Resolución 1er Parcial - 3 de octubre de 2024

1. **Sean** $w_1 = \frac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^5}$ **y** $w_2 = -5+12i$**.**

   a) **Hallar el módulo y el argumento de** w_1**.**

   - Primero calculamos el módulo utilizando las siguientes propiedades:
     i) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
     ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
     iii $|z^n| = |z|^n$

$$|w_1| = \left|\frac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^5}\right| \underbrace{=}_{\text{i)}} \frac{\left|(1+i)^3(\sqrt{3}-i)\right|}{|(1-i)^5|} \underbrace{=}_{\text{ii)}} \frac{\left|(1+i)^3\right| \cdot \left|(\sqrt{3}-i)\right|}{|(1-i)^5|} \underbrace{=}_{\text{iii)}} \frac{|(1+i)|^3 \cdot \left|(\sqrt{3}-i)\right|}{|(1-i)|^5}$$

Llamemos $z_1 = 1+i$ y $z_2 = \sqrt{3}-i$. Notemos que el conjugado de z_1 es $\overline{z}_1 = 1-i$, que es justamente el número que aparece en el denominador de la expresión original. Recordemos que una propiedad fundamental de los números complejos establece que el módulo de un número es igual al de su conjugado, es decir, $|z| = |\overline{z}|$. Por lo tanto, podemos calcular los módulos de z_1 y z_2 directamente:

$$|z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \text{y} \quad |z_2| = |\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Luego, tenemos que:

$$|w_1| = \frac{|z_1|^3 \cdot |z_2|}{|z_1|^5} = \frac{|z_2|}{|z_1|^2} = \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \Rightarrow \boxed{|w_1| = 1}$$

   - Ahora calculamos el Argumento de w_1 utilizando las siguientes propiedades:
     i) $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
     ii) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
     iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
     iv) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

$$\arg(w_1) = \arg\left(\frac{z_1^3 \cdot z_2}{\overline{z_1}^5}\right) \underbrace{=}_{\text{i) y ii)}} \arg(z_1^3) + \arg(z_2) - \arg(\overline{z_1}^5) \underbrace{=}_{\text{iii)}} 3\arg(z_1) + \arg(z_2) - 5\arg(\overline{z_1})$$

$$\arg(z_1) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \quad \arg(z_2) = \arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$$

pero como el argumento se encuentra entre 0 y 2π entonces $\arg(z_2) = \dfrac{11}{6}\pi$.

$$\arg(\overline{z_1}) = \arg(1-i) \underbrace{=}_{\text{iv)}} \frac{7}{4}\pi$$

Observación:

Para calcular el argumento del número complejo $\sqrt{3}-i$, primero identificamos sus componentes: la parte real es $\sqrt{3}$ y la parte imaginaria es -1. Esto nos indica que el número se ubica en el cuarto cuadrante del plano complejo, ya que la parte real es positiva y la parte imaginaria negativa.

El argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector que lo representa con el eje real positivo, medido en sentido antihorario desde el eje real positivo hasta el vector.
Para calcular este argumento, usamos la fórmula:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

Reemplazando los valores del número complejo $z = \sqrt{3} - i$, tenemos:

$$\arg(\sqrt{3} - i) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Sabemos que:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30° \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$$

Para convertir a radianes, recordamos que $180° = \pi$ radianes. Entonces:

$$-30° = -\frac{\pi}{6}$$

Pero recordemos que el argumento es un número entre 0 y 2π, entonces el argumento de $\sqrt{3} - i$ es:

$$\arg(\sqrt{3} - i) = \frac{11}{6}\pi$$

Luego, reemplazando obtenemos que:

$$3\arg(z_1) + \arg(z_2) - 5\arg(\overline{z_1}) = 3 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{11}{6}\pi - 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\pi\right) \Rightarrow \boxed{\arg(w_1) = \frac{11}{6}\pi}$$

b) **Resolver la ecuación $z^2 = w_2$.**

Sea $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Queremos que esto sea igual a $-5 + 12i$. Por lo tanto, igualamos partes reales e imaginarias:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

Además, como $z^2 = -5 + 12i$, su módulo debe coincidir con el módulo de z^2. Entonces:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = |-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

Sumamos las dos primeras ecuaciones:

$$(x^2+y^2)+(x^2-y^2)=13+(-5) \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow |x|=2$$

Restamos las dos primeras ecuaciones:

$$(x^2+y^2)-(x^2-y^2)=13-(-5) \Rightarrow 2y^2=18 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow |y|=3$$

De $2xy=12 \Rightarrow xy=6$, y como $xy>0$, deducimos que x e y tienen el mismo signo.
Entonces las posibles soluciones son:

- $x=2$, $y=3 \Rightarrow z=2+3i$
- $x=-2$, $y=-3 \Rightarrow z=-2-3i$

Finalmente, las soluciones buscadas de la ecuación $z^2=-5+12i$ son:

$$\boxed{z_1=2+3i \quad \text{y} \quad z_2=-2-3i}$$

2. **Sean $\mathbb{L}_1$ la recta que pasa por los puntos $(2,-1,2)$ y $(4,-3,2)$, $\mathbb{L}_2$ la recta de ecuación paramétrica $X=\lambda(1,-1,0)+(1,-6,-2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y π el plano de ecuación $3x-2y-z=12$.**

   a) **Comprobar que las rectas son paralelas y dar una ecuación implícita del plano que las contiene.**

Recordemos que dos rectas son paralelas sí y sólo sí sus vectores directores son múltiplos entre sí.

