

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 30/01/26 @ 19:28

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
 - Ejercicios de la guía:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.
12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.
21.

- ## • Ejercicios de Parciales

1. **2.** **3.** **4.** **5.**

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:

30/01/26 @ 19:28

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:

Espacios Vectoriales: Palabras guías

En un conjunto $A \neq \emptyset$

• **Operación:** $(a * b) = c$. Es una función $* : A \times A \rightarrow A$

- i) $*$ es *asociativa* si $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$.
- ii) $*$ tiene elemento neutro e si $e * a = a * e = a \quad \forall a \in A$.
- iii) si $*$ tiene elemento neutro e todo elemento tiene *inverso* para $*$ si $\forall a \in A \quad a * a' = a' * a = e$.
- iv) $*$ es *comutativa* si $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$.

• **Grupo:** $(A, *)$ es un grupo si se satisfacen i), ii) y iii). Si además se satisface iv) se tiene un *grupo abeliano o conmutativo*.

• **Anillo:** $(A, +, \cdot)$. Para ser anillo se debe cumplir:

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo.
- ii) \cdot es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
- iii) Vale distribuir: $\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$

Si además de cumplir eso, \cdot es conmutativa $(A, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo*.

• **Cuerpo** $(K, +, \cdot)$: Un conjunto K , $+$ y \cdot operaciones de K , es un cuerpo si $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso.

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo,
- ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y
- iii) vale la propiedad distributiva de \cdot con respecto a $+$.

• **Acción** \cdot : es una función $\cdot : A \times B \rightarrow B$.

• **K -espacio vectorial:** Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en V y sea \cdot una acción de K en V . Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un K -espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.
- ii) La acción $\cdot : K \times V \rightarrow V$ satisface:
 - a) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall a \in K; \quad \forall v, w \in V$.
 - b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
 - c) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$.
 - d) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad \forall a, b \in K; \quad \forall v \in V$.

Los elementos de V son *vectores* y los elementos de K se llaman *escalares*. La acción \cdot se llama *producto por escalares*.

⚠ Dejo de escribir a " \cdot " en rojo, porque no hay problema cuando el punto " \cdot " actúa sobre un elemento de K y uno de V o entre 2 de K .

• **Subespacios:** Subconjunto de un K -espacio vectorial. Sea V un K -espacio vectorial y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y solo si valen las siguientes condiciones:

- i) $0 \in S$
- ii) $v, w \in S \implies v + w \in S$
- iii) $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$.

- **Suma directa de subespacios:** Sea V un K -espacio vectorial y sean S_1, \dots, S_r existen únicos $s_i \in S_i, 1 \leq i \leq r$, tales que $w = s_1 + \dots + s_r$. En este caso se dice que W es la *suma directa de los subespacios* S_1, \dots, S_r y se nota:

$$W = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_r,$$

equivalentemente

$$W = S_1 + \dots + S_r \text{ para cada } 1 \leq j \leq r, \text{ vale } S_j \cap (S_1 + S_2 + \dots + S_{j-1} + S_{j+1} + \dots + S_r) = \{0\}.$$

- **Combinación lineal:**

Sea V un K -espacio vectorial, y sea $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$. Una *combinación lineal* de G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

- **Independencia lineal:** Sea V un K -espacio vectorial y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V . Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *linealmente independiente* (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \cdot v_\alpha = 0 \implies a_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in I$$

- **Bases y dimensión:**

- **Escritura única:** Sea V un K -e.v. y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto l.i. Entonces cualquier $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ si puede escribirse de una manera única como combineta de A .
- **Definición base:** Sea V un K -e.v. . $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto. Se dice que es una *base de V* si:
 - A genera todo V .
 - $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ son l.i.
- Sea V un K -e.v. de dimensión n , la base canónica de E se define como $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ con

$$e_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- **Dimensión:** Sea V un K -e.v. . $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces cualquier otra base B' de V tiene la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es *la dimensión de V* .

- **Espacio columna:** Si $A = (A_1 | \dots | A_n)$. El espacio columna de A es $col(A) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

- **Espacio fila:** Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$. El espacio fila de A es $fil(A) = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$

- **Matrices:**

- **Definición de matriz:**

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / A_{ij} \in K \quad \forall i, j \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}.$$

- **Igualdad de matrices:**

Dos matrices de la misma dimensión A y A' serán iguales:

$$A = A' \iff A_{ij} = A'_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

- *Operaciones de matrices:*

Suma $A + A'$, producto de un escalar por una matriz αA y producto entre 2 matrices $A \cdot B$.

$$\begin{aligned}(A + A')_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + A'_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ (\alpha A)_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha A_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ C_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} & (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r).\end{aligned}$$

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} & \cdots & A \cdot \begin{pmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{mr} \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Una factorización que se puede hacer pensando en esto último, $A = C \cdot R$, donde:

- C tiene como columnas las columnas *linealmente independientes* de A ,
- R tiene como filas a *combinaciones lineales* de las filas de A , $\text{fil}(A) = \text{fil}(R)$.

- *Inversa de una matriz:* $A \in K^{n \times n}$ es inversible si $\exists B \in K^{n \times n}$ tal que $A \cdot B = Id$.

₁₎ *Cálculo de determinantes:*

- ▲ Dada $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ matriz cuadrada, definimos el determinante como

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) & n > 1 \end{cases}$$

donde M_{ij} es la matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j .

$$\text{▲ Si } A \in K^{2 \times 2} / \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- ▲ Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$), un ejemplo con $n = 3$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- ▲ Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

₂₎ *Clasificación de un sistema a partir de su determinante:*

- ▲ Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}\textcolor{red}{x}_1 + a_{12}\textcolor{red}{x}_2 + \dots + a_{1n}\textcolor{red}{x}_n = \textcolor{blue}{b}_1, \\ a_{21}\textcolor{red}{x}_1 + a_{22}\textcolor{red}{x}_2 + \dots + a_{2n}\textcolor{red}{x}_n = \textcolor{blue}{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\textcolor{red}{x}_1 + a_{n2}\textcolor{red}{x}_2 + \dots + a_{nn}\textcolor{red}{x}_n = \textcolor{blue}{b}_n \end{cases}$$

- ▲ Se lo puede llevar a forma matricial así:

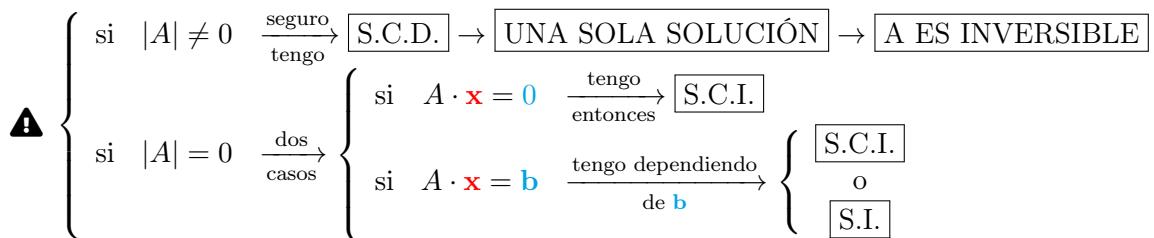
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{x}_1 \\ \textcolor{red}{x}_2 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{b}_1 \\ \textcolor{blue}{b}_2 \\ \vdots \\ \textcolor{blue}{b}_n \end{pmatrix}$$

⚠ En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\mathbf{b} = 0]{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

⚠ Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



⌚3) Clasificación de un sistema en general: Teorema de Rouché-Frobenius

i) Dado un sistema de m ecuaciones y n incognitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_1, \\ a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x}_1 + a_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_m \end{array} \right.$$

ii) Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de coeficientes}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{compacto}]{\text{más}} A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

iii) Para resolver por triangulación:

$$A^* = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & \mathbf{b}_m \end{pmatrix}}_{\text{matriz ampliada}} \xrightarrow[\text{compacto}]{\text{más}} A^* = (A|\mathbf{b})$$

iv) ⚠ Para clasificar, primero hay que calcular

$$\operatorname{rg}(A^*) \text{ y } \operatorname{rg}(A)$$

Esos rangos se calculan por ejemplo, triangulando las matrices A y A^*

Luego si:

$\operatorname{rg}(A^*) > \operatorname{rg}(A) \rightarrow$ Sistema incompatible \rightarrow ¡No hay solución!

