Álgebra lineal – 1er. Parcial – 30 de abril de 2024
Resoluciones del Tema 1

1. Hallar todas las soluciones complejas de:

   a) $\overline{w} - 3iw = -6 + 2i$.

   b) $z^3 = (1+\sqrt{3}i)\overline{z}$.

Resolución: *a*) Escribamos a w en forma binimial como $w = a + ib$. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{w} - 3iw = -6+2i \quad &\Leftrightarrow \quad a - ib - 3i(a+ib) = -6+2i \\
&\Leftrightarrow \quad a - ib - 3ia + 3b = -6+2i \\
&\Leftrightarrow \quad a + 3b + i(-3a-b) = -6+2i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3b = -6 \\ -3a-b = 2 \end{cases} .
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema $\begin{cases} a+3b = -6 \\ -3a-b = 2 \end{cases}$ hallamos que $\boxed{b = -3a-2 \quad (*)}$; reemplazamos en la primera ecuación y obtenemos $a + 3(-3a-2) = -6$, equivalentemente, $-8a - 6 = -6$, de donde resulta $a = 0$; hacemos $a = 0$ en $(*)$ y tenemos $b = -2$.

Por tanto, la solución es $\boxed{w = -2i}$.

b) Observemos que $z = 0$ es solución de la ecuación. Buscamos las soluciones $z \neq 0$. Multiplicamos por z ambos miembros de la ecuación *b*) y obtenemos $z^4 = (1+\sqrt{3}i)\overline{z}z$, es decir,

$$\boxed{z^4 = (1+\sqrt{3}i)|z|^2 \quad (\star)}.$$

Tomando módulos en $(\star)$ resulta $|z|^4 = |1+\sqrt{3}i||z|^2 = 2|z|^2$, de donde obtenemos $|z|^2 = 2$ (ya que $z \neq 0$). Luego, $|z| = \sqrt{2}$. En $(\star)$ escribimos a z en su forma polar como $z = \sqrt{2}\zeta$, con $\zeta = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, y obtenemos

$$4\zeta^4 = 2(1+\sqrt{3}i) \Leftrightarrow \zeta^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

donde

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}.$$

Las soluciones de la ecuación $\zeta^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ son $\zeta_k = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$, para $k = 0,1,2,3$. Por tanto, las soluciones de la ecuación $(\star)$ son

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right).$$

En definitiva, todas las soluciones de la ecuación *b*) son:

$$\boxed{0, \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\tfrac{7\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen}\tfrac{13\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\tfrac{19\pi}{12}\right)}.$$

2. Dadas $\mathbb{L}_1 : X = \alpha(-3,1,5)+(3,5,-6)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta(1,1,-2)+(2,4,-4)$.

a) Calcular $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$.

b) Dar la ecuación de una recta $\mathbb{L}_3$ de manera tal que $\mathbb{L}_3$ sea perpendicular a $\mathbb{L}_1$ y a $\mathbb{L}_2$ y además se cumplan las condiciones $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 \neq \emptyset$ y $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \neq \emptyset$.

Resolución: *a*) Los puntos de la recta $\mathbb{L}_1$ son de la forma $(x,y,z) = (-3\alpha+3, \alpha+5, 5\alpha-6)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, y los puntos de la recta $\mathbb{L}_2$, de la forma $(x,y,z) = (\beta+2, \beta+4, -2\beta-4)$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ es un punto, éste ha de ser de la forma $(-3\alpha+3, \alpha+5, 5\alpha-6)$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, y también de la forma $(\beta+2, \beta+4, -2\beta-4)$, para algún $\beta \in \mathbb{R}$. Es decir, han de existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} -3\alpha+3 = \beta+2 \\ \alpha+5 = \beta+4 \\ 5\alpha-6 = -2\beta-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha-\beta = -1 \\ \alpha-\beta = -1 \\ 5\alpha+2\beta = 2 \end{cases} \qquad (A).$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones: $\begin{cases} -3\alpha-\beta = -1 \\ \alpha-\beta = -1 \end{cases}$, obtenemos $\boxed{\alpha = 0, \beta = 1}$; reemplazamos en la tercera ecuación: $5\alpha+2\beta = 2$, y obtenemos la identidad $\boxed{5\cdot 0+2\cdot 1 = 2}$. De modo que $\alpha = 0, \beta = 1$ es solución del sistema (A). Haciendo $\alpha = 0$ en $\mathbb{L}_1 : X = \alpha(-3,1,5)+(3,5,-6)$, obtenemos el punto $(3,5,-6)$. Luego $\boxed{\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(3,5,-6)\}}$.

b) Para que valga $\mathbb{L}_3 \perp \mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_3 \perp \mathbb{L}_2$, debe valer que el vector director de $\mathbb{L}_3$, $\mathbf{v_3}$, es perpendicular tanto al vector director de $\mathbb{L}_1$, $\mathbf{v_1} = (-3,1,5)$, como al vector director de $\mathbb{L}_2$, $\mathbf{v_2} = (1,1,-2)$. Por tanto, podemos elegir a $\mathbf{v_3}$ igual (o proporcional) a $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$. Calculamos el producto vectorial $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$:

$$\begin{array}{rccc} & + & - & + \\ & -3 & 1 & 5 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = & (-7, & -1, & -4). \end{array}$$

Como queremos que valga $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 \neq \emptyset$ y $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \neq \emptyset$, podemos tomar como punto de paso de $\mathbb{L}_3$ al punto $(3,5,-6)$ obtenido en el ítem *a*).

La recta $\mathbb{L}_3$ tiene ecuación paramétrica:

$$\boxed{X = \lambda(-7,-1,-4)+(3,5,-6)}.$$

3. Sean $\mathbb{L} : \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -2x + y + z = 2 \end{cases}$ y $\Pi :\ x+12y-13z = -1$. Hallar $\mathbb{L} \cap \Pi$.

Resolución: Hallamos $\mathbb{L} \cap \Pi$ resolviendo el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas: $\begin{cases} x+2y-3z = -1 \\ -2x+y+z = 2 \\ x+12y-13z = -1 \end{cases}$.

Su matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & -13 & -1 \end{array}\right)$. Usamos la versión simplificada del método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & -13 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1\to F_3}{\overset{F_2+2F_1\to F_2}{\longmapsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_2\to F_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M;$$

el sistema cuya matriz ampliada es M está dado por

$$\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 5y-5z=0 \end{cases} ;$$

resolvemos

$$\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 5y-5z=0 \Leftrightarrow \boxed{y=z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z-3z=-1 \Leftrightarrow x-z=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=z-1} \\ y=z \end{cases}$$

y obtenemos que (x,y,z) es solución si, y sólo si, $(x,y,z)=(z-1,z,z)=z(1,1,1)+(-1,0,0)$, $z\in\mathbb{R}$. Es así que la solución del sistema es la recta dada paramétricamente por $X=\lambda(1,1,1)+(-1,0,0)$. Esta recta es igual a $\mathbb{L}\cap\Pi$, por tanto, debe ser la propia recta $\mathbb{L}$.

En conclusión, $\boxed{\mathbb{L}\cap\Pi=\mathbb{L}}$.

Método alternativo: Buscamos una ecuación parámetrica de $\mathbb{L}$ resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -2x+y+z=2 \end{cases}$, bien vía argumentos geométricos, bien por el método de Gauss-Jordan.

Obtenemos $\mathbb{L}:\ X=\lambda(1,1,1)+(-1,0,0)$. Un vector director de $\mathbb{L}$ es $\mathbf{v}=(1,1,1)$ y un vector normal a Π es $\mathbf{n}=(1,12,-13)$. Observamos que $\mathbf{v}\perp\mathbf{n}$ ya que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=1+12-13=0$, de modo que $\mathbb{L}\parallel\Pi$. Observamos también que $(-1,0,0)\in\Pi$ pues $1\cdot(-1)+12\cdot 0-13\cdot 0=-1$. Concluímos que $\mathbb{L}\subset\Pi$, de modo que $\mathbb{L}\cap\Pi=\mathbb{L}$. También podemos argumentar que $\mathbb{L}\cap\Pi$ se obtiene determinando $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual el punto $(x,y,z)=(\lambda-1,\lambda,\lambda)\in\mathbb{L}$ satisface la ecuación de Π: $x+12y-13z=-1$. Encontramos así que $\lambda-1+12\lambda-13\lambda=-1$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, lo que indica que $\mathbb{L}\subset\Pi$ o $\mathbb{L}\cap\Pi=\mathbb{L}$.

4. Sea $S:\begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 8 \\ 3x & + & ay & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & az & = & a^2-12 \end{cases}$. Hallar, si es posible, $a\in\mathbb{R}$ de manera tal que $(2,0,-3)$ sea la única solución del sistema S.

Resolución: $(2,0,-3)$ es solución del sistema S si al hacer $x=2, y=0, z=-3$ en cada una de las 3 ecuaciones de S se obtienen 3 identidades:

$$\begin{cases} 2 & + & 0 & + & 6 & = & 8 \\ 6 & + & 0 & - & 3 & = & 3 \\ -2 & - & 0 & - & 3a & = & a^2-12 \end{cases}.$$

Luego, $(2,0,-3)$ es solución del sistema S si $-2-3a=a^2-12$, es decir, $a^2+3a-10=0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son -5 y 2.

$\underline{a=-5}$: Obtenemos el sistema $\begin{cases} x+y-2z=8 \\ 3x-5y+z=3 \\ -x-y-5z=13 \end{cases}$; $(2,0,-3)$ es su <u>única</u> solución si los rangos de la matriz de coeficientes A, $\rho(A)$, y la matriz ampliada $(A|b)$, $\rho(A|b)$, son iguales e iguales a 3 (el número de incógnitas). Vemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 & 13 \end{array}\right) \underset{F_3+F_1\to F_3}{\overset{F_2-3F_1\to F_2}{\longmapsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -8 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right),$$

de donde $\rho(A)=\rho(A|b)=3$. $\boxed{\text{Para } a=-5,\ (2,0,-3) \text{ es la única solución del sistema}}$.

$\underline{a=2}$: Obtenemos $\begin{cases} x+y-2z=8 \\ 3x+2y+z=3 \\ -x-y+2z=-8 \end{cases}$; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -8 \end{array}\right) \underset{F_3+F_1\to F_3}{\overset{F_2-3F_1\to F_2}{\longmapsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

$\rho(A)=\rho(A|b)=2<3$. $\boxed{\text{Para } a=2, \text{ el sistema es compatible indeterminado}}$.

En resumen: $(2,0,-3)$ es la única solución del sistema si $\boxed{a=-5}$.