

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 4

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 26/06/25 @ 17:48

*Choose your destiny:*

(click click 🖱 en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">23.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	<a href="#">??.</a>

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)       [2.](#)       [3.](#)       [4.](#)

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por última vez:

26/06/25 @ 17:48

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 4



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



## Notas teóricas:

## ✚ Procesos de Markov:

Sucesión de vectores  $\mathbf{v}_k$  con  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots\} \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_{k+1} = M\mathbf{v}_k.$$

$M$  es una matriz de Markov si es una matriz estocástica por columnas, es decir:

- Todas los elementos  $m_{ij}$  de la matriz  $M$  son no negativos.
- Cada columna de  $M$  suma 1:

$$\left[ \sum_{i=1}^n m_{ij} \right]_j = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

- $M$  tiene por lo menos un autovalor  $\lambda = 1$ .
- Los autovalores de  $M$  cumplen que  $|\lambda| \leq 1$ .

La interpretación para un elemento  $a_{ij}$ , se lee:



$a_{ij}$  es la probabilidad de que la componente en el estado  $i$  pase a estar al estado  $j$ .



## ✚ Vector estocástico, de estado o de probabilidad:

Sea un  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  cumple que sus coordenadas son no negativas y suman 1. Las coordenada  $j$ -ésima corresponde la probabilidad de estar en el estado  $j$ -ésimo o la proporción de la población que se encuentra en ese estado.

✚ El estado límite  $\mathbf{v}^{(\infty)}$  es el estado para el cual existe el límite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k \mathbf{v}^{(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(\infty)}$$

- ✚<sub>1</sub> La existencia del estado límite,  $\mathbf{v}^{(\infty)}$ , como se ve en la definición, depende del estado inicial  $\mathbf{v}^{(0)}$ .
- ✚<sub>2</sub> Si los autovalores  $\lambda_i$  de  $A$  cumplen que si  $|\lambda_i| = 1 \implies \lambda_i = 1 \implies$  podría existir **existe el estado límite**.

✚ El estado de equilibrio  $\mathbf{v}^{(eq)}$ :

$$M\mathbf{v}^{(eq)} = \mathbf{v}^{(eq)},$$

por lo tanto  $\mathbf{v}^{(eq)}$  no es otra cosa que el autovector asociado al autovalor 1 de  $M$

- ✚<sub>1</sub> Si la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalizable y tiene un único autovalor de valor  $\lambda = 1$  y  $\lambda_i \neq -1$  con autovector asociado  $\mathbf{v}^{eq}$ , entonces existe:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = A^{(\infty)} \quad \text{y} \quad A^{(\infty)} = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}^{eq} & \dots & \mathbf{v}^{eq} \end{array} \right).$$

Con ese resultado, para cualquier estado inicial escrito como combineta de la base de autovectores:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{c}_1 \mathbf{v}^{eq} + \dots + \mathbf{c}_n \mathbf{v}_n \quad \text{con} \quad \mathbf{c}_1 \neq 0$$

. Eventualmente  $A\mathbf{v}^{(0)} \xrightarrow[\text{a}]{\text{tiende}} \mathbf{v}^{eq}$ .

*Si hay estado límite  $\mathbf{v}^{(\infty)}$  entonces es  $\mathbf{v}^{eq}$ .*

- ✚<sub>2</sub> Si la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalizable, tiene  $\lambda = 1$  con multiplicidad  $m$  y  $\lambda_i \neq -1$  con autoespacio  $E_{\lambda=1} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  entonces el estado  $\mathbf{v}^{(\infty)}$  es una combinación lineal de los vectores de  $E_{\lambda=1}$

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ):

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(f) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ecuación característica, a polinomio característico:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -ia & \text{con} \\ \lambda = ia & \text{con} \end{cases} \begin{cases} v_{\lambda=-ia} = (1, -i) \\ v_{\lambda=ia} = (1, i) \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(b) ... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

(c) ... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

(d) Ecuación característica, a polinomio característico:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & a - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)^3 - 3(a - \lambda) + 2 = 0 \star^1$$

Que lindo ejercicio 😊.

Si hago  $x = (a - \lambda)$  entonces  $\star^1$ :

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} ((a - \lambda) - 1)^2((a - \lambda) + 2) = 0$$

Por lo tanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 1 & \text{con} \\ \lambda_2 = a + 2 & \text{con} \end{cases} \begin{cases} E_{\lambda=a-1} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \\ E_{\lambda=a+2} = \langle (1, 1, 1) \rangle \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request al](#).

(f) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request al](#).

**Ejercicio 2.** Para cada una de la matrices  $A$  del ejercicio anterior, sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal tal que  $[f]_{EE} = A$ . Decidir si es posible encontrar una base  $B$  de  $K^n$  tal que  $[f]_{EE}$  sea diagonal. En caso afirmativo, calcular  $C_{BE}$ .

Sea  $A \in K^{n \times n}$  criterios para saber si una matriz es diagonalizable:

$A$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes.

$A$  es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

$A$  es diagonalizable si  $\text{mg}(\lambda_i) = \text{ma}(\lambda_i)$  para cada  $\lambda_i$  de  $A$ .

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request al](#).

**Ejercicio 3.** Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

(a) Hallar una matriz  $A$  tal que  $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$ . Mostrar que  $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar  $A$ .

(c) Dar una fórmula cerrada para  $F_n$ .

(a) Quiero una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aF_{n-1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_{n+1} \stackrel{!}{=} F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistemita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para mostrar lo que sigue, inducción. Quiero mostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso base:

$$p(1) : A^1 \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_1 \\ F_0 + F_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Es así que la proposición  $p(1)$  resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$  la proposición:

$$p(k) : \underbrace{A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver ahora que la proposición:

$$p(k+1) : A^{k+1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

también lo sea.

$$A^{k+1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{HI}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

Tuqui, también resulta ser verdadera.

Es así que  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas y por el principio de inducción la proposición  $p(n)$  también lo será  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) *Ecuación característica a polinomio característico:*


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{característica}]{\text{ecuación}} (A - \lambda I)v_\lambda = 0 \xrightarrow[\text{característico}]{\text{polinomio}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Esa notación se complementa con:

$$\left\{ \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \right.$$

Diagonalizar esta matriz tiene un montón de *droga*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$$

No sé si están bien las cuentas, pero, a veces es mejor ni preguntar. *Beware* .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}$$


(c) Voy a agarrar la primera coordenada de este .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Entonces la fórmula cerrada:

$$F_n = \frac{1}{1+\varphi^2} \left( (\varphi^n + (\frac{-1}{\varphi})^n \varphi^2) F_0 + (\varphi^{n+1} - \frac{-1}{\varphi})^n \varphi F_1 \right),$$

ponele.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

**Ejercicio 4.** Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial  $x(0)c_0$  es  $x(t)c_0e^{at}$ , resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 3, y(0) = -1$ .

Sugerencia: Hallar una matriz  $C$  tal que  $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$  sea diagonal y hacer el cambio de variables  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

Enunciado aterrador, pero es un ejercicio para desacoplar las ecuaciones, cosa que no se mezclen la  $x$  con las  $y$ . Lo primer es escribir la matriz de coeficientes en forma diagonal:

$$\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases} \xrightarrow[\text{matricial}]{\text{forma}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Diagonalizo la matriz:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{7, 2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El cambio de variables planteado:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \stackrel{\star^1}{=} C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Multiplico la ecuación diferencial a izquierda por  $C^{-1}$ :

$$\underbrace{C^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}} = C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{C^{-1}AC}_{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema queda desacoplado, *no hay mezcla* de las cosas de  $u$  con las cosas de  $v$  y se puede resolver como dos ecuaciones diferenciales por separación de variables:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) &= 7u(t) \Leftrightarrow u(t) = c_0 e^{7t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star^1]{\text{condiciones}} u(0) = 1 = c_0 e^{7 \cdot 0} \Leftrightarrow c_0 = 1 \\ v'(t) &= 2v(t) \Leftrightarrow v(t) = c_1 e^{2t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star^1]{\text{condiciones}} v(0) = 1 = c_1 e^{2 \cdot 0} \Leftrightarrow c_1 = 1 \end{cases}$$

Ahora hay que volver a las variables originales:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 5.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Demostración:

Por propiedades del determinante sabemos que:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Sabemos que los autovalores  $\lambda$  son los que tienen la siguiente propiedad:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Usando la propiedad del determinante, tenemos que:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t)$$

Y, como sabemos que  $\lambda$  es un autovalor de  $A$

$$0 = \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\mathcal{X}_A(\lambda)} = \underbrace{\det((A - \lambda I)^t)}_{\mathcal{X}_{A^t}(\lambda)} \Leftrightarrow \mathcal{X}_A(\lambda) = \mathcal{X}_{A^t}(\lambda) = 0$$

Probando así que tienen los mismos autovalores, dado que los *polinomios característicos de ambas expresiones* son iguales

Si tengo la siguiente matriz:

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(1,0)\}} \xrightarrow{\text{transponiendo}} \underbrace{A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(0,1)\}}$$

Esas matrices no son diagonalizables. Ambas tienen los mismos autovalores  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , pero no generan una base de autovectores para poder diagonalizar la matriz.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Iñaki Frutos 🐙

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 6.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\lambda$  un autovalor de  $A$ . Probar que:

- Si  $A$  es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal.
- $\lambda^k$  es autovalor de  $A^k$ , con el mismo autovector.
- $\lambda + \mu$  es autovalor de  $A + \mu I$ , con el mismo autovector.
- Si  $p$  es un polinomio,  $p(\lambda)$  es autovalor de  $p(A)$ .

(a) Sea  $A$  triangular

Arranca el lema

Voy a usar y demostrar el lema:

*Si  $A$  es una matriz triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales.*



¡¡A demostrarlo!!

*Caso base:*

$p(2)$  : una matriz  $M \in K^{2 \times 2}$  triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales

Sea  $M \in K^{2 \times 2}$  triangular inferior (la  $1 \times 1$  es trivial, no es divertido), el caso triangular superior es análogo:  
 $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c_{21} & b \end{pmatrix}$ , entonces  $\det(M) = a \cdot b - 0 \cdot c_{21} = a \cdot b$  cumpliendo así el caso base.

*Paso inductivo:*

Asumo que

$p(h)$  :  $M$  triangular inferior,  $\forall M \in K^{h \times h}$  se tiene que  $\det(M) = \underbrace{\prod_{i=1}^h m_{ii}}_{\text{hipótesis inductiva}}$ ,

es verdadera para algún  $h \in \mathbb{N}$ , entonces quiero probar que:

$p(h+1)$  :  $M$  triangular inferior,  $\forall M \in K^{(h+1) \times (h+1)}$  se tiene que  $\det(M) = \underbrace{\prod_{i=1}^{h+1} m_{ii}}_{\text{hipótesis inductiva}}$

también sea verdadera.