$\operatorname{rg}(A^*) = \operatorname{rg}(A) \rightarrow \begin{cases} \operatorname{rg}(A^*) = n \rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \rightarrow \text{Única solución!} \\ \operatorname{rg}(A^*) < n \rightarrow \text{Sistema Compatible indeterminado} \rightarrow \infty \text{ soluciones!} \end{cases}$

Ejercicios de la guía:

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en \mathbb{R} o en \mathbb{C} . Si la solución única, puede verificarse el resultado en Python utilizando el comando `np.linalg.solve`.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

(a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \quad F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$-\frac{1}{5} \cdot F_2 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$F_3 + 2F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 & \xrightarrow{\text{y } \star^2} x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = -\frac{9}{5} & \xrightarrow{\star^1} x_2 = -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5} & \Leftrightarrow x_3 = -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \xrightarrow{\text{como arriba}} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right)$$

paso a sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \xrightarrow{\text{y } \star^2} x_1 = -x_3 + 2x_3 + x_3 = 2x_3 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 & \xrightarrow{\star^1} x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 = x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = -x_3 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Como el item anterior, más incógnitas que ecuaciones, así que no tiene solución única.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como en la ultima ecuación quedó que $0 = -1$, no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & \xrightarrow{\star} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de \times y \div por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \xrightarrow{z = a + ib} \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{i}F_1 \rightarrow F_1 \\ F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 = i \rightarrow x_1 = i + (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 = -i \rightarrow x_3 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1-i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 = 0 \rightarrow x_1 = (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

(d) Hay más incógnitas que ecuaciones, no va a tener solución única.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array} \right) \quad 2F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 - 4 &\stackrel{\star^1}{=} (5+i)x_2 + 11(2 - 2x_1 + (1-i)x_2) - 4 = \\ &= (5+i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11 - 11i)x_2 - 4 = (16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8 - 5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} \\ x_3 &= -\frac{(-15 - 24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5 - 8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \end{aligned}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} -2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 &= (5+i)x_2 + 11x_4 \stackrel{\star^1}{=} (5+i)x_2 + 11(-2x_1 + (1-i)x_2) = \\ &= (5+i)x_2 - 22x_1 + (11-11i)x_2 = (16-10i)x_2 - 22x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} \\ x_3 &= -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \end{aligned}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \\ -2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 💬

👉 Tomás A. 💬

2.

- (a) Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

- (b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k , resolverlo.

- (a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = \textcolor{blue}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + \textcolor{blue}{(-1)} \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + \textcolor{blue}{(1)} \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$

$$= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Por lo tanto sé que para que el sistema no tenga solución única debe ocurrir que:

$$k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & 2 \end{array} \right) \quad F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \quad F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

No hay solución con $k = 1$

Si $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & 2 \end{array} \right) \quad F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \quad F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \star^1$$

Habrá infinitas soluciones con $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso $k = -1$:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2 x_3 = 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes (\star^1) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

⭐ Tomás A. 🎉

3. ⚡... hay que hacerlo! ⚡

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 📌, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al 🐿.

4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1), (2, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar el resultado obtenido usando Python 🐍. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # librería para graficar.

# ...
# Acá, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a, b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{RREF}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

⚠ Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien ⚡

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 💁

👉 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ⭐ al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

(a) Para encontrar un sistema de generadores se resuelven las ecuaciones que definen a los espacios:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle 1, 1, 2 \rangle$$

Por lo tanto un sistema de generadores del subespacio es:

$$\boxed{\langle 1, 1, 2 \rangle}$$

(b) Describo a \mathbf{A} y a $-\mathbf{A}^t$ como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -a_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

(c) Veo que $\text{tr}(A)$ es la función que suma los elementos de la diagonal principal de una matriz.

La matriz expandida es de la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces, la restricción que me impone este subespacio es:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

Despejando de la ecuación nos queda:

$$A_{11} = -A_{22} - A_{33}$$

Que de forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} -A_{22}-A_{33} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{22} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{33} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + A_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada coeficiente que quedó libre es un generador:

$$\left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

Cualquier combinación lineal de esas matrices satisface que su traza sea cero.

(d) Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 = 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{F_2 - iF_1 \rightarrow F_2} \begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + ix_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

Acomodando eso el sistema de generadores del subespacio:

$$\boxed{\langle (-1, 1, 1, 0), (-1 + i, 1, 0, 1) \rangle}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 👩‍🦰

👉 Iñaki Frutos 👩‍🦰

6. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- (b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.
- (c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Antes de arrancar, siempre conviene verificar que los elementos de S sean *linealmente independientes*. Cuando nos dan un subespacio expresado en sus generadores, conviene eliminar la información que sobra. Una forma de hacer esto es poner a los *generadores* de S como filas de una matriz y triangular. Al triangular lo que se está haciendo son operaciones lineales para ver si estos coinciden:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

Sobra un elemento. Puedo eliminar cualquiera de los 3 siempre y cuando los restantes sean *linealmente independientes*. Reescribo al subespacio como:

$$S = \{(1, -1, 2, 1), (1, 1, -1, -1)\}$$

Lo cual es una base de S .

- (a) Para ver si $(2, 1, 3, 5) \in S$ hay que realizar una combinación lineal de los elementos del subespacio S igualada al vector en cuestión.

$$(2, 1, 3, 4) = a \cdot (1, -1, 2, 1) + b \cdot (1, 1, -1, -1) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Eso es un absurdo, dado que $a \cdot 0 + b \cdot 0 \neq 7 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Es así que:

$$(2, 1, 3, 4) \notin S$$

- (b) Primero bautizo a ese subespacio como T :

$$T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

A mí me gusta atacar estos problemas primero viendo las *dimensiones* de cada subespacio. Si T es un subespacio que vive en \mathbb{R}^4 , y además está dado por comprensión con una sola ecuación, entonces $\dim(T) = 3$ y como $\dim(S) = 2$ sé que:

$$T \not\subseteq S$$

Si no lo ves directamente, siempre podés calcular los generadores de T a partir de la ecuación, y vas a obtener algo así:

$$T = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

- (c) Este está medio regalado también, porque hay uno de los generadores de S que no cumple la ecuación de T , así que ya puedo concluir que:

$$S \not\subseteq T$$

Si no te parece que sea tan evidente, el procedimiento es armar una *combinación lineal* de los elementos de S y meter eso en la ecuación de T . Ese es el método para buscar $S \cap T$. Si esa intersección te da que $\dim(S \cap T) = 2$ entonces todo S debería estar en T . Pero bueh, hacé las cuentas y te va a dar que $\dim(S \cap T) = 1$.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌟

7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V , y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$.
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$.
- (d) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \quad \forall i, j\}$ y $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.
- (e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle$ y $T = \{(x \in \mathbb{C}^3) : (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

