

Cuadernillo de Repaso

MATEMÁTICA

Conceptos básicos y
ejercitación



Repaso contenidos Matemáticas 2020

Material adaptado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en base a Cid Figueroa, Eduardo. (2019). *21 temas para aprender y practicar matemática*. Editorial Cid.

Prohibida su reproducción total o parcial.

INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, el Ministerio de Educación ha asumido desde su inicio como tarea primordial el apoyar a todos los estudiantes, docentes, equipos directivos, sostenedores y apoderados del país de modo que puedan, durante la suspensión de clases y en el retorno a clases, apoyar el desarrollo de los aprendizajes esenciales que nos permitan reducir las brechas educacionales provocadas por la pandemia.

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático es de vital importancia para los estudios de nuestros estudiantes, pues ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Esta se trabaja sistemáticamente enseñando habilidades y contenidos desde los primeros niveles de educación hasta afianzarse en los niveles superiores.

Dada su relevancia, la Unidad de Currículum y Evaluación pone a disposición para los estudiantes de 4° año de Enseñanza Media este manual que les permitirá repasar y ejercitar de manera autónoma las habilidades y conocimientos adquiridos en Matemática desde séptimo a tercero medio fundamentalmente.

El manual de repaso de Matemática está estructurado de acuerdo con los mismos ejes de las Bases Curriculares de Matemática: Números; Álgebra y Funciones; Geometría y Probabilidades y Estadística. Primero se presenta el repaso de la parte teórica, luego modelos de ejercicios resueltos con sus soluciones y finalmente algunos ejercicios para practicar. Además de 4 miniensayos, uno por cada eje.

¿Cómo usar este Manual?

1. Lee la parte teórica y los ejercicios resueltos, no resuelvas las guías de ejercicios, sin antes haber hecho esto.
2. Resuelve la guía de ejercicios del capítulo, aquellos ejercicios que no puedas resolver, déjalos para un segundo intento, no consultes a tu compañero(a) o profesor(a) inmediatamente, o invalidarás algo muy importante en tu proceso de aprendizaje. El esfuerzo que realizas para poder resolver un ejercicio permite que los contenidos, teoremas, propiedades etc., que pasan por tu mente queden más «frescos» y fortalecidos en ella.

La gran mayoría de los ejercicios que no resuelven los estudiantes no es debido a que no sepan los contenidos o cómo resolver los problemas, sino a que no los recuerdan, por lo tanto, un buen método de preparación es el anterior para ir recordando lo olvidado.

3. Si al resolver un ejercicio notas que te equivocaste, detente a revisar paso a paso donde está tu error, este proceso es muy importante ya que te permite detectar posibles errores de concepto que debes corregir al momento.
4. No es conveniente que resuelvas ensayos sino hasta haber completado por lo menos el capítulo de geometría, no sacarás mucho provecho si no tienes todavía en tu mente una buena provisión de contenidos.
5. En general se ha procurado que los ejercicios de cada capítulo estén «graduados», por lo tanto, no deberías tener problemas en los primeros ejercicios de cada guía. Si los tuvieras solicita apoyo de tu profesor ya que requerirás más ayuda que la que te pueda brindar este texto.

ÍNDICE

EJE NÚMEROS

1 NÚMEROS REALES	7
2 POTENCIAS Y RAÍCES	24
3 LOGARITMOS	35
MINIENSAYO 1	46

EJE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

4 OPERATORIA ALGEBRAICA	55
5 ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA	67
6 FUNCIONES	87
7 TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA	104
8 DESIGUALDADES E INECUACIONES	126
9 PLANTEO DE PROBLEMAS	138
MINIENSAYO 2	155

EJE GEOMETRÍA

10 TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS	164
11 GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN	181
12 VECTORES	200
13 GEOMETRÍA ANALÍTICA	210
MINIENSAYO 3	232

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

14 ESTADÍSTICA	238
15 PROBABILIDADES	254
16 COMBINATORIA Y PROBABILIDADES	283
MINIENSAYO 4	299

ANEXOS

ANEXO 1: Perímetro de figuras planas	307
ANEXO 2: Área de figuras planas	308
ANEXO 3: Área y volumen de cuerpos geométricos	309
Respuestas Miniensayos	310
Clases con contenidos y ejemplos	311

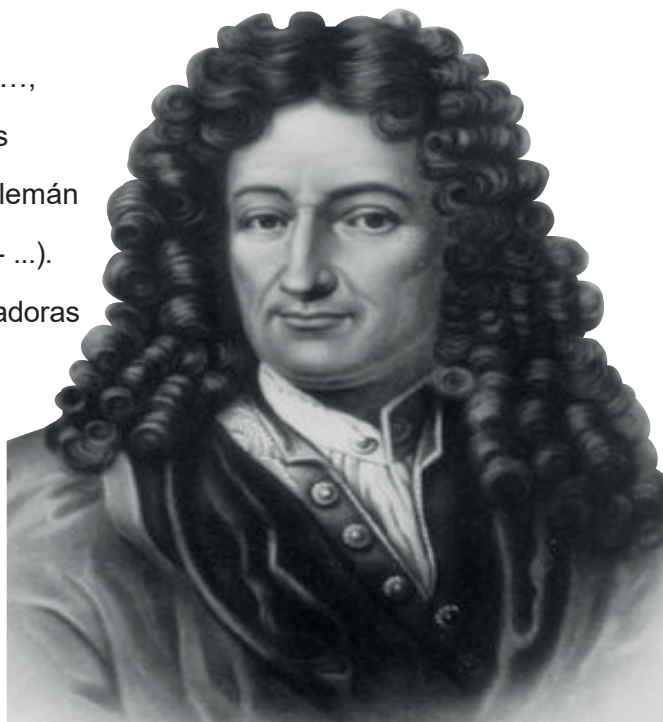
EJE

NÚMEROS

Capítulo 1

NÚMEROS REALES

Los números irracionales como $\pi = 3,1415926\dots$, se pueden aproximar por una serie de números racionales. Por ejemplo, Leibniz, matemático alemán (1646-1716) descubrió que $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots)$. Este tipo de aproximaciones permite que calculadoras científicas y computadores puedan trabajar con números que tengan infinitas cifras decimales.



CONCEPTOS CLAVES

- Números racionales
- Números irracionales
- Conversión a fracción
- Números reales
- Aproximaciones

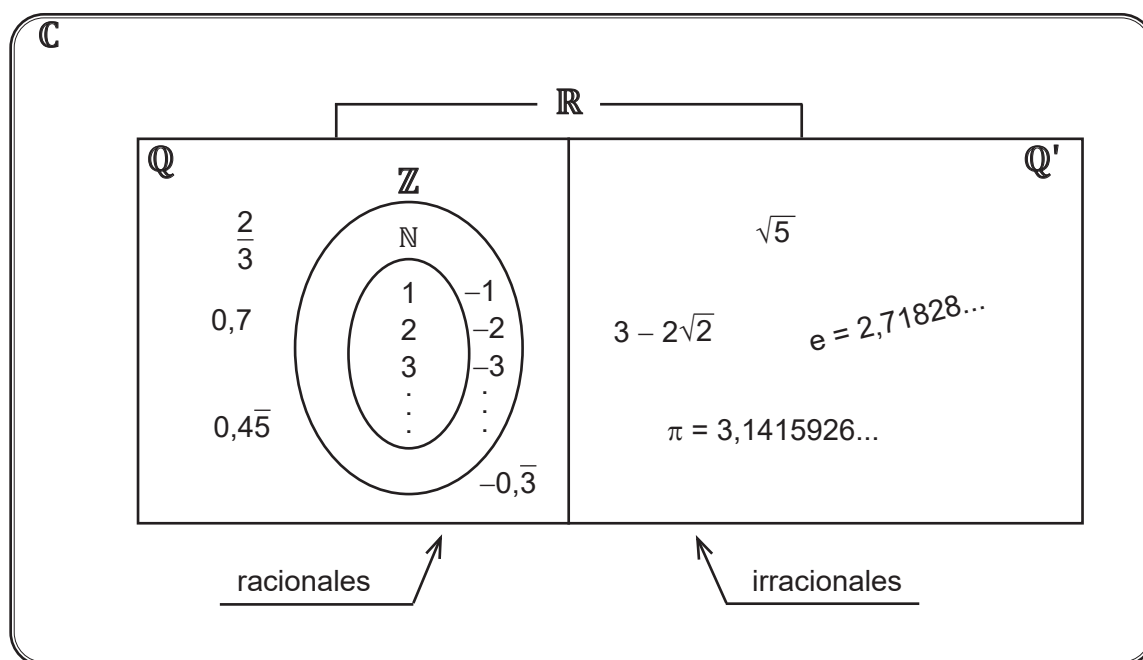


CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos más importantes son los siguientes:

CONJUNTO NUMÉRICO	DESCRIPCIÓN
Números naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Números racionales	Son aquellos números que se pueden expresar como fracción, como los números decimales finitos, periódicos, semiperiódicos y enteros. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$
Números irracionales	Son aquellos números que no se pueden expresar como fracción, como $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 1$, π , etc., se caracterizan por tener infinitas cifras decimales sin período, este conjunto numérico se designa con la letra \mathbb{Q}' o \mathbb{I} .
Números reales	Se designa con la letra \mathbb{R} y es la unión entre los racionales e irracionales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
Números complejos	Son de la forma $a+bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, si $b=0$ se obtiene un número real, por lo tanto los complejos incluyen a los números reales. $\mathbb{C} = \{ z = a + bi / a \text{ y } b \in \mathbb{R} \}$

Resumiendo, tenemos el siguiente esquema:



Observación:

No son números reales las raíces de índice par de negativos, como $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-16}$, etc., ni tampoco cuando se divide por cero.



CONVERSIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

En los racionales los decimales pueden ser finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos, a continuación veremos cómo se pueden convertir a fracción:

- **Decimal finito**

Se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin considerar la coma y en el denominador van un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Ejemplo: $0,32 = \frac{32}{100}$; $1,283 = \frac{1283}{1000}$.

- **Decimal infinito periódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin la coma y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el entero y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.

Ejemplo: $0,\overline{78} = \frac{78}{99}$; $1,\overline{45} = \frac{145 - 1}{99} = \frac{144}{99} = \frac{16}{11}$.

- **Decimal infinito semiperiódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador la resta entre el número que forman sus cifras (sin la coma) con el anteperíodo y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número que forman las cifras que no tienen período y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Ejemplo: $0,3\overline{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$; $4,2\overline{8} = \frac{428 - 42}{90} = \frac{386}{90} = \frac{193}{45}$.



PROPIEDAD DE CLAUSURA

La propiedad de clausura de un conjunto con respecto a una operación, se refiere a que si se toman dos elementos de un conjunto y se realiza una operación, el resultado que se obtiene está en el mismo conjunto.

Las cuatro operaciones básicas en los números reales tienen la propiedad de clausura, si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos dos reales obtenemos un número real, a excepción de la división por cero que no está definida.

Los números racionales también tienen la propiedad de clausura para sus cuatro operaciones, excepto al igual que en el caso anterior, la división por cero.

Los números irracionales no tienen la propiedad de clausura en ninguna de sus cuatro operaciones.

Ejemplos: $2 - \sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ son irracionales, pero si los sumamos resulta 2 que es racional.

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ son irracionales, pero si los multiplicamos, obtenemos $(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$, que es racional, etc.

Al operar un racional con un irracional, siempre se obtiene un irracional, con dos excepciones, si se multiplica por cero se obtiene cero (que es racional) y al dividir por cero, lo que no está definido.



APROXIMACIONES DE NÚMEROS REALES

Existen diversas formas de aproximar un número, esto puede ser por redondeo, truncamiento o aproximar por defecto o por exceso.

- **Redondeo**

Se considera la cantidad de cifras indicada y se observa si la cifra que sigue es superior o no a cinco, en el caso en que esta sea menor que cinco se dejan las cifras que teníamos y si es mayor o igual que cinco se aumenta en uno la última cifra.

Ejemplo: redondear a la milésima el número 3,2568

Como redondeamos a las milésimas consideramos tres cifras decimales 3,256, como la cifra que viene es mayor que 5 (es un 8), implica que la última cifra se aumenta en 1, por lo tanto la aproximación a la milésima es 3,257.

- **Truncamiento**

En este caso solo se consideran las cifras pedidas sin importar las cifras que vienen a continuación.

Ejemplo: truncar a las diezmilésimas es número 1,467897

Si estamos considerando hasta la diezmilésima, esto significa considerar hasta la cuarta cifra decimal y no considerar las cifras restantes, por lo que nos queda 1,4678.

- **Por defecto**

Este tipo de aproximación significa dejar un número con la cantidad de cifras pedidas, menor que el número dado, pero lo más cercano posible.

Ejemplo: aproximar por defecto a las milésimas el número 3,67864

A las milésimas significa considerar cuatro cifras decimales, como el número tiene que ser menor que el número dado, entonces tiene que ser 3,6786.

- **Por exceso**

Este tipo de aproximación significa dejar un número con la cantidad de cifras pedidas, mayor que el número dado, pero lo más cercano posible.

Ejemplo: aproximar por exceso a las diezmilésimas el número 3,67864

A las diezmilésimas significa considerar cuatro cifras decimales, como el número tiene que ser mayor que el número dado, entonces tiene que ser 3,6787.



ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

Esto se traduce que si tenemos un conjunto de números reales, siempre podemos ordenarlos, para ello existen diversas técnicas, algunas de ellas las veremos a continuación.

Si queremos comparar dos fracciones podemos multiplicar cruzado para compararlas:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < bc$ (siempre que $b, d > 0$) en el caso en que sean más de dos fracciones podemos

proceder como se ilustran en los primeros dos ejemplos.

Ejemplo 1

Ordenar de menor a mayor las fracciones

$$\frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$$

Para poder compararlas podemos intentar igualar denominadores, para ello calculamos el m.c.m. entre ellos y amplificamos las fracciones para que todas queden con igual denominador.

En este caso, el m.c.m. entre 8, 5 y 20 es 40, por lo tanto amplificamos para que todas las fracciones queden con denominador 40:

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{18}{40}, \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40} \text{ y } \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

$$\text{Como } \frac{15}{40} < \frac{16}{40} < \frac{18}{40}, \text{ se obtiene que } \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{9}{20}.$$

En el caso en que fuese complicado igualar denominadores, se puede intentar igualar numeradores, o bien convertir las fracciones a decimal.

Ejemplo 2

Ordenar los números: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$, y $0,4\bar{2}$

Si convertimos a fracción el decimal $0,4\bar{2}$, obtenemos $0,4\bar{2} = \frac{42 - 4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$. En este caso el tratar

de igualar numeradores o denominadores entre las fracciones: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{19}{45}$ es tedioso, por lo tanto lo más aconsejable es convertir a número decimal.

$$\frac{5}{12} \leftrightarrow 5 : 12 = 0,41666\dots; \frac{3}{8} \leftrightarrow 3 : 8 = 0,375 \text{ y } \frac{19}{45} \text{ sabíamos que era } 0,4\bar{2}.$$

$$\text{Como } 0,375 < 0,41666\dots < 0,4\bar{2}, \text{ tenemos que } \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < 0,4\bar{2}.$$

Ejemplo 3

Ordenar los números reales: $P = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ y $R = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$, de menor a mayor.

En este caso podemos intentar racionalizar primero las expresiones dadas.

$$P = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}; Q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Para poder ordenar $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$, $2 + \sqrt{2}$ y $3 - 2\sqrt{2}$, se puede reemplazar $\sqrt{2}$ por 1,4 y comparar:

$$\frac{\sqrt{2} + 2}{2} \approx \frac{1,4 + 2}{2} = \frac{3,4}{2} = 1,7; 2 + \sqrt{2} \approx 3,4 \text{ y } 3 - 2\sqrt{2} \approx 3 - 2 \cdot 1,4 = 0,2, \text{ por lo tanto } R < P < Q.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuántas veces cabe $32 \cdot 10^{-7}$ en $1,28 \cdot 10^{-6}$?

Solución:

Debemos efectuar la división $\frac{1,28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}}$, para ello transformaremos $1,28 \cdot 10^{-6}$

Tenemos que $1,28 \cdot 10^{-6} = 128 \cdot 10^{-8}$, entonces $\frac{1,28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}} = \frac{128 \cdot 10^{-8}}{32 \cdot 10^{-7}}$, simplificando 128

con 32 y restando los exponentes de 10^{-8} y 10^{-7} , obtenemos $4 \cdot 10^{-8-(-7)} = 4 \cdot 10^{-1} = 0,4$.

2. Una aproximación de $\sqrt{5}$ es 2,236067977, utilizando este valor calcula $\sqrt{20}$ redondeado a la milésima.

Solución:

Tenemos que $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$, si multiplicamos $2 \cdot 2,236067977$ obtenemos 4,47212..., observamos que la cuarta cifra es un uno, como esta cifra es menor que 5, el redondeo a la milésima resulta ser 4,472.

3. Si a y b son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones corresponde a $0,\overline{ab} + 0,\overline{ba}$?

Solución:

Si $0,\overline{ab}$ lo convertimos a fracción tenemos $0,\overline{ab} = \frac{\overline{ab} - a}{90}$, donde \overline{ab} representa un número

de dos cifras, es decir equivale a $10a + b$, por lo tanto $0,\overline{ab} = \frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{10a + b - a}{90} = \frac{9a + b}{90}$,

por otro lado $0,\overline{ba} = \frac{\overline{ba} - a}{90} = \frac{10b + a - b}{90} = \frac{a + 9b}{90}$,

entonces $0,\overline{ba} + 0,\overline{ab} = \frac{a + 9b}{90} + \frac{9a + b}{90} = \frac{10a + 10b}{90} = \frac{a + b}{9}$

4. Sean a y b enteros mayores que 1, con $a > b$, entonces al ordenar las fracciones

$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b-1}$, $\frac{a+1}{b-1}$, de menor a mayor resulta:

Solución:

Como $a > b > 1$, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ y $\frac{b}{a} < 1$, por lo tanto $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ahora si comparamos

$\frac{a}{b}$ con $\frac{a}{b-1}$, tenemos que $\frac{a}{b-1} > \frac{a}{b}$, ya que $\frac{a}{b-1}$ tiene un denominador menor y los

numeradores son iguales.

Por otro lado $\frac{a+1}{b-1} > \frac{a}{b-1}$, ya que el numerador es mayor y los denominadores son iguales.

Entonces $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $(-3)^2 - (-2)^2 - (-1)^2 :$

- A) -14
- B) 4
- C) 6
- D) 12
- E) 14

2. $\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{5}} =$

- A) 9
- B) $\frac{1}{18}$
- C) $\frac{16}{25}$
- D) $\frac{1}{3}$
- E) $\frac{1}{9}$

3. La cuarta parte de $0,2\bar{}$ es :

- A) $0,04\bar{}$
- B) 0,05
- C) $0,05\bar{}$
- D) $0,5\bar{}$
- E) $0,8\bar{}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

- A) -6
- B) -3
- C) 4
- D) 6
- E) 8

5. $(0,2\bar{})^{-1} =$

- A) 4
- B) 4,5
- C) $4,5\bar{}$
- D) 4,9
- E) 5

6. Si $x = 0,24$, $y = 5 \cdot 10^4$ y $z = 12000$, entonces $\frac{xy}{z} =$

- A) 10^{-8}
- B) 10^{-6}
- C) 10^{-4}
- D) 10^0
- E) 10^{-2}

7. De los siguientes números reales, ¿cuál es el menor?

- A) $38 \cdot 10^{-3}$
- B) $390 \cdot 10^{-4}$
- C) $4200 \cdot 10^{-6}$
- D) $0,4 \cdot 10^{-3}$
- E) $0,41 \cdot 10^{-2}$

8. Las cinco milésimas partes de 62,5 aproximado por defecto a las milésimas es:

- A) 0,312
- B) 0,313
- C) 0,310
- D) 3,125
- E) 3,124

9. $\left(\frac{0,05}{5}\right)^{-1} =$

- A) -100
- B) 10
- C) 100
- D) 1.000
- E) 10.000

10. El resultado de $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3,5}$, es un número:

- A) entero.
- B) decimal finito.
- C) decimal periódico.
- D) decimal semiperiódico.
- E) irracional.

11. En la recta numérica, ¿cuál de los siguientes números está más cerca del cero?

- A) 0,25
- B) $-0,2\bar{1}$
- C) -0,3
- D) 0,23
- E) $0,\bar{2}$

12. Si el producto $0,24 \cdot 0,75$ se divide con $\frac{2}{3}$ resulta :

- A) 0,03
- B) 0,5
- C) 0,12
- D) 0,27
- E) 0,42

13. Se puede determinar que la expresión $\frac{a+b}{c}$, con a, b y c números enteros y $c \neq 0$, representa un número entero positivo, si:

- (1) $c(a+b) > 0$
- (2) a y b son múltiplos de c.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

14. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a un número racional **NO** entero?

- A) $(0,2)^{-3}$
- B) $3,\bar{9}$
- C) $\frac{0,0\bar{2}}{0,2}$
- D) $\frac{0,3\bar{2}}{0,04}$
- E) $\frac{0,8\bar{3}}{0,1\bar{6}}$

15. ¿Cuál de los siguientes números **NO** está entre $1,0\overline{6}$ y $1,1$?

- A) $\frac{49}{45}$
- B) $\frac{27}{25}$
- C) $1\frac{1}{11}$
- D) $\frac{267}{250}$
- E) $1\frac{4}{33}$

16. Los tres primeros atletas en una carrera de 100 metros planos, fueron Pedro, Felipe y Andrés los cuales obtuvieron las siguientes marcas: 12,2", 12,02" y 13,1" respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) Felipe fue el vencedor.
- II) Pedro llegó después de Andrés.
- III) Felipe llegó 18 centésimas de segundo antes que Pedro.

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

17. La superficie de nuestro país sin considerar el territorio antártico es aproximadamente de 755.000 km². Si una hectárea es 10.000 m², entonces ¿cuántos millones de hectáreas tiene la superficie de nuestro país?

- A) 7550
- B) 755
- C) 75,5
- D) 7,55
- E) 0,755

18. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones da(n) como resultado un número entero?

I) $(10^{-1} + 10^{-2})^{-1}$

II) $\frac{10^{-2} + 1}{10^{-4} + 10^{-2}}$

III) $\frac{10^{-4} + 10^{-3}}{10^{-5}}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

19. $a = 0,23 \cdot 10^{-3}$; $b = 5 \cdot 10^3$; $c = 0,3 \cdot 10^{-5}$, entonces $ab + bc$ redondeado a la centésima es:

- A) 1,16
- B) 1,17
- C) 11,51
- D) 11,52
- E) 0,17

- 20.** La población de algunos países de América del Sur se muestra en la siguiente tabla:

País	Población
Argentina	43823000
Bolivia	11066000
Chile	18286000
Perú	31660000

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) La diferencia entre los dos más poblados es superior a los $1,215 \cdot 10^7$ habitantes.
- II) La suma entre los dos menos poblados es superior a $29,4 \cdot 10^6$ habitantes.
- III) Entre todos superan los $1,048 \cdot 10^8$ habitantes.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

- 21.** En una cierta mina se extrajeron en cierto mes $3,7 \cdot 10^4$ kilos de mineral y al siguiente se extrajeron $4,2 \cdot 10^5$ kilos. Si una tonelada son 1000 kg, ¿qué variación hubo, medido en toneladas, entre lo extraído entre ambos meses?

- A) 5
- B) 38,3
- C) 383
- D) 416,3
- E) 383000

- 22.** En su viaje de vacaciones, una persona recorrerá un trayecto en tres días. Si el primer día recorrió $\frac{2}{5}$ del trayecto y el segundo día los $\frac{3}{4}$ de lo que recorrió primer día, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El tercer día anduvo más que en el primero.
- II) Entre el primer y segundo día recorrió el 70% del trayecto.
- III) El segundo y tercer día anduvo lo mismo.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

- 23.** ¿Para cuál(es) de los siguientes números reales, su raíz cuadrada es un número racional?

- I) $16,9 \cdot 10^{-5}$
- II) 1.960.000
- III) $\frac{196 \cdot 10^{-3}}{169 \cdot 10^{-7}}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

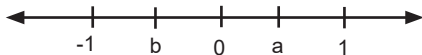
- 24.** Si el producto $0,22 \cdot 0,16$ se redondea a dos decimales resulta:

- A) 0,02
- B) 0,03
- C) 0,04
- D) 0,05
- E) 0,35

25. Si el producto $0,22 \cdot 0,16$ se trunca a dos decimales resulta:

- A) 0,02
- B) 0,03
- C) 0,04
- D) 0,05
- E) 0,35

26. Sean a y b dos números racionales que se ubican en la recta numérica, tal como se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál(es) de las siguientes desigualdades es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) $a - b < 2$
- II) $-1 < a + b < 1$
- III) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 2$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

27. Frecuentemente una aproximación de π en las calculadoras científicas es 3,141592654; si a y b son respectivamente las aproximaciones por exceso a la milésima y por defecto a la centésima de este valor, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $a > b$
- II) $a - b = 500^{-1}$
- III) $a + b < 6,28$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

28. Si $a = 0,2 \cdot 10^{-3}$ y $b = 15 \cdot 10^{-7}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **FALSA(S)**?

- I) $a \cdot b = 3 \cdot 10^{-10}$
- II) $a^2 + b = 1,54 \cdot 10^{-6}$
- III) $\frac{b}{a} = 7,5 \cdot 10^{-11}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y II
- E) Solo II y III

29. Si $P = 0,\overline{24}$, $Q = \frac{121}{500}$ y $R = \frac{11}{45}$, entonces al ordenarlos de menor a mayor, resulta:

- A) $P < Q < R$
- B) $P < Q < R$
- C) $Q < R < P$
- D) $R < P < Q$
- E) $Q < P < R$

30. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $0,\overline{32} + 0,\overline{8} = 1,\overline{12}$
- II) $0,\overline{2} - 0,\overline{15} = 0,\overline{06}$
- III) $0,\overline{36} \cdot 0,\overline{45} = 0,\overline{16}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

31. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El doble de $0,0\overline{5}$ es $0,1$.
- II) El inverso multiplicativo de $0,\overline{6}$ es $1,5$.
- III) El triple de $0,2\overline{3}$ es $0,7$.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

32. Sean m y n números enteros, se puede determinar que $m^2 - n^2$ es divisible por 6 si se sabe que:

- (1) $m + n$ es múltiplo de 3.
- (2) $m - n$ es par.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

33. Si a y b son dígitos, entonces $\frac{0,\overline{ab}}{0,\overline{b}} =$

- A) $\frac{a - b}{10}$
- B) $\frac{10a - b}{10b}$
- C) $\frac{10a + b}{10b}$
- D) $\frac{11a + b}{100b}$
- E) $\frac{9a + b}{10b}$

34. Si a y b son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones es siempre igual al resultado de $0,\overline{ab} - 0,\overline{a}$?

- A) $\frac{b - a}{9}$
- B) $\frac{b - a}{90}$
- C) $\frac{a - b}{90}$
- D) $\frac{a - b}{9}$
- E) $\frac{b - a}{900}$

35. En la figura, el punto A se ubica en el decimal $0,27$ y el B en el $0,32$. Si el trazo \overline{AB} se ha dividido en cuatro partes iguales por los puntos P, Q y R. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) P se ubica en el número real $2,825 \cdot 10^{-1}$.
- II) Q se ubica en el número real $2,95 \cdot 10^{-1}$.
- III) R se ubica en el número real $3,075 \cdot 10^{-1}$.



- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

36. Sean $x = \frac{0,0025}{200}$; $y = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^3}$; $z = \frac{0,25}{20000}$,
¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $x < z < y$
 B) $y < z < x$
 C) $z < y < x$
 D) $x = y = z$
 E) Ninguna de ellas.

37. Se tienen los números reales: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 $y = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$; $z = \frac{4}{\sqrt{2} + 1}$; $w = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El mayor es y.
 II) $y > z > x$.
 III) $w > z > x$.

A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo I y II
 D) Solo II y III
 E) I, II y III

38. Sea a un número real, se puede determinar que a es racional, sabiendo que:

(1) $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$ es racional.
 (2) $\frac{a + 2}{a - 2}$ es un racional distinto de 1.

A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

39. Si n es un número entero, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponden a números racionales?

I) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^n \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})^n$
 II) $((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6})^n$
 III) $(\sqrt{2} - 1)^{2n} \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n$

A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo I y II
 D) Solo I y III
 E) I, II y III

40. ¿Cuál(es) de los siguientes números corresponden a **números racionales**?

I) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$
 II) $(1 + \sqrt{2})^2$
 III) $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}}$

A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo I y III
 D) Solo II y III
 E) I, II y III

41. Si m y n son números enteros, se puede determinar que m+n es par, sabiendo que:

(1) m - n es par.
 (2) $m^2 + 2mn + n^2$ es par.

A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

42. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) Si el perímetro de un triángulo equilátero es racional, entonces las medidas de sus lados son racionales.
- II) Siempre el área de una circunferencia es irracional.
- III) Si la longitud de el lado de un cuadrado es irracional, entonces su área es racional.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) Ninguna de ellas.

43. Si $A = 0,2 \cdot 10^{-2}$; $B = 200 \cdot 10^{-4}$ y $C = 2000 \cdot 10^{-5}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $B = 10A$
- II) $B = C$
- III) $\frac{A}{B} = \frac{C}{A}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

44. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

- I) El promedio entre dos irracionales es irracional.
- II) La diferencia entre dos racionales es racional.
- III) Si la suma de dos números es racional, la diferencia también.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

45. Si $P = \sqrt{8}$, $Q = \sqrt{32}$ y $R = \sqrt{2}$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) a números racionales?

- I) $\frac{P + Q}{R}$
- II) $\frac{PQ}{R}$
- III) PQR

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

- 46.** Si q y r son múltiplos de p , con $q \neq r$ y $p \neq 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) siempre números enteros?

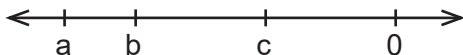
I) $\frac{q - r}{p}$

II) $\frac{q^2 + r^2}{p}$

III) $\frac{q + r}{q - r}$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

- 47.** a , b y c son números racionales, cuya ubicación en la recta numérica se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $a^2 < b^2 < c^2$

II) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

III) $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

- 48.** Sean a y b dos números enteros y distintos, se puede determinar que la solución de la ecuación en x , $ax - bx = a + b$ es un número entero negativo, sabiendo que:

(1) $(a - b)$ es un divisor de $(a + b)$.

(2) $a^2 - b^2 < 0$

- A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

- 49.** Si $\alpha = \frac{x + y}{x - y}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $x \neq y$, entonces $\alpha > 1$.

II) Si $y < 0 < x$, entonces $\alpha < 1$.

III) Si $x < y < 0$, entonces $\alpha > 1$.

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 1									
1. B	2. E	3. C	4. D	5. B	6. D	7. D	8. A	9. C	10. A
11. B	12. D	13. C	14. C	15. E	16. D	17. C	18. D	19. B	20. D
21. C	22. D	23. E	24. C	25. B	26. D	27. C	28. C	29. E	30. D
31. E	32. C	33. E	34. B	35. E	36. D	37. E	38. D	39. E	40. C
41. D	42. A	43. C	44. B	45. A	46. C	47. D	48. C	49. D	

r_5
 $\sqrt{5}$
 $\sqrt{5}$



El símbolo de raíz cuadrada lo utilizó por primera vez en 1525 el matemático polaco Christoph Rudolff. En un principio era una “r” de “root” (raíz en inglés) que con el transcurso de los años se fue transformando.

CONCEPTOS CLAVES

- Base y exponente
- Racionalización
- Conversión entre potencia y raíz

✓ DEFINICIONES

Definición de potencia

Si a es un número real y n es un número entero positivo, entonces la potencia a^n se define como el producto $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n – veces).

También se define $a^0 = 1$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).

Definición de potencia de exponente racional.

Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a una raíz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

✓ PROPIEDADES

1. Producto de potencias de igual base

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

2. División de potencias de igual base

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

3. Potencia de potencia

$$(A^n)^m = A^{nm}$$

4. Producto de potencias de igual exponente

$$A^n \cdot B^n = (AB)^n$$

5. División de potencias de igual exponente

$$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n$$

6. Igualdad de potencias

$$A^n = B^n \rightarrow A = B \text{ (con } A \neq 0, A \neq 1, B \neq 0, B \neq 1)$$

7. Eliminación de raíz

$\sqrt[n]{A^n} = |A|$, en el caso que $A > 0$,
se tiene que $\sqrt[n]{A^n} = A$

8. Producto de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}$$

9. División de raíces de igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

10. Amplificación y simplificación de índice con exponente

$$\sqrt[nm]{A^{mp}} = \sqrt[n]{A^p}; \sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nm]{A^{mp}}$$

11. Raíz de raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[nm]{A}$$

12. Ingreso de factor dentro de una raíz

$$A \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n \cdot B} \text{ (} A > 0 \text{ si } A \text{ es par)}$$

(*) Se entenderá la validez de las propiedades siempre que las raíces existan, es decir están definidas en los reales.



RACIONALIZACIÓN

La racionalización consiste en eliminar las raíces que están en el denominador de una expresión fraccionaria. Veremos acá solo los casos más utilizados.

- A) En el denominador aparece solo una raíz cuadrada y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por la misma raíz que aparece.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{4}{\sqrt{8}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt{8}$.

$$\frac{4 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{4 \sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

- B) En el denominador aparecen adiciones y sustracciones donde uno o ambos términos son raíces cuadradas. En este caso, se amplifica la fracción de modo de formar una suma por su diferencia.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{9}{3 - \sqrt{3}}$

Amplificamos la fracción por $3 + \sqrt{3}$ para formar una suma por su diferencia.

$$\frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3})}{2}$$

- C) En el denominador aparece solo una raíz de índice superior a dos y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por una raíz del mismo índice de la que aparece, con un exponente tal que al sumar con el exponente de la raíz que aparece resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{10}{\sqrt[3]{2^4}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, así al multiplicar ambas raíces se eliminará la raíz que aparece.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2^2} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} =$

Solución:

Cuando se tiene una suma o una resta de potencias de igual base, se debe factorizar por la menor potencia.

En la diferencia $3^{27} - 3^{25}$, se factoriza por factor por 3^{25} , entonces nos queda, $3^{25} \cdot (3^2 - 1)$.

En la diferencia que se ubica en el denominador, factorizamos por 2^{27} , entonces resulta $2^{27} \cdot (2^2 - 1)$, por lo que la fracción dada queda de la forma:

$$\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} = \frac{3^{25}(3^2 - 1)}{2^{27}(2^2 - 1)} = \frac{3^{25} \cdot 8}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{3 \cdot 2^{27}} = \frac{3^{24}}{2^{24}}, \text{ o bien } \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \text{ (prop. 5)}$$

2. $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} =$

Solución:

Como las raíces que aparecen tienen distinto índice, se pueden igualar amplificando el índice con el exponente (prop. 10), igualando todos los índices a su m.c.m que es 6:

En $\sqrt[3]{2}$, se amplifica el índice y el exponente por 2, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$, en $\sqrt{2}$ se amplifican por 3, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$.

Por lo que la expresión dada es equivalente a: $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}$, por propiedades 8 y 9:

$$\frac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 2^3}{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5}{2}} = \sqrt[6]{2^4}, \text{ por prop. 2: } \sqrt[6]{\frac{2^5}{2}} = \sqrt[6]{2^4}, \text{ simplificando el índice y el exponente, prop. 10}$$

resulta $\sqrt[3]{2^2}$.

3. Si $m > 0$ y $m > n$, entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} =$

Solución:

La expresión $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2}$ se puede poner de la forma: $\sqrt{(2m - n)^2}$, como $m > 0$ y $m > n$, se tiene que $2m > n$, por lo que $2m - n > 0$, por prop. 7; $\sqrt{(2m - n)^2} = 2m - n$.

La expresión $\sqrt{n^2 - 2mn + m^2}$ es equivalente a $\sqrt{(n - m)^2}$ pero $m > n$, por lo que $n - m < 0$, por prop. 7, $\sqrt{(n - m)^2} = |n - m| = m - n$.

$$\text{Entonces } \sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} = (2m - n) - (m - n) = 2m - n - m + n = m.$$

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $3^3 + 3^3 + 3^3 =$

- A) 3^4
- B) 3^5
- C) 3^9
- D) 9^3
- E) 9^9

2. $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} =$

- A) 0
- B) $\sqrt{24}$
- C) $6\sqrt{2}$
- D) $\sqrt{40}$
- E) $\sqrt{60}$

3. $2^{10} + 2^{11} =$

- A) 2^{21}
- B) 2^{22}
- C) 4^{21}
- D) 6^{10}
- E) $3 \cdot 2^{10}$

4. $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 16

5. $\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{0,2020}} =$

- A) 10^4
- B) 10^2
- C) 10^{-2}
- D) 10^{-1}
- E) 10

6. $(0,00036)^{-3} : (6000)^{-3} =$

- A) $6^{-3} \cdot 10^6$
- B) $6^{-3} \cdot 10^{12}$
- C) $6^{-3} \cdot 10^{-24}$
- D) $6^{-3} \cdot 10^{24}$
- E) $6^{-9} \cdot 10^{-24}$

7. Sean los números: $a = \sqrt{2}$; $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = 1,4$.
Al ordenarlos de menor a mayor, resulta:

- A) $c - b - a$
- B) $a - b - c$
- C) $a - c - b$
- D) $b - a - c$
- E) $b - c - a$

