

Álgebra lineal – 3er. Parcial – 18 de Junio de 2024

Resoluciones

1. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal para la cual se verifica: $\begin{cases} F(1,0,0) = (1,0,2) \\ F(0,1,1) = (3,2,12) \\ F(-1,0,1) = (0,2,6) \end{cases}$.

a) Hallar $Nu(F)$ e $Im(F)$ y sus dimensiones, y clasificar la transformación.

b) Sea $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la transformación lineal tal que $M_{EE}(G) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $F \circ G(0,1)$.

Resoluciones: a) Sabemos que $Im(F) = \langle F(1,0,0), F(0,1,1), F(-1,0,1) \rangle$, donde $F(1,0,0) = (1,0,2)$, $F(0,1,1) = (3,2,12)$ y $F(-1,0,1) = (0,2,6)$. Buscamos una base de $Im(F)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-3F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y obtenemos:

$$B_{Im(F)} = \{(1,0,2), (0,2,6)\}.$$

Resulta así $\dim(Im(F)) = 2$ y, por el Teorema de la Dimensión, $\dim(Nu(F)) = 1$. Ya, a partir de aquí, podemos decir que F no es ni monomorfismo ni epimorfismo ni isomorfismo. Para hallar $Nu(F)$ podemos proceder por dos vías. Método 1: buscamos $(a,b,c) = [\mathbf{v}]_B$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (\star). Aquí $B = \{(1,0,0), (0,1,1), (-1,0,1)\}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} = M_{BE}(F)$. Resolvemos (\star):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ 2b+2c=0 \Rightarrow b=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3c=0 \Rightarrow a=3c \\ b=-c \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = c(3,-1,1), c \in \mathbb{R}.$$

De modo que

$$\mathbf{v} \in Nu(F) \Leftrightarrow \mathbf{v} = c(3(1,0,0) - (0,1,1) + (-1,0,1)) = c(2,-1,0), c \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $Nu(F) = \langle (2,-1,0) \rangle$ y

$$B_{Nu(F)} = \{(2,-1,0)\}.$$

Método 2: buscamos $M_{EE}(F)$ y $\mathbf{v} = (x,y,z)$ tal que $M_{EE}(F) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (#). Hallamos primero $M_{EE}(F)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right);$$

$$M_{EE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pasamos a resolver (#):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \mapsto F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = y(-2, 1, 0), y \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $Nu(F) = \langle(-2, 1, 0)\rangle$ y

$$B_{Nu(F)} = \{(-2, 1, 0)\}.$$

b) Sabemos que $G(0, 1) = (-1, 3, 0)$ (la columna 2 de $M_{EE}(G)$) de modo que $F \circ G(0, 1) = F(-1, 3, 0)$. Aquí también tenemos dos opciones. Método 1: Buscamos $(a, b, c) = [(-1, 3, 0)]_B$, con $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$, y hacemos $F(-1, 3, 0) = M_{BE}(F) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donde $M_{BE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix}$. Buscamos a, b, c tales que

$$(-1, 3, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1) + c(-1, 0, 1) = (a - c, b, b + c),$$

es decir, tales que $\begin{cases} a - c = -1 \\ b = 3 \\ b + c = 0 \end{cases}$. Encontramos fácilmente que $a = -4, b = 3, c = -3$. Luego,

$$F(-1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (5, 0, 10).$$

Método 2: Hacemos $F(-1, 3, 0) = M_{EE}(F) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. En el Método 2 para resolver el ítem a), encontramos que $M_{EE}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Así

$$F(-1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (5, 0, 10).$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Encontrar, si es posible, $k \in \mathbb{R}$ para que $v = (2, 0, 1)$ sea un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 5$.
- b) Para $k = 5$, expresar, si es posible, a A como $A = CDC^{-1}$ con C una matriz inversible y D diagonal.

Resoluciones: a) Debe ser $A \cdot v = 5v$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{5v} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A \cdot v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos que $k = 5$.

b) Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico $p_A(t) = \det(A - tI)$. Hallamos que

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 0 & 0 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 3 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (5-t)(1+t)^2,$$

de modo que los autovalores de A son -1 (doble) y 5 (simple). Los autoespacios correspondientes son $S_{-1}(A) = Nu(A + I)$ y $S_5(A) = Nu(A - 5I)$.

$$\underline{S_{-1}(A)}: \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0; \text{ luego } (x, y, z) \in S_{-1}(A) \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}. \text{ Por tanto, } S_{-1}(A) = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

$S_5(A)$: Por la parte a) sabemos que $S_5(A) = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

A es diagonalizable puesto que $B = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 de autovectores de A . Es $A = CDC^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = C_{BE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$