Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 7

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 07/08/25 @ 12:30

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:
07/08/25 @ 12:30
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

- *Matriz de iteraciones M_I:*

  Busco un sistema equivalente al clásico y querido $Ax = b$, porque invertir A se complica:

  $$Ax = b \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \overset{!}{\Leftrightarrow} x = \underbrace{-B^{-1}C}_{M_I} x + \underbrace{B^{-1}b}_{\tilde{b}} \Leftrightarrow \boxed{x = M_I x + \tilde{b}} \bigstar^1.$$

  Donde B se elige porque es más fácil de invertir que A, *sino me estaría pegando un tiro en el pie.* La matriz M_I es la *matriz de iteraciones*, la cual se va a usar así:

  $$\begin{array}{ccc} \text{espectativa} & \to & x = M_I x + \tilde{b} \\ - & & - \\ \text{realidad} & \to & x_{k+1} = M_I x_k + \tilde{b} \\ \hline \text{error} & \to & x - x_{k+1} = e_{k+1} = M_I e_k \end{array}$$

  Y ese error, si le mando M_I *reiteradas veces*:

  $$e_{k+1} = M_I \cdot e_k = M_I \cdot M_I e_{k-1} = \cdots = M_I^{k+1} e_0 \Leftrightarrow \boxed{e_{k+1} = M_I^{k+1} e_0}$$

  Si el error de iterar $k + 1$ veces $e_{k+1} \to 0$, entonces quiere decir que $M_I^{k+1} \to 0$ entonces la espectativa y la realidad no van a diferir más que lo que diferían al principio antes de iterar:

  $$\boxed{e_{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \Leftrightarrow M_i^{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \overset{!!}{\Longleftrightarrow} \rho(M_I) < 1}$$

  Donde $\rho(M_I) = |\lambda_{\text{máx}}|$

  Para el cálculo de los autovalores de M_I esta propiedad es *clave*:

  $$\boxed{M_I = -B^{-1}C \text{ tiene autovalor } \lambda \iff \det(\lambda B + C) = 0}$$

- *Jacobi y Gauss-Seidel*: Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  $$A = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{triangular} \\ \text{inferior}}}{L} + \overset{\substack{\text{diagonal} \\ \uparrow}}{D} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{triangular} \\ \text{superior}}}{U}$$

  - *Jacobi*: Tomando en este caso $B = D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\bigstar^1$:

    $$\boxed{\begin{cases} M_J &= -D^{-1}(L + U) \\ \tilde{b} &= D^{-1}b \end{cases}}$$

  - Gauss-Seidel: Tomando en este caso $B = L + D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\bigstar^1$:

    $$\boxed{\begin{cases} M_{GS} &= -(L + D)^{-1}U \\ \tilde{b} &= (L + D)^{-1}b \end{cases}}$$

  - Si A es estrictamente diagonal dominante, es decir:

    $$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

    entonces *Jacobi* y *Gauss-Seidel* convergen.
  - Si A es tridiagonal entonces $\rho(T_{GS}) = \rho^2(T_J)$
  - Si A es simétrica (hermitiana) y definida positiva entonces *Gauss-Seidel* converge.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de $\boldsymbol{A}$, sin utilizar normas complejas.
Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a + ib$ un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y sea $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular $\boldsymbol{Au}$ y $\boldsymbol{Av}$ y probar que:

$$\|\boldsymbol{Au}\|_2^2 + \|\boldsymbol{Av}\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 .$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que:

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\| .$$

Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^m$, entonces λ^m es autovalor de $\boldsymbol{B}$.

---

a)

$$\Big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) = (a+ib)(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) = \underbrace{a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}}_{\in\mathbb{R}^n} + i\cdot\underbrace{(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u})}_{\in\mathbb{R}^n}\Big) \wedge \Big(\boldsymbol{A}(u+iv) = \boldsymbol{Au}+i\boldsymbol{Av}\Big) \overset{\star^1}{\Longrightarrow} \begin{cases} \boldsymbol{Au} &= a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{Av} &= a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u} \end{cases}$$

Uso ese último resultado de $\star^1$:

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{Au}\|_2^2 = (\boldsymbol{Au})^t(\boldsymbol{Au}) = (a\boldsymbol{u}^t - b\boldsymbol{v}^t)\cdot(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) = a^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 - (a+b)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + b^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 & \star^2 \\ \|\boldsymbol{Av}\|_2^2 = (\boldsymbol{Av})^t(\boldsymbol{Av}) = (a\boldsymbol{v}^t + b\boldsymbol{u}^t)\cdot(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}) = a^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + (a+b)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + b^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 & \star^3 \end{cases}$$

Sumando $\star^2$ y $\star^3$ y el hermoso *factor común en grupos*:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{Au}\|_2^2 + \|\boldsymbol{Av}\|_2^2 &= a^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 - (a+b)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + b^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + a^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + (a+b)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + b^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 \\ &= a^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + b^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + a^2\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + b^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2 \\ &= a^2(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2) + b^2(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2) \\ &= (a^2 + b^2)\cdot(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2) \end{aligned}$$

b) El la $\|\cdot\|_2^2$ del autovector:

$$\|\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}\|_2^2 = (\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})^*(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}^t - i\boldsymbol{v}^t)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2$$

Ahora queda más claro. Si $\underline{\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}}$ con $\boldsymbol{w} \neq 0$, *because* autovector:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{Aw}\|_2^2 = (\boldsymbol{Aw})^*\cdot(\boldsymbol{Aw}) \overset{!}{=} \lambda^2\|\boldsymbol{w}\|_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{\|\boldsymbol{Aw}\|_2^2}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2} \\ &\Leftrightarrow \quad |\lambda| = \frac{\|\boldsymbol{Aw}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2} \\ &\underset{!}{\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \quad \boxed{|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|_2} \end{aligned}$$

c) En un espacio vectorial de dimension finita todas las normas son equivalentes, entonces existen c_1, $c_2 > 0$ tal que:

$$c_1 \|\boldsymbol{w}\|_2 \leq \|\boldsymbol{w}\| \leq c_2 \|\boldsymbol{w}\|_2$$

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

Ejercicio 3. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)^t$.

(a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.

(b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J.

¿Contradice la convergencia del método?

(c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.

Sugerencia: Considerar una base de autovectores de J.

(a) Busco autovalores de J,

Si bien es una matriz chica de 2×2 quiero practicar el método para calcular los autovalores sin calcular la inversa de D. Sea como sea, la *sugerencia del final* dice que voy a terminar calculando J.

Escribiendo a la matriz como $A = L + D + U$ (ver acá el genérico click click), Si quiero los autovalores de la matriz de iteración es $J = -D^{-1}(L + U)$ puedo hacer:

$$J = -D^{-1}(L+U) \text{ tiene autovalor } \lambda \Leftrightarrow \det\big(\lambda D + (L+U)\big) = 0$$

con

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Calculo el siguiente determinante para encontrar :

$$\det\big(\lambda D + (L+U)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 64\lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Dado que el radio espectral $\rho(J) = \frac{3}{4} < 1$ el método de Jacobi converge para cualquier valor inicial.

(b) La matriz de iteración de Jacobi:

$$J = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{(L+U)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{32} \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo la $\|\cdot\|_2$ con la SVD. Sale fácil multiplicando por matrices de permutación a esa matriz fea:

$$J = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{I_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{32} \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahí tengo que $\sigma_1 = 6 \implies \|J\|_2 = 6$

Las normas pedidas:

- $\|J\|_1 = 6$
- $\|J\|_\infty = 6$
- $\|J\|_2 = 6$

Recordar acá que:

Una matriz de iteración M_I converge si y solo si $\rho(M_I) < 1$.
Por otro lado para cualquier norma $\|\cdot\|$, se tiene que $\rho(M_I) \leq \|M_I\|$. Por lo tanto es *suficiente* que $\|M_I\| < 1$ para garantizar convergencia.
Peeeeero, si $\|M_I\| > 1$ no quiere decir que no converja el método, debido a que todo depende de ★[1].

