Resolución 2do Parcial - 19 de noviembre de 2024

Ejercicio 1

Sean

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \right\} \quad \textbf{y} \quad T = \textbf{gen}\{(1, 0, 1), (4, 1, 3)\}.$$

a) **Hallar una base de $S + T$.**

Primero, hallamos una base de S resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $x = 2z$. Luego, reemplazamos en la primera ecuación.

$$2z - y - z = 0 \Rightarrow z - y = 0 \Rightarrow y = z$$

Entonces, $(x, y, z) = (2z, z, z) = z(2, 1, 1)$ con $z \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Base de $S : \{(2, 1, 1)\}$.

Ahora queremos una base del subespacio suma $S + T$. Tomamos los tres vectores y verificamos si son LI.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[2F_1 - F_3 \to F_3]{F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Notemos que la segunda y tercera fila son iguales. Entonces los tres vectores no son LI. Luego, una base de $S + T$ es $\{(2, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

b) **Hallar una base de $T^{\perp}$.**

Para resolver este ejercicio debemos buscar todos los vectores (x, y, z) ortogonales a los dos generadores de T :

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (4, 1, 3) = 0 \end{cases}$$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $z = -x$. Sustituimos esto en la segunda ecuación:

$$4x + y - 3x = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

Entonces, $(x, y, z) = (x, -x, -x) = x(1, -1, -1)$ con $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, una base de $T^{\perp} : \{(1, -1, -1)\}$.

Ejercicio 2

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2,\ -x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 3x_3,\ -x_2 + x_3),$$

y sea $w = (-1, 2, a, 1)$.

a) **Hallar $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que $w \in \mathbf{Im}(F)$ (la imagen de F).**

Queremos que exista $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $F(x) = w$. Entonces planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = a \\ -x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación obtenemos que $x_3 = x_2 + 1$. Luego, reemplazamos en la segunda ecuación:

$$-x_1 + x_2 + x_2 + 1 = 2 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 1$$

Ahora reemplazamos en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= a \\ (2x_2 - 1) + x_2 - 3(x_2 + 1) &= a \\ 3x_2 - 1 - 3x_2 - 3 &= a \\ -4 &= a \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = -4$. Observamos la primera ecuación también resulta verdadera.
Otra forma de resolver el sistema podría ser utilizando el método de eliminación de Gauss.

b) **Hallar una base de $\mathbf{Nu}(F)$ (el núcleo de F).**

Buscamos los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ tales que $F(x) = (0, 0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = 0 \\ -x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $x_1 = 2x_2$.
De la cuarta ecuación obtenemos que $x_3 = x_2$.
Luego, si reemplazamos en la segunda ecuación:

$$-2x_2 + x_2 + x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Ahora, reemplazamos en la tercera ecuación:

$$2x_2 + x_2 - 3x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Entonces todos los vectores del núcleo tienen la forma:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_2, x_2) = x_2 \cdot (2, 1, 1), x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Base de Nu}(F) : \{(2, 1, 1)\}$$

Ejercicio 3

Sean $B = \{(0,0,2);\ (0,1,-1);\ (2,1,0)\}$ y $B' = \{(1,0,0,0);\ (1,1,1,0);\ (1,-1,0,1);\ (0,1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la fórmula de T.

Para hallar la fórmula de T necesitamos $M_{\mathrm{EE}}(T)$. Luego,

$$M_{\mathrm{EE}}(T) = C(\mathrm{B'},\mathrm{E}) \cdot M_{BB'} \cdot C(\mathrm{E},\mathrm{B})$$

Notemos que $C(\mathrm{B'},\mathrm{E})$ la construimos ubicando los vectores de la base B' en columnas. Entonces,

$$C(\mathrm{B'},\mathrm{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos $C(\mathrm{E},\mathrm{B})$.

