Aplicación de la cuadratura de gauss para aproximar la integral de la curva de contagios por COVID en México

Materia:

Seminario de Solución de Problemas de Métodos Matemáticos III

Sección:

D11

Integrantes:

Ignacio David Vázquez Pérez 218292866
Joanna Nataly Araiza Abarca 214782907

Profesora:

María Elena Olivares Pérez

Fecha de entrega: 13 de Mayo de 2020

Índice:

Introducción:

En análisis numérico un método de cuadratura es una aproximación de una integral definida de una función. Una cuadratura de Gauss n, es una cuadratura que selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada, construida para dar el resultado de un polinomio de grado 2n-1 o menos, elegibles para los puntos xi y los coeficientes wi para i=1,...,n. El dominio de tal cuadratura por regla es de [−1, 1] dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Tal cuadratura dará resultados precisos solo f(x) es aproximado por un polinomio dentro del rango [−1, 1]. Si la función puede ser escrita como f(x)=W(x) g(x), donde g(x) es un polinomio aproximado y W(x) es conocido.

Fórmula para calcular w(i)

También conocido como método de Gauss-Legendre, los coeficientes están dados por:

$$w_i = \frac{2}{\left(1 - x_i^2\right)\left[P'_n(x_i)\right]^2}$$

Donde Pn son polinomios de Legendre en el intervalo [-1,1].

Cambios de intervalos

Los cambios de intervalos van de [-1,1] después de aplicar la cuadratura de Gauss.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx$$

Después de aplicar la cuadratura, la aproximación es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

Marco Teórico:

Por epidemias y pandemias pasadas, sabemos que en algún momento el aumento de personas infectadas comenzará a disminuir, gracias a un aumento en el número de personas recuperadas y cualquier cosa que limite la propagación de la enfermedad. La curva infecciosa resultante toma una curva en forma de campana (gaussiana normalizada). La inclinación de la curva de campana está determinada por la rapidez con que se infecta una población. Si esa tasa puede extenderse a lo largo del tiempo, la curva se aplana. Este es un resultado deseable, ya que le da más recursos a los funcionarios de salud, hospitales y demás recursos para tratar con los enfermos.

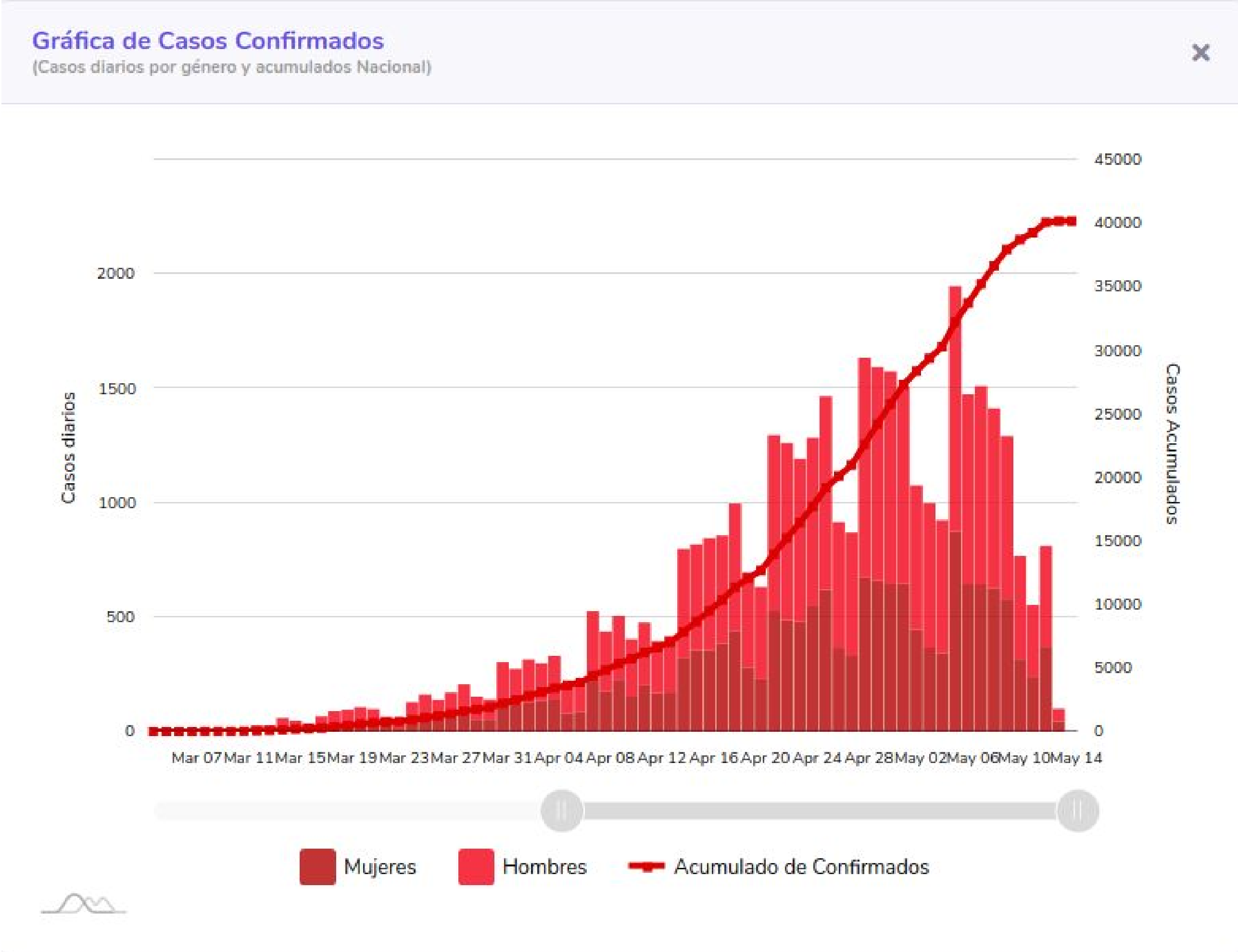
Planteamiento del problema:

