Práctica 2 - Geometría del plano y el espacio

Geometría en el plano

Ejercicio 1. Sean $A = (1, -2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 4)$ vectores en el plano.

1. Graficar A, B y C.
2. Efectuar gráficamente (o con ayuda del GeoGebra) las siguientes operaciones:

   i) $A + B$, ii) $2 \cdot A$, iii) $-A$, iv) $\frac{1}{3} \cdot A$, v) $2 \cdot A + 3 \cdot B$, vi) $A - C$, vii) $2 \cdot A + C$.
3. Efectuar, analíticamente, las operaciones realizadas gráficamente en el ítem anterior.

Ejercicio 2.

1. Dado el vector $v = (3, 4)$, encontrar un vector w distinto de v tal que w sea un múltiplo de v y verifique:

   i) $\|w\| = 7$, ii) $\|w\| = 5$, iii)$\|w\| = 2$.
2. Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ o cualquier otro vector que prefiera y responda a las siguientes preguntas ayudándose, si lo prefiere, con el GeoGebra.
   i) Graficar $\alpha \cdot w$ con $\alpha \geq 0$.
   ii) Graficar $\beta \cdot w$ con $-1 \leq \beta \leq 2$.
   iii) Graficar $t \cdot w$ con $t \in \mathbb{R}$.
   iv) Graficar $t \cdot w + (0, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$.
3. Elegir vectores $v \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera, preferentemente utilizando el GeoGebra, y responder, en base a los resultados obtenidos, las siguientes preguntas.
   i) ¿Para qué valores del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ resulta la norma de $\lambda \cdot v$ mayor que la norma de v?
   ii) ¿Para qué valores del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ resulta la norma de $\lambda \cdot v$ menor que la norma de v?
   iii) ¿Para qué valores del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ resulta que $\|\lambda \cdot v\| = 1$?

Ejercicio 3. Considere $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 2)$, $D = (2, 1)$, $E = (-1, 2)$, $F = (-2, -1)$.

1. Realizar las siguientes operaciones:

   i) $C \cdot D$, ii) $D \cdot C$, iii) $E \cdot E$, iv) $C \cdot (A + B)$, v) $C \cdot A + C \cdot B$, vi) $(E - F) \cdot (E - F)$, vii) $\|E\|^2 - 2E \cdot F + \|F\|^2$.
2. Calcular los seis ángulos entre los 6 vectores e indique cuáles de ellos forman un par de vectores ortogonales. Verificar la respuesta usando el GeoGebra.

Ejercicio 4. Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L} : X = \alpha(-2,3) + (2,2)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$: $P_1 = (2,2)$, $P_2 = (-2,3)$, $P_3 = (0,0)$, $P_4 = (12,-13)$, $P_5 = (2,-1)$. Graficar en un papel y luego verificar la correctitud del dibujo usando el GeoGebra.

Ejercicio 5. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : X = t \cdot (-1,1) + (3,-3)$ y $\mathbb{L}_2 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 3\}$.

1. Hallar, para cada recta, tres puntos que pertenezcan a ella y tres que no.
2. Encontrar, para cada recta, los puntos donde corta a los ejes coordenados.
3. Para el punto $A = (2,-2) \in \mathbb{L}_1$ (respectivamente $A = (4,1) \in \mathbb{L}_2$), encontrar todos los puntos $B \in \mathbb{L}_1$ (respectivamente $B \in \mathbb{L}_2$) que están a distancia 3 de A.

Ejercicio 6. Decidir si las siguientes ternas de puntos corresponden a puntos alineados o no.

1. $A = (1,2)$, $B = (2,3)$ y $C = (0,1)$.
2. $A = (1,2)$, $B = (2,3)$ y $C = (-1,1)$.

Ejercicio 7. Hallar una ecuación paramétrica para las siguientes rectas.

1. La recta de ecuación $y = 3x - 2$.
2. La recta de ecuación $2x - 3y = 5$.
3. La recta de ecuación $y = 4$.
4. La recta de ecuación $x = -5$.

Ejercicio 8.

1. Hallar 3 vectores que sean ortogonales al $(2,-3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar en papel y usando el GeoGebra.
2. Hallar todos los vectores perpendiculares al $(2,-2)$ que tengan norma 1. Graficar en papel y usando el GeoGebra.
3. Hallar una ecuación paramétrica y una implícita de la recta que es perpendicular a $\mathbb{L} : X = t(2,-3) + (5,7)$ y que pasa por el punto $P = (1,-3)$.

Ejercicio 9.

