Práctica 4

1. Considere la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{3n+1}$.

   a) Determine el quinto término de la sucesión, su siguiente y anterior término.

   b) Determine el k-ésimo término de la sucesión, su siguiente y anterior término.

2. Reescriba las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria:

   a) $1 + 2 + 3 \cdots + 100$

   b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

   c) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots + \dfrac{1}{2048}$

   d) $1 + (-4) + 9 + (-16) + \cdots + (-144)$

   e) $9 + 25 + 49 + 81 + \cdots + 441$

   f) $7 + 11 + 15 + \cdots + (4n - 1)$

3. Pruebe mediante el principio de inducción las siguientes identidades:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   d) $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$

4. Demuestre las siguientes identidades:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$

5. Calcule:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1) \quad \left(\text{Sugerencia: } \textstyle\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$

   b) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n}2(i-5)$

   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} \quad \left(\text{Sugerencia: } \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \quad \left(\text{Sugerencia: } \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$

6. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$ vale que:

   a) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

   b) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180^{\text{o}} \times (n-2)$.

7. Pruebe usando el principio de inducción que la cantidad de subconjuntos de un conjuntos con n elementos es 2^n.

8. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración? Se quiere probar que si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces $a^n = 1$ para todo $n \geq 0$.

   i) Paso inicial: si $n = 0$ el resultado es válido.

   ii) Paso inductivo: Supongamos que $a^n = 1$. Entonces $a^{n+1} = \dfrac{a^n\ a^n}{a^{n-1}} = \dfrac{1 \times 1}{1} = 1$.

9. *a*) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por

$$a_1 = 5 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

   Pruebe que $a_n = 2^n + 3^n$.

   b) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por

$$a_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

   Pruebe que $a_n = n^2(n-1)$.

   c) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n! \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

   Pruebe que $a_n = 2^n n!$. (Recuerde que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ para cada n natural.)

10. Pruebe que la siguiente igualdad vale para todo número natural n mayor a 2 usando el principio de inducción.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

11. Pruebe, utilizando el principio de inducción, que para todo natural mayor que 7 vale la desigualdad $2^n \geq 6n + 6$

12. *a*) Pruebe la siguiente desigualdad para todo $n \geq 4$.

$$(n+1)^4 < 3n^4$$

   Nota: No use el principio de inducción, simplemente use que la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^4$ es decreciente (es decir, $a_{n+1} < a_n$ para todo n natural) y que $a_4 < 3$.

   b) Usando el ítem anterior y el principio de inducción, pruebe que $3^n > n^4$ para todo número natural $n \geq 8$.

13. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}}$ para todo n natural. Encontrar el término general de la sucesión y probar que vale para todo n natural.

14. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4\,(a_{n+1} - a_n)$. Probar que para todo número natural el término general de la sucesión es $a_n = n \cdot 2^n$

Ejercicios opcionales

15. Pruebe usando el principio de inducción que la siguiente fórmula es válida para todo n natural.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Sugerencia: Use la fórmula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

16. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definidas recursivamente por

$$a_1 = 1, a_2 = 5 \qquad \text{y} \qquad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

Pruebe, usando inducción completa, que $a_n = 3^n - 2^n$.

17. *a*) Pruebe usando el principio de inducción que

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

b) Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión definida recursivamente por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i + n + 1$ para $n \geq 1$. Pruebe usando la igualdad del ítem anterior y el principio de inducción completa que $a_n = 2^n - 1$.

18. Pruebe usando el principio de inducción que para todo número natural mayor que 1 el último dígito del número $2^{2^n} + 1$ es 7.

19. Demuestre que para todo natural $n \geq 2$ se satisface que $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

20. Pruebe usando el principio de inducción que para todo entero $n \geq 0$ el número $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3}$ es un número entero.