Calcul paramétrique des solutions supportées du problème bi-objectif d'arbre couvrant de poids minimum

Présentation :

Dans ce TER, nous nous intéressons au problème d'arbre couvrant de poids minimum dans un contexte bi-objectif. L'optimisation combinatoire avec plusieurs fonctions objectifs déborde un peu du programme des cours de M1, mais le principe général est simple à poser. Dans la modélisation, il n'y a aucune différence avec un problème d'optimisation combinatoire mono-objectif, à l'exception de la présence de plusieurs fonctions objectifs à minimiser simultanément. Cela s'écrit simplement de la façon suivante.

$$\begin{array}{rcl} \min z & = & ((c^1)^T x, \ldots, (c^p)^T x) \\ s.c. & & x \in X \subset \{0,1\}^n \end{array}$$

où n est le nombre de variables, $c^1, \ldots, c^p \in \mathbb{Z}^n$ sont les vecteurs de coûts associés à chacune des fonctions objectifs, et X représente simplement la région admissible du problème.

Nous ferons l'hypothèse (réaliste) que les fonctions objectifs sont conflictuelles, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une solution admissible minimisant simultanément toutes les fonctions objectifs. La notion de solution optimale est alors remplacée par la notion d'ensemble de solutions efficaces, qui sont des solutions admissibles telles qu'une amélioration sur une fonction objectif ne peut se faire qu'au détriment d'une autre. Cette notion s'illustre plus clairement lorsqu'on considère l'espace des objectifs, i.e. l'espace dans lequel sont représentées les valeurs des solutions pour l'ensemble des fonctions objectifs. Pour des raisons de simplification (visuelle), l'illustration ci-dessous se limite au cas bi-objectif. Un couple de valeurs pour les deux fonctions objectifs est appelé point, et si ce point correspond à l'image d'une solution admissible, on parle de point réalisable.

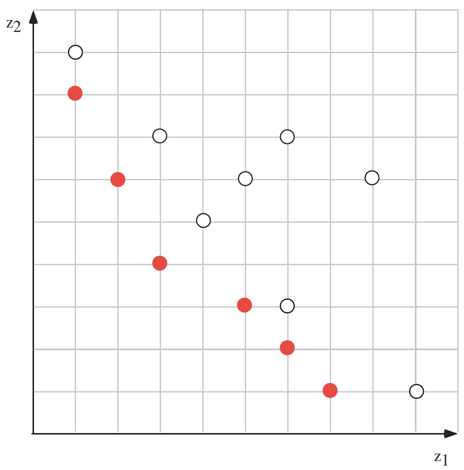

FIGURE 1 – Représentation graphique d'un nuage de points réalisables dans le cas bi-objectif. Les points non-dominés sont indiqués en rouge.

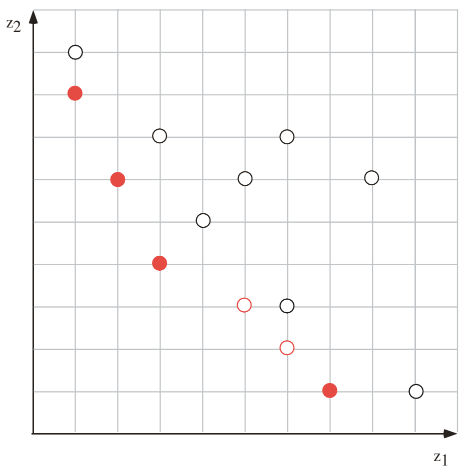

FIGURE 2 – Représentation graphique d'un nuage de points réalisables dans le cas bi-objectif. Les points non-dominés supportés sont indiqués en sont déduits.

Dans la figure 1, les points représentés en rouge correspondent aux points nondominés. En effet, améliorer la valeur d'un de ces points réalisables sur un objectif nécessite de dégrader la valeur sur l'autre objectif. Visuellement, il n'y a aucun autre point réalisable situé "en bas et à gauche" de ces points. Les solutions admissibles correspondant aux points nondominés sont appelées solutions efficaces. Résoudre exactement un problème d'optimisation multi-objectif signifie calculer au moins une solution efficace correspondant à chacun des points non-dominés. Dans ce TER, notre objectif sera moins ambitieux mais pas si simple que cela. Nous nous contenterons de calculer un sous-ensemble de points non-dominés supportées qui sont les images de solutions optimales pour une somme pondérée des fonctions objectifs (cf la figure 2 pour une illustration avec deux fonctions objectifs). Cet objectif est facilement réalisable avec deux fonctions objectifs, mais demande de résoudre de manière répétée des problèmes d'optimisation mono-objectif. Notre but sera ici d'exploiter les propriétés structurelles du problème d'arbre couvrant pour éviter d'effectuer ces résolutions. Nous chercherons à procéder par réoptimisation pour passer d'une solution supportée à une autre.

Le calcul des solutions supportées (extrêmes) a été un élément central dans une méthode de résolution de type Branch & Bound [2]. Il est donc important de pouvoir en faire un calcul rapide. Sur un problème voisin, le problème de matroïde de coût minimum dans un contexte bi-objectif, une solution a été proposée pour le cas particulier dans lequel les coefficients de la seconde fonction objectif ne prennent des valeurs que dans l'ensemble $\{0, 1\}$ [1]. Nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur les coefficients des fonctions objectifs dans ce TER.

Encadrant : Anthony Przybylski

Nombre d'étudiants : 1

Références

[1] Kathrin Klamroth, Michael Stiglmayr, and Julia Sudhoff. Multi-objective matroid optimization with ordinal weights. *Discrete Applied Mathematics*, 2022.

[2] Francis Sourd and Olivier Spanjaard. A multiobjective branch-and-bound framework : Application to the biobjective spanning tree problem. *INFORMS Journal on Computing*, 20 :472–484, 2008.