1. Graficar las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{L}_1 : X = t \cdot (-1,-1) + (2,-2), \quad \mathbb{L}_2 : X = t \cdot (-1,1) + (2,-2),$$
$$\mathbb{L}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, \quad \mathbb{L}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}$$

2. Hallar la ecuación de una recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pase por el $(5,2)$ y la de una recta paralela a $\mathbb{L}_3$ que pase por el $(2,5)$.
3. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a $\mathbb{L}_2$ que pase por el punto $(1,2)$ y la de una recta perpendicular a $\mathbb{L}_4$ que pase por $(-1,4)$.

4. Hallar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}_3$ y para $\mathbb{L}_4$.

Ejercicio 10. Encontrar una ecuación para las siguientes rectas.

1. La recta que pasa por los puntos $A = (1, -4)$ y $B = (-1, -3)$.
2. La recta que es paralela a la recta $\mathbb{L} : X = t \cdot (-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por el punto $P = (1, -4)$.
3. La recta que es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = t \cdot (-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por el punto $P = (1, -4)$.
4. La recta que es paralela a la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$ y pasa por el punto $(2, 0)$.
5. La recta que es perpendicular a la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$ y pasa por el punto $(2, 0)$.
6. La recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a los puntos $(4, -5)$ y $(\frac{1}{2}, 3)$.

Geometría en el espacio

Ejercicio 11. Considerar los vectores en $\mathbb{R}^3$: $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (-1, 2, -0)$.

1. Graficar en una hoja A, B y C. Luego verificar el dibujo con el GeoGebra.
2. Efectuar las siguientes operaciones y verificarlas usando el GeoGebra:
   i) $A + C$, ii) $3 \cdot C$, iii) $-A + B$, iv) $5 \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B$, v) $-A - 2 \cdot (7B + C)$.

Ejercicio 12. Dado $v = (1, 3, -2)$ hallar un vector w tal que:

1. Su norma sea 5 y tenga la misma dirección que v.
2. Su norma sea $\frac{1}{2}$ y su dirección sea la misma que la de v pero de sentido contrario.

Ejercicio 13.

1. Probar que $\|\lambda\, v\| = |\lambda|\|v\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in \mathbb{R}^i$, con $i = 2, 3$.
2. Probar que $\left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| = 1$ para todo $v \in \mathbb{R}^i$, con $i = 2, 3$.
3. Encontrar vectores de norma uno con la misma dirección que $u = (4, 5)$ y $v = (-4, 1, 3)$.

Ejercicio 14. Encontrar una ecuación paramétrica de:

1. La recta que tiene dirección $v = (-4, 5, 2)$ y que pasa por $(-4, 6, 8)$.
2. La recta que pasa por los puntos $(-2, 3, 4)$ y $(-1, 3, 1)$.
3. La recta que es paralela al eje z y que pasa por $(1, 2, 3)$.
4. La recta paralela a $\mathbb{L} : X = t(2, 4, -5) + (0, 3, -1)$ que pasa por $(3, -1, 2)$.

Ejercicio 15. Sean $A = (1, 1, 1)$; $B = (1, -1, 0)$; $C = (2, -1, -1)$ y $D = (2, 3, -1)$.

1. Calcular la longitud de A, la de B y la distancia entre A y B (pensados ambos como puntos en el plano).
2. Calcular a mano $A \cdot B$; $A \cdot (B + C)$; $A \cdot B + A \cdot C$. Verificar las cuentas usando el GeoGebra.
3. Calcular: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $A \cdot (A \times B)$, $B \cdot (A \times B)$, $A \times (B + C)$, $A \times B + A \times C$, $(A \times B) \cdot C$, $A \cdot (B \times C)$. Verificar las cuentas usando el GeoGebra.

Ejercicio 16.

1. Hallar 3 vectores del espacio que sean perpendiculares al $(1, 3, -4)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados?
2. Hallar una ecuación implícita y una paramétrica del plano que es perpendicular a $\mathbb{L}$: $X = t \cdot (1, 3, -4) + (5, 7, 0)$ y que pasa por el punto $P = (1, -3, 2)$.
3. Hallar un vector ortogonal al $(-1, 0, 2)$ que tenga norma igual a 2.
4. Graficar, usando GeoGebra, los objetos geométricos descriptos en los items anteriores.

Ejercicio 17. Sea Π el plano de ecuación $(x, y, z) = \alpha \cdot (5, 2, -1) + \beta \cdot (2, -1, 3) + (7, 2, -8)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Decidir si $A = (14, 3, -6)$ pertenece a Π.
2. Decidir cuáles de los siguientes vectores son paralelos a Π:

   $v_1 = (5, 2, -1)$, $v_2 = 2 \cdot (5, 2 - 1) - 7 \cdot (2, -1, 3)$, $v_3 = (-7, -10, 15)$, $v_4 = (-7, -10, 4)$.

Ejercicio 18. Dado el plano $\Pi : 2x - 5y + 3z = 11$.