- (a) Si los subespacios tienen intersección es una buena idea calcularla para armar el subespacio suma. Busco $S \cap T$, para eso pido que (x, y, z) cumpla ambas ecuaciones de los subespacios:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases} \xrightarrow[(x, y, z)]{\text{meto en}} (x, y, z) = (-z, -z, z) = z \cdot (-1, -1, 1)$$

Obteniendo así una base de la intersección:

$$S \cap T = \{(-1, -1, 1)\}$$

La intersección está generada por un solo vector así que $\dim(S \cap T) = 1$ por lo tanto usando el teorema de la dimensión para la suma de subespacios:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Es así que:

$$S + T = \mathbb{R}^3 \implies B_{S+T} = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}.$$

Peeeeero suponete que querés hacerlo de formás más mecánica, lo que podrías hacer es armar la base con algo de info:

Sé que:

$$\dim(S) = 2, \dim(T) = 2$$

Por lo tanto para encontrar una base *linda* de $S + T$, tengo que encontrar un conjunto de generadores, *linealmente independientes* que tenga adentro a todo S y a todo T . Saco un sistema de generadores de S y uno de T :

$$S = \langle(1, 0, -3); (0, 1, 2)\rangle \quad y \quad T = \langle(-1, 0, 1); (0, 1, 0)\rangle$$

Un sistema de generadores de $S + T = \langle(1, 0, -3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1); (0, 1, 0)\rangle$. Esto no es una base, porque tiene seguro algún vector l.d. con el resto. Entonces puedo sacar ese vector y ver si el resto son l.i.:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad F_3 + F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad F_4 - F_2 \rightarrow F_4 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Listo me quedo con los 3 vectores que sobrevivieron a la triangulación. Una base de $S + T$:

$$S + T = \{(1, 0, -3), (0, 1, 2), (0, 0, -2)\}$$

A mí me gusta usar una base que tenga la info de la intersección y saber a qué subespacio pertenece cada vector, porque me da más control en caso de tener que hacer algo luego con esa base. Onda, mirá el $(0, 0, -2)$ de la base anterior, ese vector no está ni en S ni en T ! Da un poco de miedito, no ?

Por eso me armo una base con un vector de S y uno de T sacados a ojo y también uso la intersección $(-1, -1, 1)$ que ya se calculó antes. Esto va a ser un subespacio de $S + T$, porque tiene a todo S y a todo T :

$$S + T = \{(1, 0, -3), \overset{\in S}{\underset{\in T}{\textcolor{blue}{(1, 1, -1)}}}, \overset{\in S}{\underset{\in T}{(1, 0, -1)}}\}$$

Son *linealmente independientes*, sí. De no haberlo sido elegía otro vector hasta que alguno dé. Comprobalo con este código:

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[1, 0, -3], [1, 1, -1], [1, 0, -1]])
b = [0, 0, 0]
```

```
# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
x, y, z = np.linalg.solve(A, b)

