Práctica 1 - Números complejos

Forma binómica

Ejercicio 1. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Im(z)\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 0\}$

Ejercicio 2. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = z\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = -z\}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = i\,z\}$

Ejercicio 3. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$ (e) $\{z \in \mathbb{C} : |\overline{z} - 3 + 4i| = 5\}$

Ejercicio 4. Efectuar las siguientes operaciones. Es decir, dar la forma binómica del resultado:

(a) $(2 - i)\,(1 + 2i)$ (b) $(3 - 2i)\,(3 + 2i)$

(c) $\dfrac{2 - i}{1 + 3i}$ (d) $-1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Ejercicio 5. Hallar el módulo de los siguientes complejos:

(a) $(2 - 2i)\,(2 + 2i)$ (b) $(1 + i)^2\,(3 + 2i)$ (c) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

(d) $(1 + i\sqrt{3})^3$ (e) $2 + (1 + i\sqrt{3})^3$

Ejercicio 6. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(a) $z^2 = 9$ (b) $z^2 = -4$ (c) $z^2 = 1 + i$

(d) $z^2 = -2i$ (e) $z^2 = 2i\,z - 2i$

Forma polar

Ejercicio 7. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = 0\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \pi\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{6} \ \wedge \ \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$

Ejercicio 8. Hallar las coordenadas polares de los siguientes números complejos:

(a) $1 - i\sqrt{3}$ (b) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (c) $(2-2i)(-\sqrt{3}+i)$

(d) $\dfrac{(1+i)^6(\sqrt{3}+i)}{2-2i}$

Ejercicio 9. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones y representarlas gráficamente:

(a) $z^3 = 1$ (b) $z^6 = 1$ (c) $z^4 = 16$

(d) $z^3 = -1$ (e) $z^2 = i$ (f) $z^5 = 1 + i$

Ejercicio 10. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones y representarlas gráficamente:

(a) $\overline{z}\, z^3 = i$ (b) $z^4 = (1+i)\, \overline{z}^{\,2}$ (c) $(1+i)z^3 + 6 = -10$

Ejercicios Adicionales a la Práctica 1

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes números

$$z_1 = i\ , \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}\ , \quad z_3 = 1 + i\ , \quad z_4 = \sqrt{3} + i\ , \quad z_5 = 3 - 3i\ , \quad z_6 = -1 + i\sqrt{3}\ :$$

(a) Verificar que existe una potencia natural para la cual el correspondiente número es real. Es decir, hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^n \in \mathbb{R}$.

(b) En el punto anterior, hallar la potencia **mínima**. Es decir, hallar el mínimo de los $n \in \mathbb{N}$ con esa propiedad.

(c) Hallar **todas** las potencias para las cuales el correspondiente número es real. Es decir, hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $z^n \in \mathbb{R}$.

(d) En el punto anterior indicar los valores de n para los cuales la correspondiente potencia es real y **positiva**.

(e) Analizar qué es lo que ocurre con las potencias enteras negativas.

Ejercicio 12. Retomando el ejercicio anterior. ¿Sobre qué coordenada (polar, se entiende) del complejo z deben darse condiciones para que exista un natural $n \geq 1$ tal que $z^n \in \mathbb{R}$? Exhibir un número complejo z tal que ninguna de sus potencias enteras no nulas sea real.

Ejercicio 13. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones y representarlas gráficamente:

(a) $z^3 = |z|\,\overline{z}$ (b) $\sqrt{3} - i = \overline{z}\,((2-2i)z)^2$ (c) $z^4 = (1+i)^4$