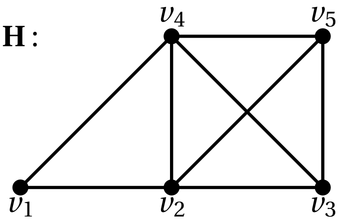
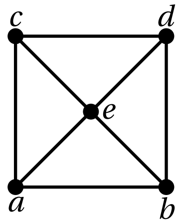
PRÁCTICA 5

1. Escriba el conjunto de vértices y de aristas de los siguientes grafos simples.

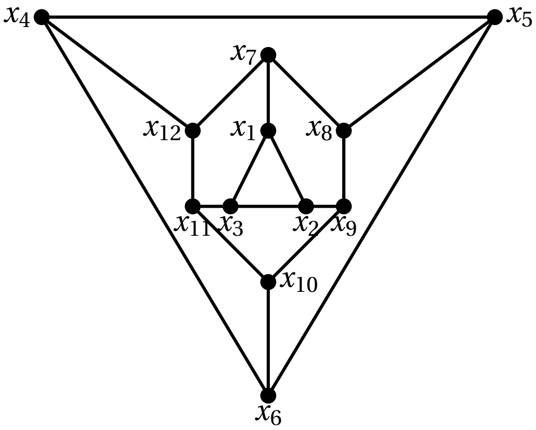
H :



F :



G :



2. Dibuje los siguientes grafos

   a) $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$, $E(G_1) = \{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$

   b) $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3\}$, $E(G_2) = \{v_1w_1, v_1w_2, v_2w_1, v_2w_2, w_3v_3, w_3v_4\}$

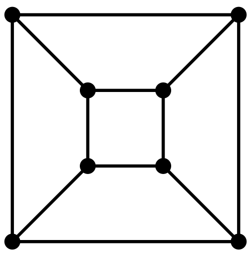
   c) $V(G_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$, $E(G_3) = \emptyset$

   d) $V(G_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$, $E(G_4) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_7u_1\}$

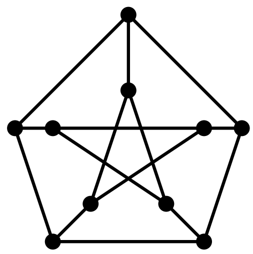
3. De ejemplos de conjuntos independientes y cliques de los grafos del los ejercicios 1 y 2. En los casos donde se pueda, dar ejemplos de distintos tamaños.

4. Encuentre el tamaño máximo de una clique y el tamaño máximo de un conjunto independiente en los grafos de los ejercicios 1 y 2.

5. Encuentre el tamaño máximo de un conjunto independiente y el tamaño máximo de una clique para el cubo y para el grafo de Petersen.



Grafo cubo



Grafo de Petersen

6. Demuestre que en todo conjunto de seis personas hay tres personas que se conocen todas entre sí o hay tres personas tales que no hay dos de ellas que se conocen entre sí. (Estamos asumiendo que, si una persona conoce a otra, la segunda conoce también a la primera.)

7. *a*) Sea H un grafo simple. Probar que $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$.

   b) Sea G un grafo simple. Suponiendo que $\overline{G}$ es isomorfo al grafo que resulta de agregarle m vértices aislados a K_n, donde n y m son enteros mayores o iguales a 3.
   Calcular $\alpha(G)$, $\omega(G)$, $\alpha(\overline{G})$ y $\omega(\overline{G})$.

8. ¿Todo grafo simple tal que todos sus vértices tienen grado 2 es un ciclo?

9. Halle la cantidad de aristas de un grafo tal que los grados de sus vértices son $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7$.

10. Sea G un grafo conexo con 8 aristas, **exactamente** 6 vértices de grado 1, **al menos** un vértice de grado 3, **sin** vértices de grado 5 y **exactamente** un vértice de grado par. ¿Cuántos vértices tiene G y cuáles son los grados de los vértices restantes?

11. Un grafo se dice 3-regular si todos sus vértices son de grado 3.

    a) Dibuje un grafo 3-regular con exactamente 10 vértices.

    b) ¿Existe un grafo 3-regular con exactamente 17 vértices?

    c) Sea G un grafo 3-regular. Probar que $|V(G)|$ es par.

    d) ¿Existe un grafo 3-regular para cualquier cantidad par de vértices?

12. Un grafo se dice k-regular si todos sus vértices son de grado k.

    a) Sea G un grafo k-regular. Calcular $|E(G)|$.

    b) Sea G un grafo k-regular. Probar que si k es impar, entonces $|V(G)|$ es par.

    c) Sea G un grafo k-regular. Probar que k es par o $|V(G)|$ es par.

13. Sean n un entero positivo fijo y S el conjunto de todos los grafos simples que cumplen que la suma de los grados de sus vértices es $2n(2n-1)$.

    a) Probar que existe un grafo completo que pertenece a S.

    b) Probar que si G es un grafo simple con menos vértices que el grafo completo del ítem anterior entonces G no pertenece a S.

    c) Probar que si G es un grafo en S con la mínima cantidad de vértices entonces G es completo.

14. ¿Puede el grafo $\overline{C_6}$ (el complemento del ciclo de 6 vértices) descomponerse en copias de P_4?

15. Demuestre que un grafo con más de seis vértices de grado impar no se puede descomponer en tres caminos.

16. Demuestre que el grafo Cubo tiene las siguientes propiedades:

    a) Puede descomponerse en copias de $K_{1,3}$.

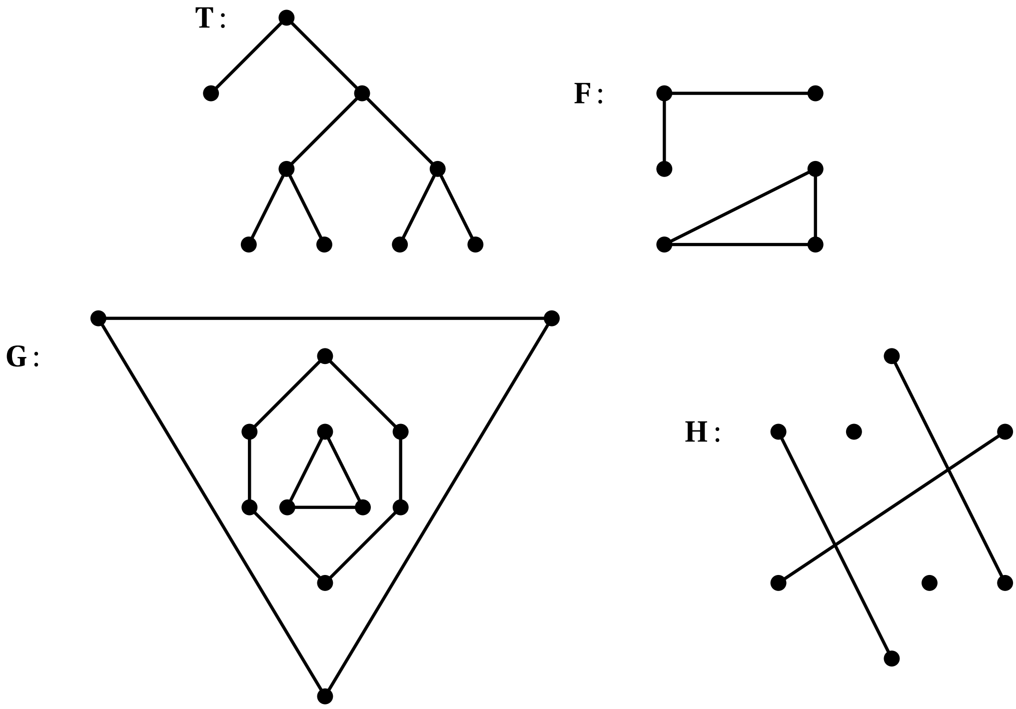
    b) Puede descomponerse en copias de P_4.

    c) Es un subgrafo de su propio complemento.

17. Encuentre una descomposición del grafo de Petersen en copias de P_4.

18. El grafo simple P_4 es *autocomplementario*, es decir, el complemento de P_4 es isomorfo a P_4. Demuestre que si un grafo simple G de n vértices es autocomplementario entonces n o $n-1$ es múltiplo de 4. Para cada n tal que 4 divide a n o a $n-1$, dé un ejemplo de un grafo autocomplementario de n vértices. **Ayuda:** Intente aprovechar la estructura que presenta P_4 para constuir estos ejemplos.

19. ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos? Determine las componentes conexas de cada uno.



20. Pruebe que el complemento de un grafo simple disconexo es siempre conexo.

21. Sea G un grafo simple sin vértices aislados y que no contiene un subgrafo inducido con exactamente dos aristas. Probar que G es un grafo conexo.

22. *a*) Sea G un grafo simple y conexo. Probar que si $|V(G)| \geq 2$, entonces existen al menos dos vértices de G con el mismo grado.

    b) Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Probar que existen k parejas de vértices de G tal que los dos vértices de cada pareja tienen el mismo grado, donde k es la cantidad de componentes conexas de G.

23. *a*) Probar que si G es un grafo autocomplementario, entonces G es conexo.

    b) Probar que si G es autocomplementario y $|V(G)|$ es par, entonces G tiene la mitad de los vértices de grado par y la otra mitad de grado impar.

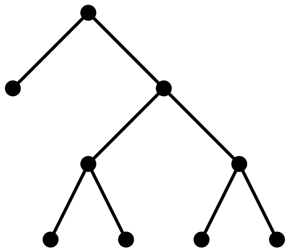
24. Sea G un grafo con exactamente 3 componentes conexas, llamémoslas G_1, G_2 y G_3.

    a) Probar que $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) + \alpha(G_3)$.

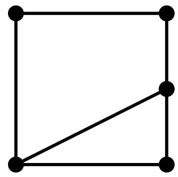
    b) Probar que $\omega(G) = \text{máx}\{\omega(G_1), \omega(G_2), \omega(G_3)\}$.

25. Determinar cuáles de los siguientes grafos son bipartitos. Justificar.

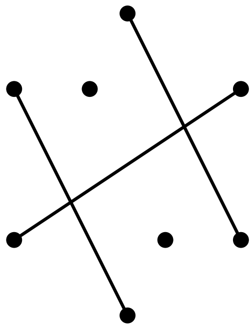
T:



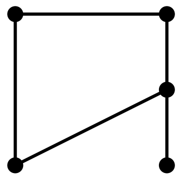
F:



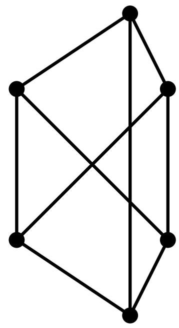
G:



H:



R:



26. Determinar para que valores de n los grafos P_n, C_n y K_n son bipartitos. Justificar.

27. Sea G un grafo bipartito con bipartición $\{X,Y\}$. Consideremos los conjuntos $I_X = \{v \in X : d(v) impar\}$ y $I_Y = \{v \in Y : d(v) impar\}$

    a) Probar que si $|E(G)|$ es impar, entonces $|I_X|$ y $|I_Y|$ son impares.

    b) Probar que si $|E(G)|$ es par, entonces $|I_X|$ y $|I_Y|$ son pares.

    c) Probar que $|I_X|$ y $|I_Y|$ tienen la misma paridad.

28. Sea G un grafo isomorfo al grafo bipartito completo $K_{n,m}$ con $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

    a) Probar que si n es impar y $m = 2$, entonces G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

    b) Probar que G tiene todos sus vértices de grado par si y sólo si n y m son pares.