Álgebra lineal – 2do Parcial – 28 de mayo de 2024
Resoluciones

1. a) Dadas $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 6$ y $B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 2k & -1 & 1 \\ -k & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, $k \in \mathbb{R}$ para el cual el $\det\left(\frac{1}{3}A^6 B^{\mathrm{t}} A^{-1}\right) = \frac{32}{9}$.

Resolución: Calculemos el $\det(B)$:

$$\det\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 2k & -1 & 1 \\ -k & 0 & 2 \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1\mapsto F_3}{\overset{F_2-2F_1\mapsto F_2}{=}} k\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -3k\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= -3k\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -9k.$$

Pasemos a calcular el $\det\left(\frac{1}{3}A^6 B^{\mathrm{t}} A^{-1}\right)$:

$$\det\left(\frac{1}{3}A^6 B^{\mathrm{t}} A^{-1}\right) = \frac{1}{3^3}\det(A)^6\det(B)\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3^3}\det(A)^5\det(B) = \frac{1}{3^3}6^5(-9k) = -\frac{1}{3}k2^5 3^5 = -2^5 3^4 k.$$

Obtenemos, entonces, que $-2^5 3^4 k = \frac{32}{9}$; como $32 = 2^5$ y $9 = 3^2$, resulta $\boxed{k = -\frac{1}{3^6}}$.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$, donde $t \in \mathbb{R}$. Resolver el sistema $(A-B)\mathbf{x} = b$ sabiendo que $(1,0,-2)$ es una de sus infinitas soluciones.

Resolución: Encontramos que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $(1,0,-2)$ es una de las infinitas soluciones del sistema $(A-B)\mathbf{x} = b$, debe ser

$$b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Buscamos resolver el sistema $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, sabiendo que es compatible indeterminado. Deber ser $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{smallmatrix}\right) = 0$, es decir,

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{pmatrix} \overset{F_2-2F_1\mapsto F_2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -t & 2 \end{pmatrix} = 2 + 2t,$$

de donde resulta $t=-1$. Pasamos, ahora sí, a resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1\mapsto F_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2\mapsto F_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y+2z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ z=-\frac{1}{2}y-2 \end{cases};$$

$$\boxed{(x,y,z) \text{es solución } \Leftrightarrow (x,y,z)=(y+1,y,-\tfrac{1}{2}y-2)=y\left(1,1,-\tfrac{1}{2}\right)+(1,0,-2), y\in\mathbb{R}.}$$

2. a) Sea $S=\text{gen}\{(2,2,1),(2,5,-2)\}$. Hallar una base de $S^{\perp}$.

Resolución: $(x,y,z)\in S^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z)\perp(2,2,1) \\ (x,y,z)\perp(2,5,-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x+5y-2z=0 \end{cases}$. $(\star)$

Pasamos a resolver el sistema $(\star)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_2-F_1\mapsto F_2}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}F_2}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ \boxed{y=z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z=0 \\ \boxed{y=z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-\dfrac{3}{2}z} \\ \boxed{y=z} \end{cases};$$

$$(x,y,z) \text{ es solución de } (\star) \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(-\frac{3}{2}z,z,z\right)=z\left(-\frac{3}{2},1,1\right),\ z\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, una base de $S^{\perp}$ es $\boxed{\mathcal{B}=\{(-3,2,2)\}}$.

b) Sea T el conjunto de soluciones del sistema lineal $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0 \\ 2x_3=0 \end{cases}$. Hallar una base de T y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.

Resolución: Es claro que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in T \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=x_1+2x_2 \\ x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,0,x_1+2x_2)=x_1(1,0,0,1)+x_2(0,1,0,2),\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^4.$$

Por lo tanto, una base de T es $\boxed{\mathcal{B}_T=\{(1,0,0,1),(0,1,0,2)\}}$.

Podemos extender $\mathcal{B}_T$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, por ejemplo, haciendo $\boxed{\mathcal{B}=\{(1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}}$. Que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ se debe a que los vectores de $\mathcal{B}$ son l.i. pues son las filas no nulas de una matriz escalonada, la matriz 4×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y al hecho que 4 vectores l.i. de $\mathbb{R}^4$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.