Sabemos que $C(\mathrm{E},\mathrm{B}) = [C(\mathrm{B},\mathrm{E})]^{-1}$. Luego,

$$[C(\mathrm{B},\mathrm{E})]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Busquemos la inversa de $C(\mathrm{B},\mathrm{E})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2f_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2f_1 \to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1 \to F_1} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2 \to F_2} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3 \to F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego,

$$[C(\mathrm{B},\mathrm{E})]^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$M_{\mathrm{EE}}(T) = C(\mathrm{B'},\mathrm{E}) \cdot M_{BB'} \cdot C(\mathrm{E},\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{EE}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$M_{\mathrm{EE}}(T) = \begin{bmatrix} -5/4 & 7/2 & 1/2 \\ 5/2 & -2 & -1 \\ 5/4 & 1/2 & -1/2 \\ -5/4 & 7/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ahora para hallar la fórmula de $T(x_1, x_2, x_3)$ multiplicamos $M_{\mathrm{EE}}(T)$ por un vector genérico $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{bmatrix} -5/4 & 7/2 & 1/2 \\ 5/2 & -2 & -1 \\ 5/4 & 1/2 & -1/2 \\ -5/4 & 7/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{5}{2}x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{5}{4}x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la fórmula de T es:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \Big(-\frac{5}{4}x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,\ \ \frac{5}{2}x_1 - 2x_2 - x_3,\ \ \frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3,\ \ -\frac{5}{4}x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \Big)$$

Ejercicio 4

Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & a+3 \\ 5 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. **Hallar** $a \in \mathbb{R}$ **para que** A **tenga un autovalor doble y** A **resulte diagonalizable.**

Para encontrar los autovalores de A, calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Entonces,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & a+3 \\ 5 & 0 & a^2-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9-\lambda & a+3 \\ 0 & a^2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(9-\lambda)(a^2-\lambda)$$

Para que A tenga un autovalor doble, dos de los factores del polinomio característico deben coincidir, es decir, o A tiene como autovalor doble a $\lambda = -2$ o a $\lambda = 9$. Como el otro autovalor es $\lambda = a^2$, consideramos las dos alternativas:

- $-2 = a^2 \Rightarrow a^2 = -2 \Rightarrow a \notin \mathbb{R}$
- $9 = a^2 \Rightarrow a = \pm 3$.

Entonces los posibles valores son $a = 3$ y $a = -3$. Analicemos si para estos valores la matriz resulta diagonalizable.

Caso $a = 3$.

La matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Para determinar si A es diagonalizable, tenemos que ver si es posible formar una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con autovectores de la matriz A.

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 9 \text{ (doble)}$$

Sabemos que a los autovalores -2 y 9 le corresponden autovectores linealmente independientes por ser autovalores reales y distintos.

Tenemos que analizar si es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor $\lambda_2 = 9$.

Busquemos entonces los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 9$ resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -11x_1 = 0 \\ 4x_1 + 6x_3 = 0 \\ 5x_1 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación (o la última) obtenemos que $x_1 = 0$. Reemplazando en la segunda ecuación tenemos que:

$$4 \cdot 0 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Luego, el conjunto solución es $(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0), x_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, como no fue posible encontrar dos autovectores linealmente independientes entre sí para $\lambda_2 = 9$, no es posible formar una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con autovectores de la matriz A. Por lo tanto, la matriz A **no** es diagonalizable para $a = 3$.

Caso $a = -3$.

La matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 9 \text{ (doble)}$$

Tenemos que analizar si es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor $\lambda_2 = 9$.

Busquemos entonces los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 9$ resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -11x_1 = 0 \\ 4x_1 = 0 \\ 5x_1 = 0 \end{cases}$$

Notemos que solo tenemos la condición de que $x_1 = 0$. Luego, el conjunto solución es $(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3) = x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1), x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Tomamos entonces como autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 9$ los vectores $v_1 = (0,1,0)$ y $v_2 = (0,0,1)$.

Como fue posible encontrar dos autovectores linealmente independientes para el autovalor que es raíz doble del polinomio característico, y como el otro autovalor real es -2 (distinto a 9) tiene un autovector que será linealmente independiente a los autovectores del autovalor 9, podemos asegurar entonces que es posible encontrar tres autovectores de A que sean linealmente independientes. Por lo tanto, podemos encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A, por lo tanto la matriz A es diagonalizable.