Primer Parcial Resuelto - Mayo 2019

Ejercicios:

Ejercicio 1

Sean $\mathbb{L}: (x,y,z) = \lambda(2,4,-6)+(1,4,0)$ y $\Pi: -x-2y+3z=5$ una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(a) Decidir si $\mathbb{L}$ es paralela al plano Π o es perpendicular al plano Π o ninguna de estas opciones. Luego determinar la intersección $\mathbb{L}\cap\Pi$.

(b) Hallar la ecuación implícita de otro plano que pase por el origen de coordenadas y contenga a la recta $\mathbb{L}$.

Ejercicio 2

Considerar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ y + (k+1)z = k \\ kx + 3y + z = k+2 \end{cases}$$

(a) Si $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con $\det(B) = 2$, calcular $k \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A^2B + AB$ sea inversible.

(b) Hallar, si existen, valores $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones, mostrando en tal caso el conjunto solución.

Ejercicio 3

Sean, en $\mathbb{R}^5$, los siguientes subespacios:

$$\mathbb{S} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 - x_2 + x_4 = 0; x_3 - 2x_4 = 0; x_5 = 0\} \quad \text{y}$$
$$\mathbb{T} = gen\{(1,2,1,0,0); (0,1,-1,-2,0)\}.$$

(a) Mostrar que $(3,5,4,2,0) \in T \cap S$.

(b) Hallar una base de $S+T$.

Resolución

Ejercicio 1

a) Para ver si $\mathbb{L}$ es perpendicular o paralela al plano Π debemos analizar el vector director de la recta y el vector normal al plano. Si el vector director es paralelo a la normal entonces la recta y el plano son perpendiculares. Si son perpendiculares, entonces son paralelos.

La dirección de la recta es $(2,4,-6)$ y la normal al plano es $(-1,-2,3)$. Como $(2,4,-6) = -2.(-1,-2,3)$ la recta y el plano son perpendiculares. Hallemos el punto de intersección.

La ecuación de $\mathbb{L}$ es $(x,y,z) = \lambda(2,4,-6) + (1,4,0)$; por lo tanto los puntos de la recta son de la forma $(x,y,z) = (2\lambda+1, 4\lambda+4, -6\lambda)$. Como el punto de intersección es tanto un punto de la recta como un punto del plano debe verificar la ecuación de Π, es decir:

$$\begin{gathered}
-(2\lambda+1)-2(4\lambda+4)+3(-6\lambda) = 5 \\
-2\lambda-1-8\lambda-8-18\lambda = 5 \\
-28\lambda = 14 \\
\lambda = -\tfrac{1}{2}
\end{gathered}$$

Reemplazando λ en la ecuación de la recta obtenemos el punto de intersección.
Luego $\mathbb{L} \cap \Pi = (0,2,3)$.

b) Busquemos ahora el plano pedido. Para dar una ecuación implícita necesitamos la normal al plano. Para eso necesitamos dos direcciones. Una dirección es la del vector director de la recta, pues la misma esta contenida en el plano. La otra dirección la obtendremos con un punto de la recta y un punto del plano que no pertenezca a la recta, por ejemplo el origen.

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{N} = (2,4,-6) \times [(1,4,0)-(0,0,0)] \\
\overrightarrow{N} = (2,4,-6) \times (1,4,0) \\
\overrightarrow{N} = (24,-6,4)
\end{gathered}$$

Luego una ecuación implícita del plano es

$$\begin{gathered}
(24,-6,4) \times [(x,y,z)-(0,0,0)] = 0 \\
24x-6y+4z = 0
\end{gathered}$$

Ejercicio 2

a) A^2B-AB es inversible si y solo si $\det(A^2B-AB) \neq 0$. Pero como $A^2B-AB = A(A-I)B$, entonces $\det(A^2B-AB) = \det(A(A-I)B)$; esto es $\det(A)\det(A-I)\det(B) = 2\det(A)\det(A-I)$.
Por lo tanto, A^2B-AB será inversible para aquellos valores de k que verifiquen que $\det(A) \neq 0; \det(A-I) \neq 0$.

Como A es la matriz de coeficientes del sistema, tenemos que $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ k & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Luego

$$A - I = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ k & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \\ k & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculemos $\det(A)$ desarrollando por la segunda fila

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} - (k+1)\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} = -2k.(k+1)$$

Calculemos $\det(A-I)$ desarrollando por la segunda fila

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \\ k & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(k+1)\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} = -(k+1)(2k-3) = -2(k+1)(k-\tfrac{3}{2})$$

Por lo tanto, la matriz $A^2B - AB$ es inversible si y solo si $-2k(k+1) \neq 0$ y $-2(k+1)(k+\frac{3}{2}) \neq 0$; es decir si $k \in \mathbb{R} - \{0; -1; \frac{3}{2}\}$.

b) Para que un sistema de ecuaciones dado tenga solución única, su matriz asociada debe ser inversible. Si la matriz asociada al sistema no es inversible, entonces el sistema tendrá infinitas soluciones o ninguna. Por lo visto en el ítem anterior, para $k = 0$ y para $k = -1$ la matriz A tiene determinante nulo, es decir, no es inversible. Para ver si tiene infinitas soluciones o ninguna debemos resolver el sistema para cada valor de k.

Para $k = 0$ la matriz ampliada del sistema queda $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Triangulemos el sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_1 \mapsto F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_1 \mapsto F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

De la tercer fila obtenemos la ecuación $2y = 2$; es decir $y = 1$. Reemplazan en la ecuación que se obtiene de la primera fila, nos queda $1 + z = 0$, es decir $z = -1$.

Luego las soluciones son de la forma $(x, 1, -1)$; esto es $x(1,0,0) + (0,1,-1)$.

Por lo tanto para $k = 0$ las infinitas soluciones del sistema son los puntos de la recta de ecuación

$$(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + (0,1,-1)$$

Para $k=-1$ la matriz ampliada del sistema queda $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Triangulemos el sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_1\mapsto F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-2F_2\mapsto F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

De la tercer fila obtenemos la ecuación $0=4$. Este absurdo nos indica que ele sistema es incompatible y por lo tanto, no tiene solución.

Ejercicio 3

a) Queremos decidir si un elemento está o no en la intersección de dos subespacios. Tenemos al menos dos estrategias posibles:

- Calcular la intersección y ver si el elemento está en esa intersección
- Determinar si el elemento pertenece a cada subespacio y por lo tanto podremos concluir que pertenece a la intersección.

Optaremos por la segunda opción ya que es realmente más económica en términos de cálculos. Notar que $v=(3,5,4,2,0)\in T$ si y sólo si v es combinación lineal de los dos vectores que generan a T. Planteamos entonces:

$$\begin{aligned} (3,5,4,2,0) &= a(1,2,1,0,0)+b(0,1,-1,-2,0) \\ (3,5,4,2,0) &= (a,2a+b,a-b,-2b,0) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, igualando coordenadas $\begin{cases} \boxed{3=a} \\ 5=2a+b \\ 4=a-b \\ 2=-2b \Longrightarrow \boxed{b=-1} \\ 0=0 \end{cases}$.

Como en dos ecuaciones encontramos dos valores para a y b respectivamente, verificando que se cumple $5=2a+b=2\cdot 3+(-1)$ y $4=a-b=3-(-1)$, obtenemos así que estas son las coordenadas de v es la base del subespacio. Por lo tanto, $v\in T$. Ahora veamos que $v=(3,5,4,2,0)\in S$. Esto ocurre si y sólo si v verifica las ecuaciones que describen a S. Comprobamos fácilmente reemplazando $x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=4,\ x_4=2,\ x_5=0$:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \Longrightarrow 3-5+2=0 \\ x_3-2x_4=0 \Longrightarrow 4-2\cdot 2=0 \\ x_5=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, v pertenece a S. Y como también pertenece a T, podemos decir que se encuentra en la intersección de S y T.

b) Para hallar la suma de dos subespacios es necesario primero tener generadores de los subespacios que vamos a sumar. Busquemos una base de S, subespacio que aparece por sus ecuaciones. Esto se obtiene resolviendo el sistema homogéneo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Notar que al estar triangulado, podemos despejar sin problemas la solución:

$$x_5 = 0$$
$$x_3 - 2x_4 = 0 \Longrightarrow x_3 = 2x_4 \qquad x_4 \in \mathbb{R}$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 + x_4 \qquad x_2 \in \mathbb{R}$$

Y entonces:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_2 - x_4, x_2, 2x_4, x_4, 0) = x_2(1,1,0,0,0) + x_4(-1,0,2,1,0)$$

La base de S resulta $B_S = \{(1,1,0,0,0);\,(-1,0,2,1,0)\}$. Entonces, unificando generadores, obtenemos:

$$S + T = gen\{(1,2,1,0,0);\,(0,1,-1,-2,0);\,(1,1,0,0,0);\,(-1,0,2,1,0)\}$$

Para hallar una base de este subespacio, iremos haciendo operaciones entre los vectores puestos en fila y descartaremos según ese proceso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4+F_1\to F_4]{F_3-F_1\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-2F_2\to F_4]{F_3+F_2\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{5F_3+2F_4\to F_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que el rango de la matriz resulta ser 3 o lo que es lo mismo decir que la dimensión de la suma es 3. Con este proceso y teniendo que NO intercambiamos filas de lugar, podemos decir que el último vector es combinación lineal de los demás vectores (pues al combinarlo da el vector nulo), y por lo tanto, es conveniente descartar este vector. Los primeros tres en el proceso (sin intercambiar lugar) desembocan en una matriz triangulada y escalonada cuyas filas son LI, y por lo tanto, los tres primeros vectores forman un conjunto LI de generadores de la suma. El mismo cálculo anterior (eliminando la última fila) asegura la veracidad de esta afirmación.

Luego obtuvimos una base de la suma de subespacios:

$$B_{S+T} = \{(1,2,1,0,0);\,(0,1,-1,-2,0);\,(1,1,0,0,0)\}$$