Nuevamente voy a hacerlo en el caso en que sea triangular inferior, el caso superior es enteramente análogo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 \\ a_{(h+1)1} & a_{(h+1)2} & \cdots & a_{(h+1)(h)} & a_{(h+1)(h+1)} \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante. Lo voy a hacer desarrollando por la última columna:

$$\det(A) = 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{(h+1)(h+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \stackrel{\text{HI}}{=} a_{(h+1)(h+1)} \cdot \prod_{i=1}^h a_{ii} = \prod_{i=1}^{h+1} a_{ii}$$

El lema queda probado. La demo de cuando es triangular superior que la haga Dios, o vos, pero no yo.

Terminó el lema

Ahora volviendo con la demostración del ejercicio.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Por lema y recordando que  $A$  es triangular por lo que la resta de  $A$  con una matriz diagonal seguirá siéndolo:

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$$

¡Ta rahh!, los  $a_{ii}$  son autovalores de  $A \quad \forall i \leq n$ .

- (b) Supongo que  $\lambda$  es autovalor de  $A$ .

Demostración por inducción:

*Caso base:*

$$p(1) : A^1 v = \lambda^1 v$$

Es verdadera por simple definición de autovalor.

*Paso inductivo:* Asumo como verdadera la proposición:

$$p(k) : A^k v = \lambda^k v \text{ con el autovector de } Av = \lambda v$$

para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : A^{k+1} v = \lambda^{k+1} v$$

también lo sea.

$$A^{k+1} v = A \cdot A^k v \stackrel{\text{HI}}{=} A \cdot \lambda^k v \stackrel{!}{=} \lambda^{k+1} v$$

Fin

- (c) Sea  $\lambda$  autovalor de  $A$  con su autovector correspondiente  $v$ . Sea  $\mu$  un número.

Tenemos que por definición:

$$Av = \lambda v$$

Veamos

$$(A + \mu I)v = Av + \mu Iv \stackrel{\text{def}}{=} \lambda v + \mu Iv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$$

Fin.

- (d) Sea  $p$  un polinomio,  $\lambda$  un autovalor con  $v$  autovector asociado de  $A$

Demostración por inducción en el grado del polinomio  $p_n$ . Quiero probar que:

$$p(n) : p(\lambda) \text{ es autovalor de } p(A)$$

*Caso base:*

$$p(\text{gr}(p) = 1) : p_1(\lambda) \text{ es autovalor de } p_1(A) = a_1 A + a_0 \underset{I_n}{A^0}$$

Y de lo que vio en el ítem (c):

$$p_1(A)v = a_1 Av + a_0 I_n v \Leftrightarrow \underbrace{(a_1 A + a_0 I_n)}_{p(A)} v = \underbrace{(a_1 \lambda + a_0)}_{p(\lambda)} v$$

Por lo cual la proposición  $p(\text{gr}(p) = 1)$  resultó verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo como verdadera la proposición:

$$p(\text{gr}(p) = k) : p_k(\lambda) \text{ es autovalor de } p_k(A) = \sum_{i=0}^k a_i A^i$$

hipótesis inductiva

para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces quiero probar que

$$p(\text{gr}(p) = k+1) : p_{k+1}(\lambda) \text{ es autovalor de } p_{k+1}(A) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i A^i$$

Veamos un polinomio de grado  $k+1$ :

$$p_{k+1}(X) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot X^i = a_{k+1} X^{k+1} + \sum_{i=0}^k a_i \cdot X^i$$

Evalúo en  $A$  y multiplico por  $v$  autovector de  $A$ :

$$p_{k+1}(A)v = a_{k+1}A^{k+1}v + \sum_{i=0}^k a_i \cdot A^i v \stackrel{\text{HI}}{\underset{\text{(b)}}{=}} a_{k+1}\lambda^{k+1}v + \sum_{i=0}^k a_i \cdot \lambda^i v = \underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot \lambda^i}_{p(k+1)(\lambda)} v$$

Concluyendo así que

$$p_{k+1}(A)v \stackrel{!!}{=} p_{k+1}(\lambda)v$$

Entonces, probé que es verdadera la proposición.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Iñaki Frutos 🍷

### Ejercicio 7.

- Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  diagonalizable con  $\text{tr}(A) = -4$ . Calcular los autovalores de  $A$  sabiendo que los autovalores de  $A^2 + 2A$  son  $-1, 3$  y  $8$ .
- Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  tal que  $\det(A) = 6$ ;  $1$  y  $-2$  son autovalores de  $A$  y  $-4$  es autovalor de la matriz  $A - 3I$ . Hallar los restantes autovalores de  $A$ .

- Truquini de escribir la cosita y sacar factor común las cositas de los costaditos:

$$A = CDC^{-1} \implies \begin{cases} A^2 = CD^2C^{-1} \\ 2A = C2DC^{-1} \end{cases} \implies A^2 + 2A = CD^2C^{-1} + C2DC^{-1} \stackrel{!}{=} C \underbrace{(D^2 + 2D)}_{\lambda'_i = \lambda_i^2 + 2\lambda_i} C^{-1}$$

Donde  $\lambda'_i$  son los autovalores de  $A^2 + 2A$  mientras que los  $\lambda_i$  los autovalores de  $A$ . Por enunciado:

$$\begin{cases} -1 &= \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \\ 3 &= \lambda_2^2 + 2\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \in \{-3, 1\} \\ 8 &= \lambda_3^2 + 2\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 \in \{-4, 2\} \end{cases}$$

Tenemos un millón de *posibles autovalores* para  $A$ , busquemos la combineta que haga que  $\text{tr}(A) = -4$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -4 \end{cases}$$

- Sabemos que determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

En este caso:

$$\det(A) = 6 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -3$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 1 & -2 \end{matrix}$

Luego tenemos por la *definición* de lo que es un autovector:

$$(A - 3I)v = -4v \Leftrightarrow Av = -v$$


Es decir que encontré otro autovalor:

$$\lambda_3 = -1 \implies \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -3 \Leftrightarrow \lambda_4 = 3$$

$\downarrow$   
-1

Los autovalores de  $A$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 3 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 8.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar:

- (a) Si los autovalores de  $A$  son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.
- (b) Si  $A$  es simétrica, entonces sus autovalores son reales.
- (c) Si  $A$  es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)
- (d) Si  $A$  es simétrica y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

(a)

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \text{y} \quad \overline{Av_i} = \overline{\lambda_i v_i} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$$

Ahora la papa está en usar que  $(\text{👤} + \overline{\text{👤}}) \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} Av_i + A\bar{v}_i &= \lambda_i v_i + \lambda_i \bar{v}_i \Leftrightarrow A(v_i + \bar{v}_i) = \lambda_i(v_i + \bar{v}_i) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{A(2\operatorname{Re}(v_i))}_{=w_i \in \mathbb{R}^n} = \lambda_i \underbrace{(2\operatorname{Re}(v_i))}_{=w_i \in \mathbb{R}^n} \\ &\Leftrightarrow Aw_i = \lambda_i w_i \end{aligned}$$

Queda por lo tanto que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con un autovector  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces su autovector asociado tendrá coordenadas reales.

(b)  $A$  es simétrica:

$$v^* Av = \lambda v^* v \stackrel{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2 \in \mathbb{R}$$

Ahora la idea es conjugar esa expresión y ver que da lo mismo:

$$\begin{aligned} (v^* Av)^* &= (v^* \lambda v)^* \xrightarrow{\text{fuaa el loco vivía las implicaciones al 1000\%}} v^* Av \stackrel{\star^2}{=} \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \\ &\quad (v^* Av)^* = v^* (Av^*)^* = v^* A^* v \stackrel{!}{=} v^* Av \stackrel{\star^1}{=} \\ &\quad = (v^* \lambda v)^* = \overline{\lambda (\|v\|_2^2)} \\ &\quad = (v^* \lambda v)^* = \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

De ahí sale que  $\star^1$  y  $\star^2$  tienen que ser iguales, si bien en la expresión de  $\star^2$  el autovalor está conjugado. Por lo tanto para que se cumpla la igualdad tengo que tener:

$$\lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

(d) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 9.** Una transformación lineal  $f : K^n \rightarrow K^n$  se llama *proyector* si verifica  $f(f(x)) = f(x)$  para todo  $x \in K^n$ . Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

Dejame escribir al proyector como  $P$  en vez de  $f$ , porque me da *cosita* sino. Tenemos un proyector y por definición:

$$P \circ P = P$$

Si el proyector tiene forma diagonal:

$$P = CDC^{-1} \Leftrightarrow P = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$P \circ P = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1} = C \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}}_{P \circ P} C^{-1} = C \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_P C^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 = \lambda_1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 \in \{0, 1\}} \\ \vdots \\ \lambda_n^2 = \lambda_n \Leftrightarrow \boxed{\lambda_n \in \{0, 1\}} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 10.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que  $f$  es un proyector y hallar una base  $B$  tal que  $[f]_{BB}$  sea diagonal.

Por inspección, sino calculalos, ese proyector tiene:

$$\text{Im}(P) = \{(1, 2, 3)\} \text{ , } \text{Nu}(P) = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} \text{ y } \text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$$

Se ve que  $Pv = v \ \forall v \in \text{Im}(P)$ , y ya esa ecuación que escribí te dice que:

$$E_{\lambda=1} = \{v\} = \{(1, 2, 3)\} = \text{Im}(P)$$

Similar sucede con los elementos del núcleo:

$$E_{\lambda=0} = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} = \text{Nu}(P)$$

En forma diagonal para una base  $B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 0), (0, 0, 1)\}$ :

$$P = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 11.** Considerar la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\epsilon \ll 1$  es arbitrario. Calcular los polinomios característicos y los autovalores de  $A$  y de  $B$ . Concluir que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un polinomio pueden conducir a grandes variaciones en sus raíces (el problema está mal condicionado). En particular, esto afecta el cómputo de autovalores como raíces del polinomio característico.

El polinomio característico de  $A$  y  $B$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &= (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda \cdot (\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \\ \mathcal{X}_B &= (1 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Medio que el enunciado cuenta todo. En particular se puede acotar la condición de esas matrices. Por ejemplo para  $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$\text{cond}_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A-C\|_\infty} = \frac{1+\frac{1}{\epsilon}}{\epsilon+1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$$

Lo mismo se puede hacer para la matriz  $B$ . Esas matrices están mal condicionadas y como se puede ver en los autovalores, a pesar de tener elementos similares los resultados en el cálculo de los *autovalores* los resultados pueden variar mucho.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 12.** Una matriz  $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  se dice estocástica (o de Markov) si sus elementos son todos no negativos y sus columnas suman uno. Los elementos  $p_{ij}$  representan la proporción de individuos que pasan del estado  $j$  al estado  $i$  en cada iteración (también pueden interpretarse) como la probabilidad de pasar  $j$  a  $i$ ).

- Probar que si  $\lambda$  es autovalor de  $P$ , entonces  $|\lambda| \leq 1$ .
- Sea  $\mathbf{1}$  el vector con todas sus coordenadas iguales a 1. Mostrar que  $\mathbf{1}^t P = \mathbf{1}^t$ . De hecho:  $P$  es estocástica si y solo si sus elementos son no negativos y  $\mathbf{1}^t P = \mathbf{1}^t$
- Probar que toda matriz estocástica tiene a 1 por autovalor.

- (a) La matriz  $P$  es estocástica, sus columnas suman 1. Si  $\lambda$  es autovalor de  $P$ :

$$\begin{aligned}
 P\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} &\Leftrightarrow \text{Fila}_i(P) \cdot \mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v})_i \\
 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j = \lambda v_i \\
 &\Leftrightarrow \left| \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j \right| = |\lambda||v_i| \\
 &\xLeftrightarrow[\text{sumo todas las}]{\text{coordenadas } i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}v_j| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| \\
 &\xLeftrightarrow[\text{desigualdad}]{\text{triangular}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}||v_j| \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}v_j| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}||v_j| \geq |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| \\
 &\xLeftrightarrow{!} \left( \sum_{j=1}^n |v_j| \right) \left( \sum_{i=1}^n |p_{ij}| \right) \geq |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| \\
 &\xLeftrightarrow{!!} \|\mathbf{v}\|_1 \geq |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|_1 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{1 \geq |\lambda|}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\mathbf{1}^t P = \left( \mathbf{1}^t \cdot \text{Col}_1(P) \mid \cdots \mid \mathbf{1}^t \cdot \text{Col}_n(P) \right) = \left( \sum_{i=1}^n (\text{Col}_1(P))_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n (\text{Col}_n(P))_i \right) = (1 \quad \cdots \quad 1) = \mathbf{1}^t$$

Dado que  $P$  es estocástica y sus columnas suman 1.

- (c) La matriz  $P$  es estocástica:

$$P = \left( \text{Col}_1(P) \mid \cdots \mid \text{Col}_n(P) \right) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n (\text{Col}_j(P))_i = 1 \quad \forall j \in [1, n]$$

Ahora si calculo la matriz traspuesta de  $P$  el producto por un vector  $v$  queda como el producto escalar de las columnas de  $P$  por el vector:

$$\begin{aligned}
 P^t &= \left( \frac{(\text{Col}_1(P))^t}{\vdots} \right) \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}} \\
 P^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} &\stackrel{!!}{=} \begin{pmatrix} \lambda \cdot \sum_{i=1}^n (\text{Col}_1(P))_i \\ \vdots \\ \lambda \cdot \sum_{i=1}^n (\text{Col}_n(P))_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P^t v = v \Leftrightarrow 1 \text{ es autovalor de } P^t
 \end{aligned}$$

Y dado que si:

$$A = CDC^{-1} \xrightarrow{\text{trasponer}} A^t = (CDC^{-1})^t = (C^{-1})^t D^t C^t \stackrel{!}{=} (C^{-1})^t D C^t \xLeftrightarrow[M = (C^{-1})^t]{!} A^t = M D M^{-1}$$

los autovalores son comunes a  $P$  y  $P^t$ , se obtiene que si  $P^t$  tiene autovalor 1, entonces también lo tiene  $P$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

**Ejercicio 13.** Probar que  $P$  y  $Q$  son matrices estocásticas, entonces:

- (a)  $PQ$  es estocástica.
- (b)  $P^n$  es estocástica ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- (c)  $P^n Q^m$  es estocástica ( $n, m \in \mathbb{N}$ ).

- (a) Los elementos de cada columna de una matriz estocástica suman 1. La idea es probar que al multiplicar dos matrices estocásticas se sigue cumpliendo esa propiedad:

$$PQ = \left( P \text{Col}_1(Q) \mid \cdots \mid P \text{Col}_n(Q) \right)$$

En particular para el elemento  $[PQ]_{ki}$ , el elemento de la fila  $k$ -ésima y columna  $i$ -ésima:

$$\begin{aligned} [P \text{Col}_i(Q)]_k &= \sum_{j=1}^n p_{kj} q_{ji} \xLeftrightarrow[\text{sumando en toda la columna } i] \sum_{k=1}^n [P \text{Col}_i(Q)]_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n p_{kj} q_{ji} \\ &\xLeftrightarrow[!] \sum_{k=1}^n [P \text{Col}_i(Q)]_k = \sum_{j=1}^n q_{ji} \cdot \left( \sum_{k=1}^n p_{kj} \right) = \sum_{j=1}^n q_{ji} = 1 \end{aligned}$$

Se uso repetidas veces que las columnas de este tipo de matrices suman 1. Es así que el producto de dos matrices de *Markov* sigue siendo una matriz de *Markov*.

- (b) Quiero probar la proposición:

$$p(n) : \text{Si } A \text{ es una matriz de Markov} \implies A^n \text{ también es una matriz de Markov}$$

*Caso base:*

$$p(2) : \text{Si } A \text{ es una matriz de Markov} \implies A^2 \text{ también es una matriz de Markov}$$

Lo cual es verdadero por el ejercicio anterior, donde se vio que si  $A$  y  $B$  son estocásticas, entonces  $A \cdot B$  también lo es.

*Paso inductivo*

Asumo para un  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  que:

$$p(k) : \underbrace{\text{Si } A \text{ es una matriz de Markov} \implies A^k \text{ también es una matriz de Markov}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : \text{Si } A \text{ es una matriz de Markov} \implies A^{k+1} \text{ también es una matriz de Markov}$$

también sea verdadera.

Es inmediato:

$$A^{k+1} = \underbrace{A}_{\text{es de Markov}} \cdot \underbrace{A^k}_{\text{es de Markov}} \xrightarrow[\text{es de Markov}]{\text{el producto también}} p(k+1) \text{ es verdadera.}$$

Por principio de inducción y dado que  $p(2)$ ,  $p(k)$  y  $p(k+1)$  son verdaderas, también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

- (c) Es lo mismo que el anterior. Quizás acá se amerita mencionar la siguiente definición:



Vector de probabilidad  $v$ :

$v$  es un vector de probabilidad si cumple que:

$$v_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n v_i = 1$$

Con esa definición se pueden demostrar todos estos ejercicios probando que una matriz de *Markov* mantiene las proporciones. Las columnas de una matriz de *Markov* son vectores de probabilidad. Esto quiere decir que para un vector  $w$  y una matriz de *Markov*  $A$ :

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ y } A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{'normalización'}]{\text{se conserva la}} \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 14.** En el instante inicial 20 ratones se encuentran en el compartimiento I. Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante



un breve lapso cada hora, donde los ratones pueden pasar a un compartimiento adyacente o permanecer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimiento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquier de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.

- Determinar la matriz de transición del proceso  $P$ .
- Determinar cuántos ratones habrá en cada celda al cabo de 4 horas.
- Decidir si existe o no un estado de equilibrio.
- Decidir si existe  $P^\infty$  y en tal caso calcularla. ¿Qué aspecto tiene? ¿Por qué?

- Pensando que no hay ninguna preferencia por ir a un u otro compartimiento adyacente y dado que la matriz resultante tiene que ser de *Markov*:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Comenzando el experimento tengo 20 ratones en el compartimiento I:

$$\begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{pmatrix}^{(0)} = v^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego para conseguir el estado siguiente,  $v^{(1)}$ , multiplico por la matriz  $P$ :

$$v^{(1)} = Pv^{(0)} = P \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente,  $v^{(2)}$ , multiplico por la matriz  $P$  nuevamente:

$$v^{(2)} = Pv^{(1)} = P \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente,  $v^{(3)}$ , multiplico por la matriz  $P$  nuevamente:

$$v^{(3)} = Pv^{(2)} = P \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{125}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.8125 \\ 4.0625 \\ 4.0625 \\ 4.0625 \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente,  $v^{(4)}$ , multiplico por la matriz  $P$  nuevamente:

$$v^{(4)} = Pv^{(3)} = P \begin{pmatrix} \frac{125}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{514}{64} \\ \frac{255}{64} \\ \frac{255}{64} \\ \frac{255}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.046875 \\ 3.984375 \\ 3.984375 \\ 3.984375 \end{pmatrix}$$

Se esperan entonces 8 ratones en el compartimiento I y 4 en los compartimientos II, III, IV.

```
import numpy as np

A = np.array(
    # Matriz de Markov P
    [[0.25, 0.5, 0.5, 0.5],
     [0.25, 0.5, 0, 0],
     [0.25, 0, 0.5, 0],
     [0.25, 0, 0, 0.5]]
)

# No importa el estado inicial, de donde partas, siempre llegarás al equilibrio
v = np.array([20, 0, 0, 0]) # Estado inicial
#v = np.array([5, 5, 5, 5])

hasta_estado = 10
for i in range(hasta_estado + 1):
    print(f"v{i}: {v}")
    if i <= hasta_estado:
        v = A @ v # Estado siguiente
```

- (c) Hay un equilibrio, parece ser que la sucesión converge al estado  $v^{\text{eq}} = (8, 4, 4, 4)^t$

Calculo los autovalores y autovectores:

```
import numpy as np
# Matriz de Markov P
A = np.array(
    [[0.25, 0.5, 0.5, 0.5],
     [0.25, 0.5, 0, 0],
     [0.25, 0, 0.5, 0],
     [0.25, 0, 0, 0.5]]
)
```

```

)

print(np.linalg.eig(A)[0]) # autovalores --> [-0.25  1.    0.5   0.5 ]
print(np.linalg.eig(A)[1]) # autovectores:
# [-8.66e-01  7.55e-01 -1.81e-16  0.00e+00]
# [ 2.88e-01  3.77e-01 -8.16e-01  0.00e+00]
# [ 2.88e-01  3.77e-01  4.08e-01 -7.07e-01]
# [ 2.88e-01  3.77e-01  4.08e-01  7.07e-01]

```

Dado que tengo un solo autovalor igual a 1, me agarro de eso para decir que va a haber un equilibrio estable hacia el autovector asociado:

$$E_{\lambda=1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) Tengo 4 autovectores que forman una base de  $\mathbb{R}^4$ , por lo tanto la  $P$  es diagonalizable:

$$\begin{aligned}
 P &= CDC^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad P^n = CD^n C^{-1} \\
 &= C \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} C^{-1} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} P^n &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{CD^n} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \\
 &= \left( CD^n \begin{pmatrix} a \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} b \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} c \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} d \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \right) \\
 &= \left( a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{!!!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En el !!! encuentro que  $a = b = c = d = \frac{1}{5}$  porque  $P^\infty$  debe ser una matriz de Markov, por lo tanto sus columnas deben sumar 1.

La matriz tiene como todas sus columnas al autovector de autovalor  $\lambda = 1$ . Multiplicar una matriz  $A$  por un vector  $v$  es equivalente a escribir al vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz.

En este caso todas las columnas son el vector normalizado  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})^t$ , por lo que sin importar el estado, es decir el vector  $v$  que uses, en una sola multiplicación ya se va al equilibrio.

Puede surgir la pregunta:

¿Qué pasa si encuentro un estado inicial  $v^{(0)}$  cuyas coordenadas en la *base de autovectores* de  $P$   $\{v^{eq}, v_2, \dots, v_n\}$  tenga 0 para el autovector  $v^{eq}$ , el autovector asociado a  $\lambda = 1$ ?

Es decir:

$$v^{(0)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c_1} v^{eq} + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Bueno, resulta que en una base de autovectores de una *matriz de Markov* eso no va a pasar nunca. Por esto:

$$\begin{cases} \vec{1}^t = (1, \dots, 1) \\ P : \text{matriz de Markov} \\ B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ autovectores de } P, \end{cases}$$

La siguiente cuenta hace todo:

$$0 = \vec{1}^t P v_i - \vec{1}^t P v_i = (\vec{1}^t P) v_i - \vec{1}^t (P v_i) = \vec{1}^t v_i - \vec{1}^t \lambda_i v_i = (1 - \lambda) \vec{1}^t v_i \xLeftrightarrow{!!!} \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ \text{o} \\ \sum_{j=1}^n (v_i)_j = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto si el autovector no es  $v^{eq}$ , el autovector de  $P$  asociado al  $\lambda = 1$ , los otros autovectores no son *vectores de probabilidad*, más aún **la suma de sus coordenadas es 0**. Y una combinación así:

$$\vec{1}^t \cdot v^{(0)} = \vec{1}^t \cdot \overbrace{(c_1 v^{eq} + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)}^{v^{(0)}} = 0$$

Por lo tanto el estado inicial  $v^{(0)}$  nunca podría ser un vector de probabilidad con  $c_1 = 0$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 👉

👉 Iñaki Frutos 👉

👉 Marcos Zea 👉

👉 ¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

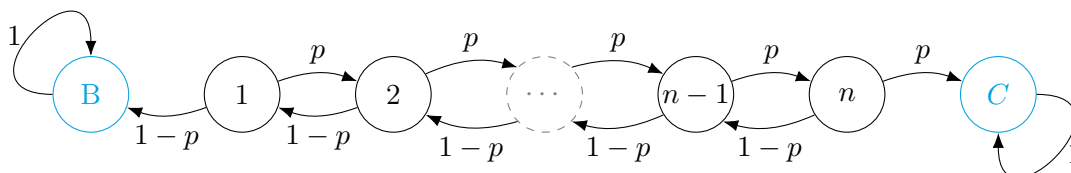
[Ir al índice ↑](#)

**Ejercicio 15.** Un sujeto en evidente estado de ebriedad oscila entre su casa y el bar, separados por  $n$  pasos. En cada instante de tiempo da un paso hacia adelante (acercándose a su casa), con probabilidad  $p$  o hacia atrás (acercándose nuevamente al bar), con probabilidad  $1 - p$ . Si llega a alguno de los dos extremos, se queda allí y no vuelve a moverse.

- Sin hacer ninguna cuenta, mostrar que el proceso admite al menos dos estados límite linealmente independientes entre sí. Implementar un programa que reciba como input la distancia entre la casa y el bar ( $n$ ) y la probabilidad  $p$  y devuelva la matriz de transición del proceso. Verificar que el resultado sea correcto corriéndolo para  $n = 5$  y  $p = 0.5$ .
- Para  $n = 20$ , tomar  $p = 0.5$  y  $\mathbf{v}^0$  el vector que corresponde a ubicar al sujeto en cualquiera de los puntos intermedios del trayecto con igual probabilidad. Realizar una simulación del proceso hasta que se estabilice ¿Cuál es el estado límite? ¿Cómo se interpreta?
- Repetir la simulación tomando como vector inicial  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{e}_2$  (el segundo canónico). Interpretar el resultado.
- Repetir la simulaciones con  $p = 0.8$ . ¿Qué se observa?
- Explicar los resultados de todas las simulaciones a partir del análisis de los autovalores y autovectores de la matriz.

