

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 05/04/25 @ 12:12

*Choose your destiny:*

(doubleclick en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.
??.	??.	??.	??.	??.	??.	
??.	??.	??.	??.	??.	??.	
??.	??.	??.	??.	??.	??.	

☉ Ejercicios de Parciales

🔥??.

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:

05/04/25 @ 12:12

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



## Notas teóricas:

## Transformaciones lineales

✚ Dados  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales, una  $f : V \rightarrow W$  es *transformación lineal* si cumple:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v, w \in V$
- $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \quad \forall \alpha \in K, v \in V$

✚  $f : K^n \rightarrow K^m$  si transformo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{e_k}_{\in K^{n \times 1}}\right) \stackrel{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{f(e_k)}_{\in K^{m \times 1}} = \underbrace{\left( f(e_1) \mid \dots \mid f(e_n) \right)}_{A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m \times 1}}$$

✚ *Matriz de una transformación lineal:*

Dados  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y  $f : V \rightarrow W$  una t.l. Sean  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  se llama matriz de la transformación lineal de la base  $B$  en la base  $B'$  a aquella matriz  $[f]_{BB'}$  que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \quad \forall v \in V$$

## Aritmética de punto flotante:

✚ *Escribir 0.25 en base 10:*

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 = 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 = 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

*Escribir 0.25 en base 2:*

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 = 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

*Escribir 0.3 en base 2:*

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 = 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ \vdots = \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

## Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10  $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$  con  $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2  $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$  con  $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si  $m = 3 \implies x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$ . Para cada valor de  $exp$  voy a tener un total de  $\underset{a_1}{1} \cdot \underset{a_2}{2} \cdot \underset{a_3}{2} = 4$  posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores  $x_1$  y  $x_2$  consecutivos es de  $2^m$ , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es  $x = 0.3$ , la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

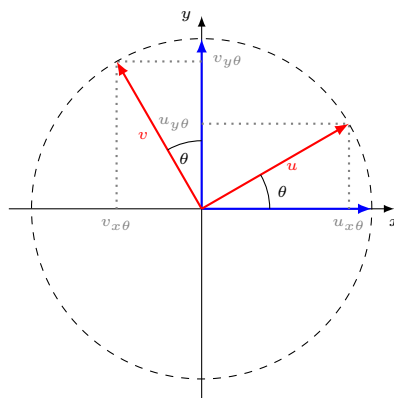
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

*Dedución matriz de rotación 2d (ponele):*

Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\star^1} \cdot u_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\star^2} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y  $\star^1$ :

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \\ \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y  $\star^2$ :

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \\ \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

## Ejercicios de la guía:

---

**Ejercicio 1.** Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d) hacer

---

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= (y_1+y_2-3(x_1+x_2)+\sqrt{2}(z_1+z_2), x_1+x_2-\frac{1}{2}(y_1+y_2)) \end{aligned}$$

Ahora veo:

$$\begin{aligned} f(v) + f(w) &= (y_1-3x_1+\sqrt{2}z_1, x_1-\frac{1}{2}y_1) + (y_2-3x_2+\sqrt{2}z_2, x_2-\frac{1}{2}y_2) \\ &= (y_1+y_2-3(x_1+x_2)+\sqrt{2}(z_1+z_2), x_1+x_2-\frac{1}{2}(y_1+y_2)) \end{aligned}$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  y un vector  $v = (x, y, z)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y) \\ &= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z) \end{aligned}$$

El producto es lineal

$f$  es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$ , la suma no es lineal.

$\Rightarrow f$  no es una transformación lineal.

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera  $A$  y  $B$ :

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$\Rightarrow f$  no es una transformación lineal.

(d) hacer

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte: 🍷 Juan D Elia 🐙

Ejercicio 2. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 3. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 4. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 5. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 6. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 7. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 8. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 9. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 10. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 11. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 12. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 13. 🐛... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 14.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 15.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 16.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 17.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 18.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 19.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 20.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 21.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 22.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 23.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 24.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 25.** 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

---





## Ejercicios de parciales:



¿Errores? [Avisá acá](#) así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 05/04/25 @ 12:12 . Chequeá si hay una [versión nueva](#) → [acá](#).

[Ir a índice](#) ↑