print(f"x = {x}\ny = {y}\nz = {z}")
```

Los subespacios no están en suma directa.

- (b) Se puede ver a ojo que $\dim(S) = 1$ y que $\dim T = 2$ es decir que podrían estar en suma directa, porque podría no haber intersección. Voy a intentar calcularla. Me armo un elemento genérico de T y veo si cumple las ecuaciones de S :

$$t_g = a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (5, 7, 3) = (\textcolor{blue}{a + 5b}, \textcolor{blue}{a + 7b}, 3b) \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (\textcolor{blue}{a + 5b}) - 2 \cdot (\textcolor{blue}{a + 7b}) + 3b = 0 \xrightarrow{\star^1} a = 0 \\ (\textcolor{blue}{a + 5b}) - (\textcolor{blue}{a + 7b}) = 0 \Leftrightarrow b \stackrel{\star^1}{=} 0 \end{cases}$$

Ese resultado me dice que la intersección es el 0 o dicho de otra manera no tienen intersección:

$$B_{S \oplus T} = \mathbb{R}^3$$

Los subespacios S y T están en suma directa.

- (c) Lo primero que odio cuando veo este ejercicio es que tengo que ver si S tiene generadores *linealmente dependientes* y lo segundo que odio es que voy a tener que pasar a ecuaciones algo, para que sea fácil de calcular la intersección:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 24 \end{array} \right) \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \quad F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{estos generadores}]{\text{me quedo con}} S = \{(1, 1, 3); (0, 1, 1)\}$$

Sé que seguro va a haber una intersección entre S y T , porque hay 4 vectores y estoy laburando en \mathbb{R}^3 . Busco las ecuaciones que generan a S :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{array} \right) \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \quad F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 3x_1 \end{array} \right) \quad F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 - 2x_1 \end{array} \right)$$

Para que ese sistema sea compatible necesito que:

$$x_3 - x_2 - 2x_1 = 0 \implies S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / x_3 - x_2 - 2x_1 \stackrel{\star^1}{=} 0 \right\}$$

Listo, ahora es cuestión de hacer como en el item anterior, agarro un genérico de T y lo meto en la ecuación de S :

$$t_g \stackrel{\star^2}{=} (a + 3b, a + 2b, b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} \left\{ \begin{array}{l} b - (a + 2b) - 2(a + 3b) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{3}b \\ \text{reemplazo en } \star^2 \end{array} \right. t_g = b \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1 \right)$$

Ese vector t_g , es un vector de T que también cumple la ecuación de S por lo tanto también está en S :

$$B_{S \cap T} = \{1, -2, 3\}$$

Los subespacios no están en suma directa. Y $S + T = \mathbb{R}^3$.

- (d) S es un subespacio describiendo matrices *simétricas*, es decir que $A = A^T$ y T el subespacio que cumpla que $t_{11} = -t_{12} - t_{13}$. Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{12} + t_{13}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{12} + x_{13}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T . El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ a ver que onda la dimensión:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9 \implies S + T = \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

No están en suma directa y la suma es todo el espacio de matrices de 3×3

- (e) Armo un vector genético de S para meter en ecuaciones de T :

$$s_g = a \cdot (i, 1, 3 - i) + b \cdot (4, 1 - i, 0) \xrightarrow{\text{reemplazo}} \begin{aligned} (1 - i)(4b + ia) - 4(a + b) + 3a - ia &= 0 \\ b - i4b &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto con $b = 0$ la intersección queda:

$$B_{S \cap T} = \{(i, 1, 3 - i)\}$$

Usando el teorema de la dimensión para suma de subespacios:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Los espacios no están en suma directa y $S + T = \mathbb{C}^3$.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 💁

8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

- (a) $\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle$.
 (b) $S \cap T = \langle(0, 1, 1)\rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1, k, 2), (-1, 2, k)\rangle$.

- (a) Hay una igualdad de subespacios. Para que estos sean iguales tienen que tener la misma dimensión. Dado que el subespacio

$$\dim(\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle) = 2,$$

quiero que el subespacio de la derecha también tenga dimensión 2, pero tiene 3 vectores, así que busco k para que:

$$\dim(\langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle) = 2$$

también. Dicho de otra manera, quiero que esos 3 vectores sean *linealmente dependientes*:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 1 & 1 & k \end{array} \right| \quad F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & k^2 + k - 2 \end{array} \right| = (-1)^6 \cdot (k^2 + k - 2) \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & k \\ -1 & -1 \end{array} \right| \\ \stackrel{!}{=} (k^2 + k - 2) \cdot (-1 + k) = 0 \\ \Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Ahora sé que la única forma de que la dimensión sea 2 es para los k hallados.

¿Cómo queda el enunciado con los valores de k hallados?:

$$\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle \stackrel{?}{=} \begin{cases} \text{si } k = -2 \rightarrow \langle(1, -2, -4), (-1, -1, 2), (1, 1, -2)\rangle \stackrel{!}{=} \langle(1, -2, -4), (1, 1, -2)\rangle \\ \text{si } k = 1 \rightarrow \langle(1, 1, 2), (-1, -1, -1), (1, 1, 1)\rangle \stackrel{!}{=} \langle(1, 1, 2), (1, 1, 1)\rangle \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver *si se intersectan en todos sus elementos*. Voy a buscar la expresión por comprensión de $\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle$, es decir la fórmula que deben satisfacer los elementos para pertenecer al subespacio:

$$a \cdot (-2, 1, 6) + b \cdot (3, 0, -8) = (x_1, x_2, x_3)$$

Ese sistema es literalmente: ¿Cómo combino los elementos para formar algo del subespacio?, es un sistema que debe ser compatible, porque seguro que *algo* tiene que salir de hacer una combinación lineal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \quad F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ \frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ F_3 + 8F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \end{array} \right)$$

Como dije antes, este sistema debe ser compatible, no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es \emptyset . Debe cumplir:

$$\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle \stackrel{!}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \star^1$$

Encontrar la intersección ahora con la ecuación del subespacio es fácil. Se arma un genérico y se mete en la ecuación:

Caso con $k = -2$:

$$(a + b, -2a + b, -4a - 2b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a + b) - 2(-2a + b) + 3(-4a - 2b) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con $k = -2$

Caso con $k = 1$:

$$(a + b, a + b, 2a + b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a + b) - 2(a + b) + 3(2a + b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluimos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$k = -2$$

(b)

$$a \cdot (1, k, 2) + b \cdot (-1, 2, k) = (a - b, ak + 2b, 2a + bk) = (0, 1, 1) \xrightarrow{\text{F}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{array} \right)$$

Para que el $(0, 1, 1) \in T$ ese sistema tiene que tener solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{array} \right) \quad F_2 - kF_1 \xrightarrow{k \neq 0} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{array} \right) \quad F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad F_3 - F_2 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Este sistema será compatible con $k \neq -2$. No me quiero olvidar del caso $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces con $k = 0$ también es compatible, así que acá no pasó nada. Con $k = -2 \implies (0, 1, 1) \notin T$.

Corroboro ahora que haya intersección entre S y T . Hago un genérico de T :

$$a \cdot (1, k, 2) + b \cdot (-1, 2, k) = (a - b, ak + 2b, 2a + bk)$$

y lo reemplazo en ecuación de S :

$$a - b + ak + 2b - 2a - bk = 0 \Leftrightarrow -a + b + ak - bk = 0 \Leftrightarrow (-a + b)(1 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Si $k = 1$ no tengo condiciones sobre a y b es decir que la dimensión de la intersección sería todo T , eso es algo malo, porque la dimensión debe ser 1.

Cuando es $a = b$ no me importa el valor de k , pero no olvidar \star^1 . Entonces, si quiero que $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ necesito:

$$k \notin \{-2; 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌟

9. Sean S y T subespacios de un K -espacio vectorial V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Si bien la tentación de pensar que

$$S \cup T = S + T,$$

eso no es en general así.



$S + T$ es el subespacio que tiene a todos los elementos de la pinta $s_i + t_j$.



$S \cup T$ es un conjunto con los elementos de S y los elementos de T , no necesariamente está ahí el elemento $s_i + t_j$.

Lo que si sabés es que:

$$S \cup T \subseteq S + T$$

Intuitivamente lo que este ejercicio sugiere, es que para que $S \cup T$ sea un subespacio, S no debería aportarle nada nuevo a T y viceversa, para que al sumar 2 elementos de $S \cup T$, eso seguro caiga dentro del mismo conjunto, porque estarías sumando dos elementos de S o dos de T . Ponele.

Para probar la *doble implicación*, pruebo la ida y la vuelta. Arranco por la que parece más fácil:

(\Leftarrow) Esta sale más directa.

Si:

$$\begin{aligned} S \subseteq T &\implies S \cup T = T \\ &\text{o} \\ T \subseteq S &\implies S \cup T = S \end{aligned}$$

La explicación es análoga para las dos implicaciones. En el caso $S \subseteq T$, los elementos de S no van a aportar nueva información al subespacio. Si T es un subespacio por hipótesis de enunciado y $S \cup T = T$, listo.

(\Rightarrow) Está es medio chino:

Vamos por el absurdo, en vez de laburar con $p \implies q$, laburo con $p \implies \sim q$ llegando a una contradicción.

Supongamos que:

$$T \not\subseteq S \text{ y que } S \not\subseteq T \implies \exists s_1, t_1 \text{ tal que } \star^1 \left\{ \begin{array}{l} s_1 \in S \text{ y } s_1 \notin T \\ t_1 \in T \text{ y } t_1 \notin S \end{array} \right.$$

Por hipótesis $S \cup T$ es un subespacio! Por lo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \in S \xrightarrow[S \cup T \text{ es subespacio}]{} s_1 \in S \cup T \\ t_1 \in T \xrightarrow[T \cup T \text{ es subespacio}]{} t_1 \in S \cup T \end{array} \right. \implies \underbrace{s_1 + t_1 \in S \cup T}_{\substack{\text{esto no tiene} \\ \text{nada que ver} \\ \text{con } S+T}}$$

El subespacio $S \cup T$ tiene elementos que pertenecen a T o elementos que pertenecen a S , de forma tal que que sumar 2 elementos cualesquiera también están en $S \cup T$, en particular esos de \star^1 :

$$\underbrace{s_1 + t_1}_{\in S \cup T} \overset{\star^2}{\in} S \vee \underbrace{s_1 + t_1}_{\in S \cup T} \overset{\star^3}{\in} T$$

En el caso \star^2 tengo:

Dado que S es un subespacio, si $s_1 \in S$, entonces también $-s_1 \in S$, y nuevamente la suma de 2 elementos cualesquiera de S también estarán en S :

$$\underbrace{s_1 + t_1 + (-s_1)}_{\in S \cup T} \in S \iff \color{red}{t_1 \in S}$$

def. subespacio

Contradicciendo lo que se supuso en \star^1 , donde $t_1 \in T$, pero $t_1 \notin S$. Llegar a la contradicción de que $s_1 \in T$ es análoga.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ Fede Mancilla ⚡

⭐ Iñaki Frutos ⚡

⭐ naD GarRaz ⚡

10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K . Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, 1), (0, 2, 1, -5)\} \in \mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i, i), (2, -1+i)\} \in \mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

[Acá las definiciones de combinación lineal y coso](#) (\leftarrow click)

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{triangulando}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Los vectores son *linealmente independientes*.

(b) Ahora los coeficientes α y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot (1-i, i) + \beta \cdot (2, -1+i) = 0 \\ (1-i) & 2 \\ i & -1+i \\ \frac{1}{1-i} \cdot F_1 \rightarrow F_1 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ i & -1+i & 0 \end{array} \right) \\ F_2 - i \cdot F_1 \rightarrow F_2 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{pmatrix} \rightarrow \{ \alpha = (1+i)\beta \}$$

Y estos bichos no serían *linealmente independientes*.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
y naD GarRaz Q

11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S . Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1, 1, 2); (1, 3, 5); (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

(a) Demasiados vectores en ese sistema de generadores, voy a quedarme solo con los *linealmente independientes*, así obteniendo una base del subespacio S :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 5F_1 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que una posible base para S :

$$B_S = \{(1, 1, 2); (0, 2, 3); (0, 0, 2)\}$$

La base genera todo \mathbb{R}^3 .

(b) Ataco parecido, pero voy a desarrollar mejor la forma de triangular, porque a veces acá uno puedo entrar en la rosca de como *estirar la matrices* para luego triangular. Planteo una combineta:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & a+d+ib+ic \\ a+b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso a sistema de ecuaciones y triangulo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a+d = 0 \\ a+d+ib+ic = 0 \\ a+b = 0 \\ a+b = 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \\ iF_3 - F_2 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -d \\ b = d \\ c = -d \end{array} \right.$$

En el sistema me queda solo una variable libre. Necesito 3 matrices para formarla. También veo que me quedaron 3 filas no nulas es decir que el rango fila es 3, por lo que el rango columna también es 3 y las columnas en esa matriz sería como haber puesto a las matrices (estiradas) y al triangular, eliminar una así opppppteniendo 3 matrices l.i..

Agarro ahora 3 matrices *linealmente independientes*:

Me quedo entonces con la base para S :

$$B_S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

La dimensión de $S = 3$ y $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ con $K = \mathbb{C}$ tiene dimensión 4, así que necesito un elemento linealmente independiente para extender la base:

Si no se encuentra a ojo, una forma mecánica para encontrar la matriz es poner a las matrices de las bases en filas, triangular y ver ahí una que quede *linealmente independiente*.

$$B_S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

Nota que podría ser de interés:

Si estoy laburando en un espacio tipo \mathbb{C}^2 hay que prestarle muchísima atención al cuerpo K , porque mirá las bases de este espacio según el cuerpo:

$$\begin{aligned} K = \mathbb{C} &\rightarrow B_{\mathbb{C}^2} = \{(1, 0); (0, 1)\} \\ K = \mathbb{R} &\rightarrow B_{\mathbb{C}^2} = \{(1, 0); (0, 1); (i, 0); (0, i)\} \end{aligned}$$

Onda en uno la dimensión es 2 y en el otro 4 🎉.

Fin Nota que podría ser de interés.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 💬

👉 Fede Mancilla 💬

12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

Es un *si solo si* así que sale doble implicación:

(\Leftarrow) Para este lado sale un poco más fácil, por eso arranco por acá.

Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Es inmediato ver que en este caso a pesar de que los coeficientes z_i , valen todos 0, es decir que particularmente son reales también! Puedo tomar $r_i = z_i$ y listo, tengo la combinación lineal igualada a cero y todos los coeficientes son reales y nulos.

(\Rightarrow) Este es un poco más picante, porque no es *obvio* que deba ocurrir ¿O no lo es para mí?: Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i \stackrel{\star^1}{=} 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \stackrel{\star^2}{\quad} \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Laburo un poco \star^2 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i &= \underbrace{z_1 \cdot v_1 + \cdots + z_k \cdot v_k}_\star = 0 \\ &\xleftarrow[\substack{z_j = a_j + ib_j \\ \star^3}]{} \quad \xrightarrow[\substack{! \\ \star^4}]{} \\ (a_1 + ib_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_k + ib_k) \cdot v_k &= 0 \\ &\xleftarrow[\substack{v_j \in \mathbb{R}^n \\ \star^4}]{} \\ \underbrace{(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k)}_\star + i \underbrace{(b_1 \cdot v_1 + \cdots + b_k \cdot v_k)}_\star &= 0 + i0 \end{aligned}$$

Para que esa igualdad se cumpla debe ocurrir que las combinetas en \star^3 y \star^4 sean 0. Para que esas combinaciones sean 0 sí o sí los coeficientes a_i y b_i deben ser todos nulos porque son reales y los v_i son linealmente independientes sobre \mathbb{R} \star^1 . Y como

$$z_i = a_i + ib_i \implies \sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \implies \{1, \dots, v_k\} \text{ son linealmente independientes sobre } \mathbb{C}.$$

Nota que puede ser de interés:

Mirá que ese último !! es porque los $v_j \in \mathbb{R}$, porque si estuvieran en \mathbb{C} , por ejemplo:

$$\{(i, 1), (1, -i)\}$$

Eso $v_j \in \mathbb{C}$ si laburás con $K = \mathbb{R}$ son MEGA linealmente independientes, peeeero si $K = \mathbb{C}$:

$$i \cdot (i, 1) + 1 \cdot (1, -i) = 0$$

todo lo contrario. Solo se llega a las expresiones \star^3 y \star^4 gracias a que $v_j \in \mathbb{R}^n$.

Fin de Nota que puede ser de interés:

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

✖ naD GarRaz ✎

13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

- (a) Probar que si $A \in K^{m \times n}$ satisface que $Ax = 0 \ \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx \ \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

- (b) Probar que si $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j -ésima de B , entonces $AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$ (es decir, AB_j es la columna j -ésima de AB).

- (a) Tengo $A \in K^{n \times n}$ entonces Ax :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

Probando particularmente con la base canónica de K^n $x \in K^n$ con $x \in B$, donde

$$B = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 1)\}$$

muestro así que las columnas de A son siempre nulas.

Usando el resultado de recién:

$$Ax = Bx \iff (A - B)x = 0 \iff Cx = 0$$

Dado que $Cx = 0 \ \forall x \in K^n$ se muestra que $A = B$.

- (b) Puedo escribir a los elementos de producto de una matriz $A^{m \times n}$ por otra $B^{n \times r}$ como:

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \quad \forall i, j \text{ con } 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq r$$

Si fijo $j = 1$

$$[AB]_{i1} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{k1} \quad \forall i \text{ con } 1 \leq i \leq m$$

Obtengo así el elemento del producto de la i -ésima fila de A por columna 1 de B . Haciendo para todos los valores de i obtengo:

$$AB_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1k} B_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{mk} B_{k1} \end{pmatrix}}_{\in K^{m \times 1}}$$

Hacer eso para $1 \leq j \leq r$ da:

$$AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$$

o eso espero , como querías mostrar.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

14. Sean las siguientes matrices de 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto $AB = C$ en bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $C = AB$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

(a) $A_{11} = [a_{11}], A_{12} = [a_{12} \ a_{13}], A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$B_{11} = [b_{11}], B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

(b) $A_{11} = [a_{11} \ a_{12}], A_{12} = [a_{13}], A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$$B_{11} = [b_{11}], B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

(c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{21} = [a_{31}], A_{22} = [a_{32} \ a_{33}]$

$$B_{11} = [b_{11}], B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

¡¿Qué interesante, no?! Peero: *¿Qué es esta verga?* A esta altura ya está clarísimo que para poder multiplicar dos matrices, se tiene que cumplir que *la cantidad de columnas del primer factor sea igual a la cantidad de filas del segundo*:

$M \cdot M'$ se puede hacer si $M \in K^{n \times m}$ y $M' \in K^{m \times l}$

Hay que prestar atención a eso y después hacer el producto y suma en bloques, es un *parecido pero distinto*.

(a)

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico $A \cdot B$ en bloques:

■₁) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = [1] \cdot [1] + \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 = C_{11} \in K^{1 \times 1}$$

■₂) Busco el bloque C_{12} ¿Se podrá hacer el cálculo? ⊕:

$$A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = [1] \cdot [1 \ 1] + \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = C_{12} \in K^{1 \times 2}$$

■₃) Busco el bloque C_{21} ¿Se podrá hacer el cálculo? ⊖:

$$A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1] + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{2 \times 1}$$

■₄) Busco el bloque C_{22} ¿Se podrá hacer el cálculo? ☺:

$$A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2 \times 2}$$

Si todavía no te volaste la tapa de los sesos esto queda así:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Sí, multiplicar en bloques dio lo mismo que multiplicar como siempre. ¿Es magia? NO, es ~~magia~~ matemagia ~~magia~~.

(b)

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico $A \cdot B$ en bloques:

■₁) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Se pudrió todo}$$

No me *matchean* las dimensiones como para poder multiplicar.

(c)

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico $A \cdot B$ en bloques:

■₁) Busco el bloque C_{11} ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = C_{11} \in K^{2 \times 1}$$

■₂) Busco el bloque C_{12} ¿Se podrá hacer el cálculo? ☺:

$$A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = C_{12} \in K^{2 \times 2}$$

■₃) Busco el bloque C_{21} ¿Se podrá hacer el cálculo? ☺:

$$A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{1 \times 1}$$

■₄) Busco el bloque C_{22} ¿Se podrá hacer el cálculo? ☺:

$$A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2 \times 2}$$

Esto queda así:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

¿Hay más particiones que funcionarían? Creo que la cosa es que:

Se multiplican siempre bloques de la pinta $A_{ij} \cdot B_{jk}$. Necesito entonces que los bloques que forman la *columna bloque j*-ésima tengan igual cantidad de columnas como filas los bloques que forman la *fila bloque j*-ésima.

Si, no se entendió nada, eso. Ya vendrá alguien y lo escribirá mejor. Ejemplo:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{No se puede}$$

No va a poderse multiplicar, porque la columna 1 de bloques azules, son bloques con 2 columnas, mientras que la fila 1 de bloques magenta tiene solo 1 fila por bloque.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{Se puede } \checkmark$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{Se puede } \checkmark$$

me aburrió

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

↘ naD GarRaz ↗

15. Dadas las bases de \mathbb{R}^3 , $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 1, 1); (2, 0, 1); (1, -1, 3)\}$

- (a) Calcular $[(1, 1, 0)]_B$ y $[(1, 1, 0)]'_{B'}$.
- (b) Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$.
- (c) Comprobar que $C(B, B')[[(1, 1, 0)]_B] = [(1, 1, 0)]_{B'}$.

- (a) Para calcular las coordenadas en una base B :

$$(1, 1, 0) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) \xrightarrow{\text{a ejímmetro}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies [(1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0)$$

En la base B' voy a tener que hacer más cuentas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{?}} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies [(1, 1, 0)]_{B'} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2} \right)$$

⚠ Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien ⚡

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3]])
```

```
b = [1, 1, 0]

# Resuelvo el sistema  $Ax = b$ , y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

print(f"a = {a}\nb = {b}\nc = {c}")
```

(b) Quiero la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los generadores de B en la base B' :

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} (1, 1, 0) &= a_1(-1, 1, 1) + b_1(2, 0, 1) + c_1(1, -1, 3) \\ (0, 1, 1) &= a_2(-1, 1, 1) + b_2(2, 0, 1) + c_2(1, -1, 3) \\ (1, 0, 1) &= a_3(-1, 1, 1) + b_3(2, 0, 1) + c_3(1, -1, 3) \end{cases}$$

Paso ese sistema feo a forma matricial para resolverlo triangulando:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{triangularizar}} \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, b_1, c_1) &= (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \\ (a_2, b_2, c_2) &= (\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) \\ (a_3, b_3, c_3) &= (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}) \end{cases}$$

⚠ Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien ⚡

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3]])
b = [1, 1, 0]

a1, b1, c1 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a1 = {a1}\nb1 = {b1}\nc1 = {c1}\n")

b = [0, 1, 1]
a2, b2, c2 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a2 = {a2}\nb2 = {b2}\nc2 = {c2}\n")

b = [1, 0, 1]
a3, b3, c3 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a3 = {a3}\nb3 = {b3}\nc3 = {c3}\n")
```

Finalmente la matriz $C(B, B')$:

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(c) Lo que hay que hacer es :

$$C(B, B') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Da eso.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 💁

16. Sean $A, A' \in K^{m \times n}$; $B \in K^{n \times r}$; $D, D' \in K^{n \times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

- | | |
|---|--|
| (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ | (e) $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$ |
| (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ | (f) $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$ |
| (c) $(AB)^t = B^t A^t$ | |
| (d) AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas. | (g) $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$ |

Voy a usar [operaciones de matrices](#) (\leftarrow click):

Mucha atención a los índices de las matrices que de eso trata este ejercicio básicamente.

- (a) Quiero probar que $(A + A')^t = A^t + (A')^t$. Un elemento de la suma:

$$[(A + A')^t]_{ij} = [A + A']_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ji} + A'_{ji} = A_{ij}^t + (A')_{ij}^t \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que $(A + A')^t = A^t + (A')^t$.

- (b) Tengo ahora un producto de un escalar por una matriz:

$$[(\alpha \cdot A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha A_{ij}^t \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

- (c) Tengo ahora un producto matricial $(AB)^t = B^t A^t$

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^n B_{ik}^t A_{kj}^t = [B^t A^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que $(AB)^t = B^t A^t$.

- (d) Uso el truco de la multiplicación y transposición como antes:

$$[AA^t]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} A_{kj}^t = \sum_{k=1}^n A_{kj}^t A_{ik} = \sum_{k=1}^n A_{jk} A_{ki}^t = [AA^t]_{ji} = [(AA^t)^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Así queda que el producto de una matriz por su transpuesta $(A \cdot A^t)$ es igual a su transpuesta $(A \cdot A^t)^t$, por lo tanto es simétrica.

Sería lo mismo mostrarlo para para $A^t A$. No tengo ganas de escribirlo.

Entonces queda mostrado que AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

- (e) Quiero mostrar que: $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$. La traza la calculo sumando los elementos diagonales de la matriz:

$$\text{tr}(D + D') = \sum_{k=1}^n D_{kk} + D'_{kk} = \sum_{k=1}^n D_{kk} + \sum_{k=1}^n D'_{kk} = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$$

- (f) Quiero mostrar que: $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$.

$$\text{tr}(\alpha D) = \sum_{k=1}^n \alpha D_{kk} = \alpha \cdot \sum_{k=1}^n D_{kk} = \alpha \cdot \text{tr}(D)$$

(g) Quiero mostrar que: $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$. Parecido a lo hecho antes:

$$\begin{aligned}\text{tr}(DD') &= \sum_{k=1}^n [DD']_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n D_{kl} D'_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n D'_{lk} D_{kl} \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D'_{lk} D_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^n [D'D]_{ll} = \text{tr}(D'D)\end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🌟

17. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n \times n}$ como \mathbb{R} – espacio vectorial:

$$(a) S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es triangular inferior}\} \quad (b) S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es simétrica}\}$$

(a) Si A es triangular inferior:

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ a_{ij} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es un subespacio cuyos elementos son matrices canónicas siempre triangulares inferiores de la pinta:

$$S_1 = \{E^{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall i > j\} \quad \text{y} \quad \dim(S_1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

La multiplicación y suma también resultará en matrices *triangular inferiores*

$$\alpha E^{ij} + \beta E^{kl} \in S_1$$

(b) También es un subespacio, una matriz simétrica:

$$[A]_{ij} = [A]_{ji} \quad \forall i, j$$

S_2 está generado por matrices de la forma:

$$S_2^{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tal que } S_2^{ij} = \begin{cases} E^{ij} + E^{ij} & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Nuevamente la multiplicación por escalares y suma entre matrices simétricas tendrá como resultado a otra matriz simétrica:

$$\alpha \cdot S_2^{ij} + \beta \cdot S_2^{kl} \in S_2$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🌟

18. Calcular el determinante de A en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Acomodo un poco para ver si hago menos cuentas:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_1 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_4 + F_2 \rightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Ahora calculo el determinante, multiplicando los elementos de la diagonal porque es triangular:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right| = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 5 = \boxed{-10}$$

(b) Ataco igual que antes:

$$\left(\begin{array}{ccc} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{iF_2 + F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc} i & 0 & 2+i \\ 0 & 1+i & 2+i \\ 0 & 0 & -4-3i \end{array} \right)$$

Ahora calculo el determinante, multiplicando los elementos de la diagonal porque es triangular:

$$\left| \begin{array}{ccc} i & 0 & 2+i \\ 0 & 1+i & 2+i \\ 0 & 0 & -4-3i \end{array} \right| = i \cdot (1+i) \cdot (-4-3i) = 7-i$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🙏

19.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Una matriz inversible tiene determinante distinto de 0 y rango completo



Voy a estar calculando determinantes con *Laplace*, [acá en la teoría está como hacerlo](#)

(a) En una matriz *triangular superior o inferior*: El determinante es el producto de los elementos diagonales.

$$\det(A) = 1 \neq 0 \implies A \text{ es inversible}$$

Resolviendo el sistema para $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$A \cdot X = I_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[A^{-1}]{} X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Desarrollando por la 3era fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0 \implies A \text{ es inversible}$$

Esta inversa sale pensándolo geométricamente, dado que A es la matriz que rota un punto al rededor del eje z en *sentido antihorario*, la inversa debería rotar en *sentido horario*. Ese cambio de sentido en la rotación es cambiar el signo de θ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En $!$ uso que el la paridad de las funciones:

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

Obviamente podés calcular la inversa como a vos te pinte.

(c) Fijate que sumando Calculo determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Ya en el segundo paso se veía bien que las filas eran *linealmente independientes*. Como el $|A| = 0$, no existe la inversa de A .

(d) Una matriz cuadrada triangulada tiene por determinante le producto de sus elementos diagonales. En este caso:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} = 0$$

La matriz A no tiene inversa.

(e) Como en el ítem anterior:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Tengo que pedir que:

$$\text{La matriz } A \text{ es inversible} \iff a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in [1, n]$$

La inversa de A es fácil de calcular en este caso:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

✖ naD GarRaz 🌟

20. Sean $A, B, C, D \in K^{n \times n}$ y $M \in K^{2n \times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

$$(a) M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

(a) La hipótesis es que A es inversible, es decir que $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ C & I \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} A \cdot I + 0 & AA^{-1}B + 0 \\ C \cdot I + 0 & CA^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(b) Quiero ver que:

$$\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

por propiedad de determinantes \star^1 :

$$\det(AD - ACA^{-1}B) \stackrel{!}{=} \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

Por el apunte de bloques: Si la matriz está "diagonal" en bloques \star^2 :

$$\left| \begin{array}{cc} A & B \\ 0 & C \end{array} \right| = \det(A) \det(C) \quad \text{y} \quad \left| \begin{array}{cc} A & 0 \\ C & D \end{array} \right| = \det(A) \det(D)$$

Veamos si puedo armar la expresión que quiero partiendo del determinante de M usando las propiedades. Escribo a M usando la factorización del ítem (a):

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \left(\left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ C & I \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right) \right) \\ &\stackrel{\star^1}{=} \left| \begin{array}{cc} A & 0 \\ C & I \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right| \\ &\stackrel{\star^2}{=} \det(AI) \cdot \det(I(D - CA^{-1}B)) \\ &= \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) \\ &= \det(AD - ACA^{-1}B) \end{aligned}$$

Con esa última expresión, si $AC = CA$:

$$\det(AD - \textcolor{blue}{A}CA^{-1}B) \stackrel{!}{=} \det(AD - \textcolor{blue}{C}AA^{-1}B) = \det(AD - CB)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

⭐ Juan D Elia 🎉

21. Escribir funciones de Python 🐍 que realicen las siguientes operaciones:

- (a) Calcular la traza de una matriz.
- (b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.
- (c) Determinar si la sumatoria de elementos positivos es mayor que la sumatoria (en módulo) de los elementos negativos de una matriz.

- (a) Sea $A \in K^{n \times n}$. Se llama *traza* de la matriz A , y se nota $tr(A)$, al escalar $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

Para calcular la suma de los elementos de la diagonal principal:

Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien

```
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = np.array([[3, 2], [0, 1], [6, 8]])
tamanio = A.shape
print(f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {tamanio[0]}\nCantidad de columnas: {tamanio[1]}")

# método de numpy
print(f"Forma Numpy: tr(A) = {np.trace(A)}")

# =====METODO 2=====
# A manopla
contar_hasta = min(A.shape[0], A.shape[1])
elemento = 0
traza = 0

while elemento < contar_hasta:
    traza += A[elemento][elemento]
    elemento += 1

print(f"Forma a manopla: tr(A) = {traza}")
```

- (b) Para sumar todos los elementos 2 formas:

```
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = [[3, 2], [0, 1], [6, 8]]
cantidad_filas = len(A)
cantidad_columnas = len(A[0])
print(
    f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {cantidad_filas}\nCantidad de columnas: {cantidad_columnas}"
)

# =====METODO 1=====
# inicializo los índices
fila = 0
columna = 0
suma_elementos = 0

while fila < cantidad_filas:
    while columna < cantidad_columnas:
        suma_elementos += A[fila][columna]
        columna += 1 # actualizo las columnas
```

```
columna = 0 # reseteo las columnas
fila += 1 # actualizo las filas

print(f"Suma de elementos a manopla: {suma_elementos}")

# =====METODO 2=====
# Con listas por comprensión. Oneliner falopa,
suma_total_oneliner = sum([sum(fila) for fila in A])
print(f"Suma de elementos oneliner: {suma_total_oneliner}")
```

(c) Sumo todo. Igual que en el item anterior. Si es positivo devuelvo *verdadero* sino *falso*.

```
import numpy as np

# Ingresar matriz
A = np.array([[3, 2], [3, 6], [-6, -8]])
tamanio = A.shape
print(f"A=\n{A}\nCantidad de filas: {tamanio[0]}\nCantidad de columnas: {tamanio[1]}")

# Oneliner falopa listas por comprensión.
resultado = sum([sum(fila) for fila in A]);

if (resultado > 0):
    respuesta = True
else:
    respuesta = False

print(f"Ganan los positivos? Respuesta: {respuesta}")
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
👉 naD GarRaz 👩

🔥 Ejercicios de parciales:

1.

- a) Considerar el subespacio S de \mathbb{R}^4 dado por

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Hallar un sistema de generadores para S .

- b) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{cases} T(1, -1, 1, -1) = (1, -7, 1, 9) \\ T(4, 0, -2, 4) = (0, 8, -1, -6) \\ T(1, 1, -4, 4) = (1, 0, -1, 0) \\ T(-4, 2, 9, -4) = (-2, 1, 3, 3) \end{cases}$$

Calcular $T(1, 1, -4, 5)$ y brindar una base de $\text{Im}(T)$.

- c) Determinar $S \cap \text{Im}(T)$.

- a) Busco cosas de la pinta:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{resolviendo el}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Un posible sistema de generadores del subespacio S :

$$S = \langle (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

- b) Para probar esa unicidad tengo que ver que los elementos que estoy transformando sean *linealmente independientes*:

$$(0, 0, 0, 0) = a \cdot (1, -1, 1, -1) + b \cdot (4, 0, -2, 4) + c \cdot (1, 1, -4, 4) + d \cdot (-4, 2, 9, -4) \star^1$$

Los coeficientes a, b, c y d deben valer 0 si los vectores son *linealmente independientes*.



También podría poner todos los vectores uno abajo del otro y triangular de una, pero pintó hacerlo así.



Pero también me piden en el ejercicio que haga cosas con la *transformación lineal*. Voy a tener que transformar el $(1, 1, -4, 5)$ así que también tengo que calcular cómo es la combinata:

$$(1, 1, -4, 5) = a \cdot (1, -1, 1, -1) + b \cdot (4, 0, -2, 4) + c \cdot (1, 1, -4, 4) + d \cdot (-4, 2, 9, -4) \star^2$$

Entonces tengo que resolver \star^1 y \star^2 , i.e. esto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 9 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 4 & -4 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{triangular}]{\text{}} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌟

2. Sean $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - x_4, -\alpha x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

y los subespacios:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$T = \langle(1, 1, 1, -3), (1, -1, 0, 0), (1, -3, -1, -3)\rangle$$

- a) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$.
- b) (1 pt.) Para $\alpha = 1$, decidir si existe una transformación lineal $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $g(S + T) = \text{Im}(f)$ y que $g(\text{Nu}(f)) = (0, 0, 0, 0)$. En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.
- c) (1 pt.) Para $\alpha = 1$ y considerando $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 - 2x_3, x_1)$$

decidir si $f \circ h$ es monomorfismo. En caso contrario, hallar una base de $\text{Nu}(f \circ h)$.

a) $\alpha = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

b) $g = f$

c)

$$[h] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Nu}(f)$$

La composición $f \circ h$ no es mono

3. Sean los subespacios de \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\} \\ T &= \langle(4, -2, 1, 3), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\rangle. \end{aligned}$$

- a) Definir una transformación lineal no nula $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) \subseteq T$ y $f(T) \subseteq S$. Justificar la buena definición.
- b) Determinar $p_S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre S y calcular $p_S(S \cap T)$.

- a) Calculo intersección entre S y T y sistema de generadores de S . Para la intersección meto un genérico de T en las ecuaciones de S y así obtengo:

$$S \cap T = \langle(2, -1, 0, 1)\rangle$$

El sistema de generadores es resolver las ecuaciones que deben cumplir los elementos del subespacio:

$$S = \langle(5, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)\rangle$$

Que haya aparecido la intersección es casualidad.

Ahora quiero formar una transformación lineal que cumpla lo del enunciado, donde voy a usar de *comodín* a esa intersección:

$$\begin{cases} f(s_1) = (t_1) \\ f(s \cap t) = (s \cap t) \\ f(t_1) = (s_1) \\ f(t_2) = (0) \end{cases}$$

Tengo que asegurarme de que $\{s_1, s \cap t, t_1, t_2\}$ sean una base de \mathbb{R}^4 , es decir, tienen que ser *linealmente independientes*.

Una posible transformación que satisface todo eso sería:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1, 0, 1),$$

la cual manda todo lo que le des a algo de S y a algo de T a la vez.

- b) Para armar un *proyector ortogonal*, p_S , hay que asegurarse que:

$$\text{Nu}(p_S) \cap \text{Im}(p_S) = 0 \quad \text{con} \quad S = \langle (2, -1, 0, 1), (5, -1, 1, 0) \rangle$$

$$\star^1 \begin{cases} p_S(2, -1, 0, 1) = (2, -1, 0, 1) \\ p_S(5, -1, 1, 0) = (5, -1, 1, 0) \\ p_S(0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0) \\ p_S(1, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Para encontrar la expresión funcional del proyector se puede hacer la combinación lineal de los elementos de la base de partida igualada a un genérico de \mathbb{R}^4 es decir:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \stackrel{\star^2}{=} \textcolor{red}{a} \cdot (2, -1, 0, 1) + \textcolor{blue}{b} \cdot (5, -1, 1, 0) + \textcolor{cyan}{c} \cdot (0, 1, 1, 1) + \textcolor{brown}{d} \cdot (1, 3, -2, 1)$$

Resolver eso es resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & x_1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcolor{red}{\cancel{R}_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{3} & x_3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{88}{3} & x_4 - 8x_3 + 3x_1 + 7x_2 \end{array} \right)$$

y luego transformando \star^2 .

No sé si la idea es escribir la forma funcional o sencillamente definir el proyector p_S como en \star^1 . Las cuentas son largas cuando se triangula ese sistema y no tengo ganas de hacerlo . Sea como sea. Se puede calcular fácil que:

$$p_S \underbrace{(2, -1, 0, 1)}_{S \cap T} = \underbrace{(2, -1, 0, 1)}_{S \cap T}$$

porque está en la definición y además es lo que tiene que hacer el proyector que proyecta a S . El elemento $S \cap T \in S$ así que el p_S lo manda a sí mismo.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 = 0\}$$

y

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$$

subespacios de \mathbb{R}^4 .

- a) Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que $\dim(S \cap T) = 1$.
- b) Para el caso en que $a = -1$ y $b = 1$. Hallar $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $\text{Nu}(f) = S \cap T$ e $\text{Im}(f) = S$.

- a) Para encontrar la intersección entre dos subespacios dados con ecuaciones, puedo resolver todas las ecuaciones en simultáneo:

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ahora el sistema en forma matricial y triangulo. La idea es que me queden **3 ecuaciones linealmente independientes**, de esa manera quedará solo una variables libre, por lo tanto la solución al sistema tendrá dimensión 1:

$$\star^1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ 0 & 2a & 3+2b & 1+2a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} 2aF_3 - F_2 \rightarrow F_3 \\ a \neq 0 \end{array}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & a & 0 \\ 0 & 2a & 3+2b & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & -2a-3-2b & 6a-1 & 0 \end{array} \right)$$

Por un lado se puede ver a ojo que cuando $a = 0$ quedan 3 ecuaciones *linealmente independientes* así que no jode. Ahora quiero ver para cuales valores de a y b se borra la última fila:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2a - 3 - 2b & = & 0 \xrightarrow{a = \frac{1}{6}} b = -\frac{5}{3} \\ 6a - 1 & = & 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Por lo tanto la intersección va a tener dimensión 1, $\dim(S \cap T) = 1$ cuando:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{5}{3} \end{array} \right.}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🌟

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre

$$S = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0) \rangle$$

y sean

$$T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_2 + x_4 = 0\} \quad y \quad W = \langle (2, 0, -2, 0), (-2, 1, 0, 1), (2, 1, -4, 1) \rangle.$$

- a) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2, 0, 1, 1), (0, -1, 2, 2) \rangle \quad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

- b) Sea $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

halle una base de $\text{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo ¿Puede ser monomorfismo?

- a) La papa está en el subespacio al que está yendo a para $g(W)$. Hay una contradicción entre esa condición y que $g(v) = f(v)$.

No existe una *transformación lineal que cumpla lo pedido*

- b) No te dan las dimensiones. $\dim(\text{Nu}(f)) = 2\star^1$ dado que es un *proyector ortogonal*. Por lo tanto h va a recibir como mucho a S , con $\dim(S) = 2$.

No hay forma de que $(h \circ f)(x)$ genere más de 2 vectores *linealmente independientes* de \mathbb{R}^3 .

La función no es un epimorfismo. Tampoco será mono, por \star^1 .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌟