Problema de aplicación de la serie de Taylor de la Ecuación de onda básica

Materia:

Seminario de Solución de Problemas de Métodos Matemáticos III

Sección:

D02

Integrantes:

218292866 Ignacio David Vázquez Pérez

214782907 Joanna Nataly Araiza Abarca

Profesora:

María Elena Olivares Pérez

Fecha de entrega: 15/02/2020

Índice:

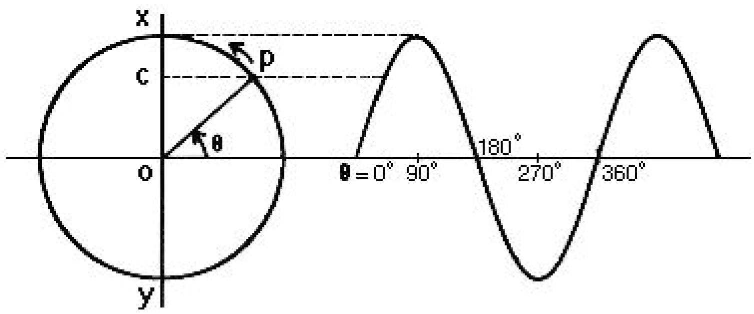
Introducción

La ecuación de onda es una importante ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden que describe la propagación de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua. Es importante en varios campos como la acústica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la dinámica de fluidos.

El movimiento arminico simple (SHM) es un movimiento que se puede aproximar por la de los dientes de un tenedor de sintonía cuando se golpea, y podría ser visto como una sinusoidal o de onda sinusoidal de la traza de un bolígrafo unida al diente y en movimiento contra el papel viaja a velocidad uniforme. De manera similar, el movimiento armónico simple puede derivarse de la proyección sobre el eje de un círculo de un punto que se mueve con velocidad constante en la circunferencia.

El desplazamiento *d,* cuyo máximo es la amplitud *A,* puede expresarse como:

$$d = A \sin q = A \sin w\, t = A \sin (2\, p\, ft)$$



La velocidad, frecuencia y longitud de onda de una onda están dadas por la fórmula:

Velocidad de onda (v) = frecuencia de ondas (f) x longitud de onda de ondas (λ)

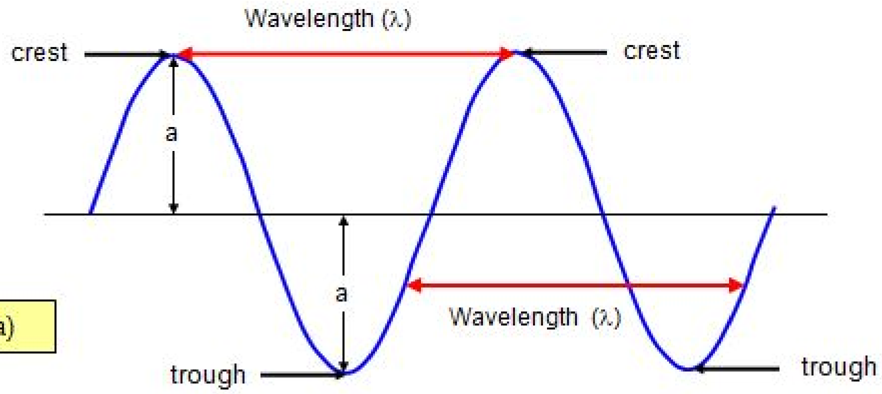
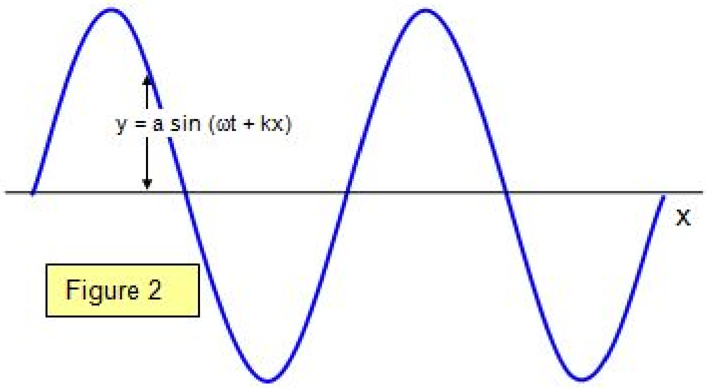


Figure 1(a)



Lo que se realizó para la solución de este problema fue la serie de Taylor la cual se define como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

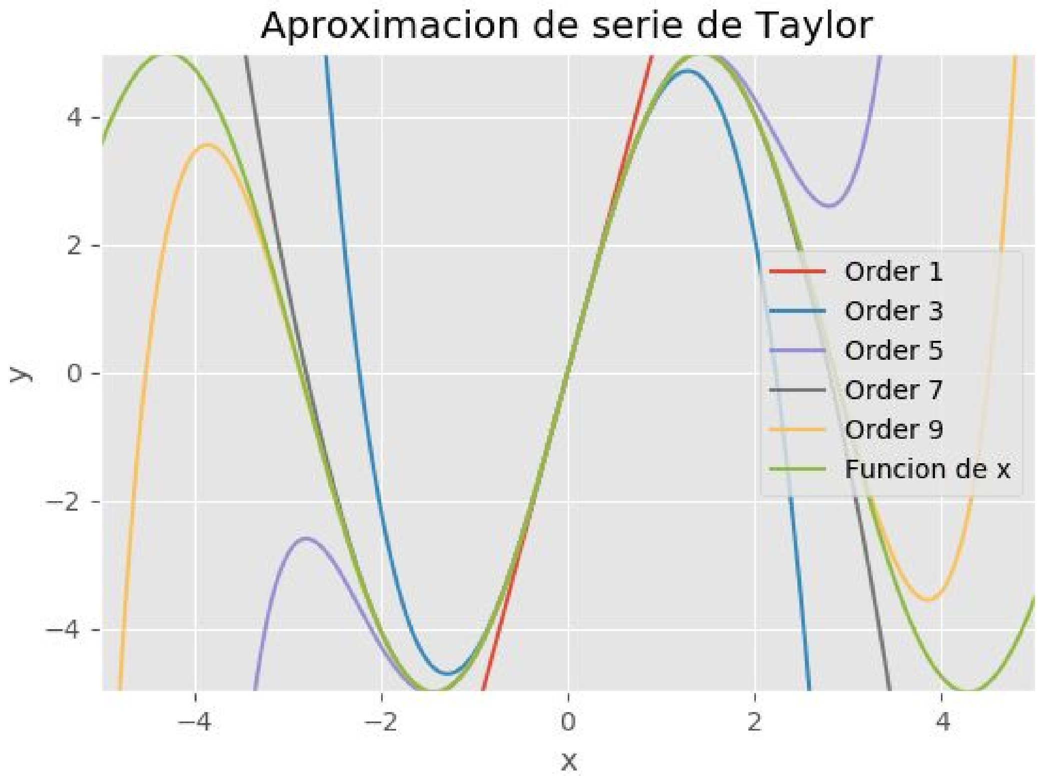
Planteamiento del problema:

En cualquier punto de la trayectoria de propagación se produce un desplazamiento periódico, u oscilación, alrededor de una posición de equilibrio. Puede ser una oscilación de moléculas de aire, como en el caso del sonido que viaja por la atmósfera, de moléculas de agua (como en las olas que se forman en la superficie del mar) o de porciones de una cuerda o un resorte.

En todos estos casos, las partículas oscilan en torno a su posición de equilibrio y sólo la energía avanza de forma continua. Estas ondas se denominan mecánicas porque la energía se transmite a través de un medio material, sin ningún movimiento global del propio medio.

Solución:

```python
import sympy as sy
import numpy as np
import math
from sympy.functions import sin, cos, ln
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

# Función factorial
def factorial(n):
    if n <= 0:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n - 1)

# Taylor aproximacion en x0 de la función 'función'
def taylor(function, x0, n, x = sy.Symbol('x')):
    i = 0
    p = 0
    while i <= n:
        p = p + (function.diff(x, i).subs(x, x0))/(factorial(i))*(x - x0)**i
        i += 1
    return p

def plot(f, x0 = 0, n = 9, by = 2, x_lims = [-5, 5], y_lims = [-5, 5], npoints = 800, x = sy.Symbol('x')):
    x1 = np.linspace(x_lims[0], x_lims[1], npoints)
    # Aproximacion hasta n a partir de 1 y usando pasos de por
    for j in range(1, n + 1, by):
        func = taylor(f, x0, j)
        taylor_lambda = sy.lambdify(x, func, "numpy")
        print('Taylor expansion at n=' + str(j), func)
        plt.plot(x1, taylor_lambda(x1), label = 'Order '+ str(j))
    # Trace la función para aproximar (seno, en este caso)
    func_lambda = sy.lambdify(x, f, "numpy")
    plt.plot(x1, func_lambda(x1), label = 'Funcion de x')

    plt.xlim(x_lims)
    plt.ylim(y_lims)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.title('Aproximacion de serie de Taylor')
    plt.show()

# Defina la variable y la función para aproximar
x = sy.Symbol('x')
amplitud = 5
frecuencia = 1.1
f = amplitud*sin(frecuencia*x)
plot(f)
```



Taylor expansion at n=1 5.5*x
Taylor expansion at n=3 -1.10916666666667*x**3 + 5.5*x
Taylor expansion at n=5 0.0671045833333334*x**5 - 1.10916666666667*x**3 + 5.5*x
Taylor expansion at n=7 -0.00193325109126984*x**7 + 0.0671045833333334*x**5 - 1.10916666666667*x**3 + 5.5*x
Taylor expansion at n=9 3.24893586171737e-5*x**9 - 0.00193325109126984*x**7 + 0.0671045833333334*x**5 - 1.10916666666667*x**3 + 5.5*x

Utilizamos el método de la serie de Taylor, que representa una función analítica f (x) como una suma infinita de términos alrededor del punto de expansión x = a. Requiere que una función tenga derivadas hasta un orden infinito alrededor del punto de expansión.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (x-a)^m$$

El código lo implementamos en el software python, por sus funciones precargadas y la facilidad de graficar. Primero se crea una variable simbólica llamada x, que nos va a servir en el procedimiento sin asignarle un valor numérico. Después declaramos la función original, que en este caso sería la sigmoidal, que se caracteriza por su figura de S y que tiene de valor del 0-1 en el eje de las Y. A este se le ingresa de parámetro la variable simbólica X, y un vector [a c] para definir el ancho del área de transición, y el centro del área de transición. A continuación declaramos las aproximaciones de la función sigmoidal

en la función Taylor en el orden de truncamiento 1, 3, 5, 7, y 9. Y al final agregamos las variables donde almacenamos las funciones en la función fplot, se puede observar cómo la precisión
de la aproximación depende del orden de truncamiento. No realizamos más iteraciones porque es computacionalmente demandante como para programar una función con 1000 órdenes para que se aproxime a la curva de forma más precisa.

Conclusiones:

La función que define el comportamiento de las ondas se usa para toda clase de usos prácticos en la vida cotidiana, como en la transmisión de energía de un lugar a otro por medio de algún material, como puede ser ondas de agua, ondas de sonido, ondas de radio y ondas de luz. Pero a las herramientos que puedan trabajar con esta fórmula se tiene que utilizar una aproximación que sea menos demandante para procesar. Por esa razón decidimos utilizar el método de taylor ya que linealiza la función y ayuda a que los aparatos puedan trabajar con datos más sencillos

Referencia Bibliográfica:

- https://www.ecured.cu/Movimiento_ondulatorio
- http://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Wave%20properties/Wave%20properties/text/Wave_motion/index.html