

Álgebra lineal – Turno noche – 2 2024

Emmanuel Lastra - Marcela Villagra

Ejercicios de repaso del segundo parcial

1. Dados los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 ; -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\}$$

$$\mathbb{T} = \langle (2, 0, 2, 0), (0, 0, 3, 3), (1, 0, 1, 2) \rangle.$$

- a) Decidir si $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.
- b) Extender una base de \mathbb{T} a una base de \mathbb{R}^4 .
2. Dadas $B = \{(1, 0, -1); (0, 2, 1); (1, 0, 0)\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz en las bases E y B es:

$$M_{EB}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcular $T(2, -1, 0)$.
- b) Hallar una base y dimensión del $Nu(T)$ e $Im(T)$. Clasificar la transformación según sea monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo.
- c) Escribir al vector $v = (1, 2, -1)$ en coordenadas de la base B .

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Determinar k para que 3 sea autovalor simple de la matriz A .
- b) Para el valor de k hallado, encontrar todos autovalores de A , y si es posible, dar matrices D diagonal y C inversible tales que $A = CDC^{-1}$.
- c) Mostrar que $A^4 = 13A^2 - 12A$.

4. Considerar los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbb{S} = \text{gen}\{(-1, 0, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0; x_2 + x_3 = 0\}$$

- a) Hallar una base para el subespacio \mathbb{S}^\perp .
- b) Hallar una base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y extenderla a una base de \mathbb{R}^4 .
5. Dados los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$S = \langle (-2, k^2 - 1, 1, 0), (k - 1, 1, k, 0), (2k - 2, -2k + 2, 0, 0) \rangle$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

a) Hallar, si es posible, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S = T$.

b) Para $k = -1$, decidir si $(-2, -2, -1, 0) \in S$.

6. Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ un subespacio de \mathbb{R}^3 y $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que cumple $S \subseteq \text{Im}(T)$ y $(1, 1, 1) \in \text{Nu}(T)$

a) ¿Puede ser T un epimorfismo? Justificar.

b) Determinar una T que cumpla el enunciado.

7. Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T(1, 0, 0) = (-3, -4, 0) \\ T(0, 1, 0) = (2, 3, 0) \\ T(0, 0, 1) = (-2, -2, 1) \end{cases}$.

a) Hallar, si existe, una base B de \mathbb{R}^3 en la cual la matriz $M_{BB}(T)$ sea una matriz diagonal.

b) Escribir, si es posible, a A^{-1} como combinación lineal de $\{A^2, A, I\}$, donde $A = M_{BB}(T)$.

8. Dada $A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar D diagonal y C inversible, matrices de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, tales que $A = CDC^{-1}$.

b) Escribir a A^4 como combinación lineal de $\{A^2, A, I\}$.

9. Sean $B = \{(1, -1, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(3, 2), (2, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ las transformaciones lineales tales que:

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{EB'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(g \circ f)(1, 3, 4)$.

10. Sean $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ base de \mathbb{R}^3 , $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $f(x, y) = (-2y, x+y, x-y)$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz en la base B de \mathbb{R}^3 y la base canónica E de \mathbb{R}^2 es $M_{BE}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la fórmula de la composición $g \circ f$.

11. Sea $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ una base de \mathbb{R}^3 y sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$M_{EB}(T) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Decidir si T es diagonalizable y, si este es el caso, hallar la base de \mathbb{R}^3 que la diagonaliza.

b) Verificar que T es inversible.

12. Sean \mathbb{S}, \mathbb{T} los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 ; 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \langle (0, 0, k^2, 1), (0, -1, 1, 2) \rangle.$$

Determinar, si existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

13. Sean $B = \{(-1, -3, 1), (2, -2, 0), (3, 2, 1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$M_{BE}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $T(4, -3, 2)$.

b) Hallar una base del $Nu(T)$ y de $Im(T)$. Clasificar a T en monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo.

c) Escribir al vector $v = (0, -2, 1)$ en coordenadas de la base B .

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma tal que $(2, 0, -1)$ sea un autovector de A con autovalor asociado $\lambda = -1$.

b) Con los valores hallados en el ítem anterior, escribir a A^4 como combinación lineal de $\{A^2, A, I\}$.

15. Dados los subespacios de \mathbb{R}^3 , $S = \text{gen}\{(1, -1, 2); (0, 0, 1)\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\}$.

a) Encontrar una base $(S \cap T)^\perp$ y determinar su dimensión.

b) Hallar $W \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio tal que $W \oplus (S \cap T)^\perp = \mathbb{R}^3$.

16. Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma:

$$M_{EE}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 2-k & 2 \\ 0 & k & k^2-4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 2$ es autovalor doble de T .

b) Considerar $k = 3$ y hallar, si es posible, B base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de T .

c) Expresar A^{-1} , si es posible, como combinación lineal de $\{A^2, A, I_3\}$ siendo $A = M_{EE}(T)$.

17. Sean $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que verifica $\begin{cases} F(1, 1, 0) = (2, 1, 1) \\ F(0, 1, 0) = (0, 0, 1) \quad \text{y } B = (1, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 5, 3) \\ F(0, 1, 1) = (1, 0, 1) \end{cases}$

una base de \mathbb{R}^3 .

a) Hallar $M_{BE}(f)$.

b) Encontrar $M_{BB}(f^{-1})$.

c) Dada la transformación lineal $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y, z) = (x + 2y - z, x - z)$ hallar $(G \circ F)(3, 2, -1)$ y calcular la dimensión de $Nu(G \circ F)$.

18. Sean los subespacios S y T de \mathbb{R}^4 definidos de la siguiente manera:

$$S = \text{gen}\{(0, 3, 2, 1), (2, -1, -1, 0), (4, 4, 2, 1)\}$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}$$

a) Determinar si S y T están suma directa.

b) Hallar una base de S^\perp y una base de T^\perp .