# Práctica 6 - Transformaciones lineales

**Ejercicio 1.** Decidir si cada una de las siguientes aplicaciones es una transformación lineal:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 - 3x_3)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, -x_1, 2x_1 - x_2)$.

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (-3x, 2)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_1 x_2)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, -x_1 + x_3)$.

(f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 4x_4, x_2 + x_3)$.

**Ejercicio 2.** Decidir en cada caso si existe una transformación lineal $T$ que verifique las condiciones dadas. En caso afirmativo decidir si es única. Justificar.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 0, 1) = (-1, 0, 1, 2)$, $T(0, 1, 1) = (0, 1, 1, 2)$, $T(0, 0, 1) = (1, 1, 2, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 0, 1, 1) = (1, 1, 0, 2)$, $T(1, 1, 0, 0) = (1, 2, 2, 2)$, $T(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0, 2)$, $T(1, 0, -1, 0) = (1, 1, 2, 0)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 1, 0) = (-1, 0, 1, 2)$, $T(0, 1, 1) = (0, 1, 1, 2)$, $T(1, 0, -1) = (1, 1, 2, 0)$.

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 1, 1) = (-1, 0, 1)$, $T(0, 1, 1, 1) = (0, 1, 2)$, $T(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 0, 1) = (-1, 0, 1, 2)$, $T(-1, 2, 1) = (1, 2, 1, 2)$, $T(0, 1, 1) = (0, 1, 1, 2)$, $T(0, 0, 1) = (1, 1, 2, 0)$.

**Ejercicio 3.** En cada ítem del ejercicio anterior donde la respuesta sea afirmativa, hallar una fórmula de la transformación $T$ mencionada.

**Ejercicio 4.** Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que verifica:

$$L(1, 1, 1) = (2, 2, -2), \quad L(1, -1, 0) = (3, 0, 1), \quad L(-1, 0, 0) = (-2, 0, -1);$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya fórmula es

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_3, x_1 - 3x_3).$$

Probar que $L = T$.

**Ejercicio 5.** Para cada una de las aplicaciones del Ejercicio 1 que sea una transformación lineal, hallar bases de los subespacios núcleo ($\mathrm{Nu}(T)$) e imagen (o rango, $\mathrm{Im}(T)$). Clasificar en cada caso según sea monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo.

**Ejercicio 6.** Hallar una base de los subespacios núcleo e imagen de cada una de las siguientes transformaciones y decidir si son mono, epi o isomorfismos:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que verifica $T_1(1,0,1,1) = (0,1,0,2)$, $T_1(1,1,0,0) = (1,0,2,0)$, $T_1(0,1,1,0) = (0,1,-2,0)$, $T_1(1,0,-1,1) = (-1,1,1,-1)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que verifica $T_2(1,1,1) = (0,1,1,0)$, $T_2(0,1,1) = (1,2,3,-2)$, $T_2(0,0,1) = (-1,4,3,2)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica $T_3(1,0,1,0) = (1,1)$, $T_3(0,1,1,0) = (1,-2)$, $T_3(0,0,1,2) = (0,0)$, $T_3(0,0,0,1) = (2,1)$.

**Ejercicio 7.** (a) Hallar la matriz asociada a cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2 en las bases canónicas respectivas.

(b) Hallar la fórmula, espacio de salida y espacio de llegada de las transformaciones lineales $T$ y $L$ cuyas matrices en las bases canónicas respectivas $E$ son:

$$M_{EE}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{M_{EE}(L)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 8.** (a) Hallar la fórmula de una transformación lineal $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que verifique que

$$\mathrm{Nu}(F) = \mathrm{gen}\{\ (1,2,0,0)\ ,\ (2,1,0,0)\ \} \text{ y } F(0,0,0,1) = (1,1,1).$$

¿$F$ podría ser un epimorfismo?

(b) Hallar la fórmula de una transformación lineal $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique que

$$\mathrm{Im}(G) = \mathrm{gen}\{(1,1,0,0)\ ,\ (1,1,1,0)\} \text{ y } G(0,0,1) = (0,0,1,0).$$

¿$G$ podría ser un monomorfismo?

**Ejercicio 9.** Sea $E = \{(1,0),\ (0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(1,1),\ (1,-1)\}$ y $B' = \{(3,1),\ (2,-1)\}$ otras dos bases de $\mathbb{R}^2$.

i) Calcule las coordenadas de $v = (2,-1)$ en la base $B$.

ii) Calcule las coordenadas de $v = (2,-1)$ en las bases $E$ y $B'$ ¿Es necesario repetir los pasos del ítem **i)**? ¿ Y si quiere calcular las coordenadas de $w = (2,2)$?

iii) Calcular la matriz de cambio de base de la base $E$ a la base $B$ (matriz que denotaremos con $C_{EB}$) y utilizarla para resolver el ítem **i)**.

iv) Sea $T$ la transformación lineal definida por $T(x,y) = (2x-y, x+y)$ y $v = (2,-1)$. Calcular la matriz que multiplicada por las coordenadas de cualquier vector $w \in \mathbb{R}^2$ con coordenadas en la base $B$ da como resultado las coordenadas de $T(w)$ en la base $B'$ (a esta matriz la denotaremos con $M_{BB'}(T)$) y utilizarla para calcular las coodenadas en la base $B'$ de $T(v)$.

**Ejercicio 10.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $B = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,-1,0)\}$ y $B' = \{(2,1),(3,1)\}$ es

$$M_{BB'}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar $T(1,0,1)$, $T(1,0,-1)$, $T(0,-1,0)$ y $T(1,0,0)$.

(b) Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica:

$$L(1,1,1) = (3,1), \quad L(2,-1,0) = (16,7), \quad L(2,0,0) = (11,5).$$

Mostrar que $T = L$.

**Ejercicio 11.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales definidas por su matriz en ciertas bases, hallar una base de los subespacios núcleo e imagen. Clasificar la transformación según sea: monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo.

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donde $M_{EE}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ siendo $E$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donde $M_{BE}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $B = \{(1,1),(-1,1)\}$.

(c) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ donde $M_{FB}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $F$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$ y $B = \{(0,1),(1,1)\}$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $M_{BB'}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $B' = \{(1,2,1),(1,1,2),(2,1,1)\}$.

**Ejercicio 12.** a) Para los isomorfimos del ejercicio anterior, dar la fórmula de $T$ y de la transformación inversa $T^{-1}$.

b) Para los isomorfimos de los Ejercicios 4 y 6 dar la fórmula de la transformación inversa $T^{-1}$.

**Ejercicio 13.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

$$\text{i) } T = T_1 \circ T_2, \qquad \text{ii) } L = T_3 \circ T_2,$$

(donde $T_1$, $T_2$ y $T_3$ son las transformaciones lineales del ejercicio 6)

(a) Hallar bases de los subespacios núcleo e imagen de $T$ y de $L$.

(b) Hallar la matriz de $T$ y de $L$ en un par de bases elegidas libremente.

(c) Hallar la matriz de $T$ y de $L$ en las bases canónicas.

# Ejercicios Adicionales a la Práctica 6

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación que verifica $T(1,1,0,1) = (1,0,1)$, $T(0,1,0,1) = (0,1,1)$, $T(0,0,1,1) = (1,1,2)$, y $T(0,0,0,1) = (1,1,1)$.
   (a) Hallar una transformación $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T \circ S$ sea inversible.
   (b) Hallar la matriz (en algún par de bases) de $T \circ S$.
   (c) Hallar $M_{EE}((T \circ S)^{-1})$.
   (d) Verificar que la transformación $S \circ T$ está bien definida y hallar $\mathrm{Nu}(S \circ T)$ ¿Es inversible esta transformación?

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal cuya matriz en las bases

   $B = \{(1,-1,1), (0,-1,1), (0,0,-1)\}$ y $E = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$

   es

$$M_{BE}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Clasifique la transformación lineal (en monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo).
   (b) Hallar la fórmula de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(L) = \mathrm{Im}(T)$.
   (c) En (b) ¿podría construirse $L$ con las condiciones pedidas de manera que $L$ resulte un epimorfismo?