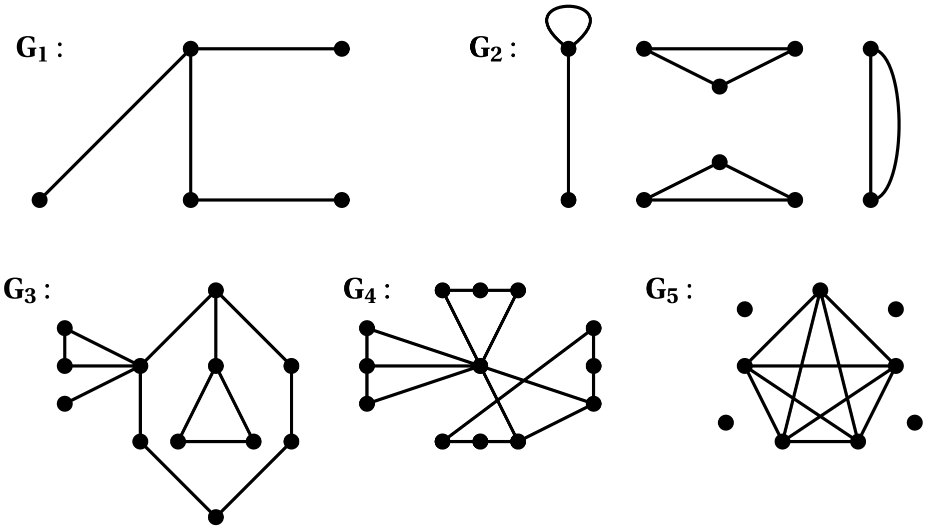
PRÁCTICA 6

1. Para cada uno de los siguiente grafos indique:

   a) Los vértices de corte.

   b) Las aristas de corte.



2. Sea G un grafo conexo con al menos tres vértices, y v un vértice de G de grado uno. Probar que el único vecino de v es un vértice de corte.

3. Probar que si G es un grafo conexo y e es una arista de corte de G, entonces $G-e$ tiene exactamente dos componentes conexas.

4. Probar que si G es un grafo conexo con al menos tres vértices y e es una arista de corte, entonces alguno de los dos extremos de e es un vértice de corte.

5. Probar que todo grafo bipartito k-regular con $k \geq 2$ no tiene aristas de corte. **Sugerencia:** Suponer que tiene una arista de corte y contar el número de aristas de una de las componentes que se obtiene al borrar dicha aristas, usando cada lado de la bipartición.

6. Probar que todo grafo con una arista de corte tiene al menos dos vértices de grado impar.

7. En los grafos del ejercicio 1, determine cuáles de los siguientes paseos son posibles.

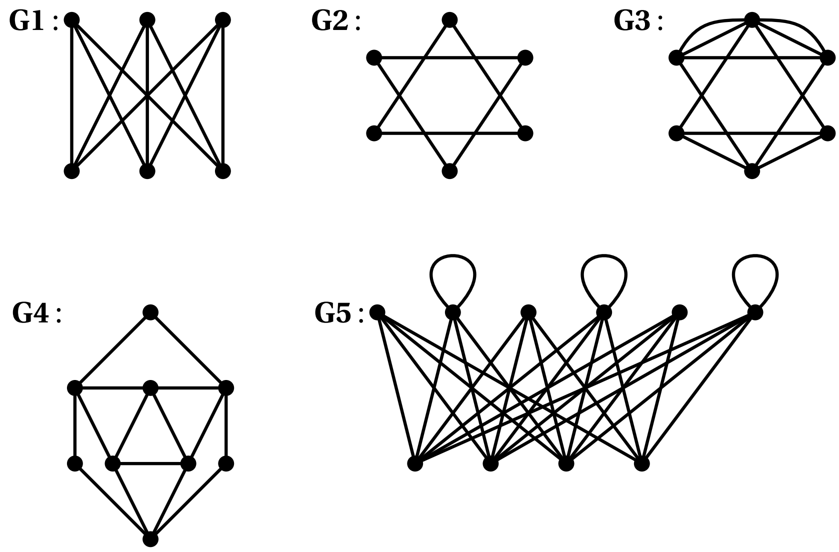
   a) Paseos que no sean recorridos.

   b) Recorridos que no sean caminos ni ciclos.

   c) Caminos o ciclos.

   d) Recorridos que utilicen todas las aristas.

8. Indique cuáles de los siguientes grafos tienen recorrido euleriano, cuáles no tienen recorrido euleriano y cuáles son eulerianos. Justifique su respuesta en cada caso.



9. *a*) Indique para cada grafo del ejercicio 8 cuál es la mínima cantidad de aristas que se deben agregar para que tenga recorrido euleriano. Justifique sus respuestas.

   b) Indique para cada grafo del ejercicio 8 cuál es la mínima cantidad de aristas que se deben agregar para que sea euleriano. Justifique sus respuestas.

   Observación: Para algún caso la mínima cantidad puede ser cero.

10. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando.

    a) Un grafo euleriano bipartito tiene un número par de aristas.

    b) Un grafo euleriano simple con un número par de vértices tiene un número par de aristas.

    c) Todo grafo par es euleriano.

11. ¿Es verdad que si un grafo euleriano G tiene dos aristas e y f que comparten un extremo entonces G posee un circuito euleriano en el cual e y f se recorren consecutivamente?

12. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales falsas, justificando la respuesta.

    a) Si un grafo tiene al menos un vértice aislado, entonces no tiene recorrido euleriano.

    b) Las aristas de un recorrido cerrado admiten una descomposición en aristas de ciclos.

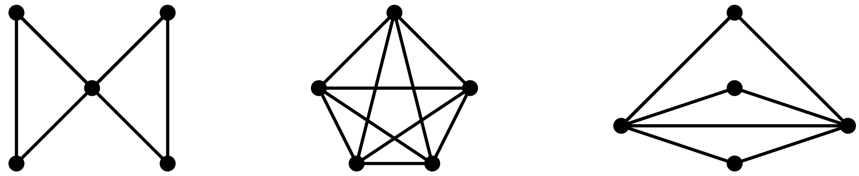
    c) Si un recorrido que no es cerrado no puede extenderse a un recorrido más largo entonces sus extremos tienen grado impar.

13. *a*) Sea G un grafo simple con al menos una arista. Probar que G tiene un subgrafo con un recorrido euleriano no cerrado.

    b) Probar que todo grafo par contiene un subgrafo euleriano.

14. *a*) Probar que si G es un grafo euleriano simple y contiene un *vértice universal* (es decir, un vértice adyacente a todos los vértices restantes), entonces G tiene una cantidad impar de vértices.

    b) Probar que si G es un grafo euleriano simple con 5 vértices y uno de esos vértices es universal, entonces G es isomorfo a uno de los siguientes grafos:



15. *a*) Probar que si G es un grafo par entonces G no tiene aristas de corte.

    b) ¿Es válido que si G es un grafo sin aristas de corte entonces G se descompone en ciclos?

    c) Probar que si G es un grafo con al menos una arista de corte, entonces G no es un grafo euleriano.

    d) ¿Es válido que si G no es un grafo euleriano entonces G tiene al menos una arista de corte?

16. Sea G un grafo bipartito.

    a) Probar que si la cantidad de aristas de G es impar, entonces G no es euleriano.

    b) Probar que si G tiene todos los vértices de grado par, entonces se descompone en ciclos de longitud par.

17. Sea G un grafo sin bucles tal que todos sus vértices tienen grado al menos 3. Probar que G tiene un ciclo con una cantidad par de aristas. **Ayuda:** Considere un camino maximal en G.

18. Sea G un grafo simple conexo tal que $\overline{G}$ es conexo.

    a) Suponiendo que $|V(G)|$ es impar, probar que G tiene recorrido euleriano si y solo si $\overline{G}$ tiene recorrido euleriano.

    b) Suponiendo que $|V(G)|$ es par, probar que si G y $\overline{G}$ tienen recorrido euleriano, entonces $|V(G)| \leq 4$.

19. Sea G un grafo isomorfo al grafo bipartito completo $K_{n,m}$ con $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

    a) Probar que si n es impar y $m = 2$, entonces G tiene recorrido euleriano y no es euleriano.

    b) Probar que G es euleriano si y solo si n y m son pares.

20. Sea G un grafo simple. Suponiendo que $\overline{G}$ es isomorfo al grafo que resulta de agregarle m vértices aislados a K_n, donde n y m son enteros mayores o iguales a 3.

    a) Probar que si m es par y n es impar, entonces G es un grafo euleriano.

    b) Probar que si m es impar o n es par, entonces G no es un grafo euleriano.