

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/04/25 @ 19:21

Choose your destiny:

(doubleclick en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.
2.	6.	10.	14.	18.	22.	
3.	7.	11.	15.	19.	23.	
4.	8.	12.	16.	20.	24.	

☉ Ejercicios de Parciales

🔥??.

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:

05/04/25 @ 19:21

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:

Transformaciones lineales

✚ Dados V y W dos K -espacios vectoriales, una $f : V \rightarrow W$ es *transformación lineal* si cumple:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v, w \in V$
- $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \quad \forall \alpha \in K, v \in V$

✚ $f : K^n \rightarrow K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{e_k}_{\in K^{n \times 1}}\right) \stackrel{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{f(e_k)}_{\in K^{m \times 1}} = \underbrace{(f(e_1) \mid \dots \mid f(e_n))}_{A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m \times 1}}$$

✚ *Matriz de una transformación lineal:*

Dados V y W dos K -espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \quad \forall v \in V$$

✚ Sea V un K -espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \dots, n$.

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. El $\text{Nu}(A) = \{x \in K^n / Ax = 0\}$

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. La $\text{Im}(A) = \{Ax \in K^m \text{ con } x \in K^n\} = \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle$. También $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$

✚ *Propiedades de una transformación lineal:*

Sea $f : V \rightarrow W$ una t.l. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V . Entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es un conjunto generador para la imagen de f .

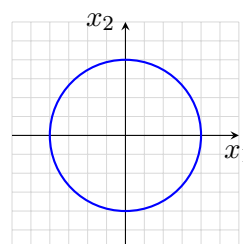
- f se dice *monomorfismo* si es inyectiva. Si f es *mono*, $\dim(\text{Nu}(f)) = 0$
- f se dice *epimorfismo* si es suryectiva. Si f es *epi*, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$
- f se dice *isomorfismo* si es *mono* y *epi*. Si f es iso es inversible.

✚ *Norma* Sea $\|\cdot\| : K^n \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma si cumple:

- 1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in K^n$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ con $\alpha \in K$ y $x \in K^n$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ con $x, y \in K$

✚ Ejemplos:

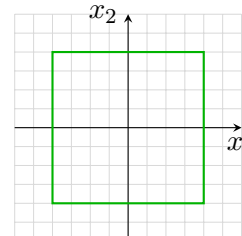
- Norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |x_k|^2} \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_2 = 1$



• Norma p : $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=0}^n |x_k|^p}$ $\xrightarrow{\text{por ejemplo}}$ $\|x\|_p = 1$



• Norma ∞ : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ $\xrightarrow{\text{por ejemplo}}$ $\|x\|_\infty = 1$



Aritmética de punto flotante:

✿ Escribir 0.25 en base 10:

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 = 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 = 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 en base 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 = 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_2 = 0.01$$

Escribir 0.3 en base 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 = 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ \vdots = \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si $m = 3 \Rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

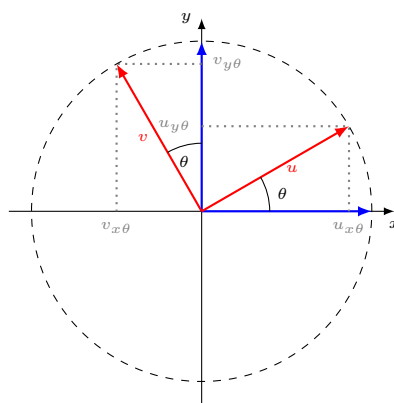
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (ponele):

Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\star^1} \cdot u_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\star^2} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y \star^1 :

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sohcatoa}]{!} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y \star^2 :

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sohcatoa}]{!} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d)

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Ahora veo:

$$f(v) + f(w) = (y_1 - 3x_1 + \sqrt{2}z_1, x_1 - \frac{1}{2}y_1) + (y_2 - 3x_2 + \sqrt{2}z_2, x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $v = (x, y, z)$. Entonces,

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y)$$

$$= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z)$$

El producto es lineal

f es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, la suma no es lineal.

$\Rightarrow f$ no es una transformación lineal.

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera A y B :

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$\Rightarrow f$ no es una transformación lineal.

(d) Veo que valga la suma:

Sea A, B matrices cualesquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A + B) = \begin{pmatrix} (a_{22} + b_{22}) & 0 & (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) \\ 0 & (a_{11} + b_{11}) & (a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) \end{pmatrix}$$

Ahora miro,

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & b_{12} + b_{21} \\ 0 & b_{11} & b_{22} - b_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{22} + b_{22} & 0 & (a_{12} + a_{21}) + (b_{12} + b_{21}) \\ 0 & a_{11} + b_{11} & (a_{22} - a_{11}) + (b_{22} - b_{11}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La suma es lineal.

Ahora veo el producto:

$$f(\alpha A) = f \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{22} & 0 & \alpha(a_{12} + a_{21}) \\ 0 & \alpha a_{11} & \alpha(a_{22} - a_{11}) \end{pmatrix} = \alpha f(A)$$

El producto y la suma son lineales, f es transformación lineal

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Juan D Elia 🐙

Ejercicio 2. 🐙... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 3.

- (a) Probar que existe una única transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.
- (b) ¿Existirá una transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
- (c) Sean $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), f(2, 1, 0) = (2, 1, 0), f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1) \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), g(3, 2, 0) = (0, 0, 1), g(2, 2, -1) = (3, -1, 2) \end{aligned}$$

De la teoría se tiene que:

Sea V un K -espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \dots, n$.

- (a) Sale casi solo usando propiedades de *transformación lineal*:

$$\begin{array}{lcl} \left\{ \begin{array}{l} f(1, 1) = (-5, 3) \\ f(-1, 1) = (5, 2) \end{array} \right. & F_2 + F_1 \rightarrow F_2 & \left\{ \begin{array}{l} f(1, 1) = (-5, 3) \\ f(0, 2) = (0, 5) \end{array} \right. \\ & \frac{1}{2}F_2 \rightarrow F_2 & \left\{ \begin{array}{l} f(1, 1) = (-5, 3) \\ f(0, 1) = (0, \frac{5}{2}) \end{array} \right. \\ & F_1 - F_2 \rightarrow F_1 & \left\{ \begin{array}{l} f(1, 0) = (-5, \frac{1}{2}) \\ f(0, 1) = (0, \frac{5}{2}) \end{array} \right. \end{array}$$

Si bien no es necesario, puedo escribir a la *transformación lineal* como:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y \end{pmatrix}$$

Y ahora calculo lo más pancho:

$$f(5, 3) = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(-1, 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Se llega a un absurdo con algunas operaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,1) = (2,6) \\ f(-1,1) = (2,1) \\ f(2,7) = (5,3) \end{array} \right. \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \quad F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1,1) = (2,6) \\ f(0,2) = (4,7) \\ f(0,5) = (1,-9) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot F_2 \rightarrow F_2 \\ \frac{1}{5} \cdot F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1,1) = (2,6) \\ f(0,1) = (2, \frac{7}{2}) \\ f(0,1) = (\frac{1}{5}, \frac{-9}{5}) \end{array} \right.$$

Las operaciones de triangulación aplicadas en la triangulación son lineales y se usó todo el tiempo la definición de linealidad.

(c) Ataco igual que al anterior, la idea es poder compararlos con la misma *base del espacio de partida V*:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,0,1) = (1,2,1) \\ f(2,1,0) = (2,1,0) \\ f(-1,0,0) = (1,2,1) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{✂}} \left\{ \begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,2,1) \\ f(0,1,0) = (0,-3,-2) \\ f(0,0,1) = (0,0,0) \end{array} \right.$$

Ahora con g :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1,0,1) = (1,2,1) \\ g(2,1,0) = (2,1,0) \\ g(-1,0,0) = (1,2,1) \end{array} \right. \quad F_2 - 3F_1 \rightarrow F_1 \quad F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} g(1,1,1) = (1,1,0) \\ g(0,-1,-2) = (-3,-3,1) \\ g(0,0,-3) = (1,-3,2) \end{array} \right.$$

Podría seguir triangulando y llegar hasta que me queden ambas expresiones en la canónica de \mathbb{R}^3 , pero pajilla. Resalté en azul dos filas que me *gritan* que si:

$$(0,0,1) \xrightarrow{f} (0,0,0) \implies (0,0,-3) \xrightarrow{f} (0,0,0)$$

No obstante:

$$(0,0,-3) \not\xrightarrow{g} (0,0,0)$$

Así se concluye que :

$$f \neq g$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 4. 🧑... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🐼, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 5. 🧑... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🐼, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 6. 🧑... hay que hacerlo! 🐼


Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🐼, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Aritmética de punto flotante

🐼 ¿Errores? [Avisá acá](#) así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 05/04/25 @ 19:21 . Chequeá si hay una [versión nueva](#) → [acá](#).

[Ir a índice](#) ↑

Ejercicio 7. Algunos experimentos: Realizar las siguientes operaciones en Python . En todos los casos, pensar: ¿Cuál es el resultado esperado? ¿Coincide con el obtenido? ¿A qué se debe el problema (si lo hay)? (Notamos ϵ al épsilon de la máquina. Puede obtenerse importando la librería `numpy` como `np` y ejecutando el comando `np.finfo(float).eps`).

- a) Tomando $p = 1e34, q = 1$, calcular $p + q - p$.
- b) Tomando $p = 100, q = 1e - 15$, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.
- c) $0.1 + 0.2 == 0.3$
- d) $0.1 + 0.3 == 0.4$
- e) $1e - 323$
- f) $1e - 324$
- g) $\frac{\epsilon}{2}$
- h) $(1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}$
- i) $1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})$
- j) $((1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}) - 1$
- k) $(1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})) - 1$
- l) $\sin(10^j \pi)$ para $1 \leq j \leq 25$.
- m) $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi 10^j)$ para $1 \leq j \leq 25$.

- a) El epsilon sería el número más chico tal que:

$$1 + \epsilon \neq 1$$

En el ejercicio estamos haciendo una cuenta fuera del rango de precisión de la máquina:

$$\epsilon = 2.220446049250313 \cdot 10^{-16} = \underbrace{0.2220446049250313}_{m=16} \cdot 10^{-15} \quad \text{!} \rightarrow \text{así } \underline{\text{noto}} \text{ la precisión}$$

Con una mantisa m de 16 números significativos, puedo hacer la cuenta:

$$1 + \epsilon \stackrel{!}{=} 1.0000000000000002$$

\downarrow
 16^{to} decimal

Primero $p + 1$:

$$\begin{aligned}
p &= 1 \cdot 10^{34} = 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 \\
p + \textcolor{red}{1} &= 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.00\textcolor{red}{1} = 0.\underbrace{10000000000000000}_{m=16}\underbrace{0000000000000000\textcolor{red}{1}}_{\text{fue un placer } \textcolor{blue}{\text{S}}}\cdot 10^{-35} \\
p + \textcolor{red}{1} &= 0.10000000000000000 \cdot 10^{-35} = 1 \cdot 10^{34} \overset{\textcolor{red}{!}}{=} p
\end{aligned}$$

Segundo $p + 1 - p$:

Bueh:

$$\underbrace{p-1}_p - p \stackrel{!}{=} p - p = 0$$

🐧 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🐧

```
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}")    # epsilon = 2.220446049250313e-16
```

```
p = 1e34 # p = 100000000000000000000000000000000
q = 1

calculo = p + q - p # calculo = 0

print(f"p = {p}\nq = {q}\np + q - p = {calculo}")
```

b) Acá el problema es parecido al anterior:

$$\begin{aligned}
 p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
 q = 1 \cdot 10^{-15} &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
 p + q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \cdot 10^3 = 100 \\
 &\quad \uparrow \text{16}^{\text{to}} \text{ decimal} \\
 &\quad \underbrace{0\,01}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3 \\
 (p + q) + q &\stackrel{!}{=} 100 = p \\
 ((p + q) + q) + q &\stackrel{!}{=} 100 = p
 \end{aligned}$$

Comparando:

$$\begin{aligned}
 p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
 q &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
 2q &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,002 \cdot 10^3 \\
 3q &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,003 \cdot 10^3 \\
 p + 2q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,002 \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \cdot 10^3 = 100 \\
 &\quad \uparrow \text{16}^{\text{to}} \text{ decimal} \\
 &\quad \underbrace{0\,02}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3 \\
 p + 3q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,003 \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \cdot 10^3 = 100 \\
 &\quad \uparrow \text{16}^{\text{to}} \text{ decimal} \\
 &\quad \underbrace{0\,03}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3
 \end{aligned}$$

```
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}") # epsilon = 2.220446049250313e-16

p = 100
q = 1e-15

calculo1 = (p + q) + q
calculo2 = ((p + q) + q) + q
calculo3 = p + 2*q
calculo4 = p + 3*q

print(f"p = {p}\nq = {q}")
print(f"(p + q) + q = {calculo1}")
print(f"((p + q) + q) + q = {calculo2}")
print(f"p + 2q = {calculo3}")
print(f"p + 3q = {calculo4}")
```

c) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

d) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

e) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

f) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

g) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

h) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

i) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

j) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

k) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

l) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

m) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 8. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 9. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 10. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 11. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🚀, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

🐙¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, 🌟 al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Ejercicio 12. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 17. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 18. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 19. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 20. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 21. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 22. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 23. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 24. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 25. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicios de parciales: