# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

# Por alumnos de ALC Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

última actualización 26/06/25 @ 13:45

### Choose your destiny:

(click click 🖶 en el ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- © Ejercicios de la guía:
  - 1. **4**. **7**. **10**. 13. **16**. 19. **22**. 2. ??. 8. **5**. 11. **14. 17. 20. 3. 6.** 9. **12**. **15. 18. 21**.
- - **1**. **2**. **3**. **4**. **2**??.

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:  $\frac{26/06/25 @ 13:45}{}$ 

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:



El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram <a>.</a>



Nombres usados en matrices en  $\mathbb{C}$ :

 $\Leftrightarrow \det(U) = 1$ 

• Unitaria:  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $U^*U = I$ 

• Hermitiana:  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $A^* = A$ 

• A tiene autovalores reales.

 $\bullet$  Las columnas de U forman una BON de  $\mathbb{C}^n$ 

**&** Es ortogonalmente diagonalizable.

**&** Es ortogonalmente diagonalizable.

Preserva la norma en la multiplicación.

#### Notas teóricas:

\* Recuerdo nomenclatura de matrices Nombres usados en matrices en  $\mathbb{R}$ :

• Ortogonal:  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $Q^tQ = I$ 

ullet Las columnas de Q forman una BON de  $\mathbb{R}^n$ 

**&** Es ortogonalmente diagonalizable.

Preserva la norma en la multiplicación.

det(Q) = 1

• Simétrica:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $A^t = A$ 

• A tiene autovalores reales.

**&** Es ortogonalmente diagonalizable.

\* Descomposición en valores singulares:

Tengo una matriz  $A \in K^{m \times n}$ 

$$A = U\Sigma V^*$$

Con U y V matrices unitarias, por lo tanto <u>cuadradas</u>, <u>simétricas</u>  $\left\{ \begin{array}{l} U^*U=I\\ V^*V=I \end{array} \right\}$ , y  $\Sigma\in K^{m\times n}$  el mismo tamaño que A.

• Para obtener  $\Sigma$  calulo los valores  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  donde:

$$A^*Av_i = \lambda_i v_i$$

y luego ordeno los elementos diagonales  $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$  de mayor a menor. Completo con fila o columas de ceros, hasta llegar a la dimesión correcta.

- Para obtener la matriz V pongo a los  $v_i$  calculados previamente como columnas en orden correspondiente a su  $\sigma_i$ .
- Para calcular U:

$$Av_i = U\Sigma V^*v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \Leftrightarrow Av_i = \sigma_i u_i$$

De ese último resultado se desprende info de la matriz A. Como  $A \in K^{m \times n}$  con (m > n) tiene rango r < n:

$$\operatorname{Nu}(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$$
 y  $\operatorname{Im}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ 

\* Pseudo-inversa:

Si se tiene una  $A \in K^{m \times n}$ 

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow{\text{pseudo}} A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^*,$$

con la  $\Sigma^{\dagger}$  que sería como  $\Sigma^{t}$  invirtiendo los elementos diagonales  $[\Sigma^{\dagger}]_{ii} = \frac{1}{\sigma_{ii}}$ . Propiedades de esta cosa dignas de ser mencionadas:

• Si bien en general,  $AA^{\dagger} \neq I_m$  y los mismo con  $A^{\dagger}A \neq I_n$ , tenemos este simpático resultado:

$$AA^{\dagger}A = A$$
 v  $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$ 

#### Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

- (a) Hallar una descomposición de Schur  $A = UTU^*$ , con U unitaria y T triangular superior con los autovalores de la matriz A en la diagonal.
- (b) Descomponer a la matriz T hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal D y una matriz triangular superior S con ceros en la diagonal. Probar que  $S^j = 0$  para todo  $j \ge 2$ .
- (c) Usar los ítems anteriores para calcular  $A^{10}$
- (a) Busco autovalores y autovectores de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9$$
 con  $E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1) \right\rangle$ 

Solo salieron 2 autovectores del único autovalor  $\lambda = 9$ . Esto nos dice que la matriz no es diagonalizable. Pero nadie nos pidió que diagonalicemos, así que ahora para encontrar la descomposición de Schur expando a una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ :

BON = 
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \frac{1}{5}(-2,-4,5), \frac{1}{3}(1,2,2) \right\}$$

Donde usé Gram Schmidt para calcular el autovector  $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right)$  y también para calcular un vector extra para formar todo  $\mathbb{R}^3$ .

