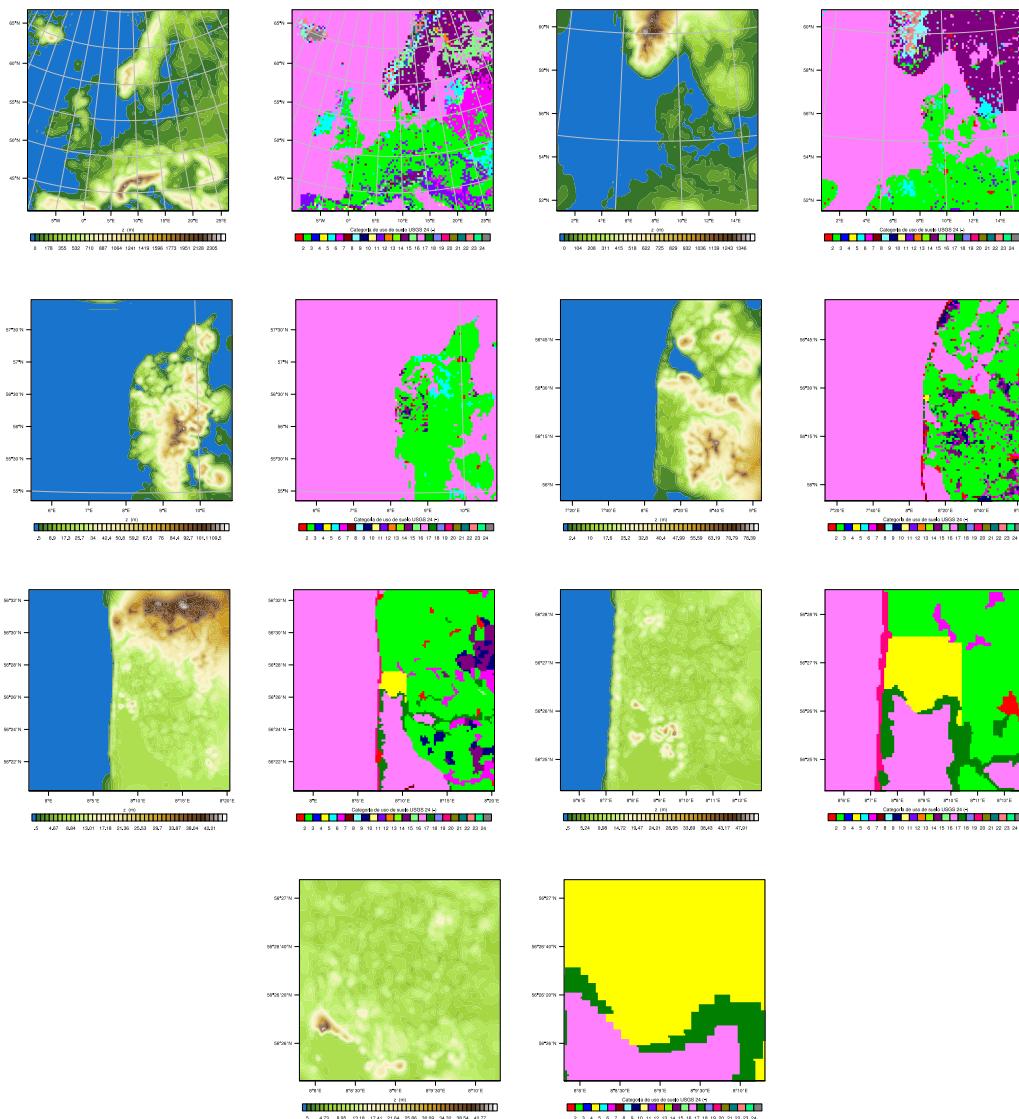
Código GDAL para corregir los valores indefinidos generados por la rotación del datum:

```

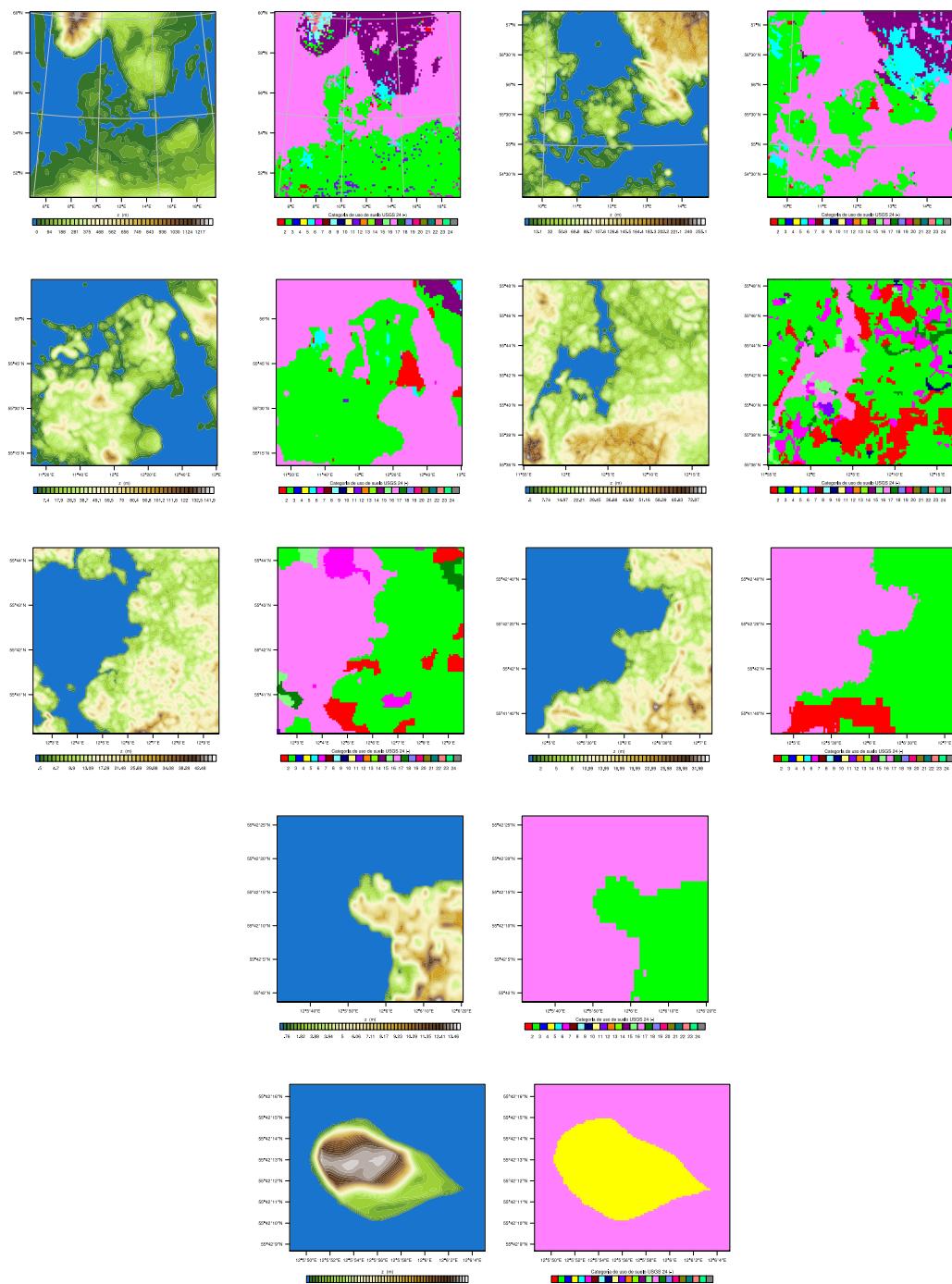
1 | gdal_calc.py -A BOLUND_LANDUSE.bil --outfile=BOLUND_LANDUSE2.bil
2 | --calc="(A==32767)*16+(A<32767)*A"

```

Finalmente las bases de datos introducidas de orografía y uso de suelo se ven en el modelo como las Figuras B.1 y B.2. Notar que el color amarillo para la categoría de uso de suelo significa la incorporación manual del  $z_0$  según la información presente en las publicaciones correspondientes para cada dominio.



**Figura B.1:** Orografía (MSNM) y uso de suelo (categoría USGS24) de alta resolución para cada uno de las mallas anidadas (d01-d07) en Høvsøre.



**Figura B.2:** Orografía (MSNM) y uso de suelo (categoría USGS24) de alta resolución para cada uno de las mallas anidadas (d01-d08) en Bolund.

---

## Apéndice C

# Eficiencia Computacional de las Simulaciones

Las simulaciones se llevaron a cabo en servidores configurados especialmente para ejecutar el código WRF de manera paralela haciendo uso de todos los núcleos y recursos disponibles. En específico se utilizaron dos servidores distintos: S1 es el servidor utilizado para correr las simulaciones correspondientes al caso I de terreno plano en Høvsøre y S2 es el servidor utilizado para correr el caso II de terreno complejo en Bolund. Otros recursos computacionales adicionales fueron utilizados también para llevar a cabo distintos análisis de sensibilidad para diversos parámetros y otras pruebas varias las cuales no se detallan en este documento. Las especificaciones técnicas de S1 y S2 se presentan en la Tabla C.1.

**Tabla C.1:** Especificaciones técnicas de los recursos computacionales utilizados.

Servidor	S1	S2
CPU	Intel Xeon CPU E5-2609 v2@2.50Ghz	Intel Xeon Silver 4110 CPU @ 2.10GHz
# Cores	8	32
Arquitectura	x86_64	x86_64
RAM	55Gb	126Gb
HDD	1Tb	2Tb
OS	Scientific Linux 7.2	Debian 9

Para cada servidor se registraron los tiempos de pared a través de un bot de *Telegram* el cual registraba de manera automática e inmediata la fecha y hora a la cual cada simulación comenzaba o terminaba. Los registros de estos tiempos se resumen en la Tabla C.2.

**Tabla C.2:** Tiempos de cálculo para cada experimento.

Caso	Fecha Inicio	Fecha Término	$T_w$ [h]	$\Delta t$ [h]	Incremento
Høvsøre s/DA	25/02/2019 17:30	04/03/2019 01:28	151,97	–	–
Høvsore c/ DA	13/03/2019 23:13	19/03/2019 00:49	121,60	-30,37	-19.98 %
Bolund s/DA	12/02/2019 22:22	20/03/2019 08:35	850,22	–	–
Bolund c/ DA	25/04/2019 22:58	24/05/2019 09:44 <sup>1</sup>	662,02	-188,20	-22,14 %

Acá  $T_w$  es el tiempo de cálculo efectivo (tiempo de pared) y  $\Delta t$  corresponde al aumento en este debido a la incorporación del proceso de asimilación de datos. El incremento se calcula como  $\Delta t/T_{w0}$ , donde el subíndice 0 indica la simulación sin asimilación de datos.

Como se puede apreciar en la Tabla C.2, el proceso de asimilación de datos presenta mejoras significativas en términos del tiempo de cálculo, lo que es esperanzador para una implementación efectiva y efectiva de la solución propuesta.

---

<sup>1</sup>Por motivos externos la simulación estuvo detenida desde el 02/05/2019 14:43 hasta el 03/05/2019 12:28, por lo cual se considera esta detención en el cálculo.

---

# Bibliografía

- de Boor C (1974) Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, 1st edn. Academic Press
- Boyd S, Vandenberghe L (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press
- Jaynes ET (1957) Information theory and statistical mechanics. *The Physical Review* 106(4):620–630
- Liu G, Gu Y (2005) An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. Springer
- Liu GR (2002) Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Methods. CRC Press
- Park SH, Kwon KC, Youn SK (2003) A posteriori error estimates and an adaptive scheme of least-squares meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58(8):1213–1250
- Perazzo F, Marchant F (2016) Análisis comparativo entre funciones de forma maxent y wea weaweaweaseweasawe de mínimos cuadrados ponderados en un método sin malla de colocación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 33(3-4):290–298
- Shannon C (1948) A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* 27(3):379–423