Práctica 3 - Sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1. Dado el sistema lineal $S : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$. Decidir cuáles de las siguientes son soluciones de S, y cuáles del sistema homogéneo asociado: $v_1 = (0,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,1,4)$, $v_3 = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $v_4 = (-1,-2,3,-7)$.

Ejercicio 2. En cada caso encontrar, si existen, α y $\beta \in \mathbb{R}$ para que $(2,-2,1)$ sea solución de

(a) $S : \begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 3 \\ \beta x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$, (b) $S : \begin{cases} x_1 + 2\alpha x_2 + x_3 = -1 \\ \alpha x_2 - \beta x_3 = -4 \\ \beta x_1 + x_2 + (2\alpha - \beta)x_3 = 3 \end{cases}$.

Ejercicio 3. Resolver los siguientes sistemas y clasificarlos de acuerdo a la cantidad de soluciones:

$(a) \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$. $(b) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -4x - 6y = 2 \end{cases}$.

$(c) \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ -3x + 6y = -5 \end{cases}$. $(d) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ \quad - 2y + 3z = 0 \\ \quad 2z = 4 \end{cases}$.

$(e) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ -x + 2y + 4z = 11 \end{cases}$. $(f) \begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ x - y + z = 1 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$.

$(g) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 5x + y - z = -5 \end{cases}$. $(h) \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$.

$(i) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 2 \end{cases}$.

Ejercicio 4. Usando la clasificación anterior, determinar cuántas soluciones tiene cada sistema homogéneo asociado a los sistemas del ejercicio anterior. Justificar.

Ejercicio 5. Para cada uno de los sistemas de los ejercicios 1, 2 y 3, calcular el rango fila de la matriz de coeficientes y el rango fila de la matriz ampliada.

Ejercicio 6. Usando argumentos geométricos clasificar los siguientes sistemas de acuerdo a su cantidad de soluciones:

$(a) \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$. $(b) \begin{cases} 3x + y = -1 \\ -6x - 2y = 2 \end{cases}$.

$(c) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -3x + 6y - 3z = 2 \end{cases}$.

Ejercicio 7. Una empresa realiza traslados de pasajeros y automóviles a Colonia (Uruguay) y cobra una tarifa diferencial a los menores de edad. La familia A compuesta por dos adultos, un menor de edad y sin automóvil pagó 3200 $ para viajar, en tanto que la famila B que viajó con un automóvil y está compuesta por un adulto y dos menores pagó 5300 $ y la familia C que también viajó con automóvil y está compuesta por dos adultos y tres menores gastó 7300 $. Hallar el precio de los pasajes para mayores y menores y de las bodegas para automóviles.

Ejercicio 8. Resolver los sistemas con matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para los vectores de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Resolver los sistemas con matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ para los vectores de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Clasificar cada sistema según los valores de a y resolver cuando sea posible:

$$(a)\begin{cases} ax + ay - z = 2 \\ 3x - ay = 0 \\ 5x + ay = 0 \\ x + \quad + 2z = 1 \end{cases}. \qquad (b)\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - ay + az = 5 \end{cases}.$$

$$(c)\begin{cases} (a+2)x + (a+1)y = -6 \\ -x + 5y = a \\ x + y = -5 \end{cases}.$$

Ejercicio 11. Encontrar una ecuación paramétrica para cada una de las siguientes rectas

$$(a)\begin{cases} -4x + y - 2z = -4 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}. \qquad (b)\begin{cases} -4x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}.$$

$$(c)\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2x - 4y - 6z = 0 \end{cases}. \qquad (d)\begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ 2x - 4y - 6z = 1 \end{cases}.$$

Ejercicio 12. Encontrar dos planos que contengan a la recta $X = t(1, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Encontrar ecuaciones implícitas para cada una de las siguientes rectas (considerando $t \in \mathbb{R}$):

(a) $X = t(1, -2, 1)$. (b) $X = (1, -3, 4) + t(1, 2, 2)$. (c) $X = (1, 0, -1) + t(1, 2, 2)$.

Ejercicio 14. ¿Cuánto deben valer a y b para que la recta $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x - y + bz = 4 \end{cases}$ pase por el punto $(4, -5, 2)$?

Lo mismo para la recta $\begin{cases} -x+ay-3z=b \\ x-y+bz=3a \end{cases}$ y el punto $(1,-2,5)$.

Ejercicio 15. Calcular $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ en cada caso:

(a) $\mathbb{L}_1 : X = t(1,-2)+(1,3)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(2,3)+(0,1)$.

(b) $\mathbb{L}_1 : X = t(1,2,-1)+(3,4,0)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(-3,4,2)+(4,-4,0)$.

(c) $\mathbb{L}_1 : X = t(2,2,2)+(1,0,0)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(-1,-1,-1)+(0,-1,-1)$.

(d) $\mathbb{L}_1 : X = t(1,3,1)+(0,-1,2)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(2,-1,0)+(1,1,2)$.

(e) $\mathbb{L}_1 : X = t(-1,1,2)+(1,2,3)$, $\mathbb{L}_2 : \begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2y+z=3 \end{cases}$.

Decidir si en algún caso las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas o alabeadas.

Ejercicio 16. Sean $\Pi : 2x-y+3z=5$; $\Pi' : x+3y-z=2$; $\mathbb{L} : X = \alpha(1,-1,-1)+(1,0,-2)$; y $\mathbb{L}' : \begin{cases} -x+y-z=2 \\ x-2z=1 \end{cases}$.

Calcular $\mathbb{L}\cap\Pi$, $\mathbb{L}\cap\Pi'$, $\mathbb{L}\cap\mathbb{L}'$, $\mathbb{L}'\cap\Pi$, $\mathbb{L}'\cap\Pi'$ y $\Pi\cap\Pi'$.

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la recta $\mathbb{L} : \begin{cases} kx+y+2z=2 \\ kx+ky+5z=5 \end{cases}$ y el plano $\Pi : kx+y+3z=3$ son paralelos? ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\mathbb{L} \subseteq \Pi$?

Ejercicio 18. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x & + & 2ky & + & z & = & 1 \\ kx & + & 2y & + & kz & = & k \\ & & 2y & + & kz & = & k-2 \end{cases}$$

forman una recta contenida en el plano $x-y+2z=4$.

Ejercicio 19. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\{(2,0,-3)\}$ sea el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x_1+x_2-x_3 &=& 5 \\ 3x_1+\alpha\, x_2+x_3 &=& 3 \\ -x_1+x_2+\alpha\, x_3 &=& \alpha^2 \end{cases}$.

Ejercicio 20. Un matrimonio tuvo en total tres hijos, que nacieron a intervalos regulares de tiempo (en años). La suma de las edades de los hijos al 31/12/22 superaba por un año la edad del padre, quien tenía la misma edad que la madre. Tres años antes, la suma de las edades de todos los miembros de la familia era 100 años, y la edad del hijo menor era dos tercios de la edad del hijo mayor ¿Cuáles eran a la fecha mencionada las edades del padre y de cada uno de los hijos?