Práctica 7 - Autovectores y autovalores

Ejercicio 1. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar su polinomio característico P_A y verificar que $\mathrm{gr}(P_A) = m$. Calcular todas las raíces de P_A indicando su multiplicidad.

Ejercicio 2. Decidir si λ es autovalor de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ siendo:

i) $\lambda = 0$,

ii) $\lambda = 4$.

Ejercicio 3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $v = (2, 1)$ es autovector de A de autovalor $\lambda = 3$ y $w = (1, -2)$ es autovector de A de autovalor $\mu = -2$.

Ejercicio 4. Decidir si v es autovector de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ siendo:

i) $v = (3, 4)$,

ii) $v = (1, -2)$,

iii) $v = (0, 0)$.

Ejercicio 5. Para cada autovalor real λ de las matrices A del ejercicio 1, hallar bases del autoespacio asociado S_λ. Indicar en qué casos existe una base de $\mathbb{R}^m$ formada por autovectores de A.

Ejercicio 6. En cada caso proponer una matriz de 2x2 y otra de 3x3 que:

(a) Tenga a 0 como autovalor,

(b) Tenga a 1 como autovalor.

Ejercicio 7. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2)$,
- $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1, x_2, x_3) = (7x_1 + 5x_2, -10x_1 - 8x_2, 2x_3)$,

- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_3(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + x_2, 4x_1 + 4x_2 + 3x_3)$.

(a) Hallar su matriz en las bases canónicas correspondientes $M_{EE}(T)$.

(b) Hallar los autovalores y bases de los autoespacios correspondientes a autovalores reales de las matrices halladas en el ítem anterior.

(c) Si v es un generador de S_λ (autoespacio asociado al autovalor λ) con $\lambda \in \mathbb{R}$, verificar que $T(v) = \lambda v$. ¿Por qué ocurre este hecho?

(d) Para la transformación lineal T_3 verificar que: si S_0 es el autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 0$ verificar que $\text{Nu}(T_3) = S_0$ ¿Por qué ocurre este hecho?

Ejercicio 8. Para las transformaciones lineales que verifican:

$$\begin{cases} T_1(1,1,1) = (0,2,2) \\ T_1(0,1,1) = (0,0,1), \\ T_1(0,0,1) = (0,0,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2(1,1,0) = (0,-1,2) \\ T_2(0,-1,2) = (-1,-1,0), \\ T_2(1,1,1) = (2,2,2) \end{cases} \qquad \begin{cases} T_3(0,1,1) = (2,2,0) \\ T_3(1,1,0) = (0,2,2). \\ T_3(1,1,1) = (-2,-2,-2) \end{cases}$$

Calcular los autovalores y bases de los autoespacios correspondientes a autovalores reales de sus matrices en las bases canónicas.

Ejercicio 9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica $T(1,1) = (2,2)$ y $T(0,1) = (0,3)$.

(a) Hallar, sin realizar ningún cálculo, los autovalores y bases de los autoespacios de la matriz de T en las bases canónicas. Verificar el resultado obtenido realizando los cálculos correspondientes.

(b) Si $B = \{(1,1),(0,1)\}$, hallar la matriz de T en la base B, $M_{BB}(T)$ y calcular sus autovalores y bases de los autoespacios ¿Qué relación hay con los resultados obtenidos en el item anterior?

(c) ¿Que relación hay entre el determinante de $M_{BB}(T)$ y los autovalores hallados en el item (a)? ¿Y con el determinante de $M_{EE}(T)$?

Ejercicio 10. Para cada una de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, verificar que si λ y μ son autovalores distintos, entonces los autoespacios S_λ y S_μ se intersecan únicamente en el vector nulo. Es decir, si $\lambda \neq \mu$ son autovalores, entonces $S_\lambda \cap S_\mu = \left\{\vec{0}\right\}$.

Ejercicio 11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $T(x,y,z) = (x + 2y, 2x - 2y, -x + 2y + 2z)$.

(a) Hallar los autovalores y bases de los autoespacios de la matriz de T en las bases canónicas.

(b) Verificar si existe una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de la matriz de T en las bases canónicas.

(c) Hallar la matriz de T en la base B, $M_{BB}(T)$, y verificar que es una matriz diagonal.

(d) Demostrar que existe una matriz inversible C (y hallarla) tal que $C.M_{EE}(T).C^{-1} = D$ es una matriz diagonal.

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Verificar que A es diagonalizable y diagonalizarla (hallar matrices C y D como en el ejercicio anterior item (c)). Verificar que es inversible.

(b) Calcular A^3, A^{25}, A^{-1}, A^{-5}.

(c) Considerar la matriz $B = A - 2I$. Verificar que es diagonalizable y diagonalizarla.

(d) Hallar los autovalores de la matriz $2A^2 + 3A - I$ y compararlos con los de A.

(e) Verificar que la matriz $A^2 = 2\ A + 15\ I$. Comparar con el polinomio característico.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Verificar que $\lambda = 3$ es el único autovalor (de multiplicidad 3) y que el autoespacio asociado tiene dimensión 1. ¿A es diagonalizable?

(b) Hallar el polinomio característico P_A de A y verificar que $P_A(A) = 0$ (0 la matriz nula de 3×3).

Ejercicio 14. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Usando el teorema de Hamilton-Cayley concluir que $A^3 - 3A^2 - 7A - 3I = 0$.

(b) Usando (a) mostrar que $A(A^2 - 3A - 7I) = 3I = (A^2 - 3A - 7I)A$; y concluir que $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 3A - 7I)$.

Ejercicio 15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + x_3, 4x_1 + 5x_3)$.

(a) Mostrar que T es un isomorfismo.

(b) Represente matricialmente a T en la base canónica; emule lo realizado en el ejercicio anterior para obtener la inversa de dicha matriz y use la misma para reconstruir T^{-1}.

(c) ¿Es posible obtener T^{-1} usando su fórmula sin usar la matriz asociada a T?

Ejercicios adicionales a la Práctica 7

Ejercicio 16. Sea A una matriz tal que la suma de los coeficientes de cada una de sus filas es λ. Demostrar que $\lambda \in \lambda(T)$ y hallar un autovector asociado a dicho autovalor.

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que cumple

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrar que $A^{1023} = A$.

(b) Mostrar que $A^{-1} = A$.

Ejercicio 18. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una transformación lineal cuyo subespacio imagen tiene dimensión 2 y cuyo polinomio característico es $P_T(x) = x^3(x+1)(x-3)$. Mostrar que T es diagonalizable.