(c) Hay que usar:

$$\|A\|_W = \left\|W^{-1}AW\right\|_\infty$$

La matriz generada por los autovectores:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Y puedo hacer:

$$J = CDC^{-1} \Leftrightarrow C^{-1}JC = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto usando la norma $\|\cdot\|_C$

$$\|J\|_C = \left\|C^{-1}JC\right\|_\infty = \|D\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 4. Decidir para cada una de las siguientes matrices si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel converge.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz A: A es una matriz *tridiagonal* es decir que averiguando el radio espectral de algún método ya sé lo que pasa con el otro, debido a que para este tipo de matrices:

$$\rho(T_{GS}) \overset{\star^1}{=} \rho^2(T_J)$$

Calculo $T_J = -D^{-1}(L+U)$:

$$T_J = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo los autovalores:

$$\det(T_J - \lambda I) = -\lambda \cdot (\lambda^2 + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \lambda_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow \rho(T_J) = \max_{1\leq j\leq 3}(|\lambda_j|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\star^1}{\Longrightarrow} \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2}$$

Ambos métodos convergen dado que:

$$\boxed{\rho(T_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{y} \quad \rho(T_{GS}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} < 1.}$$

En particular el método de Gauss-Seidel converge más rápido dado que el de Jacobi, dado que $\rho(T_{GS}) < \rho(T_J)$

Matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Puedo encontrar los autovalores de las matrices de iteración de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* resolviendo las ecuaciones:

$$\star^1 \ \det\left(\lambda_J \cdot D_J + (L_J + U_J)\right) = 0 \quad \text{y} \quad \star^2 \ \det\left(\lambda_J \cdot (D_{GS} + L_{GS}) + U_{GS}\right) = 0$$

Para $\star^1$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= i \\ \lambda_3 &= -i \end{cases} \implies \rho(T_J) \not< 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{no converge}}$$

Para $\star^2$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -2\lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 1 \end{cases} \implies \rho(T_{GS}) \not< 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{no converge}}$$

Matriz C: C es una matriz *simétrica y definida positiva*, porque los determinantes de sus menores principales son todos positivos.

$$3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{vmatrix} = 25 > 0$$

Entonces el método de *Gauss-Seidel* converge.

Puedo calcular los autovalores de T_J para ver si el método de *Jacobi* también lo hace:

$$\begin{vmatrix} 3\lambda & -1 & -4 \\ -1 & 5\lambda & 7 \\ -4 & 7 & 14\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 210\lambda^3 - 241\lambda + 56 = 0$$

A esta altura no sé si esto está bien o no, pero bueh, llamo a ese polinomio P:

$$P' = 0 \Leftrightarrow 630\lambda^2 - 241 = 0 \Leftrightarrow |\lambda| \approx 0.62$$

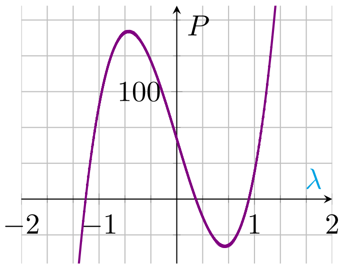
Tengo *puntos críticos*, es decir posible extremos, en $|\lambda| \approx 0.62$, y noto que la función crece ($\nearrow$) en $(-\infty, -0.62)$ y pasa de algún valor negativo, por ejemplo $P(-2) < 0$ a valores positivos en $P(1) > 0$, Bolzano y yo que sé.

En fin hay un autovalor menor a -1, es decir que $|\lambda| > 1$:

$$\boxed{\rho(T_J) > 1}$$

por lo tanto el método de *Jacobi* no converge.

Acá te dejo un grafiquito de $P = 210\lambda^3 - 241\lambda + 56$:



Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 5. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$

---

a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. [recu 5/12/2024] Se desea resolver el sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar los valores de α para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para cualquier vector inicial x_0.

(b) Probar que si $\alpha = 0$ el método de Jacobi converge en 3 pasos para cualquier x_0.

Sugerencia: analizar B_J^3, siendo B_J la matriz que gobierna la iteración del método de Jacobi.

(a) Busco α tal que $\rho(B_{GS}) < 1$. Interesante en este ejercicio es el *ratoneo*, demostración de como las pocas ganas de invertir una matriz revelan una forma de encontrar lo deseado minimizando el esfuerzo y coso, en fin:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \implies T_{GS} = -(D+L)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto T_{GS} tiene ceros en la primera y segunda columna, mientras que en la tercera tiene a la *primera columna* de $-(D+L)^{-1}$ multiplicada por α. Es *fácil* encontrar esa *primera columna* sin invertir toda la matriz:

$$(D+L) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así tengo T_{GS}:

$$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Matriz que tiene un *radio espectral*: $\rho(T_{GS}) = 2|\alpha|$. Por lo tanto para que el método de Gauss-Seidel converja para todo vector inicial x_0:

$$\boxed{|\alpha| < 1}$$

Fin.

(b) Jacobi:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \implies T_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hago hasta la cuarta iteración, para comparar la tercera y cuarta:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= T_J x^{(0)} + b \\
x^{(2)} &= T_J x^{(1)} + b = T_J(T_J x^{(0)} + b) + b = T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b \\
x^{(3)} &= T_J x^{(2)} + b = T_J(T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b) + b = T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b \\
x^{(4)} &= T_J x^{(3)} + b = T_J(T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b) + b = T_J^4 x^{(0)} + T_J^3 b + T_J^2 b + T_J b + b
\end{aligned}$$

Usando la sugerencia puedo ver que $x^{(3)}$ y $x^{(4)}$ son iguales:

$$T_J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{más}]{\text{una}} T_J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcccl} x^{(4)} & = & T_J^4 x^{(0)} + T_J^3 b + T_J^2 b + T_J b + b & = & T_J^2 b + T_J b + b \\ - \quad x^{(3)} & = & T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b & = & T_J^2 b + T_J b + b \end{array} \to \boxed{x^{(4)} = x^{(3)}}$$

Por lo tanto converge en la tercera iteración.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

2. [segundo cuatri 2023] Dada una matriz real A, notamos $A = D + L + U$, donde D es diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

(a) Probar que x es solución de $Ax = b$ si y solo si x satisface:

$$(I + \tfrac{1}{2}L)x = -(D - I + \tfrac{1}{2}L + U)x + b.$$

(b) Considerar el método iterativo derivado de la formulación anterior:

$$x^{n+1} = Bx^n + c,$$

donde $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$ y $c = (I + \frac{1}{2}L)^{-1}b$. Probar que λ es un autovalor de B si y solo si λ es raíz de la ecuación:

$$\det\left(D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0.$$

(c) Para $a \in \mathbb{R}$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método anterior converge para una matriz A si y solo si $|a| < 1$.

(d) Probar que para que el método de Jacobi converja se debe cumplir la misma condición. Deducir de esto que la condición para que Gauss-Seidel converja es la misma ¿Qué método es preferible para la matriz A?

(a) Para que x sea solución solo hay que hacer un par de cuentas y ver que queda una igualdad:

$$\begin{aligned} (I + \tfrac{1}{2}L)x = -(D - I + \tfrac{1}{2}L + U)x + b \iff & Ix + \tfrac{1}{2}Lx = -Dx + Ix - \tfrac{1}{2}Lx - Ux + b \\ \iff & Dx + Lx + Ux = b \\ \iff & (D + L + U)x = b \\ \iff & Ax = b \end{aligned}$$

(b) B va a tener a λ como autovalor si y solo si $|B - \lambda I| = 0$. Hay que acomodar ese determinante feo y llegar a esa expresión:

$$\begin{aligned} \det\left(D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0 \iff & \det\Big(\underbrace{(-(I + \tfrac{1}{2}L)(-(I + \tfrac{1}{2}L)^{-1})}_{I_n}(D - I + \tfrac{1}{2}L + U) + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\Big) = 0 \\ \iff & \det\left((-(I + \tfrac{1}{2}L)B + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0 \\ \iff & \det\left((-B + \lambda I)(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0 \\ \overset{!}{\iff} & \det(-B + \lambda I) \cdot \underbrace{\det(I + \tfrac{1}{2}L)}_{\neq 0} = 0 \\ \iff & \det(-B + \lambda I) = 0 \\ \iff & \det(B - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

(c) De la teórica sabemos que:

$$\text{La sucesión } \left\{B^k\right\} \text{ converge} \iff \rho(B) \overset{\text{def}}{=} \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\} < 1$$

Por lo tanto quiero calcular los autovalores de la matriz de iteración $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$, lo cual, dado lo visto en el ítem anterior, es lo mismo que calcular:

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0$$

Cálculo que *no requiere invertir nada*, lo cual nos saca una sonrisa ☺. Junto los ingredientes para cocinar eso:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \frac{a}{2} & a^2 & a \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda\frac{a}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante de eso:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{vmatrix} \overset{!}{=} \lambda^3 - a^2\lambda \overset{!}{=} \lambda\cdot(\lambda - a)\cdot(\lambda + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= a \\ \lambda_3 &= -a \end{cases}$$

Por lo tanto para que la matriz de iteración B converga sin importar el vector inicial:

$$\boxed{|a| < 1}$$

(d) La matriz de iteración, B_J, para el método de Jacobi:

$$B_J = -D^{-1}(L + U).$$

Con la propiedad que se usó en el ejercicio anterior, para calcular los autovalores de esta B_J:

$$\lambda D + L + U = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante e igualo a cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \lambda\cdot\left(\lambda - \sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)\cdot\left(\lambda + \sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \\ \lambda_3 &= -\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \end{cases}$$

Por lo tanto el radio espectral de B, $\rho(B)$ debe cumplir que:

$$\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < \tfrac{2a^2}{1+a^2} < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < 2a^2 < 1 + a^2 \overset{!}{\Leftrightarrow} -a^2 < a^2 < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{|a| < 1}$$

Misma condición que la matriz anterior.

Lo que sigue ahora queda servido para usar la propiedad de la *tridiagonalidad* que relaciona los *radios espectrales* de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Dado que A es tridiagonal para todo valor de a, sé que:

$$\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS}) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)^2 = |\tfrac{2a^2}{1+a^2}|$$

Para que el método de Gauss-Seidel converja:

$$|\tfrac{2a^2}{1+a^2}| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} |a| < 1$$

Por lo tanto tengo la misma condición que para el método de *Jacobi*.

Con respecto a la velocidad de convergencia, hay que pensar que lo que se está haciendo, *maomeno*, es multiplicar una matriz por sí misma una y otra vez, por lo tanto mientras más rápido se achique más rápido va a converger. Y dado que para cualquier norma subordinada:

$$\rho(B) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\|B^k\|},$$

mientras más chico el $\rho(B)$ más rápido va a converger.

$$\rho(B_J) < 1 \quad \text{y} \quad \rho(B_{GS}) < 1 \quad \text{y} \quad (\rho(B_J))^2 = \rho(B_{GS}) \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{\rho(B_J) > \rho(B_{GS})}$$

El método de Gauss-Seidel converge más rápido que el de Jacobi para esta matriz A. Comparo con $\rho(B) = |a|$:

$$\rho(B_{GS}) = \frac{2a^2}{1+a^2} \quad \text{y} \quad \rho(B) = |a|$$

Abro el módulo de a planteo un caso cuando $a > 0$ y otro cuando $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} \text{si } a > 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \Leftrightarrow \quad \frac{2a^2}{1+a^2} > a \\ & \Leftrightarrow \quad 2a^2 > a + a^3 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 > a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a-1)^2 \overset{!}{>} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \Longrightarrow \quad \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \\ \text{si } a < 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \Leftrightarrow \quad \frac{2a^2}{1+a^2} > -a \\ & \overset{!}{\Leftrightarrow} \quad 2a^2 < a + a^3 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a-1)^2 \overset{!}{<} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \Longrightarrow \quad \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \end{cases}$$

Es así que el método de Gauss-Seidel es el más rápido para converger de los tres para la matriz A, porque tiene el menor *radio espectral*.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz