Práctica 5 - Espacios y subespacios vectoriales

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales reales:

a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con la suma y producto usual de un escalar real por una matriz con coeficientes reales.

b) $P_n = \{$ polinomios de grado a lo sumo n con coeficientes en $\mathbb{R}\}$.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Justificar.

a) El conjunto de todas las matrices 2×2 con coeficientes enteros.

b) Todas las matrices 2×2 tales que $\det(A) = 0$.

c) Todas las matrices 2×2 que son triangulares superiores, es decir, el conjunto $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$.

d) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j\}$.

e) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^t\}$.

f) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} + 3a_{12} = 0\}$.

Ejercicio 3. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3:

a) Los polinomios de P_3 con término independiente nulo.

b) Los polinomios de P_3 tales que la suma de todos sus coeficientes es cero.

Ejercicio 4. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales E que se indican (con sus operaciones habituales):

i) La recta $\mathbb{L} : X = t\,(1, 2, 1)$ $(t \in \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}^3$.

ii) La recta $\mathbb{L} : X = t\,(1, 1) + (0, 1)$ $(t \in \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}^2$.

iii) La semirecta $\mathbb{L} : X = t\,(1, 2)$ $(t \geq 0)$, $E = \mathbb{R}^2$.

iv) El plano π definido por la ecuación $3x + 2y - 2z = 0$, $E = \mathbb{R}^3$.

v) El plano π definido por la ecuación $3x + 2y - 2z = 2$, $E = \mathbb{R}^3$.

vi) Las soluciones del sistema $\begin{cases} x + 2y - 2z + w = 0 \\ 2x - y - z + 2w = 0 \end{cases}$, $E = \mathbb{R}^4$.

vii) El conjunto de todos los vectores perpendiculares al $(1, 2, 3, 4)$, $E = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 5. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes. En caso de que no lo sean, extraer un subconjunto linealmente independiente del conjunto dado que genere el mismo subespacio que el conjunto original.

i) $\{(1, 1),\ (1, -1)\}$.

ii) $\{(1, 1),\ (1, -1),\ (2, -1)\}$.

iii) $\{(1, 0, -1),\ (2, -1, 2)\}$.

iv) $\{(1, 1, -1),\ (0, 2, -1),\ (1, -1, 0),\ (1, -1, 3)\}$.

v) $\{(0, 2, -1, 1),\ (0, 1, 1, 1),\ (1, 0, -1, 0),\ (1, 1, 0, 1)\}$.

Ejercicio 6. a) Comprobar que el conjunto $\mathscr{B} = \{(1,-1,0),\ (2,1,-1),\ (0,-1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Encontrar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto $\mathscr{B}' = \{(-1,2,-1),\ (1,0,k),\ (1,-1,k)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 7. Calcular la dimensión y exhibir una base de los siguientes subespacios vectoriales en sus respectivos espacios ambiente:

$$S_1 = \text{gen}\{(1,-1,2,1),\ (2,-3,3,-1),\ (-1,2,-1,2)\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$S_2 = \text{gen}\{(2,-3,1,4,1),\ (2,-3,3,-1,1),\ (1,0,-1,3,1),\ (1,0,-3,2,1)\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Extender, si es posible, el conjunto de generadores de S_1 a una base de $\mathbb{R}^4$. Extender, si es posible, el conjunto de generadores de S_2 a una base de $\mathbb{R}^5$. Justificar.

Ejercicio 8. Encontrar una base para los subespacios vectoriales $\mathcal{S}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{S}_2$ de $\mathbb{R}^5$ dados por las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones. Calcular su dimensión.

$$S_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 9. Decidir si $S = T$ en los siguientes casos. Justificar.

i) $S = \text{gen}\{(1,-1,2)\}$ y T las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

ii) $S = \text{gen}\{(1,-1,1,2)\}$ y $T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + z - w = 0\}$.

iii) $S = \text{gen}\{(1,-1,1),\ (2,0,1)\}$ y $T = \text{gen}\{(4,-2,3),\ (7,-3,5)\}$.

Ejercicio 10. Para el segundo ítem del ejercicio anterior obtener, si es posible, una base del subespacio T que contenga al generador de S dado en el enunciado.

Ejercicio 11. Verificar en cada caso que $S + T = \mathbb{R}^3$. Indicar en que casos la suma es directa. Justificar.

i) $S = \text{gen}\{(1,-1,3),\ (2,-2,1)\}$ y $T = \text{gen}\{(1,1,-1),\ (1,0,1)\}$.

ii) $S = \text{gen}\{(2,1,-1),\ (-1,-2,0)\}$ y T las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

iii) $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ las soluciones de los sistemas S_1 y S_2 respectivamente:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2 : \{2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad .$$

Verificar que en todos los casos vale la fórmula

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) \ .$$

Ejercicio 12. Para los subespacios S y T de cada uno de los incisos i) y ii) del **Ejercicio 11**:

a) Calcular $S^\perp$ y $T^\perp$.

b) Comprobar que $S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3$. Hallar, si es posible, otro subespacio S' (distinto de $S^\perp$ y de T) tal que $S \oplus S' = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13. Hallar una base para el complemento ortogonal de cada uno de los subespacios del **Ejercicio 7** y del **Ejercicio 8**.

Ejercicio 14. Sea $\mathscr{E} = \big\{(1,0),\ (0,1)\big\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathscr{B} = \big\{(1,1),\ (1,-1)\big\}$ y $\mathscr{B}' = \big\{(3,1),\ (2,-1)\big\}$ otras dos bases de $\mathbb{R}^2$.

i) Calcule las coordenadas de $v = (2,-1)$ en la base $\mathscr{B}$.

ii) Calcule las coordenadas de $v = (2,-1)$ en las bases $\mathscr{E}$ y $\mathscr{B}'$ ¿Es necesario repetir los pasos del ítem **i)**? ¿Y si quiere calcular las coordenadas de $w = (2,2)$?

Notación: dada una base $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial, denotaremos con $[v]_{\mathscr{B}}$ o con $v_{\mathscr{B}}$ a las coordenadas del vector v en la base $\mathscr{B}$. Es decir

$$[v]_{\mathscr{B}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{si} \quad v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n.$$

Ejercicio 15. Sea $\mathscr{B} = \big\{(1,1,-1),\ (2,1,-1),\ (0,1,1)\big\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

1. Calcule las coordenadas de $v = (-2,1,3)$ en la base $\mathscr{B}$.
2. Calcule las coordenadas de w en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ si se sabe que $[w]_{\mathscr{B}} = (1,2,3)$.

Ejercicios Adicionales a la Práctica 5

Ejercicio 16. Sean $S = \text{gen}\{(3, 1, -1, 1)\ ,\ (0, 4, 1, 2)\}$ y $T = \{x \in R^4 : x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$.

a) Probar que $S \subset T$.

b) Hallar una base de S y extenderla a una base de T.

c) Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base de S y una base de T.

Ejercicio 17. Decidir, en cada caso, si los subespacios S y T son iguales:

a) $S = \text{gen}\{(1, 1, 3)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

b) $S = \text{gen}\{(1, 1, 3)\ ,\ (1, 0, 1)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

c) $S = \text{gen}\{(1, 1, 3)\ ,\ (1, 0, 1)\ ,\ (0, 1, 2)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 18. Encontrar, en cada caso, una base y dimensión de $S \cap T$:

a) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0\ ,\ x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\ ,\ x_2 - x_4 = 0\}$.

b) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0\ ,\ x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \text{gen}\{(-1, 1, 2, 1)\ ,\ (0, 1, 2, 2)\}$.

c) $S = \text{gen}\{(1, 0, -1, 0)\ ,\ (2, 1, -1, 1)\}$ y $T = \text{gen}\{(1, 0, 2, 1)\ ,\ (0, -1, 1, -1)\}$.

d) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0\ ,\ x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \text{gen}\{(0, 1, 1, 1)\ ,\ (1, 1, 1, 2)\}$.

e) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \text{gen}\{(1, 0, 1, 0)\ ,\ (0, 1, -1, 2)\}$.

f) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\ ,\ x_2 + 2x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 - 3x_4 = 0\ ,\ x_2 + x_4 = 0\}$.

Ejercicio 19. Para los subespacios del ejercicio anterior:

a) Dar una base y dimensión de $S + T$.

b) Decidir en que casos se cumple $\mathbb{R}^4 = S + T$ y en cuáles $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

Ejercicio 20. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) Si v_1 y v_2 son vectores de $\mathbb{R}^3$ entonces $\{v_1, v_2\}$ no es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

b) Si v_1, v_2 y v_3 son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz que tiene a v_1, v_2 y v_3 como filas entonces $\det(A) \neq 0$.

c) Si v_1, v_2 y v_3 son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente entonces $v_3 \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$.

Ejercicio 21. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar la respuesta.

a) Si v y w son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ entonces $\text{gen}\{v, w\} = \text{gen}\{v, w + \lambda v\}$.

b) Si u, v y w son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\text{gen}\{u, w\} = \text{gen}\{v, w\}$, entonces u y v son múltiplos entre sí.

c) Si v y w son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\{v, w\}$ es linealmente independiente, entonces $\{v, w + \lambda v\}$ también es linealmente independiente (para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ elegido).

d) Si $\{u, v, w\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{u, u + v, u + v + w\}$ también es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 22. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar la respuesta.

a) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^5$ tales que $\dim(S) = \dim(T) = 3$ entonces $S \cap T \neq \{0\}$.

b) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \cap T = \{0\}$ entonces $S \oplus T = \mathbb{R}^n$.

c) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$ entonces $T = S^\perp$.

d) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$ entonces $\dim(T) = \dim(S^\perp)$.

Ejercicio 23. Determinar si los siguientes polinomios generan P_2:

a) $p_1 = 1 - x + 2x^2$ y $p_2 = 3 + x$.

b) $p_1 = 5 - x + 4x^2$, $p_2 = x$ y $p_3 = 2x^2$.

Ejercicio 24. Sean $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ y $E = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostrar que S es un subespacio vectorial de E. Hallar una base y la dimensión de S.

¿El conjunto $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\}$ es un subespacio?

Ejercicio 25. Sea $\mathscr{B} = \big\{(1, 1, -1),\ (2, 1, -1),\ (0, 1, 1)\big\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcule la intersección de los subespacios

$$S_1 = \operatorname{gen}\big\{(1, -3, 0),\ (0, 1, 2)\big\} \quad \text{y} \quad S_2 = \operatorname{gen}\big\{v, w\big\}$$

donde $[v]_{\mathscr{B}} = (-2, 1, 3)$, y $[w]_{\mathscr{B}} = (1, 0, 1)$.

Observar que los vectores generadores de S_1 están dados en coordenadas canónicas y los de S_2 en coordenadas de la base $\mathscr{B}$. Exprese la intersección en base canónica y en base $\mathscr{B}$.

Ejercicio 26. Sea $\mathscr{B} = \big\{(1, 1, -1),\ (2, 1, -1),\ v\big\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre v para que las coordenadas del vector $(1, -1, 3)$ en base $\mathscr{B}$ sean $(2, 1, -3)$. Es decir, para que $[(1, -1, 3)]_{\mathscr{B}} = (2, 1, -3)$.