1. Encontrar $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que el punto $(2, a, 7) \in \Pi$.
2. ¿Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, 3a, 5a) \in \Pi$? Responder a la misma pregunta para el punto $(0, 3a, 5a)$.

Ejercicio 19.

1. Hallar tres ecuaciones paramétricas distintas para el plano $\Pi : 2x - 3y + 6z = 3$.
2. Hallar tres ecuaciones implícitas distintas para el plano $\Pi : X = \alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta(0, -2, 1) + (6, 7, 8)$.
3. Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(1, 3, 4)$, $(-1, 5, -7)$ y $(3, -1, 2)$.
4. Hallar una ecuación para el plano que contiene a la recta $\mathbb{L} : X = t \cdot (-1, 2, 3) + (3, 4, 1)$ (para $t \in \mathbb{R}$) y que pasa por el punto $(1, 1, -1)$.
5. Hallar una ecuación para el plano que contiene al eje x y al eje z.

6. Hallar una ecuación para el plano paralelo a la recta $\mathbb{L} : X = \alpha(1, 2, -3) + (3, 5, 6)$ y que contiene a la recta $\mathbb{L}' : X = \beta \cdot (3, -5, 6) + (1, -2, 3)$.

7. Encontrar una recta que sea perpendicular al plano $\Pi : 2x - 3y + z = 8$ y que pase por $(-1, 0, 2)$.

8. Hallar una ecuación para el plano paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + 6z = -1$ y que pase por $(1, -2, 1)$.

9. Hallar una ecuación para el plano perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \beta \cdot (1, -3, 4) + (1, 6, 7)$ y que pase por el origen.

10 Hallar una ecuación para el plano que contiene a la recta $\mathbb{L} : X = t \cdot (2, 1, 0) + (1, -4, 1)$ y al punto $P = (1, -2, -2)$.

11. Comprobar si los puntos $(8, 2, 4)$, $(4, 2, 8)$, $(-2, 0, 1)$ y $(1, -1, 3)$ son coplanares; es decir, si pertenecen a un mismo plano.

12. Sea Π el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda \cdot (-1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda \cdot (-2, 4, -2) + (0, -2, 1)$. Dar una ecuación paramétrica y una implícita para Π.

Geometría en el plano y en el espacio

Ejercicio 20. Sea $ABCD$ un paralelogramo (cuadrilátero de lados opuestos paralelos y congruentes) tal que: $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$ y $D = (7, 3)$. Calcular:

1. Las coordenadas del punto C.
2. La medida de las diagonales AC y BD.
3. El perímetro del paralelogramo.
4. El punto medio de los lados AB y BC.
5. Encontrar varios puntos sobre el lado AB y otros sobre el lado BC.
6. Decidir cuáles de los siguientes puntos son puntos del paralelogramo (del borde o interior)
$$E = \frac{1}{4} \cdot D \ , \ F = 0,5 \cdot B + D \ , \ G = 0,5 \cdot B + 2D \ , \ H = 0,8 \cdot B + \frac{1}{3} \cdot D \ , \ I = (6, 7).$$
7. Encontrar una fórmula que permita obtener todos los puntos del interior del paralelogramo.

Ejercicio 21. Sea Π el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda \cdot (-1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda \cdot (-2, 4, -2) + (0, -2, 1)$. Dar una ecuación paramétrica y una implícita de Π.

Ejercicio 22. Encontrar una recta $\mathbb{L}$ que sea perpendicular a $\mathbb{L}_1 : X = \lambda \cdot (1, -3, 4) + (1, -2, 1)$, paralela al plano $\Pi : -x + y - 2z = 9$ y que tenga un punto en común con $\mathbb{L}_2 : X = t \cdot (-1, 4, 5) + (0, 3, 2)$.

Ejercicio 23. Dadas: $\mathbb{L}_1 : X = \lambda \cdot (-1, 2, 0) + (0, -1, 1)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta que pasa por los puntos $(-2, 0, 2)$ y $(0, -1, 1)$, hallar, si es posible, la ecuación de un plano que contenga a $\mathbb{L}_1$ y tal que no contenga a ningún punto de $\mathbb{L}_2$.

Ejercicio 24. Dados los planos $\Pi_1 : 2x - y - 3z = -1$ y $\Pi_2 : x - 3y - z = 3$. Hallar, si es posible, la ecuación de una recta que no tenga puntos en común con ninguno de los planos dados.

Ejercicio 25. Sean $A = (2, -1, 1)$, $B = (0, 2, -1)$ y $C = (1, 0, -1)$. Obtener, si fuera posible, $D \in \mathbb{R}^3$ de modo tal que A, B, C y D determinen un paralelogramo. Decidir si este vector hallado es el único que verifica lo pedido. Hallar el perímetro del paralelogramo $ABCD$.