Los vectores directores son:

- Para $\mathbb{L}_1$: $\vec{v}_1=\vec{P}_2-\vec{P}_1=(4,-3,2)-(2,-1,2)=(2,-2,0)$.
- Para $\mathbb{L}_2$: el vector director dado es $\vec{v}_2=(1,-1,0)$.

Como $\vec{v}_1=2\cdot(1,-1,0)=2\vec{v}_2$, las rectas son paralelas.

Para hallar una ecuación del plano que contiene ambas rectas, tomamos un punto de cada una y los restamos para tener un vector director del plano.

$$\vec{P}_1=(2,-1,2)\in\mathbb{L}_1 \quad \text{y} \quad \vec{Q}=(1,-6,-2)\in\mathbb{L}_2.$$

El vector entre estos dos puntos es:

$$\vec{v}_3=\vec{Q}-\vec{P}_1=(1-2,-6+1,-2-2)=(-1,-5,-4).$$

Un plano que contiene a $\mathbb{L}_1$ y a $\mathbb{L}_2$ debe contener al punto $\vec{P}_1$ y a los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3$, que están en el plano. Entonces, una ecuación paramétrica del plano es:

$$X=\alpha(2,-2,0)+\beta(-1,-5,-4)+(2,-2,2), \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Luego, el vector normal del plano es el producto vectorial:

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix}=((-2)(-4)-(0)(-5),-((2)(-4)-(0)(-1)),(2)(-5)-(-2)(-1))$$

$$\vec{n} = (8, 8, -12)$$

Entonces, recordemos que la ecuación ímplicita del plano es:

$$\vec{X} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$(x, y, z) \cdot (8, 8, -12) = (2, -1, 2) \cdot (8, 8, -12)$$

Desarrollando:

$$8x + 8y - 12z = 16 - 8 - 24 \Rightarrow 8x + 8y - 12z = -16$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es: $\boxed{8x + 8y - 12z = -16}$.

b) **Hallar** $\pi \cap \mathbb{L}_2$**.**

La intersección entre el plano $\pi : 3x - 2y - z = 12$ y la recta $\mathbb{L}_2$ se obtiene reemplazando la ecuación paramétrica de $\mathbb{L}_2$ en la ecuación del plano.

$$X = \lambda(1, -1, 0) + (1, -6, -2), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow X = (\lambda + 1, -\lambda - 6, -2)$$

$$\Rightarrow x = \lambda + 1, \quad y = -\lambda - 6, \quad z = -2$$

Sustituimos en el plano:

$$3(\lambda + 1) - 2(-\lambda - 6) - (-2) = 12$$

$$3\lambda + 3 + 2\lambda + 12 + 2 = 12 \Rightarrow 5\lambda + 17 = 12 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Reemplazamos en la recta:

$$x = -1 + 1 = 0, \quad y = 1 - 6 = -5, \quad z = -2.$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \cap \mathbb{L}_2 = \{(0, -5, -2)\}}$$

3. **Clasificar el sistema lineal según la cantidad de soluciones, para cada valor real de** α**:**

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ \qquad y + z = \alpha \\ \qquad \alpha y - z = 1 \end{cases}$$

Vamos a representar el sistema de ecuaciones en forma matricial escribiendo la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora resolvemos usando el método de triangulación (eliminación de Gauss).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 - f_2 \to f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \to f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha f_1 - f_4 \to f_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha^2-1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ y + z = \alpha \\ z = -1 \\ (\alpha+1)z = \alpha^2 - 1 \end{cases}$$

Observemos que en la fila 3 obtenemos que $z = -1$. Reemplazando en la fila 4 tenemos que:

$$(\alpha+1)(-1) = \alpha^2 - 1 \Rightarrow -\alpha - 1 = \alpha^2 - 1 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1) = 0$$

Notemos que $\alpha(\alpha+1) = 0$ sí y solo sí $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$.

Aplicamos el Teorema de Rouché–Frobenius.

- Si $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$, la última fila es combinación lineal de las anteriores:

$$\rho(A) = \rho(A|b) = 3 \quad \text{(número de incógnitas)} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

- Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$, la última fila es no nula:

$$\rho(A) = \rho(A|b) = 4 > 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

4. **Sean** $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ a-b & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, con** $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$**.**

   a) **Hallar** $\det(A)$ **sabiendo que** $\det(B) = \frac{4\det(A)}{a-b}$ **y** $\det(AB^2C^T) = 16$**.**
   Usamos propiedades del determinante:

$$\det(AB^2C^T) = \det(A) \cdot \det(B^2) \cdot \det(C^T) = \det(A) \cdot (\det(B))^2 \cdot \det(C)$$

   Calculamos el determinante de C desarrollando por la última fila:

$$\det(C) = (a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

   Sustituimos todo:

$$16 = \det(A) \cdot \left(\frac{4\det(A)}{a-b}\right)^2 \cdot (a-b)^2$$

$$16 = \det(A) \cdot \frac{16\det(A)^2}{(a-b)^2} \cdot (a-b)^2 \Rightarrow 16 = \det(A)^3 \Rightarrow \det(A)^3 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A) = 1}$$

$b)$ **Si $b = 0$, ¿para cuál valor de $a \in \mathbb{R}$ vale que $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?**

Si $b = 0$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $C \cdot C^{-1} = I$:

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para que sea la matriz identidad:

$$a = 1 \quad \text{y} \quad 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$