

PRÁCTICA 3

1. ¿Cuántos de los números del 1 al 33000, ambos inclusive, no son divisibles ni por 3, ni por 5, ni por 11?
2. Encuentre el número de permutaciones de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 tal que el 2 no esté en el segundo lugar ni el 5 esté en el quinto lugar.
3. Calcule el número de permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tales que el 1 no está en el primer lugar, el 4 no está en el cuarto lugar y el 7 no está en el séptimo lugar.
4. ¿Cuántas permutaciones hay de las letras de la palabra PROPONER donde letras iguales no aparecen en posiciones consecutivas?
5. ¿Cuántos números entre 1 y 1000000, ambos inclusive, no son ni cuadrados perfectos, ni cubos perfectos, ni potencias cuartas?
6. Una urna contiene 7 bolitas blancas, 8 bolitas rojas, 4 bolitas amarillas y 6 bolitas negras. Se extraen, una a una, 7 bolitas de la urna sin reponerlas. ¿Cuántas combinaciones de cantidades de bolitas de cada color pueden resultar de dicha extracción?
7. Un fabricante distribuye 3 tipos de cupones dentro de sus cajas de cereales (1 cupón por caja). ¿Cuántas combinaciones de cantidades de cada uno de los cupones puede haber conseguido un cliente que compró 6 cajas de estos cereales sabiendo que consiguió al menos un cupón de cada tipo?
8. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 18 bolas negras iguales entre sí en 3 cajas numeradas de forma tal que se cumplan las siguientes condiciones?
 - a) La primera caja contiene al menos 2 bolas y a lo sumo 5.
 - b) La primera caja contiene al menos 3 bolas y a lo sumo 7.
 - c) La primera caja contiene al menos 4 bolas y a lo sumo 8.
9. Se cuenta con cinco cajas numeradas del 1 al 5.
 - a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir nueve pelotas iguales en esas cajas?
 - b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir nueve pelotas iguales si se debe poner al menos una pelota en cada caja?
 - c) ¿Cuál es la respuesta a los dos incisos anteriores si en lugar de 9 pelotas iguales se tienen que distribuir n pelotas iguales?
 - d) ¿Y si se tienen c cajas numeradas y n pelotas iguales?
 - e) Responder las preguntas a) y b) pensando que las pelotas son todas distintas.
10. Encuentre la cantidad de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$ en los números enteros positivos menores o iguales a 10.
11. Encuentre el número de soluciones en los enteros positivos de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ que satisfagan las siguientes condiciones $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $3 \leq x_3 \leq 9$ y $4 \leq x_4 \leq 11$.
12. Calcule el número de soluciones en los enteros positivos de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ tales que $1 \leq x_i \leq 8$ para $1 \leq i \leq 4$.
13. Contar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $r + s + t + u = 35$ bajo las restricciones $2 < r \leq 5$, $4 < s < 22$ y $3 \leq u < 7$.

14. Quince personas quieren realizar un viaje a Salta y utilizarán cuatro vehículos distintos para dicho viaje, tres autos y una combi. Todas las personas saben manejar. ¿Cuántas formas distintas hay de distribuir la cantidad de personas en los vehículos, si en el auto rojo no pueden viajar más de tres personas, en los autos azul y gris no más de cuatro personas, y en la combi por lo menos deben viajar cuatro personas pero no más de seis?
15. Dos niños se quieren repartir seis bolitas azules, seis bolitas amarillas y seis bolitas blancas entre ambos, siendo las bolitas de un mismo color indistinguibles. ¿De cuántas formas pueden hacerlo si cada uno de ellos debe recibir exactamente nueve bolitas en total?
16. En una empresa de ventas en línea, durante el proceso de etiquetado, se mezclaron cuatro paquetes al asignarles las direcciones de entrega. Como solución, decidieron enviarlos al azar. Suponiendo que los 4 paquetes contienen productos distintos e iban a 4 direcciones distintas.
- ¿Cuántas maneras distintas hay de poner las cuatro direcciones?
 - ¿Cuántas maneras distintas hay de poner las cuatro direcciones de forma que ningún paquete llegue al destino correcto?
17. Calcule el número de permutaciones de los números del 1 al 9 tal que ninguno de los números ocupa su posición natural.
18. Un juego tiene un mazo de 40 cartas, diez rojas numeradas del 1 al 10, diez azules numeradas del 1 al 10, diez verdes numeradas del 1 al 10 y diez blancas numeradas del 1 al 10. Suponiendo que juegan 4 personas, se le reparten 10 cartas a cada uno e importa el orden en que cada jugador recibe sus cartas. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las cartas con la condición de que el jugador uno no tengan todas sus cartas del mismo color, y el jugador dos tenga al menos dos cartas con el mismo número?
19. En un videojuego de ritmo se debe oprimir una de las cuatro flechas del teclado en el momento que aparece en la pantalla. En cada partida aparecen secuencialmente 250 flechas al azar. El jugador tiene tres calificaciones para cada flecha, perfecto, regular o mal.
- Si no se consideran los resultados del jugador, ¿cuántas partidas distintas se pueden generar con la condición de que haya al menos una flecha de cada tipo?
 - Contando los resultados del jugador, ¿cuántas partidas distintas se pueden generar con la condición de que haya al menos una flecha de cada tipo?

Principio del Palomar

20. Muestre que en un grupo de 8 personas al menos dos de ellas cumplen años el mismo día de la semana.
21. ¿Cuál es el mínimo número de personas que deben asistir a una fiesta para garantizar que haya al menos dos cuyo nombre comienza con la misma letra? (Considere un alfabeto de 27 letras).
22. En un examen los estudiantes son calificados con las letras A, B, C, D, E y F . ¿Cuánto es el mínimo número de alumnos que deben tomar el examen para garantizar que haya al menos 5 con la misma calificación?
23. Demostrar que si se les pidiera a un grupo de 321 personas que elijan un número impar de tres cifras distintas, entonces al menos dos de ellas elegirían el mismo número.
24. ¿Cuál es el mínimo número de personas que deben asistir a un fiesta para poder garantizar que haya al menos dos personas cuyos dos últimos números de documento coincidan?

25. ¿Cuál es el menor número de estudiantes que deben matricularse en una universidad para asegurar que hay al menos 100 que vienen del mismo Partido Municipal, suponiendo que todos los estudiantes provienen solamente de alguno de los siete Partidos Municipales más cercanos a la universidad?
26. Muestre que en un conjunto cualquiera de 21 números enteros positivos existe un subconjunto de 5 números cuya suma es divisible por 5. **Ayuda:** Probar que hay un subconjunto de al menos 5 números cuyos restos al dividir por 5 coinciden.
27. Doce personas están sentadas en una fila de 16 sillas. Muestre que hay al menos tres sillas consecutivas con personas sentadas en ellas.
28. a) Probar que si eligen doce letras de las primeras 16 letras del abecedario, entonces al menos tres letras elegidas son consecutivas en el abecedario.
b) Calcular la cantidad de maneras de elegir 12 letras de las primeras 16 letras del abecedario de forma que no haya dos letras no elegidas consecutivas en el abecedario y al menos tres letras elegidas sean consecutivas en el abecedario.
29. Un grupo de amigos tienen un anillo cada uno con la secuencia $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, 2, 4, 6, 8, N$, donde N es un número impar del 1 al 100. Suponiendo que dos amigos no pueden tener el mismo N en su anillo. ¿Cuál es la mínima cantidad de personas que debe tener el grupo para garantizar que al menos 5 de ellas reciban números impares consecutivos?
30. Dados 25 puntos en el plano tales que tomados de a tres existen al menos dos que están a distancia a lo sumo uno. Mostrar que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos 13 puntos.
31. La empresa de fletes Camionetti Hnos. fue contratada por la casa de electrodomésticos Todo Baratito para transportar 123 heladeras. ¿Cuál es la máxima cantidad C de camiones que debe comprometer Camionetti Hnos. para realizar el trabajo de manera tal que se garantice que, independientemente de como se distribuyan las heladeras en los camiones, al menos uno de los C camiones cargará por lo menos 20 heladeras?
32. En un restaurante quieren comprar mesas donde van a distribuir las 314 sillas que tienen.
a) ¿Cuál es la máxima cantidad de mesas que deberían comprar para garantizar que en una de ellas se distribuyan al menos 6 sillas?
b) Suponiendo que compraron la cantidad de mesas obtenida en el ítem anterior y las enumeraron con números enteros consecutivos y distintos. ¿De cuántas formas se pueden distribuir las sillas en las mesas cumpliendo que las mesas impares deben tener al menos 3 sillas, las pares al menos 4 y alguna de las mesas al menos 6?
33. Un grupo de científicos que estudian las tormentas eléctricas realizan el siguiente experimento utilizando un simulador de rayos. En una zona de pruebas, marcan una cuadrícula de tamaño $n \times n$ y miden cuantos rayos caen en cada uno de los cuadrados.
a) Suponiendo que se generaron 1090 rayos. ¿Cuál es la máxima cantidad de cuadrados que debe tener la cuadrícula para garantizar que en al menos 1 caigan al menos 10 rayos?
b) Suponiendo que se generaron 1090 rayos, usando una cuadrícula con el tamaño encontrado en el ítem anterior, y que en la primera fila cayeron exactamente 99 rayos. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los 1090 rayos en los cuadrados con la condición de que en al menos uno caigan al menos 10 rayos?

Nota: Los rayos se consideran indistinguibles.