Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 4

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 19/05/25 @ 00:39

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por última vez:
19/05/25 @ 00:39
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 4

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

-

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -ia & \text{con} \quad v_{\lambda=-ia} = (1, -i) \\ \lambda = ia & \text{con} \quad v_{\lambda=ia} = (1, i) \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) + 2 = 0 \bigstar^1$$

Que lindo ejercicio ☹.

Si hago $x = (a - \lambda)$ entonces $\bigstar^1$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \big((a-\lambda) - 1\big)^2\big((a-\lambda) + 2\big) = 0$$

Por lo tanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 1 & \text{con} \quad E_{\lambda=a-1} = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1\rangle \\ \lambda_2 = a + 2 & \text{con} \quad E_{\lambda=a+2} = \langle(1, 1, 1)\rangle \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

(f) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. Para cada una de la matrices A del ejercicio anterior, sea $f : K^n \to K^n$ la transformación lineal tal que $[f]_{EE} = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $[f]_{EE}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular C_{BE}.

Sea $A \in K^{n\times n}$ criterios para saber si una matriz es diagonalizable:

$$A \text{ es diagonalizable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tiene } n \textit{ autovectores linealmente independientes.}$$

$$A \text{ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.}$$

$$A \text{ es diagonalizable si } \mathrm{mg}(\lambda_i) = \mathrm{ma}(\lambda_i) \text{ para cada } \lambda_i \text{ de } A.$$

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

(a) Hallar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar A.

(c) Dar una fórmula cerrada para F_n.

(a) Quiero una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aF_{n+1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_{n+1} \overset{!}{=} F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistemita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para mostrar lo que sigue, inducción. Quiero mostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso base:

$$p(1) : A^1 \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_1 \\ F_0 + F_1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Es así que la proposición $p(1)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(k) : \underbrace{A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver ahora que la proposición:

$$p(k+1): A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

también lo sea.

$$A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{k}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \overset{\text{HI}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

Tuqui, también resulta ser verdadera.

Es así que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción la proposición $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) *Ecuación característica a polinomio característico:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{característica}]{\text{ecuación}} (A-\lambda I)v_\lambda = 0 \xrightarrow[\text{característico}]{\text{polinomio}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Esa notación se complementa con:

$$\left\{ \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \right.$$

Diagonalizar esta matriz tiene un montón de *droga*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \overset{!}{=} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \overset{!}{=} -\frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$$

No sé si están bien las cuentas, pero, a veces es mejor ni preguntar. *Beware* ⚠.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}$$

(c) Viene por acá esto? CONSULTAR

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. Sea $A \in \mathbb{K}^{nxn}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Demostracion:
Por propiedades del det sabemos que: $det(A) = det(A^t)$
Sabemos que los autovalores λ son los que tienen la siguietne propiedad:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Usando la propiedad del determinante, tenemos que $det(A - \lambda I) = det((A - \lambda I)^t)$

Y, como sabemos que λ es un autovalor de A, $0 = det(A - \lambda I) = det((A - \lambda I)^t)$
Probando así que tienen los mismos autovalores
Falta ejemplo ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ y λ un autovalor de A. Probar que:

(a) Si A es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de A^k, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + \mu I$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$.

(a) Sea A triangular

Voy a usar un lema: *Si A triangular, entonces su determinante es la multiplicacion de su diagonal.*

A demostrarlo!!

Caso base:

Matriz 2x2: (la 1x1 es trivial, no es divertido) $\begin{bmatrix} a & c12 \\ c21 & b \end{bmatrix}$ con c12 = 0 (o excluyente) c21 = 0

Supongamos que c12 = 0, entonces $det(M) = a * b - 0 * c21 \Rightarrow a * b$ cumpliendo asi el caso base El otro caso es analogo

<u>Paso inductivo</u>:

<u>HI</u>: $\forall M \in \mathbb{K}^{nxn} : det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$

Sup $P(n) \to P(n-1)$

Voy a hacerlo en el caso de que sea triangular, en el otro caso queda de la misma forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

Calculo el determinate. Lo voy a hacer desde la ultima columna.

$$det(A) = 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{(n+1)(n+1)} * det(A[:n][:n])$$

Por HI, $det(A[:n][:n]) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
$\Rightarrow det(A) = a_{(n+1)(n+1)} * \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
$\Rightarrow det(A) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}$

Que es lo que se queria probar del lema PD: el caso dodnde es triangular inferior es lo mismo, solo se hace usando la fila y no la columna

Ahora volviendo con la demostracion del ejercicio.

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Por lema, el $det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$

Ta rahh, a_{ii} es autovalor de A

(b) Sup. λ es autovalor de A.

Demostracion por induccion:

CB (k = 1):
$Av = \lambda v$ (es por definicion)

PI:

<u>HI</u>: λ^k autovalor de A^k con v el mismo autovalor de $Av = \lambda v$ o lo mismo $A^k v = \lambda^k v$

Veamos

$$A^{k+1}v = A * A^k v \overset{\text{HI}}{=} A\lambda^k v = \lambda^k Av = \lambda^k \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

Fin

(c) Sea λ autovalor de A con su autovector correspondiente v . Sea μ un numero

Tenemos que: $\Rightarrow Av = \lambda v$ por definicion

Veamos

$(A + \mu I)v = Av + \mu Iv \overset{\text{def}}{=} \lambda v + \mu Iv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$

(d) Sea p un polinomio, λ un autovalor con v autovector asociado de A

Demostracion por induccion en el grado del polinomio:

<u>CB</u> (grado 1): $p = a_1 x + a_0 x^0$

Por la demostracion anterior, sabemos que es verdadero.

PI:

<u>HI</u>: $\forall p / gr(p) = k \wedge p(A)v = p(\lambda)v$

Ahora quiero ver para p con grado k + 1

Veamos

$p = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i * x^i \Rightarrow \alpha_{k+1} x^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i * x^i$

Evaluo en p a A

$p(A) = \alpha_{k+1} A^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i * A^i$

Y veo si v es un autovector de p(A) utilizado $p(\lambda)$

Por HI, la 2da parte de la suma es verdadera, veamos la otra parte

$p(A)v = \alpha_{k+1} A^{k+1} v \overset{\text{Demo 6b) y aAv = a } \lambda \text{ v}}{=} \alpha_{k+1} \lambda^k v$, que es lo mismo que evaluarlo en p a λ

Entonces, como ambas partes son disjuntas y al juntarlas formo a p con grado k + 1, probé que es verdadero esta afirmación

---

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 23.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

a) Probar que A es diagonalizable.

b) Calcular los autovalores de A y determinar r, s y t.

---

a) Es diagonalizable porque estamos en $reales^{3\times 3}$ y hay una base de dimensión 3 de autovectores:

$$B = \{(1,2,0),(2,6,0),(-2,-2,-1)\},$$

son autovectores de A.

b) Los *autovectores*, son vectores que cumplen la *ecuación característica*:

$$A \cdot v_\lambda = \lambda \cdot v_\lambda$$

Es solo cuestión de pedirle a los autovectores del enunciado que cumplan esa ecuación y despejar.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} r & \overset{\star 1}{=} & -2s \\ \lambda & = & 0 \end{cases}$$

Siguiente autovector:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} s & = & 1 \\ \lambda & = & 2 \end{cases} \Longrightarrow r \overset{\star 1}{=} -2$$

Siguiente y último autovector

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} t & = & 6 \\ \lambda & = & 2 \end{cases}$$

Listo hay subespacios para justificar aún más la diagonabilidad de la matriz:

$$E_{\lambda=0} = \langle 1,2,0 \rangle \qquad \text{y} \qquad E_{\lambda=2} = \langle (-2,-2,-1),(2,6,0) \rangle$$

La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética:

$$\text{mg}_A(\lambda = 2) = \text{ma}_A(\lambda = 2) = 2 \qquad \text{y} \qquad \text{mg}_A(\lambda = 0) = \text{ma}_A(\lambda = 0) = 1$$

La matriz en forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

2.

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si A es inversible y diagonalizable, entonces A^{-1} y $A^k - kI_n$ son diagonalizables para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

b) Sea $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Probar que J es una matriz diagonalizable.

ii) Calcular $J^5 - 5I_3$.

---

a) Truquito destacable: $I_n = PP^1$ para luego sacar factor común al calcular $A^k - kI_n$ Por otro lado, la inversibilidad de una matriz diagonalizable asegura que los autovalores son distintos de cero:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| \overset{!}{=} |D| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Las matrices inversibles tienen $\det(A) \neq 0$.

b) i) Se calculan los autovectores y autovalores:

$$E_{\lambda=2} = \{(1,0,1),(-1,1,0)\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda=4} = \{(0,1,1)\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Te debo la inversa por *pajilla*.

ii) Sale combinando lo que se usó hasta ahora.

---

3. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$, para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

(a) Si v es un autovector de A, y A es inversible, entonces v es un autovector de A^{-1}.

(b) Si A y B son diagonalizables, $A + B$ también lo es.

(c) Si A y B son diagonalizables, entonces AB es diagonalizable.

(d) Si A o B es inversible y AB es diagonalizable entonces BA también es diagonalizables.

⚠ Ejercicio de demostraciones. Dependiendo las horas que dormiste la noche anterior esto puede salir enseguida o en horas. La matriz que uso en los contraejemplos suele ser un *caballito de batalla* para estos problemas, guardátela. ⚠

(a) Si v es un autovector y además $\exists\, A^{-1}$ entonces:

$$Av = \lambda v \overset{!}{\Leftrightarrow} A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \overset{!}{\Leftrightarrow} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó verdadera}}$$

(b) Si las matrices son diagonalizables, ¿La suma también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(c) Si las matrices son diagonalizables, ¿El producto también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(d) Alguna de las dos matrices es inversible y AB es diagonalizable, entonces ¿BA es diagonalizable también?

Supongo que $\exists\, A^{-1}$:

$$AB = CDC^{-1} \underset{\leftarrow \times A}{\overset{\rightarrow \times A^{-1}}{\Longleftrightarrow}} A^{-1}ABA = A^{-1}CDC^{-1}A \Leftrightarrow BA = A^{-1}CD(A^{-1}C)^{-1} \overset{P = A^{-1}C}{\Longleftrightarrow} BA = PDP^{-1}$$

La expresión de BA resultó diagonalizable. La demostración con B diagonal es análoga. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó verdadera}}$$