Para COVID-19, la curva de campaña se refiere al número proyectado de personas que se pondrán en contacto con el virus durante un período de tiempo, desde el principio hasta el final.El pico de la curva de campaña se refiere al número total de personas infectadas con el virus durante la pandemia. El ancho de la campaña se controla mediante la desviación estándar, que es una medida de la cantidad de variación para un conjunto de datos.

Desde el punto de vista de la salud, una curva más plana conduce a una menor tasa de infección, por lo que la pandemia se extiende con el tiempo, lo que brinda a los profesionales de la salud una oportunidad razonable de tratar a todas las personas enfermas con los recursos disponibles. México llegó al corte en el 12 de mayo, a 3 mil 926 muertes por COVID-19, con 38 mil 324 casos de contagios confirmados por coronavirus, según informaron autoridades de la secretaría de la Salud.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Se utilizó esta función para poder hacer una estimación de la curva de contagios actual en méxico para hacer una aproximación de la integral con el metodo de la cuadratura de gauss, ya que tambas son similares


Gráfica de Casos Confirmados
(Casos diarios por género y acumulados Nacional)
Casos diarios
Casos Acumulados
Mar 07 Mar 11 Mar 15 Mar 19 Mar 23 Mar 27 Mar 31 Apr 04 Apr 08 Apr 12 Apr 16 Apr 20 Apr 24 Apr 28 May 02 May 06 May 10 May 14
Mujeres
Hombres
Acumulado de Confirmados

Solución:

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate
import scipy.integrate as integrate

def gaussNodes(m,tol=10e-9):
   def legendre(t,m):
       p0 = 1.0; p1 = t
       for k in range(1,m):
           p = ((2.0*k + 1.0)*t*p1 - k*p0)/(1.0 + k )
           p0 = p1; p1 = p
       dp = m*(p0 - t*p1)/(1.0 - t**2)
       return p,dp

   A = np.zeros(m)
   x = np.zeros(m)
   nRoots = int((m + 1)/2)
   for i in range(nRoots):
       t = math.cos(math.pi*(i + 0.75)/(m + 0.5))
       for j in range(30):
           p,dp = legendre(t,m)     # Newton-Raphson
           dt = -p/dp; t = t + dt
           if abs(dt) < tol:
               x[i] = t; x[m-i-1] = -t
               A[i] = 2.0/(1.0 - t**2)/(dp**2)
               A[m-i-1] = A[i]
               break
   return x,A

def gaussQuad(f,a,b,m):
   c1 = (b + a)/2.0
   c2 = (b - a)/2.0
   x,A = gaussNodes(m)
   sum = 0.0
   for i in range(len(x)):
       sum = sum + A[i]*f(c1 + c2*x[i])
   return c2*sum
```

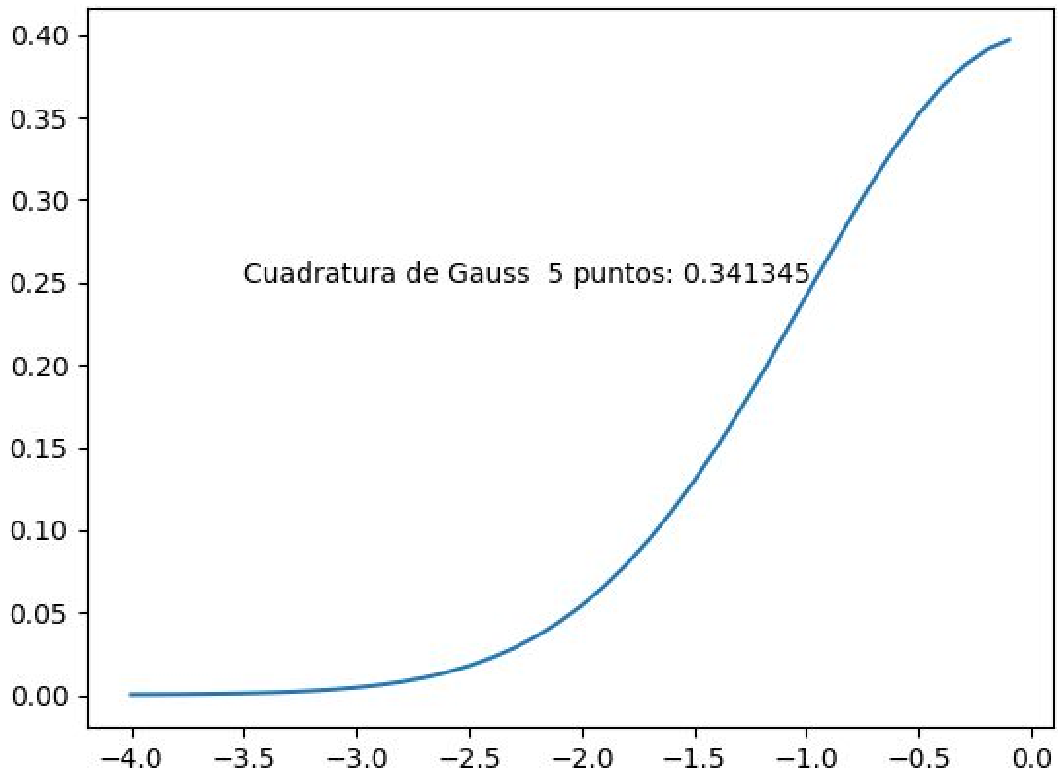
```
#grafica
def graph(formula, x_range):
   x = np.array(x_range)
   y = np.vectorize(formula)
   plt.plot(x, y(x))
   plt.text(-1.0,0.25, "Cuadratura de Gauss  %i puntos: %f" % (m,
aproxQuad))
   plt.show()

#funcion de casos covid
def f(x):
   return (1/np.sqrt(2*np.pi))*(math.e**(-x**2/2))

a = -1; b = 0 #valores para la cuadratura de gauss
m = 5; #numero de puntos
aproxQuad = gaussQuad(f, a, b, m)
print("Integral con %i puntos: %f" % (m, aproxQuad))

#grafica
graph(f, np.arange(-4,0, 0.1))

#valor exacto de la solucion analitica
analitica = integrate.quadrature(f, -1, 0)
print("Valor exacto de la solucion analitica: ",analitica[0])
erp = (abs((abs(analitica[0]-aproxQuad))/analitica[0]))*100
print("ERP(%): ", erp)
```



Integral con 5 puntos: 0.341345
Valor exacto de la solucion analitica: 0.3413447460632025
ERP(%): 1.312512949223134e-09

Procedimiento explicado

Al principio están las funciones del método de la cuadratura de gauss implementados con el método de legendre que se landas a llamar con la función GaussNodes. Se utilizó la función que simula la campana de contagios y muertes del contagio de covid. Para realizar la cuadratura se tomó el valor de -1 y 0 para poder simular la curva actual en méxico y se usa la función graph para poder graficar la curva y se pasaron de parámetros la función de los contagios y en el eje de las x se usó el rango de [-4,0] para que la gráfica se parezca a la curva actual. Para poder comparar el resultado se usó una librería implementada en python para resolver la funcion de forma analitica. La variable analitica y aproxQuad se utilizaron para calcular el porcentaje del ERP. Al realizar esta operación podemos darnos cuenta que los dos resultados son similares y el error es mínimo.

Conclusiones:

Gracias a la función que usamos para poder simular los casos de covid en méxico podemos darnos cuenta que a nivel nacional podemos observar que estamos a punto de llegar al punto máximo de campana en el caso de los contagios y que después de unas semanas esta campana va a ir decrementando de forma natural. Por casos prácticos la campana no es exactamente igual debido a que los parámetros que usamos son para fines ilustrativos y no utilizamos parámetros reales. El método matemático de aproximación de la cuadratura de gauss nos da un valor muy aproximado a la solución analítica, lo cual es muy bueno dado que la cuadratura de Gauss nos simplifica mucho la solución del problema y aproximamos el valor exacto sin tener tanto error en el proceso.

Los gobernantes alrededor del mundo han implementado medidas de protección, como el cierre de todos los servicios y operaciones comerciales, excepto los más necesarios. Ciudades, estados y naciones enteras han cerrado sus fronteras. Las personas y las empresas están en cuarentena y / o aislamiento para evitar multitudes con el objetivo de frenar la propagación del virus al "aplastar" la curva de infección.

Referencia Bibliográfica:

- https://www.designnews.com/medical/doing-coronavirus-math-exponentials-bell-curves-and-flattening/62721958762674/page/0/1
- https://coronavirus.gob.mx/datos/#DOView
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature