

Resolución 1er. Recuperatorio - 21 de noviembre de 2024

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0$.

Identificamos los coeficientes:

$$a = 1, \quad b = -(3 + i), \quad c = 4$$

Usamos la fórmula general para raíces:

$$z_{1,2} = \frac{-b + w}{2a}, \quad \text{donde } w^2 = b^2 - 4ac$$

Calculamos el discriminante:

$$b = -(3 + i) \Rightarrow b^2 = (-3 - i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$

$$4ac = 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16$$

$$w^2 = b^2 - 4ac = (8 + 6i) - 16 = -8 + 6i$$

Queremos encontrar $w \in \mathbb{C}$ tal que:

$$w^2 = -8 + 6i$$

Supongamos que $w = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Igualamos partes real e imaginaria:

$$a^2 - b^2 = -8$$

$$2ab = 6$$

Además, como $w^2 = -8 + 6i$, su módulo debe coincidir con el módulo de w^2 . Entonces:

$$|w|^2 = a^2 + b^2 = |-8 + 6i| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases}$$

Sumamos las dos primeras ecuaciones:

$$(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) = 10 + (-8) \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow |a| = 1$$

Restamos las dos primeras ecuaciones:

$$(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) = 10 - (-8) \Rightarrow 2b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow |b| = 3$$

De $2ab = 6 \Rightarrow ab = 3$. Como $ab > 0$, deducimos que a y b tienen el mismo signo.

Entonces:

$$a = 1, \quad b = 3 \quad \Rightarrow w = 1 + 3i$$

$$a = -1, \quad b = -3 \quad \Rightarrow w = -1 - 3i$$

Volvemos a la fórmula:

$$z_{1,2} = \frac{-b + w}{2a}$$

Recordemos que:

$$-b = 3 + i, \quad w = 1 + 3i$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3+i) + (1+3i)}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \\ z_2 &= \frac{(3+i) + (-1-3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i \end{aligned}$$

Luego,

$$S = \{2+2i, 1-i\}$$

b) $z^3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Queremos resolver la ecuación:

$$z^3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Escribimos el número complejo en forma trigonométrica.

Llamamos:

$$w = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ahora calculamos el módulo de w :

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

Calculamos el argumento de w . Notamos que w se encuentra en el cuarto cuadrante (porque su parte real es positiva y su parte imaginaria es negativa).

$$\tan(\beta) = \frac{|\operatorname{Im}(w)|}{|\operatorname{Re}(w)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

Como está en el cuarto cuadrante, el argumento es:

$$\arg(w) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Igualamos los módulos.

Como $|w| = 2$, entonces

$$|z^3| = |w| \Rightarrow |z|^3 = |w| \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{2},$$

y el argumento de z se obtiene al igualar al argumento de w :

$$\arg(z^3) = \arg(w) \Rightarrow 3\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \arg(z) = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Queremos las tres soluciones distintas en el intervalo $[0, 2\pi)$. Entonces, buscamos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$0 \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} < 2\pi$$

Multiplicamos todo por 12:

$$0 \leq 7\pi + 8k\pi < 24\pi \Rightarrow -7\pi \leq 8k\pi < 17\pi \Rightarrow -\frac{7}{8} \leq k < \frac{17}{8} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2\}$$

Veamos las soluciones para cada k .

Para $k = 0$:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]$$

Para $k = 1$:

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{12}\right) \right]$$

Para $k = 2$:

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \right]$$

Luego, las tres soluciones son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \\ z_1 &= \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{12}\right) \right] \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} \left[\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \right] \end{aligned}$$

2. Sean \mathbb{L} la recta de ecuación paramétrica $X = \lambda(1, -1, 0) + (-1, -4, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y π el plano de ecuación implícita $3x + 2y - z = 4$.

- a) Hallar una ecuación implícita del plano que contiene a \mathbb{L} y es perpendicular a π .

La recta \mathbb{L} pasa por el punto $P = (-1, -4, -2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

El plano π tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (3, 2, -1)$. Como queremos que el plano buscado sea perpendicular a π , su vector normal será perpendicular a \vec{n}_π .

Tomamos el producto vectorial entre \vec{v} y \vec{n}_π para obtener un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 0, -(-1 - 0), 2 + 3) = (1, 1, 5)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 5)$$

El plano buscado pasa por $P = (-1, -4, -2)$ y tiene vector normal $(1, 1, 5)$, por lo tanto su ecuación es:

$$\vec{X} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 5) = (-1, -4, -2) \cdot (1, 1, 5)$$

Desarrollando:

$$x + y + 5z = -1 - 4 - 10 \Rightarrow x + y + 5z = -15$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es: $x + y + 5z = -15$.

- b) Hallar una ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $(1, 1, 3)$.

El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (3, 2, -1)$, que también es el vector director de cualquier recta perpendicular a ese plano.

Entonces, una recta perpendicular a π y que pase por $(1, 1, 3)$ tiene ecuación paramétrica:

$$X = \lambda(3, 2, -1) + (1, 1, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. a) Clasificar el sistema lineal según la cantidad de soluciones, para cada valor real de k :

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + kz = -4 \end{cases}$$

Como el sistema es cuadrado, puedo usar el determinante.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & k & -4 \end{array} \right| \xrightarrow[F_3]{=} 2 \cdot \left| \begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{array} \right| + k \cdot \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right| = 2 \cdot (-7) + k \cdot 2 = 2k - 14$$

Analizamos para que valores de $k \in \mathbb{R}$, $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = 2k - 14 = 0 \Leftrightarrow k = 7$$

Luego, si $k \in \mathbb{R} - \{7\} \Rightarrow \det(A) \neq 0$. Por lo tanto, el sistema es un Sistema Compatible Determinado (SCD).

Veamos que pasa para $k = 7$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[f_1-2f_2 \rightarrow f_2]{ } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[f_1-f_3 \rightarrow f_3]{ } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow[2f_2-f_3 \rightarrow f_3]{ } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, se observa que el rango de la matriz de coeficientes es $\rho(A) = 2$ y el rango de la matriz ampliada es $\rho(A|b) = 2$. Como ambos rangos son iguales, el sistema es compatible, es decir, tiene al menos una solución. Sin embargo, dado que el número de incógnitas es $n = 3$ y el rango es menor que n , se concluye que el sistema es compatible indeterminado, lo que implica que posee infinitas soluciones.

b) Resolver el sistema para $k = 7$.

Utilizando la matriz anterior obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 4 \\ -2y - z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos z :

$$-2y - z = 4 \Rightarrow z = -2y - 4, y \in \mathbb{R}$$

Sustituimos esta expresión en la primera ecuación:

$$2x - 4y + 5(-2y - 4) = 4$$

$$2x - 4y - 10y - 20 = 4$$

$$2x - 14y = 24 \Rightarrow x = 7y + 12, y \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$(x, y, z) = (7y + 12, y, -2y - 4), y \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{y(7, 1, -2) + (12, 0, -4), y \in \mathbb{R}}$$

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcular el determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = -8$$

Calculamos la determinante de la matriz desarrollando por la primera fila:

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b-4 & c-4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a-4 & b-4 \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes de 2×2 :

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b-4 & c-4 \end{vmatrix} = b(c-4) - c(b-4) = bc - 4b - cb + 4c = 4c - 4b$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a-4 & b-4 \end{vmatrix} = a(b-4) - b(a-4) = ab - 4a - ab + 4b = 4b - 4a$$

Reemplazamos:

$$= 2(4c - 4b) - 2(4b - 4a) = 8c - 8b - 8b + 8a = 8a - 16b + 8c$$

Esto es igual a -8 :

$$8a - 16b + 8c = -8$$

Dividimos por 4:

$$2a - 4b + 2c = -2$$

Multiplicamos por -1:

$$-2a + 4b - 2c = 2$$

Ahora volvemos al cálculo de $|M|$:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$= a \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculamos cada determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - 1(2) = -2 - 2 = -4$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - 0(2) = -2$$

Entonces:

$$|M| = a(-2) - b(-4) + c(-2) = -2a + 4b - 2c$$

Pero antes obtuvimos que:

$$-2a + 4b - 2c = 2$$

Por lo tanto:

$|M| = 2$