Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 25/08/25 @ 16:52

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:
25/08/25 @ 16:52
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

Espacios Vectoriales: Palabras guías
En un conjunto $A \neq \varnothing$

- *Operación:* $(a * b) = c$. Es una función $*: A \times A \to A$
  i) $*$ es *asociativa* si $(a * b) * c = a * (b * c)\ \ \forall a, b, c \in A$.
  ii) $*$ *tiene elemento neutro* e si $e * a = a * e = a\ \ \forall a \in A$.
  iii) si $*$ *tiene elemento neutro* e todo elemento tiene *inverso* para $*$ si $\ \forall a \in A \quad a * a' = a' * a = e$.
  iv) $*$ es *conmutativa* si $a * b = b * a\ \ \forall a, b \in A$.
- *Grupo:* $(A, *)$ es un grupo si se satisfacen i), ii)y iii). Si además se satisface iv) se tiene un *grupo abeliano o conmutativo.*
- *Anillo:* $(A, +, \cdot)$. Para ser anillo se debe cumplir:
  i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo.
  ii) $\cdot$ es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
  iii) Vale distribuir: $\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$

  Si además de cumplir eso, $\cdot$ es conmutativa $(A, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo.*
- *Cuerpo* $(K, +, \cdot)$*:* Un conjunto K, $+$ y $\cdot$ operaciones de K, es un cuerpo si $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso.
  i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo,
  ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y
  iii) vale la propiedad distributiva de $\cdot$ con respecto a $+$.
- *Acción* $\cdot$*:* es una función $\cdot : A \times B \to B$.
- $K-$*espacio vectorial:* Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en V y sea $\cdot$ una acción de K en V. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un $K-$*espacio vectorial* si se cumplen las siguiente condiciones:
  i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.
  ii) La acción $\cdot$: $K \times V \to V$ satisface:
    a) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w\ \ \forall a \in K;\ \ \forall v, w \in V$.
    b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
    c) $1 \cdot v = v\ \ \forall v \in V$.
    d) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)\ \ \forall a, b \in K;\ \ \forall v \in V$.

  Los elementos de V son *vectores* y los elementos de K se llaman *escalares.* La acción $\cdot$ se llama *producto por escalares.*

  ⚠Dejo de escribir a "$\cdot$" en rojo, porque no hay problema cuando el punto "$\cdot$" actúa sobre un elemento de K y uno de V o entre 2 de K.
- *Subespacios:* Subconjunto de un $K-$ espacio vectorial. Sea V un $K-$espacio vectoria y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y solo si valen las siguientes condiciones:
  i) $0 \in S$
  ii) $v, w \in S \implies v + w \in S$
  iii) $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$.

- *Suma directa de subespacios:* Sea V un $K-$espacio vectorial y sean $S_1, \ldots, S_r$ existen únicos $s_i \in S_i, 1 \leq i \leq r$, tales que $w = s_1 + \ldots + s_r$. En este caso se dice que W es la *suma directa de los subespacios* $S_1, \ldots, S_r$ y se nota:

$$W = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r,$$

equivalentemente

$$W = S_1 + \cdots + S_r \text{ para cada } 1 \leq j \leq r, \text{ vale } S_j \cap (S_1 + S_2 + \cdots + S_j + S_{j+1} + \cdots + S_r) = \{0\}.$$

- *Combinación lineal:*

Sea V un $K-$espacio vectorial, y sea $G = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$. Una *combinación lineal de G* es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

- *Independencia lineal:* Sea V un $K-$espacio vectorial y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V. Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *linealmente independiente* (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \cdot v_\alpha = 0 \implies a_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$$

- *Bases y dimensión:*
  - *Escritura única:* Sea V un $K-$e.v. y $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto l.i. Entonces cualquier $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ si puede escribirse de una manera única como combineta de A.
  - *Definición base:* Sea V un $K-$e.v. . $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto. Se dice que es una *base de V* si:
    - A genera todo V.
    - $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ son l.i.
  - Sea V un $K-$e.v. de dimensión n, la base canónica de E se define como $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ con

$$e_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  - *Dimensión:* Sea V un $K-$e.v. . $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces cualquier otra base B' de V tiene la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es *la dimensión de V*.

- *Espacio columna:* Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \right)$. El espacio columna de A es $col(A) = \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$

- *Espacio fila:* Si $A = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array} \right)$. El espacio fila de A es $fil(A) = \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$

- *Matrices*:
  - *Definición de matriz:*

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / A_{ij} \in K \ \forall i, j \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}.$$

  - *Igualdad de matrices:*

    Dos matrices de la misma dimensión A y A' serán iguales:

$$A = A' \iff A_{ij} = A'_{ij} \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

- *Operaciones de matrices:*
  Suma $A + A'$*, producto de un escalar por una matriz* αA *y producto entre 2 matrices* $A \cdot B$.

$$\begin{array}{rl} (A+A')_{ij} \overset{\text{def}}{=} A_{ij} + A'_{ij} & (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \\ (\alpha A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha A_{ij} & (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \\ C_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} & (1 \le i \le n, 1 \le j \le r). \end{array}$$

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$$A \cdot B = \left(A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \middle| \cdots \middle| A \cdot \begin{pmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{mr} \end{pmatrix} \right)$$

  Una factorización que se puede hacer pensando en esto último, $A = C \cdot R$, donde:
  - C tiene como columnas las columnas *linealmente independientes* de A,
  - R tiene como filas a *combinaciones lineales* de las filas de A, $fil(A) = fil(R)$.
- *Inversa de una matriz:* $A \in K^{n \times n}$ es inversible si $\exists B \in K^{n \times n}$ tal que $A \cdot B = Id$.

1) *Cálculo de determinantes:*

- Dada $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ matriz cuadrada, definimos el determinante como

$$det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) & n > 1 \end{cases}$$

  donde M_{ij} es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j.

- Si $A \in K^{2\times 2} / \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (n \ge 2)$, un ejemplo con $n = 3$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2) *Clasificación de un sistema a partir de su determinante:*

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\mathbf{b}=0]{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = 0$$

- Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} \text{si} \quad |A| \neq 0 \xrightarrow[\text{tengo}]{\text{seguro}} \boxed{\text{S.C.D.}} \to \boxed{\text{UNA SOLA SOLUCIÓN}} \to \boxed{\text{A ES INVERSIBLE}} \\ \text{si} \quad |A| = 0 \xrightarrow[\text{casos}]{\text{dos}} \begin{cases} \text{si} \quad A \cdot \mathbf{x} = 0 \xrightarrow[\text{entonces}]{\text{tengo}} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{si} \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\text{de } \mathbf{b}]{\text{tengo dependiendo}} \begin{cases} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{o} \\ \boxed{\text{S.I.}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

3) *Clasificación de un sistema en general: Teorema de Rouché-Frobenius*

i) Dado un sistema de m ecuaciones y n incognitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ii) Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de coeficientes}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{compacto}]{\text{más}} A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

iii) Para resolver por triangulación:

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}_{\text{matriz ampliada}} \xrightarrow[\text{compacto}]{\text{más}} A^* = (A|\mathbf{b})$$

iv) Para clasificar, primero hay que calcular

$$\text{rg}(A^*) \quad \text{y} \quad \text{rg}(A)$$

Esos rangos se calculan por ejemplo, triangulando las matrices A y A^*
Luego si:

$$\text{rg}(A^*) > \text{rg}(A) \quad \to \quad \text{Sistema incompatible} \to \text{¡No hay solución!}$$

$$\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) \quad \to \quad \begin{cases} \text{rg}(A^*) = n & \to \quad \text{Sistema compatible determinado} \to \text{¡Única solución!} \\ \text{rg}(A^*) < n & \to \quad \text{Sistema Compatible indeterminado} \to \text{¡}\infty \text{ soluciones!} \end{cases}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando `np.lianlg.solve`.

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcl} ix_1 - (1+i)x_2 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = & 2i \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{array}\right.$

(a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5} \cdot F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 & = & -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 & = & \frac{2}{5} \end{array}\right. \begin{array}{c} \overset{\bigstar^2 \text{ y } \bigstar^1}{\Longleftrightarrow} \\ \overset{\bigstar^1}{\Longleftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 \overset{\bigstar^2}{=} -x_4 + 1 \\ x_3 \overset{\bigstar^1}{=} -x_4 + 2 \end{array}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right)$$

paso a sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \overset{\bigstar^2 \text{ y } \bigstar^1}{\Longleftrightarrow} \\ \overset{\bigstar^1}{\Longleftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = -x_3 + 2x_3 + x_3 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 \overset{\bigstar^2}{=} x_3 \\ x_4 \overset{\bigstar^1}{=} -x_3 \end{array}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Como el item anterior, más incógnitas que ecuaciones, asi que no tiene solución única.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como en la ultima ecuación quedó que $0 = -1$, no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \overset{\star 1}{\iff} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 &= 0 \iff x_4 \overset{\star 1}{=} \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de $\times$ y $\div$ por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \xRightarrow{z = a + ib} \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \quad \frac{1}{i}F_1 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 \to F_1 \\ F_3 \to F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 1+i & -1 & i \end{array}\right)$$

$$F_2 + F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 & = & i & \to & x_1 = i + (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 & = & -i & \to & x_3 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1-i)\cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 & = & 0 & \to & x_1 = (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 & = & 0 & \to & x_3 = (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)\cdot x_2 \\ x_2 \\ (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}}$$

(d) Hay más incógnitas que ecuaciones, no va a tener solución unica.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array}\right) \quad 2F_2 + F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 & \to & x_4 \overset{\bigstar^1}{=} 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 & = & 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 - 4 \overset{\bigstar^1}{=} (5+i)x_2 + 11(2 - 2x_1 + (1-i)x_2) - 4 =$$

$$= (5+i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11-11i)x_2 - 4 = (16-10i)x_2 - 22x_1 + 18$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 0 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 0 \quad \to \quad x_4 \overset{\star_1}{=} -2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 & = & 0 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 \overset{\star_1}{=} (5+i)x_2 + 11(-2x_1 + (1-i)x_2) =$$

$$= (5+i)x_2 - 22x_1 + (11-11i)x_2 = (16-10i)x_2 - 22x_1$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \\ -2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz   Tomás A.

Ejercicio 2.

(a) Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

(a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$

$$= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Por lo tanto sé que para que el sistema <u>no tenga solución única</u> debe ocurrir que:

$$\boxed{k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1}$$

Ir al índice ↑

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No hay solución con $k = 1$

Si $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \star^1$$

Habrá infinitas soluciones con $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso $k = -1$:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2 x_3 & = & 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes ($\star^1$) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ -2x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz · Tomás A.

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1), (2,2)$ y $(3,0)$. Verificar el resultado obtenido usando `Python`. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt  # librería para graficar.

# ...
# Acá , crear la matriz y resolver el sistema para calcularl a , b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100)  # genera100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c  # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} a & = & -\frac{3}{2} \\ b & = & \frac{11}{2} \\ c & = & -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3}$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100)  # genera100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0;\ x-y=0\right\}$

(b) $\left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\right\}$

(c) $\left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(\boldsymbol{A}) = 0\right\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\right\}$

(a) Para encontrar un sistema de generadores se resuelven las ecuaciones que definen a los espacios:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \langle 1,1,2\rangle$$

Por lo tanto un sistema de generadores del subespacio es:

$$\boxed{\langle 1,1,2\rangle}$$

(b) Describo a $\boldsymbol{A}$ y a $-\boldsymbol{A}^t$ como :

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \leq i,j \leq 3\} \quad \text{y} \quad -\boldsymbol{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \leq i,j \leq 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientas que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \left\{\begin{array}{rcl} 0 & \text{si} & i=j \\ -a_{ji} & \text{si} & i \neq j \end{array}\right.$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

(c) Veo que $tr(A)$ es la función que suma los elementos de la diagonal principal de una matriz.

La matriz expandida es de la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces, la restricción que me impone este subespacio es:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

Despejando de la ecuación nos queda:

$$A_{11} = -A_{22} - A_{33}$$

Que de forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} -A_{22}-A_{33} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{22}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{33}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A_{12}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{13}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ A_{21}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{23}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{31}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{32}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada coeficiente que quedó libre es un generador:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cualquier combinación lineal de esas matrices satisface que su traza sea cero.

(d) Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 & = & 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{F_2 - iF_1 \to F_2} \begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -x_2 + ix_4 \\ x_2 & = & x_3 + x_4 \end{cases}$$

Acomodando eso el sistema de generadores del subespacio:

$$\boxed{\langle (-1,1,1,0), (-1+i,1,0,1) \rangle}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz   Iñaki Frutos

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1)) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

(b) Determinar si $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,/ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,/ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$.

Antes de arrancar, siempre conviene verificar que los elementos de S sean *linealmente independientes*. Cuando nos dan un subespacio expresado en sus generadores, conviene eliminar la información que sobra. Una forma de hacer esto es poner a los *generadores* de S como filas de una matriz y triangular. Al triangular lo que se está haciendo son operaciones lineales para ver si estos coinciden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Sobra un elemento. Puedo eliminar cualquiera de los 3 siempre y cuando los restantes sean *linealmente independientes*. Reescribo al subespacio como:

$$S = \{(1,-1,2,1), (1,1,-1,-1)\}$$

Lo cual es una base de S.

(a) Para ver si $(2,1,3,5) \in S$ hay que realizar una combinación lineal de los elementos del subespacio S igualada al vector en cuestión.

$$(2,1,3,4) = a \cdot (1,-1,2,1) + b \cdot (1,1,-1,-1) \overset{!}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eso es un absurdo, dado que $a \cdot 0 + b \cdot 0 \neq 7 \;\; \forall a, b \in \mathbb{R}$ ☹. Es así que:

$$\boxed{(2,1,3,4) \notin S}$$

(b) Primero bautizo a ese subespacio como T:

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \, / x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

A mí me gusta atacar estos problemas primero viendo las *dimensiones* de cada subespacio. Si T es un subespacio que vive en $\mathbb{R}^4$, y además está dado por comprensión con <u>una sola ecuación</u>, entonces $\dim(T) = 3$ y como $\dim(S) = 2$ sé que:

$$\boxed{T \not\subseteq S}$$

Si no lo ves directamente, siempre podés calcular los generadores de T a partir de la ecuación, y vas a obtener algo así:

$$T = \langle (1,0,1,0), (1,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$$

(c) Este está medio regalado también, porque hay uno de los generadores de S que no cumple la ecuación de T, así que ya puedo concluir que:

$$\boxed{S \not\subseteq T}$$

Si no te parece que sea tan evidente, el procedimiento es armar una *combinación lineal* de los elementos de S y meter eso en la ecuación de T. Ese es el método para buscar $S \cap T$. Si esa intersección te da que $\dim(S \cap T) = 2$ entonces todo S debería estar en T. Pero bueh, hacé las cuentas y te va a dar que $\dim(S \cap T) = 1$.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`♉ naD GarRaz`

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0,\; x - y = 0\}$ y $T = \langle (1,1,0),\; (5,7,3) \rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle$ y $T = \langle (1,1,0),\; (3,2,1) \rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \;\; \forall i,j\}$ y $T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle$ y $T = \left\{ (x \in \mathbb{C}^3) : (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

(a) Si los subespacios tienen intersección es una buena idea calcularla para armar el subespacio suma. Busco $S \cap T$, para eso pido que (x,y,z) cumpla ambas ecuaciónes de los subespacios:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + z & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} y = -z \\ x = -z \end{array} \right. \xRightarrow[(x,y,z)]{\text{meto en}} (x,y,z) = (-z,-z,z) = z \cdot (-1,-1,1)$$

Obteniendo así una base de la intersección:

$$S \cap T = \{(-1, -1, 1)\}$$

La intersección está generada por un solo vector así que $\dim(S \cap T) = 1$ por lo tanto usando el teorema de la dimensión para la suma de subespacios:

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Es así que:

$$\boxed{S + T = \mathbb{R}^3 \implies B_{S+T} = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}}.$$

Peeeeero suponete que querés hacerlo de formás más mecánica, lo que podrías hacer es armar la base con algo de info:

Sé que:

$$\dim(S) = 2, \ \dim(T) = 2$$

Por lo tanto para encontrar una base *linda* de $S+T$, tengo que encontrar un conjunto de generadores, *linealmente independientes* que tenga adentro a todo S y a todo T. Saco un sistema de generadores de S y uno de T:

$$S = \langle (1,0,-3); (0,1,2) \rangle \quad \text{y} \quad T = \langle (-1,0,1); (0,1,0) \rangle$$

Un sistema de generadores de $S+T = \langle (1,0,-3); (0,1,2); (-1,0,1); (0,1,0) \rangle$. Esto no es una base, porque tiene seguro algún vector l.d. con el resto. Entonces puedo sacar ese vector y ver si el resto son l.i.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ F_3 + F_1 \to F_3 \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ F_4 - F_2 \to F_4 \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Listo me quedo con los 3 vectores que sobrevivieron a la triangulación. Una base de $S+T$:

$$\boxed{S + T = \{(1,0,-3), (0,1,2), (0,0,-2)\}}$$

A mí me gusta usar una base que tenga la info de la intersección y saber a qué subespacio pertenece cada vector, porque me da más control en caso de tener que hacer algo luego con esa base. Onda, mirá el $(0,0,-2)$ de la base anterior, ese vector no está ni en S ni en T! Da un poco de miedito, no 💩?

Por eso me armo una base con un vector de S y uno de T sacados a ojo y también uso la intersección $(-1,-1,1)$ que ya se calculó antes. Esto va a ser un subespacio de $S+T$, porque tiene a todo S y a todo T:

$$\boxed{S + T = \{\overset{\in S}{\overset{\uparrow}{(1,0,-3)}}, \overset{\in S}{\overset{\uparrow}{\underset{\in T}{\underset{\downarrow}{(1,1,-1)}}}}, \underset{\in T}{\underset{\downarrow}{(1,0,-1)}}\}}$$

Son *linealmente independientes*, sí. De no haberlo sido elegía otro vector hasta que alguno dé. Comprobalo con este código:

🐧 Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien 🐧

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[1,0,-3],[1,1,-1],[1,0,-1]])
b = [0, 0, 0]
```

```
# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
x, y, z = np.linalg.solve(A, b)

print(f"x = {x}\ny = {y}\nz = {z}")
```

Los subespacios no están en suma directa.

(b) Se puede ver a ojo que $\dim(S) = 1$ y que $\dim T = 2$ es decir que podrían estar en suma directa, porque podría no haber intersección. Voy a intentar calcularla. Me armo un elemento genérico de T y veo si cumple las ecuaciones de S:

$$t_g = a \cdot (1,1,0) + b \cdot (5,7,3) = (a+5b, a+7b, 3b) \to \begin{cases} 3 \cdot (a+5b) - 2 \cdot (a+7b) + 3b = 0 \overset{\star^1}{\iff} a = 0 \\ (a+5b) - (a+7b) = 0 \Leftrightarrow b \overset{\star^1}{=} 0 \end{cases}$$

Ese resultado me dice que la intersección es el 0 o dicho de otra manera no tienen intersección:

$$\boxed{B_{S \oplus T} = \mathbb{R}^3}$$

Los subespacios S y T están en suma directa.

(c) Lo primero que odio cuando veo este ejercicio es que tengo que ver si S tiene generadores *linealmente dependientes* y lo segundo que odio es que voy a tener que pasar a ecuaciones algo, para que sea fácil de calcular la intersección:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 6F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{estos generadores}]{\text{me quedo con}} S = \{(1,1,3); (0,1,1)\}$$

Sé que seguro va a haber una intersección entre S y T, porque hay 4 vectores y estoy laburando en $\mathbb{R}^3$. Busco las ecuaciones que generan a S:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{array}\right) \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right) F_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Para que ese sistema sea compatible necesito que:

$$x_3 - x_2 - 2x_1 = 0 \implies S = \left\{(x_1, x_2, x_3)/x_3 - x_2 - 2x_1 \overset{\star^1}{=} 0\right\}$$

Listo, ahora es cuestión de hacer como en el item anterior, agarro un genérico de T y lo meto en la ecuación de S:

$$t_g \overset{\star^2}{=} (a+3b, a+2b, b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} \left\{ b - (a+2b) - 2(a+3b) = 0 \Leftrightarrow a = -\tfrac{8}{3}b \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} t_g = b \cdot (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1) \right.$$

Ese vector t_g, es un vector de T que también cumple la ecuación de S por lo tanto también está en S:

$$B_{S \cap T} \overset{!}{=} \{1, -2, 3\}$$

Los subespacios no están en suma directa. Y $S + T \overset{!}{=} \mathbb{R}^3$.

(d) S es un subespacios describiendo matrices *simétricas*, es decir que $A = A^T$ y T el subespacio que cumpla que $t_{11} = -t_{12} - t_{13}$. Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{12}+t_{13}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{12}+x_{13}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T. El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$\boxed{S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo $\mathbb{R}^{3\times 3}$ a ver que onda la dimensión:

$$\boxed{\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9 \qquad \Longrightarrow \qquad S + T = \mathbb{R}^{3\times 3}}$$

No están en suma directa y la suma es todo el espacio de matrices de 3×3

(e) Armo un vector genético de S para meter en ecuaciones de T:

$$s_g = a \cdot (i, 1, 3-i) + b \cdot (4, 1-i, 0) \xrightarrow{\text{reemplazo}} \begin{array}{rcl} (1-i)(4b+ia) - 4(a+b) + 3a - ia & = & 0 \\ b - i4b & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto con $b = 0$ la intersección queda:

$$B_{S \cap T} = \{(i, 1, 3-i)\}$$

Usando el teorema de la dimensión para suma de subespacios:

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Los espacios no están en suma directa y $S + T = \mathbb{C}^3$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \big\langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\big\rangle$.

(b) $S \cap T = \langle(0, 1, 1)\rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1, k, 2), (-1, 2, k)\rangle$.

(a) Hay una igualdad de subespacios. Para que estos sean iguales tienen que tener la misma dimensión. Dado que el subespacio

$$\dim(\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle) = 2,$$

quiero que el subespacio de la derecha también tenga dimensión 2, peeero tiene 3 vectores, así que busco k para que:

$$\dim(\big\langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\big\rangle) = 2$$

también. Dicho de otra manera, quiero que esos 3 vectores sean *linealmente dependientes*:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{F_2+F_3\to F_3}{} \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{vmatrix} = (-1)^6\cdot(k^2+k-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{!}{=} (k^2+k-2)\cdot(-1+k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k\in\{-2,1\}$$

Ahora sé que la única forma de que la dimensión sea 2 es para los k hallados.

¿Cómo queda el enunciado con los valores de k hallados?:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle \overset{?}{=} \begin{cases} \text{si} \quad k=-2 \quad \to \quad \langle(1,-2,-4),(-1,-1,2),(1,1,-2)\rangle \overset{!}{=} \langle(1,-2,-4),(1,1,-2)\rangle \\ \text{si} \quad k=1 \quad \to \quad \langle(1,1,2),(-1,-1,-1),(1,1,1)\rangle \overset{!}{=} \langle(1,1,2),(1,1,1)\rangle \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver *si se intersectan en todos sus elementos*. Voy a buscar la expresión por comprensión de $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle$, es decir la fórmula que deben satisfacer los elementos para pertenecer al subespacio:

$$a\cdot(-2,1,6)+b\cdot(3,0,-8)=(x_1,x_2,x_3)$$

Ese sistema es literalmente: ¿Cómo combino los elementos para formar algo del subespacio?, es un sistema que debe ser compatible, porque seguro que *algo* tiene que salir de hacer una combinación lineal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+2F_1\to F_2 \\ F_3-6F_1\to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1+2x_2 \\ 0 & -8 & x_3-6x_2 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}F_2\to F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3-6x_2 \end{array}\right)$$

$$F_3+8F_2\to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+x_3 \end{array}\right)$$

Como dije antes, este sistema debe ser compatible, no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es $\varnothing$. Debe cumplir:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle \overset{!}{=} \left\{x\in\mathbb{R}^3 : 8x_1-2x_2+3x_3=0\right\} \star^1$$

Encontrar la intersección ahora con la ecuación del subespacio es fácil. Se arma un genérico y se mete en la ecuación:

Caso con $k=-2$:

$$(a+b,-2a+b,-4a-2b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a+b)-2(-2a+b)+3(-4a-2b)=0 \;\; \forall a \text{ y } b\in\mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con $k=-2$

Caso con $k=1$:

$$(a+b,a+b,2a+b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a+b)-2(a+b)+3(2a+b)=0 \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluímos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$\boxed{k=-2}$$

(b)

$$a \cdot (1, k, 2) + b \cdot (-1, 2, k) = (a - b, ak + 2b, 2a + bk) = (0, 1, 1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{array}\right)$$

Para que el $(0, 1, 1) \in T$ ese sistema tiene que tener solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - kF_1 \xrightarrow{k \neq 0} F_2 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & k+2 & 1 \end{array}\right) F_3 - F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Este sistema será compatible con $k \neq -2$. No me quiero olvidar del caso $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 - 2F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) F_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces con $k = 0$ también es compatible, así que acá no pasó nada. Con $k = -2 \implies (0, 1, 1) \notin T$.

Corroboro ahora que haya intersección entre S y T. Hago un genérico de T:

$$a \cdot (1, k, 2) + b \cdot (-1, 2, k) = (a - b, ak + 2b, 2a + bk)$$

y lo reemplazo en ecuación de S:

$$a - b + ak + 2b - 2a - bk = 0 \Leftrightarrow -a + b + ak - bk = 0 \Leftrightarrow (-a + b)(1 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{o} \\ k = 1 \end{cases}$$

Si $k = 1$ no tengo condiciones sobre a y b es decir que la dimensión de la intersección sería todo T, eso es algo malo, porque la dimensión debe ser 1.

Cuando es $a = b$ no me importa el valor de k, pero no olvidar ★[1]. Entonces, si quiero que $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ necesito:

$$\boxed{k \notin \{-2; 1\}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Si bien la tentación de pensar que

$$S \cup T = S + T,$$

eso no es en general así.

$S + T$ es el subespacio que tiene a todos los elementos de la pinta $s_i + t_j$.

$S \cup T$ es un conjunto con los elementos de S y los elementos de T, no necesariamente está ahí el elemento $s_i + t_j$.

Lo que si sabés es que:

$$S \cup T \subseteq S + T$$

Intuitivamente lo que este ejercicio sugiere, es que para que $S \cup T$ sea un subespacio, S no debería aportarle nada nuevo a T y viceversa, para que al sumar 2 elementos de $S \cup T$, eso seguro caiga dentro dentro del mismo conjunto, porque estarías sumando dos elementos de S o dos de T. Ponele.

Para probar la *doble implicación*, pruebo la ida y la vuelta. Arranco por la que parece más fácil:

($\Leftarrow$) Esta sale más directa.

Si:

$$S \subseteq T \implies S \cup T = T$$
$$\text{o}$$
$$T \subseteq S \implies S \cup T = S$$

La explicación es análoga para las dos implicaciones. En el caso $S \subseteq T$, los elementos de S no van a aportar nueva información al subespacio. Si T es un subespacio por hipótesis de enunciado y $S \cup T = T$, listo.

($\Rightarrow$) Está es medio chino:

Vamos por el absurdo, en vez de laburar con $p \implies q$, laburo con $p \implies \sim q$ llegando a una contradicción.

Supongamos que:

$$T \not\subseteq S \text{ y que } S \not\subseteq T \implies \exists\, s_1, t_1 \text{ tal que } \bigstar^1 \begin{cases} s_1 \in S & \text{y} \quad s_1 \notin T \\ t_1 \in T & \text{y} \quad t_1 \notin S \end{cases}$$

¡Por hipótesis $S \cup T$ es un subespacio! Por lo que:

$$\begin{cases} s_1 \in S \xrightarrow[\text{subespacio}]{S \cup T \text{ es}} s_1 \in S \cup T \\ t_1 \in T \xrightarrow[\text{subespacio}]{S \cup T \text{ es}} t_1 \in S \cup T \end{cases} \implies \underbrace{s_1 + t_1 \in S \cup T}_{\substack{\text{esto no tiene} \\ \text{nada que ver} \\ \text{con } S+T}},$$

El subespacio $S \cup T$ tiene elementos que pertenecen a T o elementos que pertenecen a S, de forma tal que que sumar 2 elementos cualesquiera también están en $S \cup T$, en *particular* esos de $\bigstar^1$:

$$\underbrace{s_1 + t_1}_{\in S \cup T} \overset{\bigstar^2}{\in} S \ \vee \ \underbrace{s_1 + t_1}_{\in S \cup T} \overset{\bigstar^3}{\in} T$$

En el caso $\bigstar^2$ tengo:

Dado que S es un subespacio, si $s_1 \in S$, entonces también $-s_1 \in S$, y nuevamente la suma de 2 elementos cualesquiera de S también estarán en S:

$$\overbrace{s_1 + t_1 + (-s_1)}^{\in S \cup T} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{def. subespacio}}}{\in} S \iff t_1 \in S$$

Contradiciendo lo que se supuso en $\bigstar^1$, donde $t_1 \in T$, pero $t_1 \notin S$. Llegar a la contradicción de que $s_1 \in T$ es análoga.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Fede Mancilla · Iñaki Frutos · naD GarRaz

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, 1), (0, 2, 1, -5)\} \in \mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \in \mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

Acá las definiciones de combinación lineal y coso (← click)

(a)

$$a \cdot (1,4,-1,3) + b \cdot (2,1,-3,1) + c \cdot (0,2,1,-5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{triangulando}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}}$$

Los vectores son *linealmente independientes*.

(b) Ahora los coeficientes α y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha \cdot (1-i, i) + \beta \cdot (2, -1+i) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & -1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{1-i} \cdot F_1 \to F_1 \; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ i & -1+i & 0 \end{array}\right) \; F_2 - i \cdot F_1 \to F_2 \; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\{ \; \alpha = (1+i)\beta}$$

Y estos bichos <u>no</u> serían *linealmente independientes*.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S. Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1,1,2); (1,3,5); (1,1,4), (5,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{C}$

(a) Demasiados vectores en ese sistema de generadores, voy a quedarme solo con los *linealmente independientes*, así obteniendo una base del subespacio S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - 5F_1 \to F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \; F_4 + 2F_2 \to F_4 \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que una posible base para S:

$$\boxed{B_S = \{(1,1,2); (0,2,3); (0,0,2)\}}$$

La base genera todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Ataco parecido, pero voy a desarrollar mejor la forma de triangular, porque a veces acá uno puedo entrar en la rosca de como *estirar la matrices* para luego triangular. Planteo una combineta:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & a+d+ib+ic \\ a+b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso a sistema de ecuaciones y triangulo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+d & = & 0 \\ a+d+ib+ic & = & 0 \\ a+b & = & 0 \\ a+b & = & 0 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$iF_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -d \\ b & = & d \\ c & = & -d \end{array}\right.$$

En el sistema me queda solo una variable libre. Necesito 3 matrices para formarla. También veo que me quedaron 3 *filas no nulas* es decir que el *rango fila* es 3, por lo que el *rango columna* también es 3 y las columnas en esa matriz sería como haber puesto a las matrices *(estiradas)* y al triangular, eliminar una así oppppteniendo 3 matrices l.i..

Agarro ahora 3 matrices *linealmente independientes*:

Me quedo entonces con la base para S:

$$\boxed{B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

La dimensión de $S = 3$ y $\mathbb{C}^{2\times 2}$ con $K = \mathbb{C}$ tiene dimensión 4, así que necesito un elemento *linealmente independiente* para extender la base:

Si no se encuentra a ojo, una forma mecánica para encontrar la matriz es poner a las matrices de las bases en filas, triangular y ver ahí una que quede *linealmente independiente*.

$$\boxed{B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Nota que podría ser de interés:
Si estoy laburando en un espacio tipo $\mathbb{C}^2$ hay que prestarle mucha atención al cuerpo K, porque mirá las bases de este espacio según el cuerpo:

$$\begin{array}{lcl} K = \mathbb{C} & \to & B_{\mathbb{C}^2} = \{(1,0);(0,1)\} \\ K = \mathbb{R} & \to & B_{\mathbb{C}^2} = \{(1,0);(0,1);(i,0);(0,i)\} \end{array}$$

Onda en uno la dimensión es 2 y en el otro 4.
Fin Nota que podría ser de interés.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Fede Mancilla`

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Es un *si solo si* así que sale doble implicación:

($\Leftarrow$) Para este lado sale un poco más fácil, por eso arranco por acá.

Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \le i \le k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Es inmediato ver que en este caso a pesar de que los coeficientes z_i, valen todos 0, es decir que particularmente son reales también! Puedo tomar $r_i = z_i$ y listo, tengo la combinación lineal igualada a cero y todos los coeficientes son reales y nulos.

($\Rightarrow$) Este es un poco más picante, porque no es *obvio* que deba ocurrir ¿O no lo es para mí?: Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot v_i \overset{\star^1}{=} 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \cdot v_i = 0 \;\star^2 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Laburo un poco $\star^2$:

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \cdot v_i = z_1 \cdot v_1 + \dots + z_k \cdot v_k = 0$$
$$\overset{!!}{\underset{z_j = a_j + ib_j}{\Longleftrightarrow}}$$
$$(a_1 + ib_1) \cdot v_1 + \dots + (a_k + ib_k) \cdot v_k = 0$$
$$\overset{!!}{\underset{v_j \in \mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}}$$
$$\underbrace{(a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k)}_{\star^3} + i\underbrace{(b_1 \cdot v_1 + \dots + b_k \cdot v_k)}_{\star^4} = 0 + i0$$

Para que esa igualdad se cumpla debe ocurrir que las combinetas en $\star^3$ y $\star^4$ sean 0. Para que esas combinaciones sean 0 sí o sí los coeficientes a_i y b_i deben ser todos nulos porque son reales y los v_i son *linealmente independientes* sobre $\mathbb{R}\,\star^1$. Y como

$$z_i = \underset{=0}{\underset{\downarrow}{a_i}} + i\underset{=0}{\underset{\downarrow}{b_i}} \implies \sum_{i=1}^{k} \underset{=0}{\underset{\downarrow}{z_i}} \cdot v_i = 0 \implies \{1, \dots, v_k\} \text{ son } \textit{linealmente independientes} \text{ sobre } \mathbb{C}.$$

Nota que puede ser de interés:

Mirá que ese último !! es porque los $v_j \in \mathbb{R}$, porque si estuvieran en $\mathbb{C}$, por ejemplo:

$$\{(i, 1), (1, -i)\}$$

Esos $v_j \in \mathbb{C}$ si laburás con $K = \mathbb{R}$ son MEGA *linealmente independientes*, peeeero si $K = \mathbb{C}$:

$$i \cdot (i, 1) + 1 \cdot (1, -i) = 0$$

todo lo contrario. Solo se llega a las expresiones $\star^3$ y $\star^4$ gracias a que $v_j \in \mathbb{R}^n$.

Fin de Nota que puede ser de interés:

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $A \in K^{m\times n}$ satisface que $Ax = 0\ \ \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m\times n}$ satisfacen que $Ax = Bx\ \ \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

(b) Probar que si $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna $j-$ésima de B, entonces $AB = (AB_1|\cdots|AB_r)$ (es decir, AB_j es la columna $j-$ésima de AB).

(a) Tengo $A \in K^{n\times n}$ entonces Ax:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

Probando particularmente con la base canónica de K^n $x \in K^n$ con $x \in B$, donde

$$B = \{(1,0,\dots,0); (0,1,\dots,0); \dots; (0,\dots,1)\}$$

muestro así que las columnas de A son siempre nulas.

Usando el resultado de recién:

$$Ax = Bx \iff (A - B)x = 0 \iff Cx = 0$$

Dado que $Cx = 0\ \ \forall x \in K^n$ se muestra que $A = B$.

(b) Puedo escribir a los elementos de producto de una matriz $A^{m\times n}$ por otra $B^{n\times r}$ como:

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\ \ \forall i, j \text{ con } 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le r$$

Si fijo $j = 1$

$$[AB]_{i1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{k1}\ \ \forall i \text{ con } 1 \le i \le m$$

Obtengo así el elemento del producto de la $i-$ésima fila de A por columna 1 de B. Haciendo para todos los valores de i obtengo:

$$AB_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{mk}B_{k1} \end{pmatrix}}_{\in K^{m\times 1}}$$

Hacer eso para $1 \le j \le r$ da:

$$AB = (AB_1|\cdots|AB_r)$$

o eso espero ☹, como querías mostrar.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 14. Sean las siguiente matrices de 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto $AB = C$ en bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $C = AB$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

(a) $A_{11} = [a_{11}]$, $A_{12} = [a_{12}\ a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12}\ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(b) $A_{11} = [a_{11}a_{12}]$, $A_{12} = [a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12}\ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $A_{21} = [a_{31}]$, $A_{22} = [a_{32}\ a_{33}]$

$B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12}\ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

¡¿Que interesante, no?!, peero: *¿Qué es esta verga?*. A esta altura ya está clarísimo que para poder multiplicar dos matrices, se tiene que cumplir que *la cantidad de columnas del primer factor sea igual a la cantidad de filas del segundo*:

$$M \cdot M' \text{ se puede hacer si } M \in K^{n \times m} \quad \text{y} \quad M' \in K^{m \times l}$$

Hay que prestar atención a eso y después hacer el producto y suma en bloques, es un *parecido pero distinto*.

(a)

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Multiplico $A \cdot B$ en bloques:

🖩1) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = [\,1\,] \cdot [1] + \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 = C_{11} \in K^{1 \times 1}$$

🖩2) Busco el bloque C_{12} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😊:

$$A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = [\,1\,] \cdot [1\ 1] + \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = C_{12} \in K^{1 \times 2}$$

🖩3) Busco el bloque C_{21} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😳:

$$A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\,1\,] + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{2 \times 1}$$

4) Busco el bloque C_{22} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😳:

$$A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2\times 2}$$

Si todavía no te volaste la tapa de los sesos esto queda así:

$$\boxed{A\cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ \hline 7 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right)}$$

Sí, multiplicar en bloques dio lo mismo que multiplicar como siempre. ¿Es magia? NO, es *matemagia*.

(b)

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\ B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Multiplico $A\cdot B$ en bloques:

1) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \to \text{Se pudrió todo}$$

No me *matchean* las dimensiones como para poder multiplicar.

(c)

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\ B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Multiplico $A\cdot B$ en bloques:

1) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = C_{11} \in K^{2\times 1}$$

2) Busco el bloque C_{12} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😳:

$$A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = C_{12} \in K^{2\times 2}$$

3) Busco el bloque C_{21} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😳:

$$A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{1\times 1}$$

4) Busco el bloque C_{22} ¿Se podrá hacer el cálculo? 😳:

$$A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2\times 2}$$

Esto queda así:

$$\boxed{A\cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array}\right)}$$

¿Hay más particiones que funcionarían? Creo que la cosa es que:

> Se multiplican siempre bloques de la pinta $A_{ij} \cdot B_{jk}$. Necesito entonces que los bloques que forman la *columna bloque* j-ésima tengan igual cantidad de columnas como filas los bloques que forman la *fila bloque* j-ésima.

Si, no se entendió nada, eso. Ya vendrá alguien y lo escribirá mejor. Ejemplo:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \to \text{No se puede}$$

No va a poderse multiplicar, porque la columa 1 de bloques azules, son bloques con 2 columnas, mientras que la fila 1 de bloques magenta tiene solo 1 fila por bloque.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \to \text{Se puede} \checkmark$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \to \text{Se puede} \checkmark$$

me aburrí

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 15. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0);(0,1,1);(1,0,1)\}$ y $B' = \{(-1,1,1);(2,0,1);(1,-1,3)\}$

(a) Calcular $[(1,1,0)]_B$ y $[(1,1,0)]'_B$.

(b) Calcular la matiz de cambio de base $C(B,B')$.

(c) Comprobar que $C(B,B')[(1,1,0)]_B = [(1,1,0)]_{B'}$.

(a) Para calcular las coordenadas en una base B:

$$(1,1,0) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \xLeftrightarrow{\text{a ojímetro}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies \boxed{[(1,1,0)]_B = (1,0,0)}$$

En la base B' voy a tener que hacer más cuentas:

$$(1,1,0) = a(-1,1,1) + b(2,0,1) + c(1,-1,3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & 1 \\ c & = & -\frac{1}{2} \end{cases} \implies \boxed{[(1,1,0)]_{B'} = (\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2})}$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1,2,1],[1,0,-1],[1,1,3]])
```

```
b = [1, 1, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

print(f"a = {a}\nb = {b}\nc = {c}")
```

(b) Quiero la matriz que tiene por columnas a las coordenas de los generadores de B en la base B':

$$C(B,B') = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} (1,1,0) &= a_1(-1,1,1) + b_1(2,0,1) + c_1(1,-1,3) \\ (0,1,1) &= a_2(-1,1,1) + b_2(2,0,1) + c_2(1,-1,3) \\ (1,0,1) &= a_3(-1,1,1) + b_3(2,0,1) + c_3(1,-1,3) \end{cases}$$

Paso ese sistema feo a forma matricial para resolverlo triangulando:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1,b_1,c_1) &= (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \\ (a_2,b_2,c_2) &= (\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) \\ (a_3,b_3,c_3) &= (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}) \end{cases}$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1,2,1],[1,0,-1],[1,1,3]])
b = [1, 1, 0]

a1, b1, c1 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a1 = {a1}\nb1 = {b1}\nc1 = {c1}\n")

b = [0, 1, 1]
a2, b2, c2 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a2 = {a2}\nb2 = {b2}\nc2 = {c2}\n")

b = [1, 0, 1]
a3, b3, c3 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a3 = {a3}\nb3 = {b3}\nc3 = {c3}\n")
```

Finalmente la matriz $C(B,B')$:

$$\boxed{C(B,B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$

(c) Lo que hay que hacer es :

$$C(B,B') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Da eso.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 16. Sean $A, A' \in K^{m\times n}; B \in K^{n\times r}; D, D' \in K^{n\times n}; \alpha \in K$. Probar:

(a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

(b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(c) $(AB)^t = B^t A^t$

(d) AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

(e) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

(f) $tr(\alpha D) = \alpha tr(D)$

(g) $tr(DD') = tr(D'D)$

Voy a usar operaciones de matrices (← click):

Mucha antención a los índices de las matrices que de eso trata este ejercicio básicamente.

(a) Quiero probar que $(A + A')^t = A^t + (A')^t$. Un elemento de la suma:

$$[(A + A')^t]_{ij} = [A + A']_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ji} + A'_{ji} = A^t_{ij} + (A')^t_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que $\boxed{(A + A')^t = A^t + (A')^t}$.

(b) Tengo ahora un producto de un escalar por una matriz:

$$[(\alpha \cdot A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha A^t_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que $\boxed{(\alpha A)^t = \alpha A^t}$.

(c) Tengo ahora un producto matricial $(AB)^t = B^t A^t$

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} B^t_{ik} A^t_{kj} = [B^t A^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$$

Entonces queda mostrado que $\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$.

(d) Uso el truco de la multiplicación y transposición como antes:

$$[AA^t]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A^t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A^t_{kj} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} A^t_{ki} = [AA^t]_{ji} = [(AA^t)^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Así queda que el producto de una matriz por su transpuesta $(A \cdot A^t)$ es igual a su transpuesta $(A \cdot A^t)^t$, por lo tanto es simétrica.

Sería lo mismo mostrarlo para para $A^t A$. No tengo ganas de escribirlo.

Entonces queda mostrado que $\boxed{AA^t \text{ y } A^t A \text{ son matrices simétricas}}$.

(e) Quiero mostrar que: $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$. La traza la calculo sumando los elementos diagonales de la matriz:

$$tr(D + D') = \sum_{k=1}^{n} D_{kk} + D'_{kk} = \sum_{k=1}^{n} D_{kk} + \sum_{k=1}^{n} D'_{kk} = tr(D) + tr(D')$$

(f) Quiero mostrar que: $tr(\alpha D) = \alpha tr(D)$.

$$tr(\alpha D) = \sum_{k=1}^{n} \alpha D_{kk} = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} D_{kk} = \alpha \cdot tr(D)$$

(g) Quiero mostrar que: $tr(DD') = tr(D'D)$. Parecido a lo hecho antes:

$$\begin{aligned} tr(DD') = \sum_{k=1}^{n} [DD']_{kk} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} D_{kl}D'_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} D'_{lk}D_{kl} \\ &\overset{!}{=} \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D'_{lk}D_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^{n} [D'D]_{ll} = tr(D'D) \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 17. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$ como $\mathbb{R}$ −espacio vectorial:

(a) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es triangular inferior}\}$ (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\}$

(a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18. Calcular el determinante de A en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Acomodo un poco para ver si hago menos cuentas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_3 + F_1 \to F_3 \\ 2F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_4 + F_3 \to F_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora calculo el determinante, multiplicando los elementos de la diagonal porque es triangular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 5 = \boxed{-10}$$

(b) Ataco igual que antes:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} iF_2 + F_1 \to F_2 \\ iF_3 - 2F_1 \to F_3 \end{array} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 0 & 1+i & 2+i \\ 0 & 0 & -4-3i \end{pmatrix}$$

Ahora calculo el determinante, multiplicando los elementos de la diagonal porque es triangular:

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 2+i \\ 0 & 1+i & 2+i \\ 0 & 0 & -4-3i \end{vmatrix} = i \cdot (1+i) \cdot (-4-3i) = 7-i$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

(a) La hipótesis es que A es inversible, es decir que $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cdot I + 0 & AA^{-1}B + 0 \\ C \cdot I + 0 & CA^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(b) Quiero ver que

$$\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

por propiedad de determinantes:

$$\det(AD - ACA^{-1}B) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Por el apunte de bloques:

Si la matriz tiene una estructura de la forma:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C)$$

También se cumple que:

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Veamos si puedo armar la expresion que quiero partiendo del determinante de M usando las propiedades. Escribo a M usando la factorizacion del punto a:

$$\det(M) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}\right)$$

Aplicando la propiedad de determinantes:

$$= \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Usando la propiedad antes mencionada:

$$= \det(AI) \cdot \det(I(D - CA^{-1}B)) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

Que es lo que queríamos demostrar.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Juan D Elia`

Ejercicio 21. Escribir funciones de `Python Python` que realicen las siguientes operaciones:

(a) Calcular la traza de una matriz.

(b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.

(c) Determinar si la sumatoria de elementos positivos es mayor que la sumatoria (en módulo) de los elementos negativos de una matriz.

(a) Sea $A \in K^{n \times n}$. Se llama *traza* de la matriz A, y se nota $tr(A)$, al escalar $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Para calcular la suma de los elmentos de la diagonal principal:

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = np.array([[3, 2], [0, 1], [6, 8]])
tamanio = A.shape
print(f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {tamanio[0]}\nCantidad de columnas: {
    tamanio[1]}")

# método de numpy
print(f"Forma Numpy: tr(A) = {np.trace(A)}")

# ====================METODO 2====================
# A manopla
contar_hasta = min(A.shape[0], A.shape[1])
elemento = 0
traza = 0

while elemento < contar_hasta:
    traza += A[elemento][elemento]
    elemento += 1

print(f"Forma a manopla: tr(A) = {traza}")
```

(b) Para sumar todos los elmentos 2 formas:

```python
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = [[3, 2], [0, 1], [6, 8]]
cantidad_filas = len(A)
cantidad_columnas = len(A[0])
print(
    f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {cantidad_filas}\nCantidad de columnas: {
   cantidad_columnas}"
)

# ====================METODO 1====================
# inicializo los índices
fila = 0
columna = 0
suma_elementos = 0

while fila < cantidad_filas:
    while columna < cantidad_columnas:
        suma_elementos += A[fila][columna]
        columna += 1  # actualizo las columnas
    columna = 0  # reseteo las columnas
    fila += 1  # actualizo las filas

print(f"Suma de elementos a manopla: {suma_elementos}")

# ====================METODO 2====================
# Con listas por comprensión. Oneliner falopa,
suma_total_oneliner = sum([sum(fila) for fila in A])
print(f"Suma de elementos oneliner: {suma_total_oneliner}")
```

(c) Sumo todo. Igual que en el item anterior. Si es positivo devuelvo *verdadero* sino *falso*.

```python
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = np.array([[3, 2], [3, 6], [-6, -8]])
tamanio = A.shape
print(f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {tamanio[0]}\nCantidad de columnas: {
   tamanio[1]}")

# Oneliner falopa listas por comprensión.
resultado = sum([sum(fila) for fila in A]);

if (resultado > 0):
    respuesta = True
else:
    respuesta = False

print(f"Ganan los positivos? Respuesta: {respuesta}")
```

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

- naD GarRaz

Ejercicios de parciales:

1.

a) Considerar el subespacio S de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -6x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

Hallar un sistema de generadores para S.

b) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{cases} T(1,-1,1,-1) &= (1,-7,1,9) \\ T(4,0,-2,4) &= (0,8,-1,-6) \\ T(1,1,-4,4) &= (1,0,-1,0) \\ T(-4,2,9,-4) &= (-2,1,3,3) \end{cases}$$

Calcular $T(1,1,-4,5)$ y brindar una base de $\mathrm{Im}(T)$.

c) Determinar $S \cap \mathrm{Im}(T)$.

---

a) Busco cosas de la pinta:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{resolviendo el}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Un posible sistema de generadores del subespacio S:

$$S = \langle (0,2,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

b) Para probar esa unicidad tengo que ver que los elementos que estoy transformando sean *linealmente independientes*:

$$(0,0,0,0) = a \cdot (1,-1,1,-1) + b \cdot (4,0,-2,4) + c \cdot (1,1,-4,4) + d \cdot (-4,2,9,-4) \star^1$$

Los coeficientes a, b, c y d deben valer 0 si los vectores son *linealmente independientes*.

También podría poner todos los vectores uno abajo del otro y triangular de una, pero pintó hacerlo así.

Pero también me piden en el ejercicio que haga cosas con la *transformación lineal*. Voy a tener que transformar el $(1,1,-4,5)$ así que también tengo que calcular cómo es la combineta:

$$(1,1,-4,5) = a \cdot (1,-1,1,-1) + b \cdot (4,0,-2,4) + c \cdot (1,1,-4,4) + d \cdot (-4,2,9,-4) \star^2$$

Entonces tengo que resolver $\star^1$ y $\star^2$, i.e. esto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 9 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 4 & -4 & 0 & 5 \end{array}\right) \overset{\text{triangular}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

🔥**2.** Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - x_4, -\alpha x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

y los subespacios:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$
$$T = \langle(1, 1, 1, -3), (1, -1, 0, 0), (1, -3, -1, -3)\rangle$$

a) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

b) (1 pt.) Para $\alpha = 1$, decidir si existe una transformación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(S + T) = \mathrm{Im}(f)$ y que $g(\mathrm{Nu}(f)) = (0, 0, 0, 0)$. En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

c) (1 pt.) Para $\alpha = 1$ y considerando $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 - 2x_3, x_1)$$

decidir si $f \circ h$ es monomorfismo. En caso contrario, hallar una base de $\mathrm{Nu}(f \circ h)$.

---

a) $\alpha = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

b) $g = f$

c)

$$[h] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nu}(f)$$

La composición $f \circ h$ no es mono

🔥**3.** Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\right\} \\ T &= \langle(4, -2, 1, 3), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\rangle. \end{aligned}$$

a) Definir una transformación lineal no nula $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) \subseteq T$ y $f(T) \subseteq S$.
Justificar la buena definición.

b) Determinar $p_S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre S y calcular $p_S(S \cap T)$.

---

a) Calculo intersección entre S y T y sistema de generadores de S. Para la intersección meto un genérico de T en las ecuacione de S y así obtengo:

$$S \cap T = \langle(2, -1, 0, 1)\rangle$$

El sistema de generadores es resolver las ecuaciones que deben cumplir los elementos del subespacio:

$$S = \langle(5. - 1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)\rangle$$

Que haya aparecido la intersección es casualidad.

Ahora quiero formar una transformación lineal que cumpla lo del enunciado, donde voy a usar de *comodín* a esa intersección:

$$\begin{cases} f(s_1) &= (t_1) \\ f(s \cap t) &= (s \cap t) \\ f(t_1) &= (s_1) \\ f(t_2) &= (0) \end{cases}$$

Tengo que asegurarme de que $\{s_1, s \cap t, t_1, t_2\}$ sean una base de $\mathbb{R}^4$, es decir, tienen que ser *linealmente independientes*.

Una posible transformación que satisface todo eso sería:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1, 0, 1),$$

la cual manda todo lo que le des a algo de S y a algo de T a la vez.

b) Para armar un *proyector ortogonal*, p_S, hay que asegurarse que:

$$\text{Nu}(p_S) \cap \text{Im}(p_S) = 0 \quad \text{con} \quad S = \langle (2, -1, 0, 1), (5, -1, 1, 0) \rangle$$

$$\bigstar^1 \begin{cases} p_S(2, -1, 0, 1) &= (2, -1, 0, 1) \\ p_S(5, -1, 1, 0) &= (5, -1, 1, 0) \\ p_S(0, 1, 1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ p_S(1, 3, -2, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Para encontrar la expresión funcional del proyector se puede hacer la combinación lineal de los elementos de la base de partida igualada a un genérico de $\mathbb{R}^4$ es decir:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \overset{\bigstar^2}{=} a \cdot (2, -1, 0, 1) + b \cdot (5, -1, 1, 0) + c \cdot (0, 1, 1, 1) + d \cdot (1, 3, -2, 1)$$

Resolver eso es resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & x_1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{3} & x_3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{88}{3} & x_4 - 8x_3 + 3x_1 + 7x_2 \end{array}\right)$$

y luego transformando $\bigstar^2$.

No sé si la idea es escribir la forma funcional o sencillamente definir el proyector p_s como en $\bigstar^1$. Las cuentas son largas cuando se triangula ese sistema y no tengo ganas de hacerlo 😬. Sea como sea. Se puede calcular fácil que:

$$p_S \underbrace{(2, -1, 0, 1)}_{S \cap T} = \underbrace{(2, -1, 0, 1)}_{S \cap T}$$

porque está en la definición y además es lo que tiene que hacer el proyector que proyecta a S. El elemento $S \cap T \in S$ así que el p_S lo manda a sí mismo.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

4. Sean a, $b \in \mathbb{R}$,

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 = 0\right\}$$

y

$$T = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\right\}$$

subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que $\dim(S \cap T) = 1$.

b) Para el caso en que $a = -1$ y $b = 1$. Hallar $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Nu}(f) = S \cap T$ e $\mathrm{Im}(f) = S$.

---

a) Para encontrar la intersección entre dos subespacios dados con ecuaciones, puedo resover todas las ecuaciones en simultáneo:

$$\bigstar^1 \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ahora el sistema en forma matricial y triangulo. La idea es que me queden 3 ecuaciones *linealmente independientes*, de esa manera quedará solo una variables libre, por lo tanto la solución al sistema tendrá dimensión 1:

$$\bigstar^1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ 0 & 2a & 3+2b & 1+2a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[a \neq 0]{2aF_3 - F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ 0 & 2a & 3+2b & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & -2a-3-2b & 6a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Por un lado se puede ver a ojo que cuando $a = 0$ quedan 3 ecuaciones *linealmente independientes* así que no jode. Ahora quiero ver para cuales valores de a y b se borra la última fila:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2a - 3 - 2b & = & 0 \overset{a = \frac{1}{6}}{\Longleftrightarrow} b = -\frac{5}{3} \\ 6a - 1 & = & 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Por lo tanto la intersección va a tener dimensión 1, $\dim(S \cap T) = 1$ cuando:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{5}{3} \end{array} \right.}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre

$$S = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0) \rangle$$

y sean

$$T = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_2 + x_4 = 0\right\} \quad \text{y} \quad W = \langle (2,0,-2,0), (-2,1,0,1), (2,1,-4,1) \rangle.$$

---

a) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle(2,0,1,1),(0,-1,2,2)\rangle \quad g(v) = f(v) \qquad \forall v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

halle una base de $\text{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo ¿Puede ser monomorfismo?

a) La papa está en el subespacio al que está yendo a para $g(W)$. Hay una contradicción entre esa condición y que $g(v) = f(v)$.

No existe una *transformación lineal que cumpla lo pedido*

b) No te dan las dimensiones. $\dim(\text{Nu}(f)) = 2$★[1] dado que es un *proyector ortogonal.* Por lo tanto h va a recibir como mucho a S, con $\dim(S) = 2$.

No hay forma de que $(h \circ f)(x)$ genere más de 2 vectores *linealmente independientes* de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{La función } \underline{\text{no}} \text{ es un epimorfismo. Tampoco será mono, por ★}^1.}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz