Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 7

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 24/06/25 @ 00:33

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:
24/06/25 @ 00:33
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Matriz de iteraciones M_I:*

  Busco un sistema equivalente al clásico y querido $Ax = b$, porque invertir A se complica:

  $$Ax = b \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \overset{!}{\Leftrightarrow} x = \underbrace{-B^{-1}C}_{M_I}x + \underbrace{B^{-1}b}_{\tilde{b}} \Leftrightarrow \boxed{x = M_I x + \tilde{b}} \star^1.$$

  Donde B se elige porque es más fácil que invertir que A *sino me estaría pegando un tiro en el pie*. La matriz M_I es la *matriz de iteraciones*, la cual se va a usar así:

  $$\begin{array}{ccl} \text{espectativa} & \to & x = M_I x + \tilde{b} \\ - & & - \\ \text{realidad} & \to & x_{k+1} = M_I x_k + \tilde{b} \\ \hline \text{error} & \to & x - x_{k+1} = e_{k+1} = M_I e_k \end{array}$$

  Y ese error, si le mando M_I *reiteradas veces*:

  $$e_{k+1} = M_I \cdot e_k = M_I \cdot M_I e_{k-1} = \cdots = M_I^{k+1} e_0 \Leftrightarrow \boxed{e_{k+1} = M_I^{k+1} e_0}$$

  Si el error de iterar $k+1$ veces $e_{k+1} \to 0$, entonces quiere decir que $M_I^{k+1} \to 0$ entonces la espectativa y la realidad no van a diferir más que lo que diferían al principio antes de iterar:

  $$\boxed{e_{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \Leftrightarrow M_i^{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \overset{!!}{\Longleftrightarrow} \rho(M_I) < 1}$$

  Donde $\rho(M_I) = |\lambda_{\text{máx}}|$

  Para el cálculo de los autovalores de M_I esta propiedad es *clave*:

  $$\boxed{M_I = -B^{-1}C \text{ tiene autovalor } \lambda \iff \det(\lambda B + C) = 0}$$

- *Jacobi y Gauss-Seidel*: Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  $$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{inferior}}} + \overbrace{D}^{\text{diagonal}} + \underbrace{U}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}}$$

  - *Jacobi*: Tomando en este caso $B = D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\star^1$:

    $$\boxed{\begin{cases} M_J &= -D^{-1}(L + U) \\ \tilde{b} &= D^{-1}b \end{cases}}$$

  - Gauss-Seidel: Tomando en este caso $B = L + D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\star^1$:

    $$\boxed{\begin{cases} M_{GS} &= -(L + D)^{-1}U \\ \tilde{b} &= (L + D)^{-1}b \end{cases}}$$

  - Si A es estrictamente diagonal dominante, es decir:

    $$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

    entonces *Jacobi* y *Gauss-Seidel* convergen.
  - Si A es tridiagonal entonces $\rho(T_{GS}) = \rho^2(T_J)$
  - Si A es simétrica (hermitiana) y definida positiva entonces *Gauss-Seidel* converge.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)^t$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.

b) Sea J la matriz de iteración. Hallar la normas 1, ∞ y 2 de J.
¿Contadice la convergencia del método?

c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1. *Sugerencia: Considerar una base de autovectores de J.*

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

---

1. [segundo recu 5/12/2024] Se desea resolver el sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar los valores de α para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para cualquier vector inicial x_0.

(b) Probar que si $\alpha = 0$ el método de Jacobi converge en 3 pasos para cualquier x_0. *Sugerencia:* analizar B_J^3, siendo B_J la matriz que gobierna la iteranción del método de Jacobi.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX$→ una *pull request* al .

---

2. [segundo cuatri 2023] Dada una matriz real A, notamos $A = D + L + U$, donde D es diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

(a) Probar que x es solución de $Ax = b$ si y solo si x satisface:

$$(I + \tfrac{1}{2}L)x = -(D - I + \tfrac{1}{2}L + U)x + b.$$

(b) Considerar el método iterativo derivado de la formulación anterior:

$$x^{n+1} = Bx^n + c,$$

donde $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$ y $c = (I + \frac{1}{2}L)^{-1}b$. Probar que λ es un autovalor de B si y solo si λ es raíz de la ecuación:

$$\det\left(D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0.$$

(c) Para $a \in \mathbb{R}$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método anterior converge para una matriz A si y solo si $|a| < 1$.

(d) Probar que para que el método de Jacobi converja se debe cumplir la misma condición. Deducir de esto que la condición para que Gauss-Seidel converja es la misma ¿Qué método es preferible para la matriz A?

(a) Para que x sea solución solo hay que hacer un par de cuentas y ver que queda una igualdad:

$$\begin{aligned}
(I + \tfrac{1}{2}L)x = -(D - I + \tfrac{1}{2}L + U)x + b \quad &\Leftrightarrow \quad Ix + \tfrac{1}{2}Lx = -Dx + Ix - \tfrac{1}{2}Lx - Ux + b \\
&\Leftrightarrow \quad Dx + Lx + Ux = b \\
&\Leftrightarrow \quad (D + L + U)x = b \\
&\Leftrightarrow \quad Ax = b
\end{aligned}$$

(b) B va a tener a λ como autovalor si y solo si $|B - \lambda I| = 0$. Hay que acomodar ese determinante feo y llegar a esa expresión:

$$\begin{aligned}
\det\left(D-I+\tfrac{1}{2}L+U+\lambda(I+\tfrac{1}{2}L)\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left((\underbrace{-(I+\tfrac{1}{2}L)(-(I+\tfrac{1}{2}L)^{-1}}_{I_n})(D-I+\tfrac{1}{2}L+U)+\lambda(I+\tfrac{1}{2}L)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left((-(I+\tfrac{1}{2}L)B+\lambda(I+\tfrac{1}{2}L)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left((-B+\lambda I)(I+\tfrac{1}{2}L)\right)=0\\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \det(-B+\lambda I)\cdot\underbrace{\det(I+\tfrac{1}{2}L)}_{\neq 0}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \det(-B+\lambda I)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \det(B-\lambda I)=0
\end{aligned}$$

(c) De la teórica sabemos que:

$$\text{La sucesión } \left\{B^k\right\} \text{ converge} \iff \rho(B)\overset{\text{def}}{=}\text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\right\}<1$$

Por lo tanto quiero calcular los autovalores de la matriz de iteración $B=-(I+\frac{1}{2}L)^{-1}(D-I+\frac{1}{2}L+U)$, lo cual, dado lo visto en el ítem anterior, es lo mismo que calcular:

$$\det\left(D-I+\frac{1}{2}L+U+\lambda(I+\frac{1}{2}L)\right)=0$$

Cálculo que *no requiere invertir nada*, lo cual nos saca una sonrisa ☺. Junto los ingredientes para cocinar eso:

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1+a^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}}_{L}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

$$D-I+\tfrac{1}{2}L+U+\lambda(I+\tfrac{1}{2}L)=\begin{pmatrix}0&a&0\\\frac{a}{2}&a^2&a\\0&\frac{a}{2}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\\lambda\frac{a}{2}&\lambda&0\\0&\lambda\frac{a}{2}&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&a&0\\(\lambda+1)\frac{a}{2}&a^2+\lambda&a\\0&(\lambda+1)\frac{a}{2}&\lambda\end{pmatrix}$$

Calculo el determinante de eso:

$$\begin{vmatrix}\lambda&a&0\\(\lambda+1)\frac{a}{2}&a^2+\lambda&a\\0&(\lambda+1)\frac{a}{2}&\lambda\end{vmatrix}\overset{!}{=}\lambda^3-a^2\lambda\overset{!}{=}\lambda\cdot(\lambda-a)\cdot(\lambda+a)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1&=&0\\\lambda_2&=&a\\\lambda_3&=&-a\end{array}\right.$$

Por lo tanto para que la matriz de iteración B converga sin importar el vector inicial:

$$\boxed{|a|<1}$$

(d) La matriz de iteración, B_J, para el método de Jacobi:

$$B_J=-D^{-1}(L+U).$$

Con la propiedad que se usó en el ejercicio anterior, para calcular los autovalores de esta B_J:

$$\lambda D+L+U=\begin{pmatrix}\lambda&a&0\\a&\lambda(1+a^2)&a\\0&a&\lambda\end{pmatrix}$$

Calculo el determinante e igualo a cero:

$$\begin{vmatrix}\lambda&a&0\\a&\lambda(1+a^2)&a\\0&a&\lambda\end{vmatrix}=0\overset{!}{\Leftrightarrow}\lambda\cdot\left(\lambda-\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)\cdot\left(\lambda+\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1&=&0\\\lambda_2&=&\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\\\lambda_3&=&-\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\end{array}\right.$$

Por lo tanto el radio espectral de B, $\rho(B)$ debe cumplir que:

$$\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < \tfrac{2a^2}{1+a^2} < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < 2a^2 < 1 + a^2 \overset{!}{\Leftrightarrow} -a^2 < a^2 < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{|a| < 1}$$

Misma condición que la matriz anterior.

Lo que sigue ahora queda servido para usar la propiedad de la *tridiagonalidad* que relaciona los *radios espectrales* de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Dado que A es tridiagonal para todo valor de a, sé que:

$$\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS}) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)^2 = |\tfrac{2a^2}{1+a^2}|$$

Para que el método de Gauss-Seidel converja:

$$|\tfrac{2a^2}{1+a^2}| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} |a| < 1$$

Por lo tanto tengo la misma condición que para el método de *Jacobi*.

Con respecto a la velocidad de convergencia, hay que pensar que lo que se está haciendo, *maomeno*, es multiplicar una matriz por sí misma una y otra vez, por lo tanto mientras más rápido se achique más rápido va a converger. Y dado que para cualquier norma subordinada:

$$\rho(B) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\|B^k\|},$$

mientras más chico el $\rho(B)$ más rápido va a converger.

$$\rho(B_J) < 1 \quad \text{y} \quad \rho(B_{GS}) < 1 \quad \text{y} \quad (\rho(B_J))^2 = \rho(B_{GS}) \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{\rho(B_J) > \rho(B_{GS})}$$

El método de Gauss-Seidel converge más rápido que el de Jacobi para esta matriz A. Comparo con $\rho(B) = |a|$:

$$\rho(B_{GS}) = \frac{2a^2}{1+a^2} \quad \text{y} \quad \rho(B) = |a|$$

Abro el módulo de a planteo un caso cuando $a > 0$ y otro cuando $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} \text{si } a > 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \Leftrightarrow \quad \frac{2a^2}{1+a^2} > a \\ & \Leftrightarrow \quad 2a^2 > a + a^3 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 > a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a-1)^2 \overset{!}{>} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \Longrightarrow \quad \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \\ \text{si } a < 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \Leftrightarrow \quad \frac{2a^2}{1+a^2} > -a \\ & \overset{!}{\Leftrightarrow} \quad 2a^2 < a + a^3 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a-1)^2 \overset{!}{<} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \Longrightarrow \quad \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \end{cases}$$

Es así que el método de Gauss-Seidel es el más rápido para converger de los tres para la matriz A, porque tiene el menor *radio espectral*.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ir al índice ↑

3. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1,2)^t$.

(a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.

(b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J.
¿Contradice la convergencia del método?

(c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.
Sugerencia: Considerar una base de autovectores de J.

(a) Busco autovalores de J,

Si bien es una matriz chica de 2×2 quiero practicar el método para calcular los autovalores sin calcular la inversa de D. Sea como sea, la *sugerencia del final* dice que voy a terminar calculando J.

Escribiendo a la matriz como $A = L + D + U$ (ver acá el genérico click click), Si quiero los autovalores de la matriz de iteración es $J = -D^{-1}(D+U)$ puedo hacer:

$$J = -D^{-1}(L+U) \text{ tiene autovalor } \lambda \Leftrightarrow \det\big(\lambda D + (L+U)\big) = 0$$

con

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Calculo determinante:

$$\det\big(\lambda D + (L+U)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 64\lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{3}{4} \\ \lambda_2 & = & -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Dado que el radio espectral $\rho(A) = \frac{3}{4} < 1$ el método converge para cualquier valor inicial.

(b) La matriz de iteración de Jacobi:

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{(L+U)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{32} \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{autovectores}} \begin{cases} E_{\lambda_1 = \frac{3}{4}} & = & \langle(1,8)\rangle \\ E_{\lambda_2 = -\frac{3}{4}} & = & \langle(-1,8)\rangle \end{cases}$$

¿¿Hay que usar: $\|A\|_W = \left\|W^{-1}AW\right\|_\infty$??

(c) Si uso esa propiedad falopera de más arriba con los autovectores, me queda $\left\|W^{-1}AW\right\|_\infty = \|D\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$