Entonces tengo ya la base para encontrar la matriz unitaria  $U_1$ :

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora calculo:

$$U_{1}^{t}AU_{1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8\\ -1 & 7 & -2\\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0\\ -2 & -4 & 5\\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8\\ -1 & 7 & -2\\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5}\\ 3 & -4 & 2\sqrt{5}\\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5}\\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{T}$$

La matriz resultante quedó triangular superior.

Las dos primeras columnas de la matriz T están regaladas, porque son autovectores, entonces  $U^t A v_i = \lambda_i e_i$ . La tercera columna es parte de la arquitectura que sostiene al infierno.

Por lo tanto se tiene que:

$$U_1^t A U_1 = T \Leftrightarrow A = U_1 T U_1^t$$

$$A = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(b) Descompongo:

$$T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S}$$

Ahora tengo que ver que  $S^j = 0 \ \forall j \geq 2$ :

$$S^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hay que calcular  $A^{10}$ :

$$A = UTU^t = U(D+S)U^t \Leftrightarrow A^{10} = U(D+S)^{10}U^t$$

Y ahora esa horrible expresión:

$$(D+S)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {10 \choose k} (D^k S^{10-k}) \stackrel{!}{=} {10 \choose 10} D^{10} + {10 \choose 9} D^9 S + \underbrace{{10 \choose 8} D^8 S^2 + \cdots {10 \choose 10} D S^9 {10 \choose 0} S^{10}}_{0} \stackrel{!}{=} 9 \cdot (D+10S)$$

Donde usé que justo en este ejercicio D es una  $\underline{matriz\ escalar}$ , es decir: kI entonces conmuta en el producto, porque sino  $esto\ no\ funciona\ ni\ en\ pedo.$ 

Por lo tanto:

$$A^{10} = U(9 \cdot (D+10S))U^t = 9U(D+10S)U^t$$

Dale las gracias y un poco de amor 💚 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 2.** Probar que si  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal  $a_{ii} \in \mathbb{R}$ .

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a  $\mathbb{R}$  se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n \times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \stackrel{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si  $a_{ii}$  es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor 💚 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 3.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana, probar que existen matrices  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con B simétrica y C antisimétrica ( $C^t = -C$ ) tales que A = B + iC.

 $\overline{A}$  apartir de una matriz hermitiana me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2}$$
 y  $C = \frac{A - A^*}{2}$ ,

Donde las matrices B y  $C \in \mathbb{R}$  y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$B + iC = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2} = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2} = \frac{A + iA}{2} + \frac{A^* - iA^*}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{A + iA}{2} + \frac{A - iA}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} A$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 4.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana y  $S \subset K^n$  un subespacio invariante por A, es decir  $Av \in S$  para todo  $v \in S$ . Probar que  $S^{\perp}$  es invariante por A.

Si tomo un  $v \in S$  y un  $w \in S^{\perp}$ :

$$w^* \cdot \overset{\in S}{\overset{}{\overset{}{\downarrow}}} = 0$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A:

$$Av = \lambda v \stackrel{\times A^*}{\Longleftrightarrow} A^*Av \stackrel{!}{=} A^2\lambda Av = \lambda^2 v \stackrel{\stackrel{\bullet}{=}}{\rightleftharpoons} kv \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\in S}{Av} = w^*A^* \cdot Av \stackrel{\bigstar^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto  $Aw \in S^{\perp} \ \forall w \in S^{\perp}$ .

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 5.** Probar que  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

 $(\Rightarrow)$ 

$$Av = \lambda v \overset{\times v^*}{\Longrightarrow} v^* A v = \lambda v * v \Leftrightarrow v^* A v \overset{\bigstar^1}{\Longrightarrow} \lambda \|v\|_2^2$$

$$Av = \lambda v \overset{*}{\Longleftrightarrow} v^* A^* = \overline{\lambda} v^* \overset{\times v}{\Longleftrightarrow} v^* A^* v = \overline{\lambda} v^* v \Leftrightarrow v^* A^* v \overset{\bigstar^2}{\Longrightarrow} \overline{\lambda} \|v\|_2^2$$

Como  $A = A^*$  el miembro izquierdo en  $\star^1$  y  $\star^2$  es igual. Por lo tanto  $\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$ .

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v}{\Longrightarrow}} \underbrace{v^* A v}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^* v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \ \forall v \neq 0 \implies \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo autovalores reales y positivos, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores  $v_1$  y  $v_2$  asociados a distintos autovalores:

$$Av_{1} = \lambda_{1}v_{1} \quad \text{y} \quad Av_{2} = \lambda_{2}v_{2} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{2}^{*}Av_{1} \stackrel{!}{=} (Av_{2})^{*}v_{1} = \lambda_{2}v_{2}^{*} \cdot v_{1} \stackrel{*}{=} \lambda_{1}v_{2}^{*} \cdot v_{1} \\ v_{1}^{*}Av_{2} = \lambda_{2}v_{1}^{*} \cdot v_{2} \stackrel{*}{=} \lambda_{2}v_{1}^{*} \cdot v_{2} \end{cases}$$

Restando ★³ y ★⁴:

$$0 \stackrel{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

♠¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve. La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

#### (⇐) CONSULTAR, probar por absurdo?

**Ejercicio 6.** Sea 
$$A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Hallar los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que A sea simétrica y  $\lambda = 0$  sea autovalor de A.
- (b) Para el valor de  $\alpha$  hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.
- (a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} \qquad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si  $\alpha = 2$  la matriz queda con filas linealmente dependientes, por lo tanto cuando  $\alpha = 2$  tengo autovalor  $\lambda = 0$ . Podría triangular la matriz con  $\alpha = -1$ , para ver si hay alguna fila linealmente dependiente, pero no hay ganas.

(b) Dado que A es una matriz simétrica, es ortonormalmente diagonalizable. Hay que diagonalizar asegurando que la base de autovectores sea una BON. El procedimientos puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a explotar **a** el hecho de que la base de autovectores va a ser ortogonal.

Busco autovectores de  $\lambda = 0$ , que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$\begin{array}{c} (A-\lambda I)v_{(\lambda=0)}=0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1,-1,0),(0,1,-2)\} \\ \xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})\right\} \end{array}$$

Como estoy en  $\mathbb{R}^3$  no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector (2,2,1) funciona podés plantear:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (1,-1,0)\cdot(x,y,z) & = & 0 \\ (0,1,-2)\cdot(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvelo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente base ortonormal para diagonalizar la matriz:

BON = 
$$\left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_{E_{(\lambda=9)}}, \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{E_{(\lambda=9)}} \right\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es  $C^t$ , dado que es una matriz ortogonal o matriz unitaria:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

#### Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{array}\right)$$

- (a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.
- (b) Dibujar el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  y la elipse  $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ , señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- (c) Calcular  $||A||_2$  y cond<sub>2</sub>(A).
- (d) Calcular  $A^{-1}$  usando la descomposición hallada.
- (a) Quieron encontrar la descomposición en valores singulares:

$$A = U\Sigma V^*$$

Voy a calcular  $A^* \cdot A$  para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz <u>es cuadrada</u>, no me preocupo por pensar si es mejor hacer  $A \cdot A^*$  o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los valores singulares son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \xrightarrow{\text{matriz}} \Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una base ortonormal una BON:

$$Hv_{\lambda} = \lambda v_{\lambda} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} E_{\lambda=40} & = & \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\} \\ & y & \Longrightarrow \text{ BON} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\} \end{array} \right.$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V, matriz que tiene a los  $v_i$  autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U, que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma i}$$
 con  $\sigma_i \neq 0 \xrightarrow{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}\right\} \stackrel{!}{=} \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)\right\}$ 

Entonces tengo:

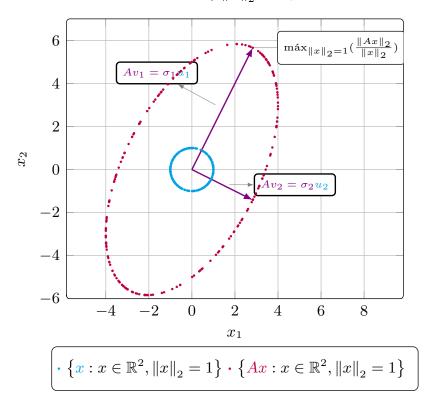
$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

Scatter para 200  $\boldsymbol{x}/\left\|\boldsymbol{x}\right\|_2=1$  y para 200  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 



(c) La definición de norma subordinada:

$$||A||_2 = \max_{||x||_2 = 1} \left( \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$||A||_2 = ||\sigma_1 u_1||_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{||u_1||_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \bigstar^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo  $\left\Vert A\right\Vert _{2},$ ahora quiero encontrar  $\left\Vert A^{-1}\right\Vert :$ 

$$A = U\Sigma V^* \xleftarrow{\text{invierto}} A^{-1} = (V^*)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \stackrel{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sigma_2} \quad \star^2 \xrightarrow{\text{finalmente}} \text{cond}_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \left( \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{array} \right)$$

A

Si bien esto es una descomposición de  $A^{-1}$  ¡No es una descomposición en valores sigulares!

Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de  $\Sigma$  no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.



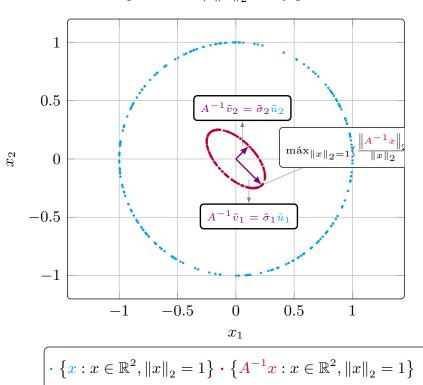
Pero moviendo las columnas se encuentra la descomposición en valores singulares, mirá:

Notar que esa matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es involutiva, es su propia inversa. Es así que la descomposición en valores singulares de  $A^{-1}$  que nadie pidió pero todos queremos:

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para  $A^{-1}$ :

Scatter para 200  $\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$  y para 200  $A^{-1}\boldsymbol{x}$ 



Dale las gracias y un poco de amor  $\heartsuit$  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 🞧

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
 (b)  $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ 

(a) Si

$$A \stackrel{\bigstar}{=} \left( \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

llamo

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{array}\right)$$

que no es otra cosa la tonta  $A^t$  de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horrendos estereotipos de antes, *¡Pero el sombrero es nuevo!* 

Voy a calcular la descompsición en valores singulares de  $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$  porque así me quedo con la versión de  $2 \times 2$  para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la convierto la descomposición a la de A.

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} & = \left\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} & = \left\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar  $\hat{U}$ , necesito una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Como solo tengo un  $\sigma \neq 0$  voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x,y,z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la descomposición en valores singulares de A transpongo:

Quedó entonces sin el sombrero, la SVD de A:

$$A = U\Sigma V^{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda = 90} &= \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda = 10} &= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
 y  $\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

Necesito ahora encontrar U, necesito una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Como solo tengo dos  $\sigma_i$  voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🞖 naD GarRaz 🞧

#### Ejercicio 9. Sea

$$A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{array}\right)$$

Probar que para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $\|Av\|_2 \ge 15 \|v\|_2$ .

Let's calculate los singular values:

$$\mathbf{H} = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

¿Por qué esos números feos?

Calculo autovalores de H:

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

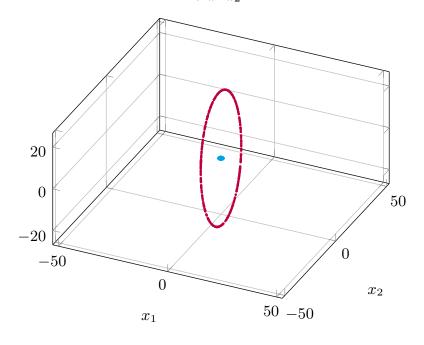
Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  con  $||v||_2 = 1$  se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \le ||Av||_2 \le \sigma_1 \iff 16.11 \le ||Av||_2 \le 29.62 \Leftrightarrow \boxed{15 \le ||Av||_2 \le 30} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2, \ ||v||_2 = 1$$

Scatter para 200  $\boldsymbol{x}/\left\|\boldsymbol{x}\right\|_{2}=1$  y para 200  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 



$$\left\{ \cdot \left\{ x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1 \right\} \cdot \left\{ Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1 \right\} \right.$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 10.** Mostrar que  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tiene un valor singular nulo si y solo si tiene un autovalor nulo.

 $(\Leftarrow)$  Si A tiene un autovalor  $\lambda_i=0$  tiene  $\operatorname{Nu}(A)\neq 0$  y existe Av=0 para algún v. Entonces  $A^*A$ :

$$A^*Av = 0$$

Por lo tanto  $A^*A$  tiene un autovalor nulo y como  $\sigma_i^2 = \lambda_i$  hay un valor singular nulo.

 $(\Rightarrow)$  Si A es cuadrada, su descomposición en valores singulares es el producto de matrices cuadradas:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{calculo}} |A| = |U\Sigma V^*| = |U| \cdot |\Sigma| \cdot |V^*| = 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad$$

Porque sigma tiene la forma:

$$[\Sigma]_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_i & si & i = j \\ 0 & si & i \neq j \end{array} \right.$$

Y si uno de los  $\sigma_i = 0$ , bueh,  $\det(A) = 0$ . Por lo tanto

$$Nu(A) \neq \{0\}$$

Entonces existe un v tal que:

$$Av = 0 \Leftrightarrow Av = 0 \cdot v$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 📢

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , demostrar que los valores singulares de la matriz  $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$  son  $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$  donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\sigma_i$  es el *i*-ésimo valor singular de A.

Apunto a obtener los valores singulares,  $\varsigma_i$  de la matriz:

$$G = \underbrace{(I_n \ A^*)}_{\in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{n \times n}} = I_n + \underbrace{A^*A}_{\in \mathbb{C}^{n \times n}} = I_n + \underbrace{H}$$

Donde bauticé a  $A^*A$  como H. Calculo los autovalores de  $G = I_n + H$ :

$$|I_n + H - \lambda \cdot I_n| = |H - \underbrace{(\lambda - 1)}_{\mu} \cdot I_n| = |H - \mu \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow \mu \text{ autovalores de } H$$

Ahora identificando bien cada cosa:

Si  $\mu_i$  es un autovalor de H, entonces los valores singulares de A:

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\lambda_i - 1} \bigstar$$

es un valor singular de A.

Y si tengo que  $\lambda_i$  es un autovalor de G, entonces los valores singulares de  $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ :

$$\varsigma_i = \sqrt{\lambda_i} \stackrel{\blacktriangle}{=} \sqrt{1 + \sigma_i^2}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 😯

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\sigma > 0$ . Demostrar que  $\sigma$  es valor singular de A si y solo si la matriz  $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$  es singular, donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

 $(\Rightarrow)$  Sé que  $\sigma$  es un valor singular de A. Calculo el determinante:

$$\det\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(A^*A - \sigma^2 I_n).$$

Y si  $\sigma > 0$  es un valor singular de A, entonces  $\sigma^2 = \lambda$  con  $\lambda$  autovalor de  $A^*A$ 

$$\det(A^*A - \lambda I_n) = 0$$

Entonces la matriz  $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$  tiene determinante nulo, es decir que es singular si  $\sigma$  es un valor singular de A.

( $\Leftarrow$ ) ¿Es lo mismo que el otro pero en reversa? Sé que det  $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(\underbrace{A^*A - \sigma^2 I_n}_{\text{característica}}) = 0$  La ecuación

característica da 0 para los autovalores de  $A^*A$ , por lo tanto  $\sqrt{\sigma^2} \stackrel{\sigma>0}{=} \sigma$  tiene que ser un valor singular de A. CONSULTAR, esta demo con gusto a mal

Dale las gracias y un poco de amor 💚 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 😯

**Ejercicio 13.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , probar que los valores singulares de  $A^t$ ,  $\bar{A}$  y  $A^*$  son iguales a los de A.

☑... hay que hacerlo! 
⑥

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$  una pull request al  $\bigcirc$ 

**Ejercicio 14.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , de rango r, con valores singulares no nulos:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ 

- (a) Probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.
- (b) Probar que dado s < r se pueden sumar s matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz  $A_s$  que satisface:

$$||A - A_s||_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota:  $A_s$  resulta ser la mejor aproximación a A (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

(a) Para el caso en que la matriz A tiene más filas que columnas, es decir que m > n

$$A = U \overset{m \times n}{\underset{m \times m}{\sum}} V^{t}$$

Donde la  $\Sigma$  tiene a los r valores sigulares no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \hat{\Sigma}_i,$$

donde las  $\hat{\Sigma}_i$  son las matrices de  $m \times n$  que tienen solo al valor singular  $\sigma_i$  en la posición ii y ceros en los demás lugares. La suma es hasta r dado que el resto de los n-r demás valores sigulares son nulos, por lo tanto las  $\hat{\Sigma}_i$  con i > r son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que A se puede expresar como una suma de r matrices singulares de  $\operatorname{rg}(\Sigma_i) = 1$ , dado que solo tienen una columna no nula.

(b) Dado s < r puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} U\hat{\Sigma}_{i}V^{t}}_{A_{s}} + \underbrace{\sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_{i}V^{t}}_{i=s+1} \Leftrightarrow A - A_{s} = \underbrace{\sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_{i}V^{t}}_{i=s+1}$$

Ahora tomo norma a  $A - A_s$ :

8

$$||A - A_s||_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los valores singulares.

Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz A funciona como una transformación que escala a un vector v al hacer Av. Esa escala es proporcional a los valores sigulares. La matriz  $A_s$ , es entonces similar o cercana a A, ya que tiene las mismas s mayores componentes de mayor escalamiento.

**\$** 

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🎖 naD GarRaz 📢

#### Ejercicio 15. Sea

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- (a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a A en norma 2.
- (b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.
- (a) Tengo que calcular la descomposición en valores singulares:

$$H = A^t A = \left(\begin{array}{ccc} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Busco autovalores de H:

$$|H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, 9, 25\} \text{ y autovectores } Hv_{\lambda} = \lambda v_{\lambda} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{\lambda = 25} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda = 9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda = 4} = \left\langle (0, 0, 1) \right\rangle \end{array} \right.$$

Los autovalores de una matriz simétrica resultaron todos distintos, por lo tanto los autovectores resultaron ortogonales. Por lo tanto tengo a la matriz V y  $\Sigma$ :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora necesito la U, que la consigo con una BON:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}, \frac{Av_3}{\sigma_3}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0), (0, 0, 1)\right\} \implies U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

$$A = U\Sigma V^{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz de rango 2 que mejor aproxima a A:

$$B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La de rango 1:

$$B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Si querés mandá la solución o al grupo de Telegram  $rac{ extstyle d}{ extstyle d}$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{ extstyle EX}$  o una pull request al  $rac{ extstyle Q}{ extstyle d}$ .

## Liercicios de parciales:

- **11.** [segundo recu 5/12/2024] Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
  - (a) Probar que  $A^tA = B^tB$  si y solo si existe una matriz ortogonal  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que B = UA.
  - (b) Sea A = QR la factorización QR de A. Probar que A y R tienen los mismos valores singulares.
  - (c) Sea  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = QR$  una factorización QR de A. Hallar una matriz C tal que  $||C||_2 = ||A||_2$ , Im(C) = Im(A) y  $C^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Expresar C en función de su descomposición en valores singulares.
  - (a)  $(\Rightarrow)$  A partir de las descompsiciones de las matrices A y B:

$$\begin{cases}
A = U_A \Sigma_A V_A^t \\
B = U_B \Sigma_B V_B^t
\end{cases}$$

Por hipótesis,  $A^tA = B^tB$ , entonces, los autovalores y autovectores de  $A^tA$  y  $B^tB$  son los mismos, por lo tanto también sus matrices  $\Sigma$  y V

$$\left\{ \begin{array}{l} A = U_A \Sigma V^t \\ B = U_B \Sigma V^t \end{array} \right. \implies A = U_A \Sigma V^t \Leftrightarrow \underbrace{U_A^t A}_{\Sigma V^t} = U_A^t \underbrace{U_A \Sigma V^t}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{U_B^t \Sigma V^t}_{B} = \underbrace{U_B^t U_A^t}_{V_A} A \Leftrightarrow \underbrace{B = UA}_{Ortogonal}$$

La matriz U del final es ortogonal, porque el producto de dos matrices ortogonales lo es:

$$U_1^T U_1 = I \quad \text{y} \quad U_2^T U_2 = I \implies (U_1 U_2)^t \cdot U_1 U_2 = I \Leftrightarrow U_2^t \underbrace{U_1^t U_1}_I U_2 = I \Leftrightarrow U_2^t U_2 = I$$

 $(\Leftarrow)$  Parto de B = UA, con U una matriz ortogonal:

$$B = UA \Leftrightarrow B^t = (UA)^t \implies B^t B = (UA)^t UA = A^t U^t UA = A^t A \Leftrightarrow A^t A = B^t B$$

(b) Los valores singulares de una matriz A:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$
 con  $\lambda_i$  tal que  $|A^t A - \lambda_i I| = 0$ 

Usando el resultado del punto anterior y recordando que la Q en la descomposición QR tiene como columnas una base ortonormal, es decir que Q es una matriz ortogonal, de forma tal que:

$$Q^tQ = I_n \implies A^tA = (QR)^t(QR) \stackrel{!}{=} R^tR.$$

Por lo tanto los valores singulares de A y R serán los mismos, más aún el cálculo de las columnas de V también va a dar lo mismos.

(c) Esto de la descomposición en valores sigulares es mucho más sencillo cuando la matriz es cuadrada, porque hay menos cosas que contemplar. Ya sé los tamaños de la matrices y no tengo que pensar que conviene hacer:

$$C = U \sum_{\substack{\downarrow \\ \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}}}^{\uparrow} V^{t}$$

Nos dan una A que está casi en SVD. ¿Se ve?, voy a empezar a permutar para dejar bien ordenados los valores singulares:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \underbrace{\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)}_{I_2} \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora permuto para mover ese 7 para la izquierda:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{I_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_t}$$

!Magia! ¿Y para qué me sirve eso? No sé, pero tenía ganas de hacerlo. ¡Nah, mentira! Se terminó el ejercicio. Esa última matriz es la C que cumple lo pedido.

Lo que viene a continuación es la forma menos hacker de hacerlo, básicamente como lo encaré yo antes de darme cuenta  $\widehat{\omega}$  que esa SVD cumplía todo lo pedido.

Entendiendo como funciona la descomposición en valores singulares (mirá acá estos resultados click elick \*) sé que:

$$\begin{cases} \operatorname{Nu}(A) &= \langle (0,1) \rangle \\ \operatorname{Im}(A) &= \langle (-1,1) \rangle \end{cases} \quad \text{y} \quad C^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\bigstar^1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $||C||_2 = ||A||_2 = \sigma_1 = 7$
- $\dim(\operatorname{Nu}(C)) = 1 \implies \sigma_2 = 0$
- V tiene como columnas a una base ortonormal  $B_V = \{v_1, v_2\}$  donde  $v_2 \in \text{Nu}(C)$  Quizás te estés preguntando: ¿Y  $v_1$ ? Me importa poco.
- U tiene como columnas a una base ortonormal  $B_U = \{u_1, u_2\}$  donde  $u_1 \in \text{Im}(C)$  Quizás te estés preguntando: ¿Y  $u_2$ ? Me importa otro poco.

El dato de  $\star^1$  me dice que  $(0,7\sqrt{2})$  es una combinación de las columnas de V. No sé si es la mejor forma de encararlo, pero me lo imagino así:

$$C = U\Sigma V^t \stackrel{!}{\Leftrightarrow} C^t = V\Sigma U^t$$

Por lo tanto los generadores de la  $\operatorname{Im}(C^t)$  son las columnas de V ahora. Como  $\dim(\operatorname{Im}(C^t))=1$  están diciendo que  $(0,7\sqrt{2})\in\langle(0,1)\rangle$  lo cual es cierto!

Con toda esa data se puede encontrar una matriz C sin mucha rosca dado que al matriz es cuadrada y estamos en  $\mathbb{R}^{2\times 2}$  a tener en cuenta:

$$C_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Otra que cumpliría:

$$C_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{II} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
8 naD GarRaz •

**2.** [segundo parcial 8/7/2023] Sea  $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$  dada por

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

- (a) Encontrar la descomposición SVD de la matriz A.
- (b) Construir una matriz B de dimensión apropiada que satisfaga a la vez:  $B^tB = A^tA$  y  $\text{Im}(B) = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$ .
- (a) La descomposiciónserá algo como:

$$A = U \overset{\in \mathbb{R}^{3 \times 2}}{\underset{\in \mathbb{R}^{3 \times 3}}{\downarrow}} V^{t}$$

Primero busco los valores singulares  $\sigma_i$  para formarme  $\Sigma$ :

$$|A^{t}A - \lambda I_{n}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1} = 6 \implies \sigma_{1} = \sqrt{6} \\ \lambda_{2} = 1 \implies \sigma_{2} = 1 \end{cases}$$

$$E_{\lambda=6} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \right\rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \right\rangle$$

Listo ya tengo  $\Sigma$  y V los autovectores ortonormalizados de  $A^tA$  me forman las columnas de V:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora falta encontrar U solo voy a poder encontrar 2, luego completo con un vector perpendicular a ambos:

$$Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \implies BON_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} (-2, 5, 1), \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, -1) \right\}$$

La descomposición queda como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V^{t}}$$

- (b) Tiro data para pensar y armar la matriz:
  - $\operatorname{Im}(B) = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$  lo voy a usar para las dos primeras columnas de U.
  - B manda cosas de  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ , como la dim(Im(B)) = 2 entonces dim(Nu(B)) = 0, esto implica que ninguna columna de  $V, v_i \in \text{Nu}(B)$
  - $B^tB=A^tA$  la matriz  $B\in\mathbb{R}^{4\times 2}$  y además tienen los mismos valores singulares que A.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con eso estoy cumpliendo los requerimientos del enunciado. Falta expandir las columnas de U a una base ortonormal. Sale a ojo, si no se ve, entonces Gram-Schmidt:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y la versión reducida o algo así que da el mismo resultado:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💙 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:



(a) Hallar, si existe, una matriz A de coeficientes reales y del tamaño adecuado tal que

$$A^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_2 = 5, \quad \mathbf{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nu}(A^t)$$

- (b) Graficar la imagen de la esfera unitaria  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2\}$  por la transformación lineal T(x) = Ax.
- a) Todo indicaría que  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , ya que A come  $\cong \in \mathbb{R}^2$  y  $A^t$  come  $M \in \mathbb{R}^3$ .
  - Si  $||A||_2 = 5 = \sigma_1$ .
  - Con el dato del autovector de  $A^t A$ , si  $A = U \Sigma V^t$ :

$$A^{t}A = (U\Sigma V^{t})^{t}(U\Sigma V^{t}) = V \begin{pmatrix} \sigma_{1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2} \end{pmatrix} V$$
$$A^{t}A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• Si  $(4,1,8) \in Nu(A^t)$ :

Es un vector de la matriz U que siempre se multiplica donde hay ceros en  $\Sigma$ 

$$A = U\Sigma V^{t} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{65}}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{\sqrt{65}} & -\frac{4}{9\sqrt{65}} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{\sqrt{65}} & -\frac{32}{9\sqrt{65}} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🥑, o mejor aún si querés subirlo en IATEX→ una *pull request* al 📢

- **4.** [segundo parcial 8/7/2023]
  - (a) Probar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
  - (b) Sean dos matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P y Q matrices ortogonales tales que A = PBQ.
  - (c) Sea  $\{c_1, c_2, c_3\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Hallar la matriz singular (en términos de  $c_1, c_2, c_3$ ) que mejor aproxima a la matriz C en norma 2, siendo

$$C = \left( \begin{array}{c|c} 2c_1 & -5c_2 & 3c_3 \end{array} \right)$$

(a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

(b) 💩... hay que hacerlo! 👦

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram ②, o mejor aún si querés subirlo en IAT<sub>E</sub>X→ una pull request al ③.

(C) 🤒... hay que hacerlo! 🙃

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .