Álgebra Lineal - 2do. Parcial - 11 de junio de 2019

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que satisface $\begin{cases} T(1,0,0) = (2,1,0,1) \\ T(0,1,-1) = (0,0,0,0) \\ T(-1,0,1) = (0,1,0,-1) \end{cases}$.

a) Hallar bases para $Nu(T)$ (el núcleo de T) e $Im(T)$ (la imagen de T).

b) Dado el subespacio $S = \{(t,u,v,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2t + u - w = u + 3w = 0\}$ hallar una base del subespacio $S^\perp \cap Im(T)$ (el complemento ortogonal de S intersecado con $Im(T)$).

Solución

a) Recordar que $Nu(T)$ es el subespacio del dominio definido por $Nu(T) = \{\vec{x} \in Dom(T) : T(\vec{x}) = \vec{0}\}$, y la imagen es el subespacio del codominio de T generado por las columnas de la matriz asociada. Además, recordar el Teorema de la dimensión: *Si* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *es una transformación lineal, donde* $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ *son espacios vectoriales, entonces* $\dim(Im(T)) + \dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V})$.

Primero notemos que $\dim(Im(T)) + \dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V}) = 3$. Luego que la matriz asociada a la transformación lineal en la base $B = \{(1,0,0),(0,1,-1),(-1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base canónica E de $\mathbb{R}^4$ es

$$M_{BE}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inmediatamente vemos que $(2,1,0,1)$ y $(0,1,0,-1)$ son linealmente independientes ya que no existe escalar k que cumpla $(2,1,0,1) = k(0,1,0,-1)$. Por lo tanto, una base de $Im(T)$ es

$$\boxed{B_{Im(T)} = \{(2,1,0,1),(0,1,0,-1)\}}.$$

De esto vemos que la dimensión de $Im(T)$ es igual a 2 (la cantidad de vectores de la base). Luego por el Teorema de la dimensión sabemos que

$$\dim(Im(T)) + \dim(Nu(T) = 3 \to 2 + \dim(Nu(T) = 3 \to \dim(Nu(T)) = 1.$$

Por lo tanto, como $T(0,1,-1) = (0,0,0,0)$,

$$\boxed{Nu(T) = \{(0,1,-1)\}}.$$

b) Como $S = \{(t,u,v,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2t + u - w = u + 3w = 0\}$, que se lee "la solución del sistema de ecuaciones homogéneo dado es el subespacio S pedido" o sea el sistema

$$\begin{cases} 2t + u - w = 0 \\ u + 3w = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato ver que $S^\perp = \langle (2,\ 1,\ 0,\ -1),\ (0,\ 1,\ 0,\ 3) \rangle$.

Y obtenemos

$$\begin{cases} 2t + u - w = 0 \\ u + 3w = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2t + u - w = 0 \\ u = -3w \end{cases} \to \begin{cases} 2t - 4w = 0 \\ u = -3w \end{cases} \to \begin{cases} t = 2w \\ u = -3w \end{cases} \to \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Entonces una base de S es $B_S = \{(2, -3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$. Así podemos expresar a $S^{\perp}$ como la solución del sistema

$$\begin{cases} 2t - 3u + w = 0 \\ v = 0 \end{cases} .$$

Si $\vec{v} = (t, u, v, w) \in Im(T)$ entonces $\vec{v} = \alpha(2, 1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, -1) = (2\alpha, \alpha + \beta, 0, \alpha - \beta)$, para α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Entonces los vectores $\vec{v}$ de la imagen de T que son solución del sistema anterior son la intersección buscada. Así

$$2t - 3u + w = 0 \implies 2(2\alpha) - 3(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 0 \implies 4\alpha - 3\alpha - 3\beta + \alpha - \beta = 2\alpha - 4\beta = 0.$$

$$\alpha = 2\beta.$$

Luego los vectores de la intersección son

$$\vec{v} = (2(2\beta), 2\beta + \beta, 0, 2\beta - \beta) = (4\beta, 3\beta, 0, \beta) = \beta(4, 3, 0, 1),\ \beta \in \mathbb{R},$$

Finalmente:

$$\boxed{S^{\perp} \cap Im(T) = \langle (4, 3, 0, 1) \rangle}.$$

2. Sean $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales tales que $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)$ y $W(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3)$.

a) Hallar $M_{BB'}(W \circ V)$ donde $B = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ y $B' = \{(-1, 1), (0, 1)\}$.

b) Clasificar $W \circ V$ en monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo. ¿Es inversible $W \circ V$?

Solución

a) Las matrices asociadas a V y W son

$$M_{EE}(V) = \left(\; V(1, 0) \mid V(0, 1) \; \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y$$

$$M_{EE}(W) = \left(\; W(1, 0, 0) \mid W(0, 1, 0) \mid W(0, 0, 1) \; \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la composición, de la base canónica a la base canónica, será el producto de las matrices conseguidas:

$$M_{EE}(W \circ V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora las matrices de cambio de base, de B a la canónica y de B' a la canónica serán las que tienen los vectores de las bases como columnas:

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; y \, C_{B'E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego se necesita $C_{EB'} = C_{B'E}^{-1} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por último, la matriz pedida es $M_{BB'}(W \circ V) = C_{EB'} M_{EE}(W \circ V) C_{B'E}$,

$$M_{BB'}(W \circ V) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Notemos que una matriz cuadrada es inversible si su determinante no es cero. Entonces para saber si $M_{BB'}(W \circ V)$ es inversible debemos calcular su determinante $\det(M_{BB'}(W \circ V))$. Como esto dará el producto de los determinantes de las dos matrices de cambio de base por el determinante de $M_{EE}(W \circ V)$, como los determinantes de las matrices de cambio de base nunca son nulos, la composición será inversible si $\det(M_{EE}(W \circ V)) \neq 0$. Luego $\det(M_{EE}(W \circ V)) = -4 \neq 0$, por lo tanto $W \circ V$ es inversible y es por tanto isomorfismo.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\begin{cases} T(1,1,0) = (1,1,0) \\ T(0,0,1) = (0,0,1) \\ T(1,-1,0) = (0,0,0) \end{cases}$. Mostrar que T es diagonalizable y hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB}(T)$ es diagonal.

Solución

Lo que el ejercicio pide es hallar los autovalores y autovectores de la transformación dada. Recordemos que λ y $\vec{v}$ son autovalor y autovector de T respectivamente si se cumple que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Una transformación lineal será diagonalizable si los autovectores conforman una base del dominio. Así, podemos notar que

$$T(1,1,0) = 1 \cdot (1,1,0),\, T(0,0,1) = 1 \cdot (0,0,1)\, y\, T(1,-1,0) = (0,0,0).$$

De los primeros dos podemos ver que $\lambda_1 = 1$ y $\vec{v}_{\lambda 1} = (1,1,0)$ y que $\lambda_2 = 1$ y $\vec{v}_{\lambda 2} = (0,0,1)$. Además, de la tercera ecuación tenemos que $T(1,-1,0) = 0 \cdot (1,-1,0)$, así $\lambda_3 = 0$ y $\vec{v}_{\lambda 3} = (1,-1,0)$. Más aún, la matriz que tiene como columna a los autovectores elegidos es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y podemos ver que por segunda columna $\det(A) = (-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(-1-1) = 2 \neq 0$, así entonces los tres vectores son linealmente independientes y conforman una base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Por lo tanto } T \text{ es diagonalizable y los autovectores conforman la base } B \text{ pedida.}}$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Expresar a A^1 como combinación lineal de $\{I,\ A,\ A^2\}$.

Solución

Notemos que por el producto de las diagonales $\det(A) = 1$, entonces existe A^{-1}. Para conseguir a A^{-1} como combinación lineal de $\{I,\ A,\ A^2\}$ usaremos el Teorema de Hamilton-Cayley. Para ello debemos conseguir el polinomio característico de A.

Entonces, se tiene

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -5 & 1-\lambda \end{bmatrix} \implies P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3.$$

Entonces, por el Teorema de Hamilton-Cayley, $P_A(A) = 0$. Así

$$P_A(A) = I - 3A + 3A^2 - A^3 = 0 \implies A^{-1}(I - 3A + 3A^2 - A^3) = A^{-1} - 3I + 3A - A^2 = 0,$$

y por último

$$\boxed{A^{-1} = 3I - 3A + A^2}$$