UTN SANTA FE

MÓDULO
Curso de Nivelación de Matemáticas

AUTORES
Malva Alberto
Yanina Fumero
Adriana Frausín

UNIDAD 1: Conjuntos y Sucesiones

TSTI
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL SANTA FE
LAVAISE 610 - S3004EWB SANTA FE – ARGENTINA
TE +54 (342) 460 1579 / 2390 - FAX 469 0348 / tsti.frsf.utn.edu.ar

OBJETIVOS

Al finalizar esta unidad de aprendizaje habrás desarrollado competencias para:

Saber definir un conjunto de acuerdo a su cantidad de elementos (por extensión o por comprensión).

Operar correctamente con conjuntos.

Utilizar el lenguaje conjuntista para expresar oraciones dadas en lenguaje coloquial.

Identificar los diferentes conjuntos numéricos y saber representarlos en forma gráfica.

Reconocer la relación existente entre términos consecutivos de una sucesión numérica para determinar una fórmula explícita para el enésimo término.

CONTENIDOS

1. CONJUNTOS Y SUCESIONES

1.1 Conjuntos y subconjuntos.

La teoría de conjuntos es, en cierto sentido, la base sobre la cual se construye toda la matemática. A pesar de esto, la teoría que desarrollaremos en esta unidad se aprende y usa fácilmente, y quizás resulte familiar para muchos de ustedes.

Un **conjunto** es cualquier colección bien definida de objetos distintos. Estos objetos son llamados **elementos** o **miembros** del conjunto.

Son ejemplos de conjuntos: todos los ingresantes a la carrera Tecnicatura Superior en Tecnologías de Información, las provincias que constituyen la República Argentina, los números naturales mayores que 15, las aves que vuelan a una altura superior a los tres metros.

En general, utilizaremos letras mayúsculas para indicar conjuntos y letras minúsculas para indicar miembros o elementos de conjuntos.

Si **A** es un conjunto y **x** un elemento, indicamos el hecho de que:
x es un elemento de **A**, escribiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$
o
x no es un elemento de **A**, escribiendo $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$.
Las notaciones $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$, se leen repectivamente: "**x** pertenece a **A**" y "**x** no pertenece a **A**".

Una manera de describir un conjunto con un número **finito** de elementos, es decir un conjunto con ***n*** elementos distintos, donde n es un número natural, es enlistarlos entre llaves. Así, por ejemplo, si V es el conjunto de las vocales del alfabeto español, podemos describir a V por **extensión** como:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Entonces $a \in V$, $i \in V$ pero $m \notin V$.

A veces es poco práctico o imposible describir un conjunto listando todos sus elementos. Esto ocurre cuando ***n*** es suficientemente grande o bien cuando al enumerar los miembros del conjunto no existe un último elemento.

Para estos casos existe otra manera de definición: especificaremos una propiedad o criterio que los elementos del conjunto tienen en común. Usaremos la notación P(x) para indicar un enunciado o fórmula concerniente al objeto

representado por la variable x. El conjunto definido por P(x) se denota así: {x / P(x)} y se lee: "conjunto de las x para las que P(x) tiene sentido y es verdadera".
Así, por ejemplo, al conjunto V definido anteriormente lo podemos denotar a V por **comprensión** como:

V = {x / x es una vocal del alfabeto español}

Ejemplo 1:

A continuación listamos ejemplos de conjuntos por extensión o por comprensión:
N = {1, 2, 3, 4,...}
El conjunto **N** consta de los números que se utilizan para contar, es decir hace referencia al **conjunto de los números naturales**. Este es un ejemplo de conjunto **infinito,** porque no existe el último miembro del conjunto. Utilizaremos los tres puntos para indicar que el conjunto sigue infinitamente.
C = {x / x es un número natural menor que 10 y par}.
Este conjunto consta de todos los números naturales pares menores que 10, es decir no incluye al número 10. Lo podemos denotar por extensión como C = {2, 4, 6, 8}. El conjunto C es finito, posee cuatro elementos.
c) $\mathbf{N_0}$ = {0, 1, 2, 3, 4,...}
El conjunto $\mathbf{N_0}$ consta de los números naturales y el cero. Esto da origen al **conjunto de los números naturales aumentados**.
Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...}
El conjunto **Z** hace referencia al **conjunto de los números enteros**. Observemos que está formado por los números naturales aumentados y sus opuestos.
e) {x / x es un número entero entre –7 y –6}
Como no existe ningún número entero entre –7 y –6, el conjunto está vacío.
Este conjunto lo denotamos con el símbolo ∅ o bien {}.

El conjunto vacío es aquel que no contiene elementos. Lo simbolizamos por: ∅ o bien {}.

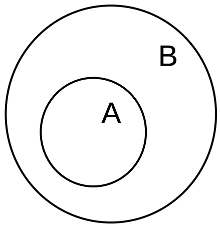
f) H = {x / x es habitante de la República Argentina}
Este conjunto es finito pero tiene tantos elementos que, en realidad, nadie desearía hacer la lista de todos. En estos casos, es decir cuando n es demasiado grande, es conveniente definir al conjunto por comprensión.

En el ejemplo 1 b) el conjunto C contiene algunos números naturales, sólo aquellos que son menores que 10 y pares. Es decir, todos los elementos de C pertenecen a **N** pero existen elementos de **N**, como por ejemplo 3, que no pertenecen a C.
Formalicemos esta idea:

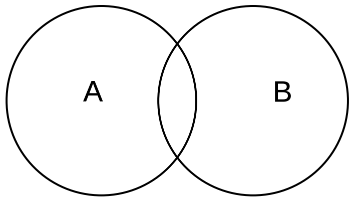
Dados dos conjuntos, A y B, decimos que A es un **subconjunto** de B si todo elemento de A es también un elemento de B. Usaremos la notación $A \subset B$ (o $B \supset A$) para indicar que A es un subconjunto de B, o que A esta incluido en B.

Si A no es subconjunto de B, lo indicamos $A \not\subset B$.

Gráficamente



$A \subset B$



$A \not\subset B$

Estos gráficos se denominan diagramas de Venn y los usaremos para mostrar las relaciones entre conjuntos.

Observar que existen dos casos extremos para cualquier conjunto A:
$A \subset A$, es decir A es subconjunto de sí mismo, y además **$\varnothing \subset A$**, es decir el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto A, pues no contiene elemento alguno.

Ejemplo 2:

a) Si A = {a, b, c} y B = {x, y, b, c, a, z} entonces $A \subset B$ porque todo elemento de A es también elemento de B.

b) Si R = {a, c} y P = {a, b, d, e} entonces R no es subconjunto de P, pues $c \in R$ pero $c \notin P$. Esto se denota como $R \not\subset P$.

Sea A = {1, 2, 3}. Los conjuntos: $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} son todos los subconjuntos de A. Al conjunto de todos los subconjuntos de A se le llama **conjunto potencia** de A y se indica por P(A).

De la definición precedente podemos introducir el concepto de igualdad entre dos conjuntos:

Dados dos conjuntos, A y B, decimos que:

si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$

y además,

si $A = B$ entonces $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ejemplo 3:

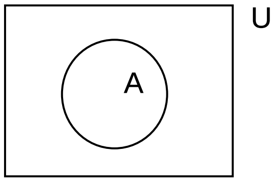
Si A = {x / x es un entero positivo par no mayor que 10} y B = {x / x = 2.y donde $y \in$ {1, 2, 3, 4, 5} }, entonces listando sus elementos tenemos:
A = {2, 4, 6, 8, 10} y B = {2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5} = {2, 4, 6, 8, 10}
que como podemos observar $A \subset B$ y $B \subset A$, luego A = B.

Volviendo al ejemplo 1 b) donde C = {x / x es un número natural menor que 10 y par}, observemos que existe un conjunto de referencia sobre el cual restringimos nuestro análisis, estamos incluyendo en C *números naturales* que cumplen una determinada propiedad (ser pares y menores que 10). Aquí el conjunto de referencia es **N** y contiene al conjunto C.

En la mayoría de los problemas este conjunto será evidente por el contexto del problema, sin embargo podrá variar de acuerdo a nuestro objetivo. Así:

Dado un conjunto A no vacío, existe un conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia, y es llamado **referencial** o **universal**. Lo designaremos con la letra U.

Gráficamente, al conjunto universal U lo indicaremos con un rectángulo, mientras que a los conjuntos contenidos en U los indicaremos con círculos.



Ejemplo 4:

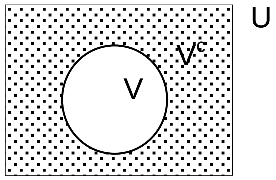
Si V = {a, e, i, o, u} = {x/ x es una vocal del alfabeto español}, es obvio que todos los elementos del tema de referencia, hacen alusión directa a las letras del alfabeto, luego:

U = {x / x es una letra del alfabeto español}

De lo anterior surge que, dados los conjuntos V y U, queda determinado otro conjunto formado por los elementos del conjunto universal U que no pertenecen a V, dicho conjunto es llamado **complemento** de V y se denota por V^c. Así:

$V^c = \{x / x \notin V\}$

Gráficamente:



Observando el gráfico…., ¿puedes determinar cuál es el complemento del complemento de V, es decir $(V^c)^c$?

Ejemplo 5:

Continuando con el ejemplo precedente: si V = {x/ x es una vocal del alfabeto español} y U = {x / x es una letra del alfabeto español}, entonces:

V^c = {x / x no es una vocal del alfabeto español}
= {x / x es una consonante del alfabeto español}

Observar que: $\mathbf{V \cup V^c = U}$

Ejemplo 6:

a) Si U = {x / x es letra de la palabra concierto}, A = {x / x es letra de la palabra coro}, entonces:
U = {c, o, n, i, e, r, t}
A = {c, o, r}
A^c = {n, i, e, t}

b) Si U = $\mathbf{Z}^+$, A = {x / x es un entero positivo y $x^2 \leq 25$}, recordando que:
$\mathbf{Z}^+$ = **N** ={1, 2, 3,...} y representa al **conjunto de los enteros positivos**.
$\mathbf{Z}^-$ = {..., -3, -2, -1} y representa al **conjunto de los enteros negativos**.
$\mathbf{x^2 = x.x.}$ Ejemplos: $1^2 = 1.1 = 1$, $2^2 = 2.2 = 4$, $3^2 = 3.3 = 9$
Tenemos:
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}
A = {1, 2, 3, 4, 5}
A^c = {6, 7, 8, 9,...} = {x / x es un entero positivo y $x^2 > 25$}

c) Si U = **Z**, A = $\mathbf{Z}^+$, entonces A^c = {..., –4, –3, –2, –1, 0}

Actividad 1

✍ 1.1 Escribe cada conjunto listando sus elementos, es decir define cada conjunto por extensión:
{x / x es un entero positivo impar menor que 10}
{x / x $\in$ Z y $x^2 < 12$}
{y / y $\in$ N con y = y + 1}

✍ 1.2 Sea A = {1, 2, 5, 8, 11}. Determina cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos:

{5, 1} $\subset$ A	e) A $\subset$ {11, 2, 5, 1, 8, 4}
{1, 6} $\not\subset$ A	f) {8, 1} $\in$ A
$\varnothing \subset$ A	g) $\varnothing \in$ A
A $\supset$ {3, 5}	h) {1, 8, 2, 5, 11} $\not\subset$ A

1.3 Dados los conjuntos:

A = {1}, B = {1, a, 2, b, c}, C = {b, c}

D = {a, b}, E = {a, b, c, d, 1, 2}

Completa los espacios con los símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ para que cada enunciado sea verdadero.

A.....B b) $\varnothing$.....A c) B.....C

C.....E e) D.....C f) B.....E

1.4 Dados los conjuntos:

U = {x / x es una letra de la palabra cacerola},

A = {x / x es una letra de la palabra caro},

B = {x / x es una letra de la palabra roca},

C = {x / x es una letra de la palabra acelero}.

Determina cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos:

a) A = B b) $A \subset C$ c) $A^c = B^c$ d) $A^c \subset C^c$

En esta sección analizaremos varias operaciones que combinan conjuntos dados para crear nuevos conjuntos. Luego examinaremos algunas leyes que gobiernan dichas operaciones.

1.2.1 Unión

Dados los conjuntos A y B, definimos su **unión** como el conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen a A o B, y se indica como $A \cup B$.($A \cup B$ se lee: A unión B)

En símbolos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

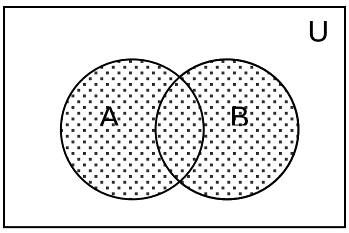
donde "o" significa que $x \in A$ o $x \in B$ o x pertenece a ambos.

Observa que:

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

Ilustremos esta operación utilizando un diagrama de Venn:



Ejemplo 7:

Determinaremos $A \cup B$ para cada par de conjuntos A, B dados:

a) Si A = {a, b, c, e, f} y B ={b, d, r, s}. Entonces $A \cup B$ = {a, c, e, f, d, r, s, b} pues se listan: todos los elementos de A que no están B, los elementos de B que no están en A y los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

b) Si A = {x / x es un número natural menor que 7} y B = {y / y es un entero negativo tal que y + 5 > 0}.
Listemos primero los elementos de cada uno de los conjuntos A y B:
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
B = {–4, –3, –2, –1}
Luego $A \cup B$ = {–4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Si A = {norte, sur, este, oeste} y B = {norte, sur}, entonces:
$A \cup B$ = {norte, sur, este, oeste} = A, pues $B \subset A$.

1.2.2 Intersección

Dados los conjuntos A y B, definimos su **intersección** como el conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, y se indica como $A \cap B$.($A \cap B$ se lee: A intersección B)

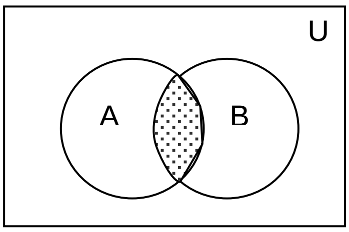
En símbolos:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Observa que:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- Si A y B no tienen elementos comunes $A \cap B = \varnothing$. En este caso se dice que los conjuntos A y B son **disjuntos**.

Ilustremos esta operación utilizando un diagrama de Venn:



Ejemplo 8:

Determinaremos $A \cap B$ para cada par de conjuntos A, B dados:
a) Si A = {a, b, c, e, f} y B ={b, d, r, s}. Entonces $A \cap B$ = {b} pues el elemento b es el único que pertenece tanto a A como a B.

b) Si A y B son los conjuntos del ejemplo 7 b), entonces $A \cap B = \varnothing$.

c) Si A = {norte, sur, este, oeste} y B = {norte, sur}, entonces:
$A \cap B$ = {norte, sur} = B, pues $B \subset A$.

Ejemplo 9:

Dados los conjuntos:
A = {a, b, c, e, f}, B = {b, e, f, r, s}, C = {a, t, u, v}
Hallaremos $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y $A \cap B \cap C$
- Los elementos b, e y f son lo únicos que pertenecen a A y B, por lo que $A \cap B$ = {b, e, f}.
- Observando los conjuntos A y C, se tiene que $A \cap C$ = {a}
- Como B y C no poseen elementos comunes, $B \cap C = \varnothing$.
- $A \cap B \cap C = \varnothing$, pues no existen elementos que pertenezcan simultáneamente a A, B y C.

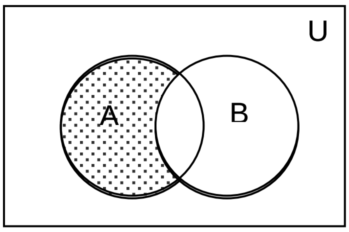
1.2.3 Diferencia

Dados los conjuntos A y B, definimos el conjunto **A – B** como aquel que contiene a todos los elementos que pertenecen a A pero no a B.(A – B se lee: A menos B)

En símbolos:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ilustremos esta operación utilizando un diagrama de Venn:



A –

Observa que el conjunto diferencia A – B se puede expresar en términos de la intersección y el complemento como: $\mathbf{A - B = A \cap B^c}$

De manera análoga a como se definió A – B se define **B – A**:
$B - A = \{ x \,/\, x \in B \text{ y } x \notin A \}$

Ejemplo 10:

Encontraremos A – B y B – A para cada par de conjuntos A, B dados:
a) Si A = {a, b, c} y B = {b, c, d, e}, entonces A – B está sólo formado por el elemento a, pues b y c pertenecen a B. En símbolos: A – B = {a}.
El conjunto B – A = {d, e} porque los elementos b y c de B también pertenecen a A.

b) Si A = {azul, rojo, amarillo, verde, blanco} y B = {amarillo, blanco} podemos observar que $B \subset A$.
Así A – B = {azul, rojo, verde}, pues amarillo y blanco están en B.
B – A = ∅, pues todos los elementos de B pertenecen a A, o dicho de otra manera no existen elementos de B que no pertenezcan a A.

c) Si A = {x / x es un número natural par} y B = {x / x es un número natural impar}, entonces como A y B son disjuntos (A={2, 4, 6, 8, 10,...}, B={1, 3, 5, 7, 9,...}) tenemos:

A – B = A   B – A = B

Usando la operación diferencia, tenemos otra forma de definir el complemento de un conjunto:

Dado un conjunto A, definimos su **complemento**, A^c, como la diferencia entre el conjunto referencial U y el conjunto A.

En símbolos: $\mathbf{A^c = U - A}$

Observar entonces que:

$\mathbf{A = U - A^c}$

1.3 Propiedades algebraicas de las operaciones con conjuntos.

Las operaciones con conjuntos que acabamos de definir satisfacen muchas propiedades algebraicas, algunas de ellas similares a las propiedades que se satisfacen en el sistema de los números reales y que posteriormente repasaremos.

En el cuadro siguiente, se resumen las principales propiedades de la unión e intersección entre conjuntos:

Propiedades conmutativas:
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Propiedades asociativas:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Propiedades distributivas:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedades de idempotencia:
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

Propiedades del complemento:
$(A^c)^c = A$
$A \cup A^c = U$
$A \cap A^c = \varnothing$
$\varnothing^c = U$
$U^c = \varnothing$
$$\left.\begin{array}{l}(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\end{array}\right\} \text{Leyes de De Morgan}$$

Propiedades del conjunto universal:
$A \cup U = U$
$A \cap U = A$

Propiedades del conjunto vacío:
$A \cup \varnothing = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$

Ejemplo 11:

Dados los conjuntos U ={x / x es un entero tal que $-3 \leq x \leq 10$}, A = {x / x = y – 3 con $y \in$ {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} } y B = {x / x es un entero tal que $x^2 < 16$}, listaremos por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

e) A^c f) $U - A^c$ g) $B^c - A$ h) $A^c \cup B$

Listemos por extensión los conjuntos U, A y B dados:
U = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
B = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}
Entonces,
a) $A \cup B$ = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} (observar que los elementos comunes a ambos conjuntos se listan una única vez).
b) $A \cap B$ = {1, 2, 3}.
c) A – B = {4, 5, 6, 7}, pues los elementos 1, 2 y 3 pertenecen a B.
d) B – A = {–3, –2, –1, 0}.
e) A^c = {–3, –2, –1, 0, 8, 9, 10}.
f) Podemos emplear las propiedades descriptas para hallar $U - A^c$. Como $A \cup A^c = U$, entonces $U - A^c = A$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.
g) Como B^c = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, entonces $B^c - A$ = {8, 9, 10}.
h) $A^c \cup B$ = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10}.

Ejemplo 12: Sean los conjuntos:
U = {x / x es estudiante de UTN- FRSF}
A = {x / x es estudiante de 1er. año de UTN- FRSF}
B = { x / x es estudiante de 2do. año de UTN- FRSF }
C = { x / x es estudiante de la carrera ISI de UTN- FRSF }
D = { x / x es estudiante de la carrera TTI de UTN- FRSF }
E = {x / x es estudiante de UTN- FRSF que cursa Matemática Elemental}
F = { x / x es estudiante de UTN- FRSF que fue al concierto anoche}
G = { x / x es estudiante de UTN- FRSF que se acostó a las 22 hs. anoche}

Expresaremos las siguientes oraciones dadas en lenguaje coloquial utilizando el lenguaje conjuntista:
a) Todos los estudiantes de 1er. Año de la carrera TTI cursan Matemática Elemental: $A \cap D \cap E = A \cap D$
b) Los estudiantes de UTN- FRSF que se acostaron a las 22 hs. anoche son los que cursan Matemática Elemental o los que fueron al concierto:
$G = E \cup F$
c) El concierto fue solo para estudiantes de 1er. y 2do. año de UTN- FRSF: $(A \cup B)^c \cap F = \varnothing$

Lectura optativa

La lectura del ejemplo dado a continuación es de carácter opcional, es decir no constituye un requisito previo para los conocimientos subsecuentes de este curso. Sin embrago, consideramos necesaria su inclusión para aquellos estudiantes que deseen avanzar en temas más complejos.
Ejemplo 13: Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostraremos que:
$(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Para demostrar una igualdad de conjuntos, muchas veces es conveniente reescribir cada lado en términos de $\cup$, $\cap$ y complementos para así determinar si ambos lados de la igualdad representan al mismo conjunto.

Desarrollemos el miembro izquierdo:
$(A - B) - C = (A \cap B^c) - C = (A \cap B^c) \cap C^c$

Del lado derecho obtenemos:
$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c$
$= A \cap (B^c \cap C^c)$ por ley de De Morgan
$= (A \cap B^c) \cap C^c$ por ley asociativa

Así los lados derecho e izquierdo de la igualdad son iguales y por lo tanto tenemos demostrada la identidad.

Actividad 2

2.1 Dados los conjuntos:
$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$A = \{a, b, c, g\}$ $B= \{d, e, f, i\}$ $C = \{a, f, g\}$
Calcula:
a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) A^c d) $C^c \cup B$
e) $A \cap C$ f) $B \cap C^c$ g) $A \cap B \cap C$ h) $C - B$
i) $(A \cup B)^c$ j) $(A \cap B)^c$ k) $A^c \cap B^c$ l) $A^c \cup B^c$
m) $A \cap (B \cup C)$ n) $(A \cup C) \cap B$

2.2 Con referencia en los conjuntos definidos en el ejemplo 12, expresa las siguientes oraciones dadas en lenguaje coloquial utilizando el lenguaje conjuntista:
Ningún estudiante de UTN- FRSF que cursa Matemática Elemental fue al concierto anoche.
Todos los estudiantes de 2do. año de UTN- FRSF que no son de la carrera ISI ni de TSTI, fueron al concierto anoche.

2.3 Sabiendo que $A \subset B$, grafica, si es posible, las siguientes situaciones y determina su resultado:
a) $A - B =$...... b) $B^c - A =$......
c) $A^c \cup B =$...... d) $(A^c \cap B) \cup A =$......

2.4 Sean A, B y C subconjuntos de U. Si:
$A \cap B = A \cap C$
¿se puede concluir que los conjuntos B y C son iguales? Justifica tu respuesta. (Ayuda: Para demostrar que un enunciado es falso sólo se necesita encontrar un ejemplo donde no se cumpla. A esto se le llama un CONTRAEJEMPLO)

2.5 ¿Qué puedes decir acerca de los conjuntos P y Q si
$P \cup Q = P$?
$P \cap Q = P$?

2.6 ***Ejercicio optativo***
Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestra que:
$(A - B) - C = (A - C) - B$
$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

1.4 Conjuntos numéricos.

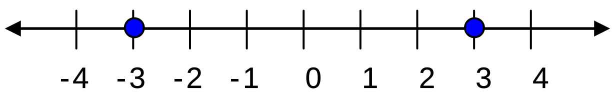
En el presente curso y posteriores trabajaremos con conjuntos numéricos, es decir conjuntos formados exclusivamente por números, donde muchos de los cuales han estado presentes en tu formación matemática previa. Si bien no haremos un estudio sistemático de los distintos conjuntos numéricos, trataremos de revisarlos ordenadamente.

En secciones anteriores nos hemos referido a algunos conjuntos numéricos. Cabe aquí, recordarlos:

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} = Números naturales

N_0 = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...} = Números naturales aumentados

Es posible representar en forma gráfica estos conjuntos empleando una **recta numérica**. Así, por ejemplo, el número 3 está ubicado a tres unidades a la derecha del cero en la recta numérica y el número –3 (se lee: menos tres), a tres unidades a la izquierda del cero. El número –3 es el opuesto de 3.



Vemos entonces que cada entero es la coordenada de algún punto de la recta numérica. Ahora bien, aunque no hay números enteros entre 1 y 2, existen muchos otros números entre ellos, como por ejemplo 27/20, 1,5. De estos números existen algunos que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros, con $b \neq 0$. El conjunto de números que se pueden representar de este modo se denomina conjunto de los **números racionales** y se simboliza con la letra **Q**.

Un **número racional** es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros, con $b \neq 0$. Al símbolo $\frac{a}{b}$ se lo denomina **fracción** y:

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \to \; NUMERADOR \\ \to DENOMINADOR \end{array}$$

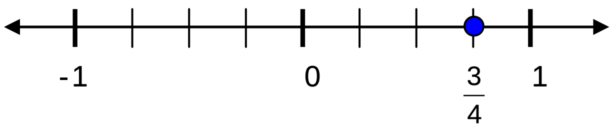
Observa que: $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ pero $\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{Z}$

Ejemplo 14

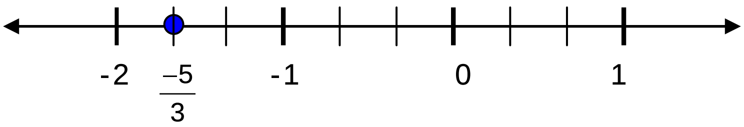
a) $5 \in \mathbf{Q}$, ya que $5 = \frac{5}{1}$ b) $-3 \in \mathbf{Q}$, ya que $-3 = \frac{-3}{1}$

c) $0 \in \mathbf{Q}$, ya que $0 = \frac{0}{1}$ d) $\frac{325}{13} \in \mathbf{Q}$ e) $\frac{-19}{100} \in \mathbf{Q}$

Los elementos de este conjunto pueden ser representados en la recta numérica. Por ejemplo, para representar la fracción $\frac{3}{4}$ dividimos la unidad en 4 partes iguales. Luego, a partir del 0, contamos hacia la derecha 3 de esas partes iguales.



Para representar la fracción $\frac{-5}{3}$ dividimos cada unidad en 3 partes iguales. Luego, a partir del 0, contamos hacia la izquierda 5 de esas partes iguales.



Los números $\frac{3}{4}$ y $\frac{-5}{3}$ son ejemplos de números racionales que no corresponden a enteros. Dichos números se denominan **fraccionarios puros**.

Todo número racional se puede escribir en forma decimal, para ello dividimos numerador por denominador.

a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ b) $\frac{19}{100} = 0{,}19$ c) $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ d) $\frac{281}{90} = 3{,}1222...$

A veces, el resultado es una **expresión decimal exacta**, como en los casos a) y b) porque la parte decimal tiene una cantidad finita de cifras. En cambio en los casos c) y d), las **expresiones decimales** son **periódicas** porque los números 3 y 2 se repiten indefinidamente.

Habitualmente se coloca una barra o arco encima del conjunto de dígitos que se repiten, de modo que c) y d) pueden escribirse como:

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ $\frac{281}{90} = 3{,}1\overline{2}$

En un número decimal podemos considerar los elementos: parte entera, parte decimal no periódica y parte decimal periódica. Por ejemplo, el número $20{,}3\overline{52}$ tiene 20 como parte entera, 3 como parte decimal no periódica y 52 como parte decimal periódica.

Es cierto también que todo número decimal exacto o periódico se puede expresar como un número racional. Los matemáticos han encontrado reglas para hacerlo. Veamos ejemplos para cada caso:

Expresión decimal exacta: escribimos como numerador el número dado sin coma, y como denominador, un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

$1{,}2 = \frac{12}{10}$

Observa que la fracción $\frac{12}{10}$ puede ser simplificada dividiendo numerador y denominador por el mayor divisor que tienen en común: 2.

Así $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

Expresión decimal periódica pura (cuando el período aparece inmediatamente después de la coma): escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera y, como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga el período.

$3,\overline{26} = \frac{326-3}{99} = \frac{323}{99}$

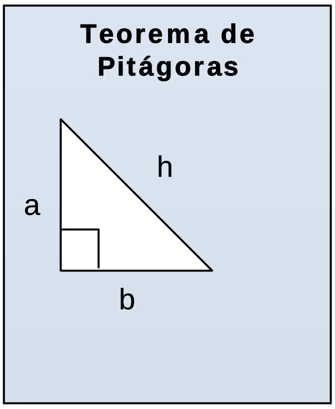
Expresión decimal periódica mixta(cuando el período no aparece inmediatamente después de la coma. Tiene una parte no periódica y otra periódica): escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera seguida de la parte no periódica y, como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

$1{,}2\overline{51} = \frac{1251-12}{990} = \frac{1239}{990}$

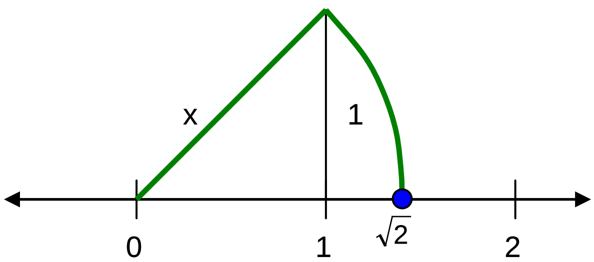
Ahora bien, volviendo a nuestra aclaración dada al comienzo, ¿existen realmente números entre 1 y 2 que no puedan expresarse como el cociente $\frac{a}{b}$ de dos enteros? La respuesta es SÍ. Presentaremos, una construcción que se puede utilizar para localizar un punto entre ellos cuya coordenada no es un número racional: $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ se lee raíz cuadrada de 2. He aquí las primeras 16 cifras decimales:1.414213562373095. Pitágoras demostró que este número **no es racional**.

En dicha construcción utilizaremos el Teorema de Pitágoras:



En el punto de coordenada 1 de la recta numérica construimos un segmento recto de longitud 1, perpendicular a dicha recta. Unimos el extremo de este segmento con el punto de coordenada 0, ésta viene a ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo y, por el teorema de Pitágoras, mostramos que representa $\sqrt{2}$. Usando un compás, trasladamos esta medida a la recta numérica para localizar así al punto de coordenada $\sqrt{2}$.



Por Pitágoras:

$x^2 = 1^2 + 1^2$

El número $\sqrt{2}$ no admite una representación decimal exacta ni periódica. A este tipo de número se le da el nombre de número irracional. Son ejemplos de números irracionales: 0,12345678910111213...

π = 3,141592653589793...

25,1223334444555556...

donde los tres puntos simbolizan la existencia de infinitas cifras decimales no periódicas.

Un **número irracional** es aquel que no puede ser expresado de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros.

A este conjunto numérico se lo simboliza con la letra **I**.

Cuando unimos el conjunto de los números racionales con el de los números irracionales, se obtiene el conjunto de los **números reales**, el cual simbolizamos con la letra **R.** Es decir: **Q ∪ I = R**.

Sintetizando:

Cada número real se puede representar por medio de un decimal. Si el decimal resulta exacto o periódico, el número es racional; caso contrario, se trata de un número irracional.

El siguiente cuadro muestra en forma esquemática la sucesiva ampliación que hemos hecho en el campo de los números:

Naturales
{0}
Naturales
Enteros negativos
Enteros
Fraccionarios
Racionales
Irracionales
Reales

Ejemplo 15:

Completemos la siguiente tabla indicando con una cruz el conjunto al que pertenece cada número:

	N	**N_0**	**Z**	**Q**	**I**	**R**
0		x	x	x		x
3	x	x	x	x		x
-15			x	x		x
3,07				x		x
$\frac{-39}{4}$				x		x
$\sqrt{16}$	x	x	x	x		x
$\sqrt{5}$					x	x

El conjunto de los números reales se puede representar en la recta numérica, más aún cada punto de la recta numérica se puede nombrar mediante un número real. De esta manera podemos decir que existe una *correspondencia biunívoca* entre **R** y la recta numérica.
En tu paso por las matemáticas habrás conocido algunas de las propiedades básicas de **R,** aunque es posible que no recuerdes sus nombres específicos. Como este conjunto numérico será suficiente para nuestro trabajo en este curso y siguientes, te proponemos revisarlas en la unidad siguiente.

Actividad 3

3.1 Lista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
El conjunto de los elementos de Z que $\notin$ a N_0.
El conjunto de los enteros negativos mayores que –3.
El conjunto de los elementos de $\mathbf{N_0}$ mayores que 100.

3.2 Determina la verdad o falsedad de los siguientes enunciados.
$\mathbf{N_0 \supset Z^+}$
$\mathbf{Z \subset Q}$
$\mathbf{R \subset Q \cup I}$
$\mathbf{Q \cap Z} = \varnothing$
Todo punto de la recta numérica se puede asociar con un número racional.

Todo número irracional es la coordenada de un punto en la recta numérica.

3.3 Localiza en la recta numérica los siguientes números:

$\sqrt{3}$ (Ayuda: emplea el punto de coordenada $\sqrt{2}$ y realiza un procedimiento similar al realizado para ubicar este número).

$\sqrt{5}$ c) $-\sqrt{2}$

1.5 Sucesiones.

Algunos de los conjuntos más importantes se dan en conexión con las sucesiones.

¿Puedes determinar a que conjunto numérico está haciendo referencia la siguiente lista?

0 2 4 6 8 10 12 14 ....

Por tu capacidad de percepción habrás descubierto que la lista hace referencia al conjunto de los números pares. Esta lista recibe el nombre de *sucesión*. Observa que esta lista sigue un orden y que cada elemento se obtiene sumándole 2 unidades al anterior.

Una **sucesión** es una lista de objetos, uno después del otro, y numerada en el orden creciente de los números naturales. La lista puede ser finita, es decir, puede detenerse después de cierto número de términos o puede seguir indefinidamente.

Representaremos los elementos de una sucesión S como:
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
Para nosotros, a_1 será el primer término de la sucesión, a_2 será el segundo término de la sucesión, a_3 será el tercer término de la sucesión y en general, a_n será el enésimo término de la misma.
Los elementos a_i no necesitan ser números, pueden ser elementos de cualquier conjunto. Además, no necesariamente deben ser distintos. La sucesión definida precedentemente es un ejemplo de sucesión numérica (todos sus elementos son números), infinita y donde todos los elementos son diferentes.
La secuencia a, a, b, a, b, c, a, b, c, d es un ejemplo de sucesión finita, cuyos elementos están tomados del alfabeto español.

En este curso focalizaremos nuestro estudio sobre algunas sucesiones numéricas. Exploraremos sus propiedades intrínsecas para lograr determinar la próxima entrada de una lista de números que sigue indefinidamente. Más generalmente, encontraremos una fórmula explícita para determinar el término a_n de la sucesión sin necesidad de hallar los términos previos.

Ejemplo 16:

Al comienzo hicimos referencia a la sucesión

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,.......

como la secuencia de números pares. Observamos que cada elemento se obtiene sumándole 2 unidades al anterior. Así:

$a_1 = 0 \longrightarrow a_1 = 0 = 2.0$
$a_2 = a1 + 2 = 2 \longrightarrow a_2 = 2 = 2.1$
$a_3 = a2 + 2 = 2 + 2 \longrightarrow a_3 = 2 + 2 = 2.2$
$a_4 = a3 + 2 = 2 + 2 + 2 \longrightarrow a_4 = 2 + 2 + 2 = 2.3$
$a_5 = a4 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 \longrightarrow a_5 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2.4$
....

Así podemos observar que la diferencia entre el subíndice "i" del elemento a_i y la cantidad de veces que sumamos el número 2 es 1.

Por ejemplo, si deseamos conocer el vigésimo sexto término de la sucesión, bastará con calcular el producto 2.25 sin necesidad de calcular los 25 términos previos. De esta manera $a_{26} = 50$.

En general $\mathbf{a_n = 2.(n - 1)}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ejemplo 17:

Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, ...$ encontraremos una fórmula para el enésimo término de la sucesión.

Entonces:

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}$

$a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{2^3}$

$a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{2^4}$

Observa que el subíndice "i" del elemento a_i es igual al número de veces que multiplicamos el 2 en el denominador.

Así: $\mathbf{a_n = \frac{1}{2^n}}$ para todo n $\in$ **N**.

Actividad 4

4.1 Encuentra una fórmula general para el enésimo término de cada una de las siguientes sucesiones:

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

1, 4, 16, 64, 256, ...

3, 3, 3, 3, 3, 3, ...

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$

4.2 Determina la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

El término general a_n de la secuencia de números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... se puede expresar como **n (n – 1)/2** para todo n $\in$ **N**.
El término general a_n de la secuencia de números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... se puede expresar como **2n – 1** para todo n $\in$ **N**.

4.3 Juan gana $1 el 1º de mayo, $2 el 2 de mayo, $4 el 3 de mayo, $8 el 4 de mayo, y así sucesivamente. ¿Cuánto ganará el décimo día? ¿y el día 15?

1.6 Sugerencias y claves para las respuestas.

Actividad 1

1.1 a) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\{\} = \varnothing$

1.2 a) V b) V c) V d) F
e) V f) F g) F h) F

1.3 a) $A \subset B$ b) $\varnothing \subset A$ c) $B \supset C$
d) $C \subset E$ e) $D \not\subset C$ f) $B \subset E$

1.4 $U = \{c, a, e, r, o, l\}$
$A = \{c, a, r, o\}$ $B = \{r, o, c, a\}$ $C = \{a, c, e, l, r, o\}$
$A^c = \{e, l\} = B^c$ $C^c = \{\}$

a) V b) V c) V d) F

Actividad 2

2.1 a) $\{a, b, c, g, d, e, f, i\}$ b) $\{d, e, f, i, a, g\}$
c) $\{d, e, f, h, i\}$ d) $\{b, c, d, e, h, i, f\}$
e) $\{a, g\}$ f) $\{d, e, i\}$
g) $\varnothing$ h) $\{a, g\}$
i) $\{h\}$ j) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
k) $\{h\}$ l) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
m) $\{a, g\}$ n) $\{f\}$

2.2 a) $E \cap F = \varnothing$
b) $(B - C - D) \subset F$

2.3 a) $\varnothing$
b) B^c
c) U

B

Gráfico b): B^c

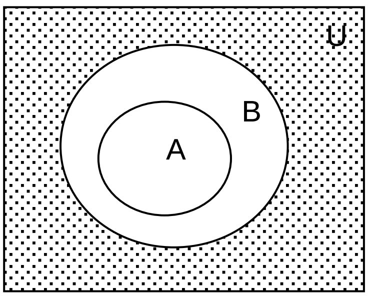


Gráfico c): U

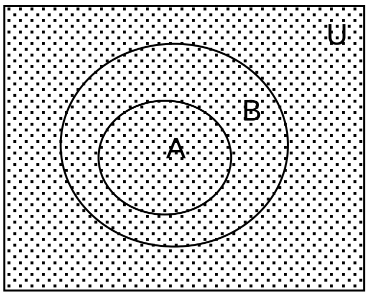
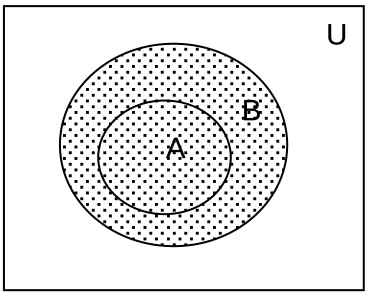


Gráfico d): B



2.4 No. Contraejemplo:

A = {1, 2, 3} B = {2, 3, 5, 6} C ={2, 3, 4, 6}

2.5 a) Puede suceder que P = Q o bien que $Q \subset P$.

b) Puede suceder que P = Q o bien que $P \subset Q$.

2.6 En estos problemas desarrolla los miembros derecho e izquierdo de cada identidad para verificar la igualdad de conjuntos. Te mostramos como hacerlo para el inciso a):

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap B^c) - C\\ &= (A \cap B^c) \cap C^c\\ &= A \cap B^c \cap C^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A - C) - B &= (A \cap C^c) - B\\ &= (A \cap C^c) \cap B^c\\ &= A \cap C^c \cap B^c = A \cap B^c \cap C^c\end{aligned}$$

Actividad 3

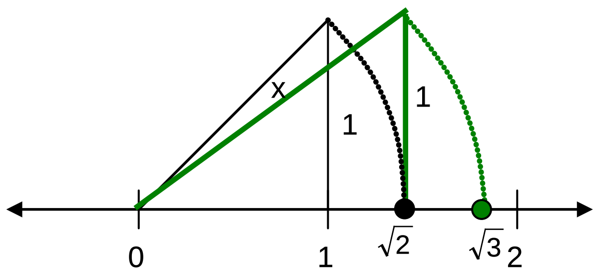
3.1 a) $\{..., -3, -2, -1\} = \mathbf{Z}^-$

$\{-2, -1\}$

$\{101, 102, 103, ...\}$

3.2 a) V b) V c) V d) F e) F f) V

3.3 a) $\sqrt{3}$

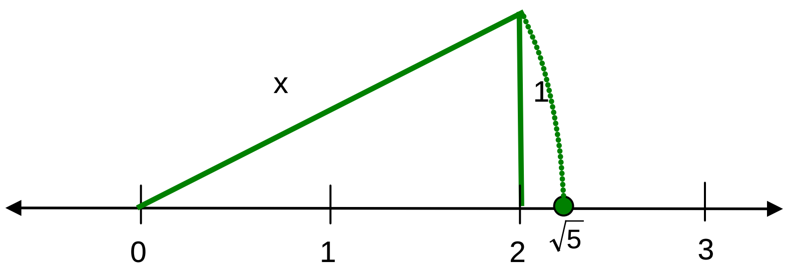


Por Pitágoras:

$x^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$

$x^2 = 2 + 1$

b) $\sqrt{5}$



Por Pitágoras:

$x^2 = (2)^2 + 1^2$

$x^2 = 4 + 1$

c) La representación de $\sqrt{2}$ te ayudará. Inténtalo!

Actividad 4

4.1 a) $a_n = n^2$, $n \in \mathbf{N}$

$a_n = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N_0}$

$a_n = 4^n$, $n \in \mathbf{N_0}$

$a_n = 3$, $n \in \mathbf{N}$

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$

4.2 a) F b) V

4.3 $a_{10} = \$512$ $a_{15} = \$16384$