PRÁCTICA 7

1. Pruebe que todas las aristas de un árbol son aristas de corte.

2. Un vértice se dice *pendiente* si tiene grado 1. Muestre que todo vértice no pendiente de un árbol es un vértice de corte.

3. Muestre que si $T = (V, E)$ es un árbol con exactamente 2 vértices pendientes entonces es un camino.

4. Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que todo vértice no pendiente tiene grado 3. Muestre que el número de vértices es par.

5. Pruebe que si $T = (V, E)$ es un bosque entonces $|E| = |V| - k$ donde k es el número de componentes conexas.

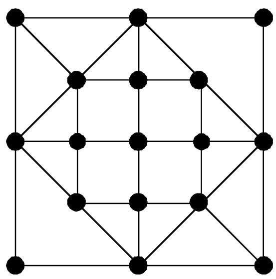
6. Sea G un grafo. Un subgrafo H de G se llama *subgrafo generador* si $V(G) = V(H)$. Si un subgrafo generador es un árbol se lo llama *árbol generador*. Pruebe que todo grafo conexo contiene un árbol generador.

7. Pruebe que si G es un grafo con k componentes conexas, entonces tiene al menos $n - k$ aristas, donde $n = |V(G)|$.

8. Sea $T = (V, E)$ un bosque tal que $|V| = 109$. Calcule $|E|$ sabiendo que T tiene 7 componentes conexas.

9. Demuestre que un árbol con un vértice de grado 5 tiene al menos 5 hojas.

10. Determine el número de vértices, el número de aristas y el número de regiones del siguiente grafo. Verificar que se cumple la fórmula de Euler para grafos planares conexos.



11. Encuentre el número de caras de cualquier grafo planar conexo con 6 vértices y 10 aristas. Dibuje al menos dos de esos grafos.

12. Sea G un grafo planar conexo con 9 vértices y tal que sus vértices tienen grado $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5$. Halle el número de aristas y de caras de G.

13. Demuestre que si G es un grafo planar con k componentes conexas entonces $v - e + f = k + 1$ donde v, e y f son el número de vértices, aristas y caras de G.

14. Probar que el grafo que se obtiene al borrar dos aristas cualesquiera del grafo K_6 se obtiene un grafo no planar. ¿Es cierto que si borramos tres aristas cualesquiera del grafo K_6 se obtiene un grafo no planar?.

15. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso.

    a) Sea G un grafo simple que se obtiene de agregar una arista a un árbol, entonces $|E(G)| = |V(G)|$.

    b) Todo grafo conexo planar bipartito con por lo menos tres vértices tiene al menos un vértice de grado 3.

    c) Sea G un grafo bosque con exactamente 3 componentes conexas. Si H es un grafo simple que se obtiene de agregar 3 aristas a G, entonces H no es un bosque.

    d) Si G es un grafo simple no planar, entonces G no es un bosque.

16. Sea G un grafo simple con $|V(G)| = 12$. Suponiendo que G tiene 4 vértices universales y un conjunto independiente S con exactamente 8 elementos.

    a) ¿Alguno de los vértices universales puede pertencer a S?

    b) Calcular $|E(G)|$.

    c) Probar que G no es planar.

17. Sea G un grafo plano, simple y conexo. Suponiendo que:

    - G admite una descomposición en dos copias de C_3, una copia de C_4 y una copia de K_4,
    - $|V(G)| = 11$ con cinco vértices de grado ℓ, tres vértices de grado $\ell+1$, dos vértices de grado $\ell+2$ y uno de grado $\ell+3$.

    a) Calcular ℓ.

    b) Hallar la cantidad de caras de G.

    c) Decidir si G es bipartito.

18. Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Suponiendo que una posible descomposición de G es P_3, P_4, C_4, C_5.

    a) Calcular $|E(G)|$, y probar que $6 \leq |V(G)| \leq 16$.

    b) Suponiendo que G es k-regular. Probar que $|V(G)| = 14$ o $|V(G)| = 7$.

    c) Probar que G no es un bosque. ¿G es bipartito?

19. Sea G un grafo simple k-regular con al menos una arista tal que $|V(G)| = 5$.

    a) Probar que k es 2 o 4.

    b) Para cada valor de k, calcular la cantidad de aristas de G.

    c) Decidir para que valores de k el grafo G es planar. ¿Cuántas caras tiene?

20. *a*) Sea G un grafo plano. Probar que la cantidad de caras de G con longitud impar es par.

    b) Sea G un grafo plano sin caras de longitud par. Probar que $|V(G)| - |E(G)|$ es par si y solo si la cantidad de componentes conexas de G es impar.

21. *a*) Sea G un grafo. Probar que si G no es planar, entonces $|V(G)| \geq 5$ y $|E(G)| \geq 9$.

    b) Sea G un grafo simple planar con al menos tres vértices tal que $\overline{G}$ es planar. Probar que $\binom{n}{2} \leq 6n - 12$, donde $n = |V(G)|$. Deducir que $|V(G)| \leq 10$.