8. $(\sqrt{2} - 1)^2 - (1 + \sqrt{2})^2 =$

- A) $-4\sqrt{2}$
- B) $2\sqrt{2}$
- C) $\sqrt{2}$
- D) 2
- E) 0

9. $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

- A) 5
- B) 7
- C) $\sqrt{5}$
- D) $\sqrt{13}$
- E) $2 + 3\sqrt{5}$

10. $\frac{2^4 + 2^5}{2^6 + 2^7} =$

- A) 2^{-4}
- B) 2^{-2}
- C) 2^{-1}
- D) 2^2
- E) 2^3

11. Se puede determinar la potencia a^n , con a y n racionales y $a \neq 0$, si se sabe que:

(1) $a^{-2n} = 9$
 (2) $a^{3n} = -\frac{1}{27}$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

12. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$

- A) $1 + \sqrt{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{3}$
- D) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
- E) $-\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

13. El resultado de $\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1}$ es un número real que está entre:

- A) 1 y 2
- B) 2 y 3
- C) 3 y 4
- D) 4 y 5
- E) 5 y 6

14. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4 =$

- A) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
- B) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- C) $\sqrt{30}$
- D) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
- E) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

15. Si $P = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, entonces $P^2 =$

- A) 4
- B) 8
- C) 14
- D) 16
- E) $2\sqrt{2}$

16. $(2^n - 2^{n-1})^2 =$

- A) 2^{2n-1}
- B) 4^{n-2}
- C) $(0,25)^{2-n}$
- D) $(0,25)^{1-n}$
- E) $(0,5)^{2+2n}$

17. La resta $2^{12} - 1$ **NO** es divisible por:

- A) 7
- B) 9
- C) 5
- D) 13
- E) 25

18. El resultado de $2^{40} + 2^{39} + 2^{36}$ es divisible por:

- I) 8
- II) 10
- III) 100

Es (son) correcta(s):

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

19. Si $\frac{2^{x+1} + 2^x}{3^x - 3^{x-2}} = \frac{4}{9}$, entonces el valor de $2x + 1$ es:

- A) 5
- B) 15
- C) 14
- D) 13
- E) 11

20. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es

(son) equivalente(s) al cociente $\frac{3^8 + 3^7}{2^{10} - 2^8}$?

- I) $(1,5)^6$
- II) $(0,6)^{-6}$
- III) $\frac{3^6}{2}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

21. $\sqrt{\frac{\sqrt{75} + \sqrt{48}}{\sqrt{3}}} =$

- A) 3
- B) 9
- C) $\sqrt{3}$
- D) $2\sqrt{3}$
- E) $4\sqrt{3}$

22. Sean los números: $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, entonces $xyz =$

- A) $1 + \sqrt{6}$
- B) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
- C) $\sqrt{3}$
- D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- E) $\sqrt{6}$

23. Si $ab = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, entonces a:

- A) $3 + \sqrt{6}$
- B) $3 + \sqrt{3}$
- C) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
- D) $-(1 + \sqrt{2})$
- E) $-\sqrt{2}$

24. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a $2\sqrt{6}$?

- A) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$
- B) $\sqrt{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{4\sqrt{3}}$
- C) $\sqrt{2\sqrt{7}+2} \cdot \sqrt{2\sqrt{7}-2}$
- D) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$
- E) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

25. $(\sqrt{2})^{20} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} =$

- A) 1
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $\frac{9}{4}$
- D) $\frac{3}{4}$
- E) $\frac{9}{16}$

26. Se puede determinar el signo de la potencia a^n , con **a** un número racional distinto de cero y **n** un número entero, si se sabe que:

- (1) $a^{n+1} < 0$
- (2) $a^{2n+1} < 0$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

27. Si $A = 2^{-x} + 2^x$, entonces $4^{-x} + 4^x =$

- A) $A^2 + 4$
- B) $A^2 - 4$
- C) $A^2 + 2$
- D) $A^2 - 2$
- E) A^2

28. Se puede determinar la cifra de las unidades de la potencia 3^n , con **n** un entero positivo, sabiendo que:

- (1) $n=4k+3$, con **k** entero positivo.
- (2) $n=2k+3$, con **k** entero positivo.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

29. $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} =$

- A) 1
- B) 2
- C) $\sqrt{6}$
- D) $2\sqrt{6}$
- E) 7

30. Si $x > 0$, entonces $\sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} =$

- A) 3
- B) 9
- C) $\sqrt{3}$
- D) $2\sqrt{3}$
- E) $3\sqrt{3}$

31. Si $a > 0$, entonces $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} =$

- A) $\sqrt[3]{a^2}$
- B) $\sqrt{a^3}$
- C) \sqrt{a}
- D) $\sqrt[3]{a}$
- E) $\sqrt[6]{a}$

32. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3$

II) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{3}$

III) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[7]{3}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

33. Sean a y b números reales y n un número entero. Se puede determinar que $a^n > b^n$, sabiendo que:

- (1) $a > b$
- (2) a y b son positivos.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

34. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a la expresión $\sqrt{4^{2n+3} + 4^{2n+2} + 4^{2n}}$?

- I) $9 \cdot 4^n$
- II) 18^n
- III) $(0,25)^{-n} \cdot 9$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

35. Si $0 < a < 2$, entonces $\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 + 4a + 4} =$

- A) $2a$
- B) $4a$
- C) 2
- D) 4
- E) -2

- 36.** Si $m > n > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalentes a

$$\frac{\sqrt{4n^2 - 12mn + 9m^2}}{\sqrt{9m^2 - 4n^2}} ?$$

I) $\frac{2n - 3m}{\sqrt{(3m + 2n)(3m - 2n)}}$

II) $\frac{\sqrt{9m^2 - 4n^2}}{2n + 3m}$

III) $\sqrt{\frac{3m - 2n}{3m + 2n}}$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

- 37.** La expresión $\frac{\sqrt{4(m^2 + n^2 - 2mn)}}{\sqrt{9(m - n)^2}}$ —

con $n > m$ es equivalente a:

- A) $5(m + n)$
B) $n - m$
C) $m - n$
D) $7(m + n)$
E) $5(m - n)$

- 38.** Si $p > 3$ y n es un entero positivo tal que $n > p$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número mayor?

- A) p^n
B) np^n
C) $(p + 1)^n$
D) $(-p)^n$
E) p^{n+1}

- 39.** Si $0 < p < 1$ y n es un entero par negativo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número menor?

- A) np^n
B) p^{n+1}
C) $(p + 1)^n$
D) $(-p)^{n+1}$
E) p^n

- 40.** Sea a un número racional y n es un número entero. Se puede determinar que $a^{n+1} > a^n$, sabiendo que:

- (1) $a > 0$
(2) $n > 0$

- A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

- 41.** Si $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $z = \frac{\sqrt{10}}{4}$ y $w = \frac{\sqrt{18}}{5}$, entonces:

- A) $z < x < w < y$
B) $z < w < y < x$
C) $z < w < x < y$
D) $w < z < x < y$
E) $y < x < w < z$

42. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

II) $\frac{\sqrt{5} + 2}{4} < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3}$

III) $\frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{5} + 1} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

43. Si $A = 2\sqrt{3} + 2$, $B = 2\sqrt{7} - 1$ y $C = \sqrt{38}$, entonces:

- A) $A < B < C$
B) $A < C < B$
C) $B < A < C$
D) $B < C < A$
E) $C < A < B$

44. Si a y b son números reales positivos, tales que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 62$, entonces $\sqrt[3]{\frac{a+b}{\sqrt{ab}}} =$

- A) 2
B) 3
C) 5
D) 8
E) 27

RESPUESTAS CAPÍTULO 2									
1. A	2. A	3. E	4. B	5. B	6. D	7. E	8. A	9. A	10. B
11. B	12. D	13. D	14. E	15. C	16. D	17. E	18. E	19. E	20. C
21. A	22. D	23. A	24. E	25. A	26. C	27. D	28. A	29. A	30. A
31. E	32. B	33. E	34. C	35. D	36. D	37. C	38. B	39. A	40. E
41. C	42. A	43. C	44. A						

John Napier (o Neper), matemático escocés (1550-1617), fue el primero que definió y desarrolló los logaritmos, método matemático que permitió simplificar enormemente el cálculo numérico lo que tuvo enormes repercusiones en todos los campos de la matemática aplicada, en especial en los cálculos astronómicos.



CONCEPTOS CLAVES

- Base del logaritmo
- Relación entre logaritmo y potencia
- Argumento del logaritmo



DEFINICIÓN

Definición de logaritmo

Sean a y b números positivos con $a \neq 1$, se define $\log_a b$, como el número real con el que hay que elevar a para obtener b , es decir:

$$\log_a b = n \leftrightarrow a^n = b \quad (a, b > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

Donde a se denomina la base del logaritmo y b el argumento.



PROPIEDADES

1. El logaritmo de uno es cero.
 $\log_a 1 = 0$
2. El logaritmo de la base es uno.
 $\log_a a = 1$
3. El logaritmo de una potencia de la base equivale al exponente de esa potencia.
 $\log_a a^n = n$
4. Propiedad de la inversa del logaritmo.
 $a^{\log_a n} = n$
5. El logaritmo de un producto equivale a la suma de los logaritmos de los factores.
 $\log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$
6. El logaritmo de un cociente equivale a la diferencia de los logaritmos de los términos.
 $\log_n \left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$
7. El logaritmo de una potencia equivale al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.
 $\log_n x^p = p \cdot \log_n x$
8. Propiedad de cambio de base.
 $\log_n a = \frac{\log_b a}{\log_b n}$
9. Propiedad de igualdad de logaritmos
 $\log_n a = \log_n b \rightarrow a = b \quad (a, b, n > 0 \text{ y } n \neq 1)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $p = \log_8 \sqrt{2}$; $2 = \log_3 q$ y $\log_r 0,64 = 2$, entonces $pqr =$

Solución:

Como $p = \log_8 \sqrt{2}$, por definición de logaritmo:

$$8^p = \sqrt{2} \rightarrow 2^{3p} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3p = \frac{1}{2} \rightarrow p = \frac{1}{6}$$

Análogamente: $2 = \log_3 q \rightarrow 3^2 = q \rightarrow q = 9$.

$\log_r 0,64 = 2 \rightarrow r^2 = 0,64 \rightarrow r = 0,8 = \frac{4}{5}$ (el valor de r negativo se descarta, por ser la base de un logaritmo).

$$\text{Por lo tanto: } pqr = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

2. Si $\log \sqrt{a} = 0,4$ ($a > 0$), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $\log a^2 = 1,6$
- II) $\log \sqrt[4]{a} = 0,2$
- III) $\log (10a) = 1,8$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

Solución:

Se tiene que $\log \sqrt{a} = 0,4$, por lo tanto:

$$\log a^{\frac{1}{2}} = 0,4 \rightarrow \frac{1}{2} \log a = 0,4 \text{ (prop. 7)} \rightarrow \log a = 0,8$$

En I, $\log a^2 = 2 \log a$ (prop. 7), pero $\log a = 0,8$, por lo tanto $\log a^2 = 1,6$ (verdadera)

En II, $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4} \log a$ (prop. 7), por lo tanto $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4} \log a = \frac{1}{4} \cdot 0,8 = 0,2$ (verdadera)

En III, $\log (10a) = \log 10 + \log a$ (prop. 5), pero $\log 10 = 1$ (prop. 2), por lo tanto

$\log (10a) = 1 + \log a = 1 + 0,8 = 1,8$ (también es verdadera), respuesta E) I, II y III

3. Si $\log \sqrt{m} = p$ y $\log \left(\frac{m}{n}\right) = q$, entonces $\log \sqrt[4]{mn} =$

Solución:

Por prop. 7: $\log \sqrt{m} = \frac{1}{2} \log m$, pero $\log \sqrt{m} = p$, por lo tanto $\frac{1}{2} \log m = p \rightarrow \log m = 2p$.

Por otro lado: $\log \left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n = q$ (prop. 6)

Como $\log \left(\frac{m}{n}\right) = q$, tenemos que $\log m - \log n$ y sabemos que $\log m = 2p$,

por lo que se deduce que $\log n = 2p - q$.

La expresión pedida, $\log \sqrt[4]{mn}$, por propiedades 7 y 5 es equivalente a $\frac{1}{4} (\log m + \log n)$ reemplazando $\log m$ y $\log n$ por los valores obtenidos, tenemos que:

$$\log \sqrt[4]{mn} = \frac{1}{4} (\log m + \log n) = \frac{1}{4} (2p + 2p - q) = p - \frac{q}{4}.$$

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si $\log_2 8 = x$, entonces $x =$

- A) -3
- B) $2\sqrt{2}$
- C) 3
- D) 4
- E) 5

2. Si $\log_3 x = -2$, entonces $x =$

- A) -9
- B) -6
- C) $0,1$
- D) $0,3$
- E) 9

3. $\log_2(0,25) + \log_3 9 =$

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 3
- E) 4

4. $\log_3 \sqrt{0,1} =$

- A) -1
- B) 1
- C) 2
- D) -2
- E) $\frac{2}{3}$

5. Si a es un número real mayor que uno, entonces $\log a^3 =$

- A) 12
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 3

6. Si a es un número real mayor que uno, entonces $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} \right) =$

- A) -6
- B) 6
- C) $-\frac{1}{6}$
- D) $\frac{1}{6}$
- E) $\frac{7}{6}$

7. Si $\log(x + 1) = 2$, entonces $x =$

- A) 19
- B) 21
- C) 99
- D) 101
- E) 1.023

8. Si $\log(x + 2) = 1$, entonces $\log_2 x =$

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 0,25
- E) 0,125

9. Sean $P = \log_2 \sqrt[3]{4}$, $Q = \log_4 \sqrt[3]{4}$ y $R = \log_8 \sqrt[3]{4}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $Q = \frac{P}{2}$

II) $R = \frac{P}{3}$

III) $PQ = R$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

10. $\log_5 \left(\frac{5-x}{2} \right) = 2$, entonces $x =$

- A) -45
- B) -5
- C) 25
- D) 55
- E) $-\frac{15}{2}$

11. Si $p = \log_4 \sqrt{2}$, $4 = \log_q 16$ y $2 = \log_4 r$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $pr = 2q$

II) $pqr = 8$

III) $r^p = q$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

12. $\log 2 + \log 8 - \log 4 =$

- A) $\log 4$
- B) $\log 6$
- C) $\log 8$
- D) $\log 12$
- E) $\log \left(\frac{5}{2} \right)$

13. Si $x > 1$, $\log(x + 1) + \log(x - 1) =$

- A) $2 \log x$
- B) $2 \log(x - 1)$
- C) $2 \log x - 1$
- D) $\log(x^2 - 1)$
- E) $\log x + \log 2$

14. $\log_2(\log_9(\log_5 125)) =$

- A) 2
- B) -2
- C) 1
- D) -1
- E) 0

15. $\log_2(\log_4(\log_2 \sqrt[3]{4^6})) =$

- A) -1
- B) 1
- C) 0
- D) 2
- E) $\log 2$

16. Si $\log \sqrt{m} = 0,24$ y $\log n^3 = 0,69$, entonces $\log \left(\frac{m}{n}\right) =$

- A) -0,11
- B) 0,16
- C) 0,25
- D) 0,35
- E) 0,71

17. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a la expresión:

$\log \left(\frac{ba^2}{c^2}\right) ?$

- I) $2 \log a + \log b - 2 \log c$
- II) $\log b + 2 \log \left(\frac{a}{c}\right)$
- III) $2 \log (ab) - 2 \log c$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

18. Si a, b y c son números reales positivos, entonces $\log a - \log b - 2 \log c =$

- A) $\log \left(\frac{a}{bc^2}\right)$
- B) $\log \left(\frac{ab}{c^2}\right)$
- C) $\log \left(\frac{ac^2}{b}\right)$
- D) $\log \left(\frac{c^2}{ab}\right)$
- E) $\log \left(\frac{b}{ac^2}\right)$

19. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$

II) Si $\log_x 25 = 2$, entonces $x = 5$

III) Si $\log_4 x = 8$, entonces $x = 32$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

20. Si a y b son números positivos, se puede determinar que $a=b^2$, si:

(1) $\log a = 2 \log b$

(2) $\log \left(\frac{a}{b^2}\right) = 0$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
- E) Se requiere información adicional

21. $\log \left(\frac{\sqrt{6} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right) =$

- A) $\frac{1}{2} \log 3$
- B) $\log 3$
- C) $2 \log 3$
- D) $\log 6$
- E) $\log 2$

22. Si $3 \log a = 2 \log b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $b = a\sqrt{a}$
- II) $\log_a b = \frac{2}{3}$
- III) $\log \left(\frac{a^3}{b^2} \right) = 0$

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

23. $\log x^2 + \log (2xy) + \log y^2 =$

- A) $3(\log x + \log y) + \log 100$
- B) $\log \left(\frac{xy}{3} \right)$
- C) $2 \log (x + y)$
- D) $\log \left(\frac{xy}{100} \right)$
- E) $3 \log (xy) + \log 2$

24. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $\log (0,5) < 0$
- II) $(\log 2^{-3}) \cdot (\log 2^3) \geq 0$
- III) $\log 2 \cdot \log (0,3) < 0$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II, III

25. Si $\log \left(\frac{3}{2} \right) = 0,18$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

- I) $\log \left(\frac{9}{4} \right) = 0,36$
- II) $\log (0,6) = \frac{50}{9}$
- III) $\log \sqrt{1,5} = 0,9$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) Ninguna de ellas.

26. Si $\log 2 = a$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

- I) $\log (0,25) = -2a$
- II) $\log 8 = 4a$
- III) $\log (0,5) = \frac{1}{a}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II, III

27. Si $x > y > 0$, ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a $\log(x^2 - y^2)$?

- I) $2 \log x - 2 \log y$
- II) $\log(x + y) + \log(x - y)$
- III) $\frac{\log x^2}{\log y^2}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II, III

28. Si a , b y c son números reales positivos, la expresión: $2 \log a + 2 \log b - 2 \log c$ es equivalente a

- I) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)^2$
- II) $2\log\left(\frac{ab}{c}\right)$
- III) $\log(ab)^2 - \log c^2$

- A) Solo I y II
- B) Solo III
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II, III

29. Si $\log 2 = u$ y $\log 3 = v$, entonces $\log 18$ en términos de u y v es:

- A) $2u + v$
- B) $2v + u$
- C) uv^2
- D) $3v + u$
- E) $2uv$

30. Si $\log m^2 = n$ y $\frac{1}{2} \log \sqrt{p} = q$, entonces $\log\left(\frac{m}{p}\right) =$

- A) $\frac{n}{2} + 4q$
- B) $\frac{n}{2} - 4q$
- C) $\frac{n}{2} - \frac{q}{2}$
- D) $\frac{n}{2} - \frac{q}{4}$
- E) $2n - 4q$

31. Si $\log_a b = 3$, entonces $\log_{b^2} a =$

- A) 6
- B) $\frac{3}{2}$
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{1}{6}$
- E) $\frac{1}{3}$

32. La masa de un material radioactivo medida en kilos, está dada por la expresión $m(t) = 4 \cdot (0,2)^t$, donde t es el tiempo medido en años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la masa del material quede reducida a dos kilos?

- A) $\log 2,5$
- B) $\frac{\log 5}{\log 2}$
- C) $\log 5 - \log 2$
- D) $\frac{\log 2}{1 - \log 2}$
- E) Todas las anteriores.

33. Si $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) $\log 144 = 4a + 2b$
- B) $\log (4,5) = 2b - a$
- C) $\log (0,8) = 3a - 2b$
- D) $\log \sqrt{12} = a + \frac{b}{2}$
- E) $\log (1,5) = \frac{b}{a}$

34. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $2 \log \sqrt{2} = \frac{1}{4} \log 2$
- II) $2 \log (\sqrt{2} - 1) = \log (3 - 2\sqrt{2})$
- III) $\log (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \log (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

35. Si $\log x^3 = 2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $x = \sqrt[3]{100}$
- II) $\log x^{12} = 16$
- III) $\log \left(\frac{10}{x} \right) = \frac{1}{3}$

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

36. Si $\log_2 5 = a$, entonces $\log 2 =$

- A) $\frac{1}{a}$
- B) $\frac{2}{a}$
- C) $\frac{a+1}{a}$
- D) $\frac{1}{a-1}$
- E) $\frac{1}{a+1}$

37. Sea $x = \log_p q$, $y = \log_q p$ y $z = \log_q p^2$, con $p > q$ y p y q números reales positivos menores que uno. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) $x < y < z$
- B) $x < z < y$
- C) $y < x < z$
- D) $y < z < x$
- E) $z < x < y$

38. Si a es un número real positivo, se puede determinar $\log a$ sabiendo que:

- (1) $\log (10a) - \log a = 1$
- (2) $\log (10a) + \log a = 3$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

- 39.** Si $p > 1$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?
- I) $\log_5 p > \log_4 (p + 1)$
 II) $\log_4 p > \log_5 \sqrt{p}$
 III) $\log_4 (p + 1) > \log_8 \sqrt[3]{p + 1}$
- A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo I y III
 D) Solo II y III
 E) I, II y III
- 41.** Si $x > 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?
- I) $\log (10x) > \log x$
 II) $2 \log x > \log x$
 III) $\log_2 x > \log_3 x$
- A) Solo I
 B) Solo III
 C) Solo I y III
 D) Solo II y III
 E) I, II y III

- 40.** Si a y b son números reales positivos, se puede determinar ab sabiendo:

- (1) $\log a + \log b = 1$
 (2) $\log a + \log b = 2 - \log (ab)$

- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 3									
1. C	2. C	3. B	4. A	5. B	6. D	7. C	8. B	9. E	10. A
11. E	12. A	13. D	14. D	15. C	16. C	17. C	18. A	19. C	20. D
21. A	22. D	23. E	24. D	25. A	26. A	27. B	28. E	29. B	30. B
31. D	32. D	33. E	34. E	35. D	36. E	37. D	38. B	39. D	40. D
41. A									

EJE NÚMEROS

Tiempo: 70 minutos

1. Si los tres cuartos de $0,\overline{2}$ sumado con 0,8 se aproximan por defecto a las milésimas, la última cifra decimal de esta aproximación es:
 - A) 0
 - B) 3
 - C) 5
 - D) 6
 - E) 7
2. El resultado de $\frac{0,\overline{2} + 3^{-1}}{3 - 2^{-1}}$ es un número:
 - A) entero positivo.
 - B) entero negativo.
 - C) decimal infinito periódico.
 - D) decimal infinito semiperiódico.
 - E) decimal finito.
3. ¿Cuál de los siguientes números tiene mayor valor numérico?
 - A) $0,\overline{4}$
 - B) $\frac{15}{33}$
 - C) $\frac{3}{7}$
 - D) $\frac{9}{20}$
 - E) $0,\overline{43}$
4. Si $p = 0,5 \cdot 10^{-1}$, $q = 5 \cdot 10^{-2}$ y $r = 50 \cdot 10^{-3}$, entonces se cumple:
 - A) $p = q > r$
 - B) $p < q < r$
 - C) $p < r < q$
 - D) $q < p < r$
 - E) $p = q = r$
5. Sean los números $a = 0,1 \cdot 10^{-2}$, $b = 4 \cdot 10^{-1}$ y $c = 2 \cdot 10^{-2}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?
 - A) El menor es a.
 - B) El mayor es b.
 - C) $ab = c^2$
 - D) $b^2 < c$
 - E) $c = 20a$
6. Si $a = 0,2$, $b = 0,04$ y $c = 0,035$, entonces $ab + c$ aproximado por exceso a la centésima es:
 - A) 0,02
 - B) 0,03
 - C) 0,04
 - D) 0,05
 - E) 0,06

7. El resultado de $\frac{2^8 + 2^{10}}{2^9 - 2^8}$ corresponde a:

- A) Un número racional no entero mayor que uno.
- B) Un número racional no entero menor que uno.
- C) Un número entero positivo mayor que 6.
- D) Un número entero positivo menor que 6.
- E) Un número entero negativo.

8. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $0,\overline{5} \cdot 0,\overline{2} = 0,\overline{10}$

II) $\frac{0,\overline{32}}{0,\overline{16}} = 2$

III) $0,\overline{23} + 0,\overline{76} = 1$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) I, II y III
- E) Ninguna de ellas.

9. Una familia viajará desde un punto A a un punto B de la carretera, distantes 457,2 km, haciendo detenciones en los puntos C y D. En C se encuentra un servicentro el que se ubica a 208,6 km del punto de partida y en D hay un restaurant que se ubica 123,3 km más al sur de servicentro. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) El restaurant se encuentra a más de 331 km del punto de partida.
- B) Desde el restaurant al punto de destino hay más de 125 km.
- C) Entre el servicentro y el punto de destino hay más de 250 km.
- D) Hay una mayor distancia entre el restaurante y el punto de destino que del restaurante al servicentro.
- E) De los tres tramos del recorrido, el mayor es el del punto de partida al servicentro.

10. Sean m y n números enteros positivos, se puede determinar que $m + n$ es par, sabiendo que:

- (1) $m - n$ es par.
- (2) mn es par.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $-2^{-2} > 2^{-3}$
- II) $(0,5)^{-3} = 2^3$
- III) $(0,2)^{-3} > 25$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

12. Un padre deja como herencia a sus tres hijos, un fundo de **A** hectáreas, al hijo mayor le deja los $\frac{2}{3}$ y al segundo le deja los $\frac{1}{5}$ del resto, ¿cuánto recibe el tercer hermano?

- A) $\frac{A}{6}$
- B) $\frac{4}{15}A$
- C) $\frac{2}{15}A$
- D) $\frac{13}{15}A$
- E) $\frac{A}{15}$

13. El cuociente $0,\overline{3} : 0,1\overline{6}$ corresponde a un número:

- I) Racional.
- II) Entero positivo.
- III) Decimal infinito.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) Ninguna de ellas.

14. Si a y b son dígitos, entonces $0,\overline{ab} - 0,\overline{ba} =$

- A) $\frac{5a - 4b}{45}$
- B) $\frac{4a - 4b}{45}$
- C) $\frac{b - a}{90}$
- D) $\frac{8a - 8b}{99}$
- E) $\frac{4a + 5b}{45}$

15. ¿Cuál de los siguientes números tiene el mayor valor numérico?

- A) $(0,\overline{2})^{-2}$
- B) $(0,0\overline{2})^{-1}$
- C) $(0,\overline{3})^{-3}$
- D) $(0,\overline{5})^{-4}$
- E) $(1,2\overline{5})^{-6}$

16. $(0,\overline{2})^{-3} \cdot (3,5)^{-3} =$

- A) $(0,0\overline{7})^{-3}$
- B) $(0,7)^{-6}$
- C) $(0,\overline{7})^{-6}$
- D) $(0,7)^{-3}$
- E) $(0,\overline{7})^{-3}$

17. $\frac{2^x + 2^x}{3^x + 3^x} =$

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{4}{9}$
- C) $\left(\frac{2}{3}\right)^x$
- D) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$
- E) $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

18. Al ordenar de menor a mayor los números:

$a = 2 + \sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene:

- A) $a - c - b$
- B) $a - b - c$
- C) $c - b - a$
- D) $c - a - b$
- E) $b - a - c$

19. Sabiendo que una milla es equivalente a 1,609 km, un automóvil que recorre un trayecto de 4,5 millas, su equivalente en km aproximado por defecto a las milésimas es:

- A) 7,230
- B) 7,239
- C) 7,240
- D) 7,241
- E) 7,242

20. ¿Cuál(es) de las siguientes magnitudes corresponde(n) a un número racional?

- I) La longitud del lado de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{8}$ cm.
- II) El lado de un triángulo equilátero cuya altura mide $4\sqrt{3}$ cm.
- III) El radio de una circunferencia cuya longitud es π cm.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

21. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$

II) $\frac{3}{2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{3} - 3$

III) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

22. Utilizando que $\log 5$ es aproximadamente 0,69897, ¿cuál(es) de las siguientes aproximaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $\log 25$ redondeado a la milésima es 1,400.
- II) $\log 2$ redondeado a la centésima es 0,31.
- III) $\log 50$ redondeado por exceso a la cuarta cifra decimal es 1,6990.

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

23. Se tienen $8,94 \cdot 10^{-2}$ gramos de un material radiactivo, el cual se divide en tres partes iguales en tres contenedores distintos. Si al material que está en uno de los contenedores se saca una centésima de gramo y se agrega a uno de los otros, ¿cuántos gramos, de este material, redondeado a las milésimas, tiene el contenedor que contiene más de este material?

- A) 0,004
- B) 0,031
- C) 0,040
- D) 0,129
- E) 0,130

24. Sean m y n números reales, se puede determinar que $\frac{m}{n} > 1$, sabiendo que:

- (1) $m > n$
- (2) $n > 0$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

25. Si $\log a = 0,12$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) $\log a^2 = 0,24$
- B) $\log \sqrt{a} = 0,6$
- C) $\log (10a) = 1,12$
- D) $\log \left(\frac{1}{a}\right) = -0,12$
- E) $\log \left(\frac{10}{a}\right) = 0,88$

26. Sean a y b dos números reales positivos, tales que $\log \sqrt{a} = 2$ y $\log \sqrt[3]{b} = 3$, entonces $\log \left(\frac{ab^2}{100}\right) =$

- A) 0,72
- B) 1,44
- C) 2,2
- D) 20
- E) 70

27. Si a es un número real positivo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a} \\ \text{II)} \quad & \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a} \\ \text{III)} \quad & \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

- A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

28. El resultado de $\frac{4^8 - 4^6}{2^5 + 2^7}$ es un número que es divisible por:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 7 \\ \text{II)} \quad & 12 \\ \text{III)} \quad & 24 \end{aligned}$$

- A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

29. Sea la ecuación en x , $ax + b = c$, donde a, b y c son números enteros y $a \neq 0$. Se puede determinar que x es un número entero, sabiendo que:

- (1) $(c - b)$ es múltiplo de a .
(2) c y b son múltiplos de a .

- A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. Sean los números reales, $x = (2 - \sqrt{2})^{-1}$, $y = (2 + \sqrt{2})^{-1}$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) racional(es)?

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & x + y \\ \text{II)} \quad & (x - y)^2 \\ \text{III)} \quad & \frac{x}{y} \end{aligned}$$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

31. La cantidad de mg de un medicamento que permanece en la sangre de un individuo está dado por la expresión $m_0 \cdot 2^{-0,2t}$, donde t es tiempo medido en horas. ¿A las cuántas horas el medicamento se habrá reducido a la cuarta parte?

- A) 2
B) 4
C) 5
D) 8
E) 10

32. Si $\frac{c^2 - d^2}{a^2} > 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es **siempre** equivalente a $\log\left(\frac{c^2 - d^2}{a^2}\right)$?

- A) $2 \log\left(\frac{c - d}{a}\right)$
B) $\log_{a^2}(c^2 - d^2)$
C) $2 \log\left(\frac{c}{a}\right) - 2 \log\left(\frac{d}{a}\right)$
D) $2 \log c - 2 \log a$
E) $\log(c + d) + \log(c - d) - 2 \log a$

33. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$ es un número irracional menor que uno.
- B) $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ es un número irracional positivo.
- C) $\sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2}$ es un número irracional positivo.
- D) $(\sqrt{18} - \sqrt{8})^2$ es un número racional.
- E) $\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$ es un número irracional negativo.

34. Si $p > q > 1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I) $\log_p q < 1$
 - II) $\log(p^2 - q^2) > 0$
 - III) $\log\left(\frac{q}{p}\right) < 0$
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo I y III
 - D) Solo II y III
 - E) I, II y III

35. En una red de usuarios de internet, se ha detectado que una noticia falsa, cada un minuto se cuadruplica la cantidad de cibernautas que la han leído. Si inicialmente tres usuarios leyeron esta noticia, ¿a los cuántos minutos 6000 personas la habrán leído?

- I) $\frac{\log 2000}{\log 4}$
- II) $\log_4 2000$
- III) $\frac{\log 2 + 3}{2 \log 2}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) I, II y III
- E) Ninguna de ellas

36. Si x e y son números racionales entre -1 y 0 tales que $y < x$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) números racionales menores que -1 ?

- I) $\frac{y - x}{xy}$
- II) $\frac{x - y}{x + y}$
- III) $\frac{x + y}{xy}$

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

37. Si $a^3 = b^2$, con a y b son reales positivos y distintos a uno, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log_a b = 1,5$

II) $\log_b a = 0,\overline{6}$

III) $\frac{\log a}{\log b} = \frac{2}{3}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

38. Sea la ecuación en t , $ab^t = c$, donde a, b y c son números reales positivos y $b \neq 1$, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a t ?

A) $\frac{c - a}{b}$

B) $\frac{\log c}{\log a + \log b}$

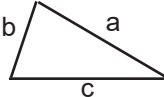
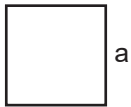
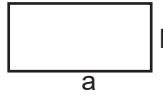
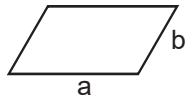
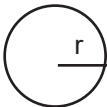
C) $\frac{\log (c - a)}{\log b}$

D) $\frac{\log c - \log a}{\log b}$

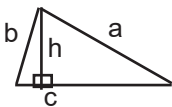

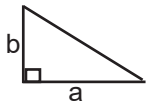
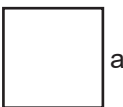
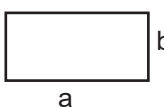
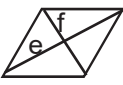
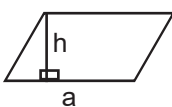
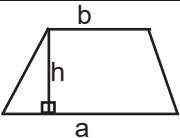
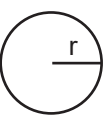
E) $\log \left(\frac{c}{ab} \right)$

ANEXOS


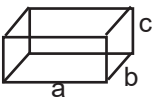
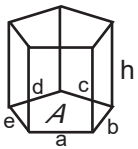
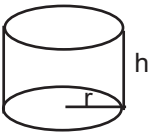
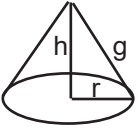
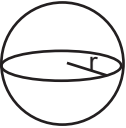
Anexo 1: Perímetro de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$a + b + c$
CUADRADO		$4a$
RECTÁNGULO		$2(a + b)$
ROMBOIDE		$2(a + b)$
CIRCUNFERENCIA		$2 \pi r$

Anexo 2: Área de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$\frac{ch}{2}$
TRIÁNGULO EQUILÁTERO		$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		$\frac{ab}{2}$
CUADRADO		a^2
RECTÁNGULO		ab
ROMBO		$\frac{ef}{2}$
ROMBOIDE		ah
TRAPECIO		$\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$
CÍRCULO		πr^2

Anexo 3: Área y volumen de cuerpos geométricos

NOMBRE	CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
CUBO (hexaedro regular)		$6a^2$	a^3
ORTOEDRO (paralelepípedo recto rectangular)		$2ab+2bc+2ac$	abc
PRISMA RECTO (en la fig. un caso especial: prisma de base pentagonal)		$ah+bh+ch+dh+eh + 2A = Ph+2A$ (P= perímetro del polígono basal)	$A h$ (A = área del polígono basal)
CILINDRO		$2\pi rh+2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
CONO		$\pi rg+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

RESPUESTAS MINIENSAYOS

RESPUESTAS MINIENSAYO 1									
1. D	2. C	3. B	4. E	5. D	6. D	7. D	8. C	9. C	10. A
11. D	12. B	13. C	14. B	15. B	16. E	17. C	18. C	19. C	20. E
21. E	22. B	23. C	24. C	25. B	26. D	27. D	28. D	29. D	30. C
31. E	32. E	33. E	34. C	35. D	36. B	37. E	38. D		

RESPUESTAS MINIENSAYO 2									
1. D	2. D	3. E	4. E	5. B	6. A	7. B	8. A	9. D	10. D
11. A	12. C	13. E	14. E	15. A	16. D	17. E	18. D	19. C	20. D
21. D	22. C	23. A	24. A	25. E	26. C	27. B	28. B	29. D	30. B
31. E	32. C	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C		






RESPUESTAS MINIENSAYO 3									
1. C	2. C	3. E	4. E	5. E	6. E	7. D	8. C	9. E	10. E
11. D	12. B	13. B	14. E	15. B	16. C	17. A	18. C	19. C	20. A
21. E	22. C	23. B							








RESPUESTAS MINIENSAYO 4									
1. B	2. E	3. B	4. C	5. E	6. E	7. A	8. E	9. B	10. E
11. A	12. A	13. C	14. D	15. C	16. A	17. D	18. B	19. C	20. D
21. C	22. D								




CLASES CON CONTENIDOS Y EJEMPLOS

Si quieres aprender más, asiste a una clase virtual con el contenido de cada capítulo siguiendo los links o leyendo con tu celular los códigos QR que aquí te presentamos.

Estos códigos corresponden al texto original (Cid, 2019) por lo que los números de las páginas no coinciden con los presentados en este documento.

EJE NÚMEROS	
NÚMEROS REALES	POTENCIAS Y RAÍCES
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-4/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-1/
LOGARITMOS	
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-2/	
EJE ALGEBRA Y FUNCIONES	
OPERATORIA ALGEBRAICA	ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-5/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-7/

FUNCIONES	TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-8/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-9/
DESIGUALDADES E INECUACIONES	PLANTEO DE PROBLEMAS
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-10/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-6/
EJE GEOMETRÍA	
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS	GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-11/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-13/
VECTORES	GEOMETRÍA ANALÍTICA
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-15/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-14/

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	
ESTADÍSTICA	PROBABILIDADES
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-17/	 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-18/
COMBINATORIA Y PROBABILIDADES	
 https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-19/	



Repaso contenidos

MATEMÁTICA

IV° medio