

# Álgebra lineal – 3er. Parcial – 18 de Junio de 2024

## Resoluciones

1. Sea  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal para la cual se verifica: 
$$\begin{cases} F(1,0,0) = (1,0,2) \\ F(0,1,1) = (3,2,12) \\ F(-1,0,1) = (0,2,6) \end{cases}.$$

a) Hallar  $Nu(F)$  e  $Im(F)$  y sus dimensiones, y clasificar la transformación.

b) Sea  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la transformación lineal tal que  $M_{EE}(G) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Hallar  $F \circ G(0,1)$ .

Resoluciones: a) Sabemos que  $Im(F) = \langle F(1,0,0), F(0,1,1), F(-1,0,1) \rangle$ , donde  $F(1,0,0) = (1,0,2)$ ,  $F(0,1,1) = (3,2,12)$  y  $F(-1,0,1) = (0,2,6)$ . Buscamos una base de  $Im(F)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1 \mapsto F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y obtenemos:

$$B_{Im(F)} = \{(1,0,2), (0,2,6)\}.$$

Resulta así  $\dim(Im(F)) = 2$  y, por el Teorema de la Dimensión,  $\dim(Nu(F)) = 1$ . Ya, a partir de aquí, podemos decir que  $F$  no es ni monomorfismo ni epimorfismo ni isomorfismo. Para hallar  $Nu(F)$  podemos proceder por dos vías. Método 1: buscamos  $(a,b,c) = [\mathbf{v}]_B$  tal que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$ . Aquí  $B = \{(1,0,0), (0,1,1), (-1,0,1)\}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = M_{BE}(F)$ . Resolvemos  $(*)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2b + 2c = 0 \Rightarrow b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3c = 0 \Rightarrow a = 3c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = c(3,-1,1), c \in \mathbb{R}.$$

De modo que

$$\mathbf{v} \in Nu(F) \Leftrightarrow \mathbf{v} = c(3(1,0,0) - (0,1,1) + (-1,0,1)) = c(2,-1,0), c \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,  $Nu(F) = \langle (2,-1,0) \rangle$  y

$$B_{Nu(F)} = \{(2,-1,0)\}.$$

Método 2: buscamos  $M_{EE}(F)$  y  $\mathbf{v} = (x,y,z)$  tal que  $M_{EE}(F) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\#)$ . Hallamos primero  $M_{EE}(F)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_1 \mapsto F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \mapsto F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right);$$

$$M_{EE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pasamos a resolver (#):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = y(-2, 1, 0), y \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,  $Nu(F) = \langle (-2, 1, 0) \rangle$  y

$$B_{Nu(F)} = \{(-2, 1, 0)\}.$$

b) Sabemos que  $G(0, 1) = (-1, 3, 0)$  (la columna 2 de  $M_{EE}(G)$ ) de modo que  $F \circ G(0, 1) = F(-1, 3, 0)$ . Aquí también tenemos dos opciones. Método 1: Buscamos  $(a, b, c) = [(-1, 3, 0)]_B$ , con  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$ , y hacemos  $F(-1, 3, 0) = M_{BE}(F) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , donde  $M_{BE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ . Buscamos  $a, b, c$  tales que

$$(-1, 3, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1) + c(-1, 0, 1) = (a - c, b, b + c),$$

es decir, tales que  $\begin{cases} a - c = -1 \\ b = 3 \\ b + c = 0 \end{cases}$ . Encontramos fácilmente que  $a = -4, b = 3, c = -3$ . Luego,

$$F(-1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (5, 0, 10).$$

Método 2: Hacemos  $F(-1, 3, 0) = M_{EE}(F) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . En el Método 2 para resolver el ítem a), encontramos que  $M_{EE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Así

$$F(-1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (5, 0, 10).$$

2. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Encontrar, si es posible,  $k \in \mathbb{R}$  para que  $v = (2, 0, 1)$  sea un autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda = 5$ .

b) Para  $k = 5$ , expresar, si es posible, a  $A$  como  $A = CDC^{-1}$  con  $C$  una matriz inversible y  $D$  diagonal.

Resoluciones: a) Debe ser  $A \cdot v = 5v$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{5v} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot v} = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos que  $k = 5$ .

b) Los autovalores de  $A$  son las raíces del polinomio característico  $p_A(t) = \det(A - tI)$ . Hallamos que

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 0 & 0 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 3 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (5-t)(1+t)^2,$$

de modo que los autovalores de  $A$  son  $-1$  (doble) y  $5$  (simple). Los autoespacios correspondientes son  $S_{-1}(A) = \text{Nu}(A + I)$  y  $S_5(A) = \text{Nu}(A - 5I)$ .

$$\underline{S_{-1}(A)}: \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=0; \text{ luego } (x,y,z) \in S_{-1}(A) \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1), y,z \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,  $S_{-1}(A) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ .

$S_5(A)$ : Por la parte a) sabemos que  $S_5(A) = \langle (2,0,1) \rangle$ .

$A$  es diagonalizable puesto que  $B = \{(0,1,0), (0,0,1), (2,0,1)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  de autovectores de  $A$ . Es  $A = CDC^{-1}$ , con

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = C_{BE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$