Práctica 4 - Matrices y determinantes.

Ejercicio 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, realizar las siguientes operaciones:

a) $2A + 3B$, b) $A.B$, c) $B.A$, d) $C.D$, e) $D.C$, f) $3C - D^t$.

Ejercicio 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular: a)$A^2 = A.A$, b)$A^3$, c)$A^4$, d)$A^5$, e)$A^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 3. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles, exhibir la inversa cuando exista.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Dado el sistema $S : \begin{cases} \phantom{2x -{}} 2y + 3z = b_1 \\ 2x - y + 2z = b_2 \\ x - y \phantom{{}+ 2z} = b_3 \end{cases}$ resolverlo para los siguientes casos:

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$. (Sugerencia: utilizar la forma matricial del sistema.)

Ejercicio 5. Calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, (d) $\begin{vmatrix} 3 & & \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, (e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$,

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -3 & -6 \\ 12 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$, (g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, (h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) $\det(AB)$, (b) $\det(A + B)$, (c) $\det(A^{10})$ y (d) $\det(A^5 B - A^5)$.

Ejercicio 7. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular: (a) $\det(2A)$, (b) $\det((4A)^{-1})$, (c) $\det(2A^{-1})$.

Ejercicio 8. Determinar los valores de k para los cuales A es una matriz inversible si:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Encontrar en cada subítem todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema dado tiene solución única:

(a) $\begin{cases} (k^2-9)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 2y = 3 \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ (2k-2)x + 2y + z = 0 \\ (k+2)x + (k-3)y + 2z = 0 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} 3x - y + kz = 2 \\ x + 3ky - z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

Ejercicio 10. Encontrar todos los valores de a para los cuales el siguiente sistema es compatible

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = a^2 \end{cases}.$$

Ejercicio 11. Dado el sistema

$$\begin{cases} x + \alpha y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}.$$

(a) Hallar α para que el sistema NO sea compatible determinado.

(b) Estudiar el sistema obtenido para el valor de α hallado en (a) y, si existen, hallar todas las soluciones.

Ejercicio 12. Determinar los valores de k para los cuales el sistema $A \cdot X = b$ tiene
i) ninguna solución, ii) solución única, iii) infinitas soluciones (en este caso resolver el sistema y dar la solución en forma paramétrica).

(a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ k^2+k-1 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & k^2+8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k+14 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k+1 \\ k & k^2+2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 13.

(a) Hallar α para que la recta $\mathbb{L}$ sea paralela al plano Π, donde

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + 3y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \Pi : \alpha x - 2y + 2z = \beta.$$

(b) Calcular β para que sea $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L}$.

Ejercicio 14. Sea Π el plano determinado por $\Pi : x - y + 2z = 3$ y $\mathbb{L}$ la recta de ecuaciones implícitas

$$\mathbb{L} : \begin{cases} 2\,x + (\alpha-2)\,y + 5\,z = 8 \\ 5\,x + (\alpha-5)\,y + (\alpha^2+10)\,z = \alpha+16 \end{cases}.$$

(a) Hallar **todos** los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \cap \Pi$ sea un punto.

(b) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

Ejercicio 15. Dados los planos determinados por las ecuaciones

$$\Pi_1 : x + 2y + z = 3, \qquad \Pi_2 : 2x + 3y + 2z = 2 \quad \text{y} \quad \Pi_3 : x + 4y + (k^2-8)z = k + 14$$

determinar todos los valores de k para los que la intersección de los tres planos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ resulte ser una recta. Para cada uno de los valores de k hallados, dar la ecuación paramétrica de la recta correspondiente.

Ejercicios Adicionales a la Práctica 4

Ejercicio 16. ¿Qué puede decir de los tamaños de las matrices A,B y C si se sabe que la operación matricial $AB(C + A)C$ está bien definida?

Ejercicio 17. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente:
a) Si A y B son matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles entonces $A \cdot B$ es inversible.
b) Si A y B son matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles entonces $A + B$ es inversible.

Ejercicio 18. Sean $\mathbb{L}$ la recta determinada por la ecuación paramétrica $\mathbb{L} : X = \beta\ (k^2 + 1, k, k+7)$ (de parámetro $\beta \in \mathbb{R}$) y el plano $\Pi : x + 2y - 3z = 2$. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

Ejercicio 19. Investigar cómo debe ser una matriz en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ para que conmute con todas las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 20. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Dar una justificación en caso de que sea cierta o exhibir un contraejemplo en caso de que sea falsa.

a) Si A es una matriz triangular superior de 3×3, entonces $\det(A)$ es igual al producto de los elementos de su diagonal.

b) $\det(\alpha.A) = \alpha.\det(A)$ para toda matriz cuadrada A y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Sea A una matriz de 3×3 tal que una de sus filas es una combinación lineal de las otras dos. Entonces $\det(A) = 0$.

d) Si A es una matriz, entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

Ejercicio 21. Dada la recta $\mathbb{L}$ definida por las ecuaciones implícitas

$$\mathbb{L} : \begin{cases} ax - y + z = 1 \\ x + y + 3az = 1 \end{cases}$$

y el plano de ecuación paramétrica $\Pi : \lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,1) + (2,1,1)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \parallel \Pi$ y $\mathbb{L} \not\subset \Pi$.

Ejercicio 22. Justificar las siguientes afirmaciones para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

i) Si $A^2 = \mathbb{O} \implies I - A$ es inversible.

ii) Si $A^2 + 2A + I = \mathbb{O} \implies A$ es inversible.

Ejercicio 23. Dados los planos $\pi_1 : x+2y-z = 4$, $\pi_2 : 2x-y+3z = -2$ y $\pi_3 : 3x+y-4z = 1$ ¿Es cierto que los tres planos tienen intersección vacía?

Ejercicio 24. Sean los planos $\pi_1 : x + 2y - z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + 3z = 0$.

i) Proponer si es posible, en cada caso, un plano π de manera que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi$ sea:
   a) Un punto.
   b) Una recta.

ii) Encontrar una manera de describir a todos los planos π de manera que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi$ sea una recta.

Ejercicio 25. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $BC = A$. Hallar las soluciones del sistema $B^2CX = 2BX$, para $X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Ejercicio 26. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ resolver el sistema $AX = 2A^{-1}b$, para $X \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Ejercicio 27. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema $(A^2 + 2A)X = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (con $X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$) resulta ser compatible indeterminado (infinitas soluciones).