

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 05/06/25 @ 02:28

*Choose your destiny:*

(click click  en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">??.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:

05/06/25 @ 02:28

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



## Notas teóricas:



## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en IAT<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 2.** Probar que si  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal  $a_{ii} \in \mathbb{R}$ .

Si  $A$  es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a  $\mathbb{R}$  se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n \times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \stackrel{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si  $a_{ii}$  es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 3.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana, probar que existen matrices  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $B$  simétrica y  $C$  antisimétrica ( $C^t = -C$ ) tales que  $A = B + iC$ .

A partir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices  $B$  y  $C$  como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices  $B$  y  $C \in \mathbb{R}$  y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{aligned} B + iC &= \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \\ &\stackrel{!}{=} A \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 4.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana y  $S \subset K^n$  un subespacio invariante por  $A$ , es decir  $Av \in S$  para todo  $v \in S$ . Probar que  $S^\perp$  es invariante por  $A$ .

Si tomo un  $v \in S$  y un  $w \in S^\perp$ :

$$\begin{array}{c} \in S \\ \uparrow \\ w^* \cdot v = 0 \\ \downarrow \\ \in S^\perp \end{array}$$

Ahora que sé que  $S$  es un subespacio invariante por  $A$ :

$$Av = \lambda v \xleftarrow{\times A^*} A^* Av \stackrel{!}{=} A^2 \lambda v = \lambda^2 v \stackrel{!}{=} \lambda^2 v \in S$$

🐙 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\in S}{\uparrow} Av = w^* A^* \cdot Av \stackrel{\star^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto  $Aw \in S^\perp \quad \forall w \in S^\perp$ .

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 5.** Probar que  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana y definida positiva si y solo si  $A$  es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\stackrel{\times v^*}{\rightarrow} v^* Av = \lambda v^* v \Leftrightarrow v^* Av \stackrel{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2 \\ Av = \lambda v &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} v^* A^* = \bar{\lambda} v^* \stackrel{\times v}{\leftarrow} v^* A^* v = \bar{\lambda} v^* v \Leftrightarrow v^* A^* v \stackrel{\star^2}{=} \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Como  $A = A^*$  el miembro izquierdo en  $\star^1$  y  $\star^2$  es igual. Por lo tanto  $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ .

Ahora si  $A$  es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \stackrel{\times v}{\rightarrow} \underbrace{v^* Av}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^* v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores  $v_1$  y  $v_2$  asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad y \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^* Av_1 \stackrel{!}{=} (Av_2)^* v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 \stackrel{\star^3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^* Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \stackrel{\star^4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando  $\star^3$  y  $\star^4$ :

$$0 \stackrel{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

( $\Leftarrow$ ) **CONSULTAR, probar por absurdo?**

**Ejercicio 6.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Hallar los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que  $A$  sea simétrica y  $\lambda = 0$  sea autovalor de  $A$ .
- Para el valor de  $\alpha$  hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz  $A$ .

- Quiero que  $A$  sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si  $\alpha = 2$  la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando  $\alpha = 2$  tengo autovalor  $\lambda = 0$ . Podría triangular la matriz con  $\alpha = -1$ , para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

- (b) Dado que  $A$  es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimiento puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de  $\lambda = 0$ , que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz  $A$  a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1, -1, 0), (0, 1, -2)\}$$

$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Como estoy en  $\mathbb{R}^3$  no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector  $(2, 2, 1)$  funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (0, 1, -2) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Resuelvo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{\left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)}_{E_{(\lambda=9)}} \right\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores  $C$  es  $C^t$ , dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 7.** Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de  $A$ .
- Dibujar el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  y la elipse  $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ , señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular  $\|A\|_2$  y  $\text{cond}_2(A)$ .
- Calcular  $A^{-1}$  usando la descomposición hallada.

- Quieren encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U \Sigma V^*$$

Voy a calcular  $A^* \cdot A$  para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer  $A \cdot A^*$  o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calcula}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \xrightarrow{\text{matriz}} \Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo autovectores de  $H$  y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$Hv_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ & y \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \end{cases} \Rightarrow \text{BON} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como  $H$  los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz  $V$ , matriz que tiene a los  $v_i$  autovectores de  $H$  normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la  $U$ , que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2} \right\} \stackrel{!}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) \right\}$$

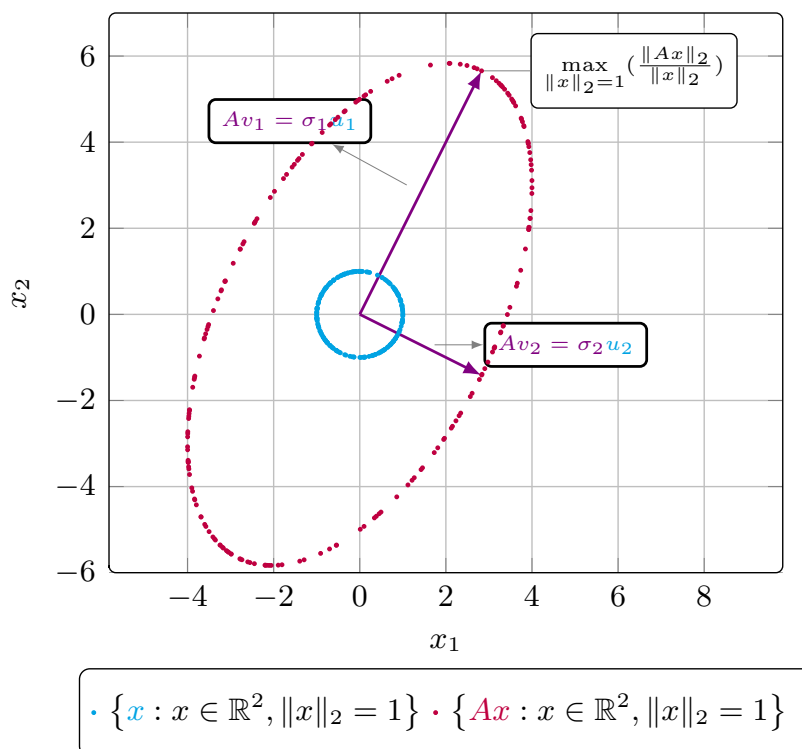
Entonces tengo:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

Scatter para 200  $x/\|x\|_2 = 1$  y para 200  $Ax$ 

(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left( \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \star^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo  $\|A\|_2$ , ahora quiero encontrar  $\|A^{-1}\|_2$ :

$$A = U\Sigma V^* \xleftrightarrow[\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}]{\text{invierto}} A^{-1} = (V^*)^{-1} \Sigma^{-1} U^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_2} \quad \star^2 \xrightarrow[\star^1 \star^2]{\text{finalmente}} \boxed{\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

(d) Usando el cálculo del ítem anterior:

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

**Ejercicio 8.** ... hay que hacerlo! Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  una pull request al .



Ejercicio 9. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 10. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 17. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 18. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 19. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 20. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

**Ejercicio 21.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una [pull request](#)* al 🐙.

---

**Ejercicio 22.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖



Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una [pull request](#)* al 🐙.

---

## Ejercicios de parciales:

---

### 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → *una pull request* al .

---