Facultad de Ingeniería y Tecnología
Departamento de Ciencias Exactas y Naturales
Cálculo Aplicado
Comparación de Métodos de Integración Numérica

Introducción

Las integrales son muy útiles en la teoría, permitiendo representar la suma de cantidades continuas. Permiten calcular el flujo de campo eléctrico sobre una superficie, el centro de masa de los cuerpos, el trabajo de una fuerza o la longitud de una curva.

Sin embargo, en sistemas digitales es imposible trabajar en un espacio continuo. Lo bueno de que la integral se defina a partir de un límite, es que tomando una partición suficientemente fina podemos aproximar su valor (nunca será exacto, pero podemos acercarnos). Utilizaremos estas ideas para explorar empíricamente la teoría, calculando aproximaciones para π mediante integración numérica. Utilizaremos π dado que es una constante conocida y definida en python con suficiente precisión.

Es de conocimiento común que el área de un círculo de radio r puede calcularse como $A = r^2\pi$. En un círculo de radio $r = 1$, tenemos que $A = \pi$. Cómo un círculo viola la definición de función, tomaremos la mitad superior (por conveniencia). Tenemos entonces la siguiente integral a verificar:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = \pi \tag{1}$$

1. Convergencia de sumas inferior y superior

Como primer ejercicio, se busca verificar que $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ es integrable de Riemann.

1. Implemente en python una función que tome la cantidad de puntos de la partición (equiespaciada) en $[-1, 1]$ y calcule la suma inferior de la función. Repita para la suma superior.

2. Genere tablas comparativas de ambas sumas variando el tamaño de la partición. En esta tabla debe incluir los resultados de la aproximación y el residuo (la diferencia entre la aproximación y el valor de π) para cada suma. Una tabla debe variar el tamaño de N de 10 a 100 variando de a 10, la segunda de 100 a 1000 variando de a 100 y la tercera de 1000 a 10000 variando de a 1000.

3. Grafique los valores de las sumas con respecto al N utilizado. La gráfica debe incluir ambas curvas (suma superior y suma inferior) y el valor de π teórico.

4. ¿Qué se observa en el comportamiento de las sumas? ¿Es integrable de Riemann?

NOTA: Se recomienda graficar no sólamente todos los puntos de las tablas en una única gráfica, sino también jugar con los rangos de valores para observar mejor el comportamiento.

2. Influencia de la partición

Ahora exploremos distintas particiones de la función. Para esta sección es indiferente el uso de sumas superiores o inferiores.

1. Implemente en python funciones que tomen la cantidad de puntos de la partición de $[-1, 1]$ y generen una de las 3 siguientes particiones:
   - Equiespaciada
   - Partición aleatoria uniforme
   - Partición de la forma $x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$ para N tamaño de la partición
2. Genere tablas comparativas de las 3 particiones variando el tamaño de la partición. En esta tabla debe incluir los resultados de la aproximación y el residuo (la diferencia entre la aproximación y el valor de π) para cada tipo. Una tabla debe variar el tamaño de N de 10 a 100 variando de a 10, la segunda de 100 a 1000 variando de a 100 y la tercera de 1000 a 10000 variando de a 1000.
3. Grafique los valores de las 3 sumas para las distintas particiones. La gráfica debe incluir las 3 curvas y el valor de π teórico.
4. ¿Qué conclusiones puede tomar? ¿Hay particiones mejores que otras? ¿Qué partición dio el mejor resultado? ¿Tiene sentido? ¿Afecta la geometría de la función a este resultado? Grafique la función f y los rectángulos de la aproximación para cada partición, con $N = 100$.

NOTA: Se recomienda graficar no sólamente todos los puntos de las tablas en una única gráfica, sino también jugar con los rangos de valores para observar mejor el comportamiento.

3. Comparación de métodos

En esta sección exploraremos distintos métodos de integración numérica sobre una misma partición equiespaciada. Consideraremos 3 métodos numéricos distintos: rectángulos, trapecio y valor medio.

1. Implemente en python funciones que tomen el número de puntos de una partición equiespaciada en $[-1, 1]$ y retornen la suma según los siguientes métodos:
   - Rectángulos (el método usual)
   - Trapecio: en vez de áreas de rectángulos se suman áreas de trapecios definidos por los extremos de cada subintervalo.
   - Punto medio: evalúa la función en el centro de cada subíntervalo.
2. Genere tablas comparativas de los 3 métodos variando el tamaño de la partición. En esta tabla debe incluir los resultados de la aproximación y el residuo (la diferencia entre la aproximación y el valor de π). Una tabla debe variar el tamaño de N de 10 a 100 variando de a 10, la segunda de 100 a 1000 variando de a 100 y la tercera de 1000 a 10000 variando de a 1000.
3. Grafique los valores de las 3 aproximaciones para distintos tamaños de N. La gráfica debe incluir las 3 curvas y el valor de π teórico.
4. ¿Qué método dio mejores resultados? ¿Hay métodos mejores que otros? Justifique geométricamente por qué pasa esto.

NOTA: Se recomienda graficar no sólamente todos los puntos de las tablas en una única gráfica, sino también jugar con los rangos de valores para observar mejor el comportamiento.

4. Bonus: Integración Montecarlo

Los métodos de integración del punto anterior son modificaciones directas de la teoría inicial. Aún así, existen muchos otros algoritmos para resolver este problema. Tomemos ahora un enfoque probabilístico.

1. Investigue qué es el método montecarlo.
2. Calcule el valor de la integral de f utilizando 2 generadores de números aleatorios entre 0 y 1 para distintas cantidades de puntos, siguiendo la misma lógica que los ejercicios anteriores.
3. Grafique los resultados obtenidos para el valor de π por este método.
4. ¿Es mejor o peor que los otros métodos? ¿Qué otras aplicaciones le encuentra? ¿Qué ventaja tiene otros métodos? ¿Desventajas?