- Después de que no se me ocurriera como hacer esto, quizás porque, no hay ninguna razón para eso, lo que quedó es:

- Sin dibujar un grafo esto no se te debería ocurrir ni a palos:



- Hay 2 estados de equilibrio. Voy a tener un  $\lambda = 1$  de multiplicidad 2. Esos estados son cuando el loco está en C o B. Fijate que tienen una flecha saliendo con valor 1. Es decir que ese el único valor distinto de 0 que va a haber en la columna, para que sea una *matriz estocástica*.
- Cada nodo es una posible ubicación del tipo, y como de un paso a otro siempre se mueve, en la matriz hay ceros en los elementos  $a_{ij}$ , excepto en los límites.
- Con esta data, ponle que tenés 2 pasos para ir desde el Bar hasta tu Casa, i.e.  $n = 2$ :

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} \text{Bar} & B & 1 & 2 & C \\ \hline B & 1 & 1-p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 2 & 0 & p & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & p & 1 \end{array} \right)$$

- Ahora vas y le pedís a algún LLM y le pedís un programita al que le das  $n$ ,  $p$  y te devuelva esa *matriz de Markov* o también si te interesa hacerlo a mano, tenés mi [bendición](#).  
A mí me salió esto:

```
import numpy as np

# Quiero darle el input n y p y que devuelva la matriz
# de transición del proceso.

def generar_matriz_transicion(n, p):
    orden_matriz = n + 2
    matriz_transicion = np.zeros((orden_matriz, orden_matriz))
    matriz_transicion[0][0] = 1
    matriz_transicion[orden_matriz - 1][orden_matriz - 1] = 1

    for col in range(1, orden_matriz - 1):
        row = col - 1
        matriz_transicion[row][col] = 1 - p
        matriz_transicion[row + 2][col] = p

    return matriz_transicion

print(generar_matriz_transicion(5, 0.5)) # ->
```

#	[1	0.5	0	0	0	0	0]
#	[0	0	0.5	0	0	0	0]
#	[0	0.5	0	0.5	0	0	0]
#	[0	0	0.5	0	0.5	0	0]
#	[0	0	0	0.5	0	0.5	0]
#	[0	0	0	0	0.5	0	0]
#	[0	0	0	0	0	0.5	1]

- (b) Si  $p = 0.5$  el tipo se tomó el *trago de Schrödinger*, es decir que está borracho y sobrio a la vez, hasta que le hacen el test de alcoholemia y el resultado tiene que ser o que bien está en pedo o no, o algo así, no sé, ni que fuera físico ni bartender.

Lo que si sabemos es que el tipo va a estar acá:

$$v^0 = \left(0, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0\right)^t \text{ con } \|v^0\|_1 = 1$$

Es decir con igual probabilidad en alguno de los pasos entre el **bar** y la **casa** y seguro que no está ni en el **bar** ni en la **casa**.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Genera la matriz de transición
def generar_matriz_transicion(n, p):
    cantidad_pasos = n
    casa = cantidad_pasos + 1
    bar = 0
    matriz_transicion = np.zeros((cantidad_pasos + 2, cantidad_pasos + 2))
    matriz_transicion[bar][bar] = 1
    matriz_transicion[casa][casa] = 1

    for col in range(1, cantidad_pasos + 1):
        row = col - 1
        matriz_transicion[row][col] = 1 - p
        matriz_transicion[row + 2][col] = p

    return np.array(matriz_transicion)

def generar_estado_inicial1(n):
    cantidad_pasos = n
    v = np.zeros(cantidad_pasos + 2) # inicializo en ceros y luego lleno.
    for estado in range(1, cantidad_pasos + 1):
        v[estado] = 1 / cantidad_pasos

    return np.array(v)
```

```

def generar_estado_inicial2(n): # Estado inicial del INCISO C
    cantidad_pasos = n
    v = np.zeros(cantidad_pasos + 2)
    v[1] = 1
    return np.array(v)

def generar_plot_evolucion( # Código para generar figuras con la info de los
    estados
    pasos_entre_bar_casa, p, iteraciones, muestras, v, state, dir, file
):
    P = generar_matriz_transicion(pasos_entre_bar_casa, p)

    estados_a_plotear = np.array(np.zeros((iteraciones + 1, pasos_entre_bar_casa +
    2)))
    estados_a_plotear[0] = v

    for i in range(1, iteraciones):
        if i <= iteraciones:
            v = P @ v # Estado siguiente
            estados_a_plotear[i] = v

    pasos_vector = np.arange(0.0, 22.0, 1) # data para el eje x

    # Ploteo
    # Genero el gráfico loopeando en algunos resultados de la matriz
    fig = plt.figure()
    ax1 = fig.subplots(1, 1, sharex=True)

    for i in range(0, muestras):
        ax1.scatter(
            pasos_vector,
            estados_a_plotear[state[i]],
            label=f"estado {state[i]}",
            alpha=0.7,
        )

    # Genero data para poder hacer el gráfico en TiKz
    np.savetxt(
        f"./dataFiles/{dir}/{i}{file}",
        np.transpose([pasos_vector, estados_a_plotear[state[i]]]),
        fmt="%.10e",
        header="Output para la simulación de ejercicio de Markov borracho",
        comments="# Data pasos vs probabilidad"
    )

    ax1.legend(loc="upper center")
    ax1.set_yscale("log")
    ax1.grid(True, alpha=0.3)
    ax1.set_title(f"Estados del beodo que dio {iteraciones} pasos")

    plt.show()

estado_inicial1 = generar_estado_inicial1(20)
estado_inicial2 = generar_estado_inicial2(20)

principio = [1, 5, 10, 21]
final = [100, 200, 500, 1000]
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 30, 4, estado_inicial1, principio, "item-b-plot/",
    "-step-item-b.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 1001, 4, estado_inicial1, final, "item-b-plot/", "
    -step-item-b-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 30, 4, estado_inicial2, principio, "item-c-plot/",

```

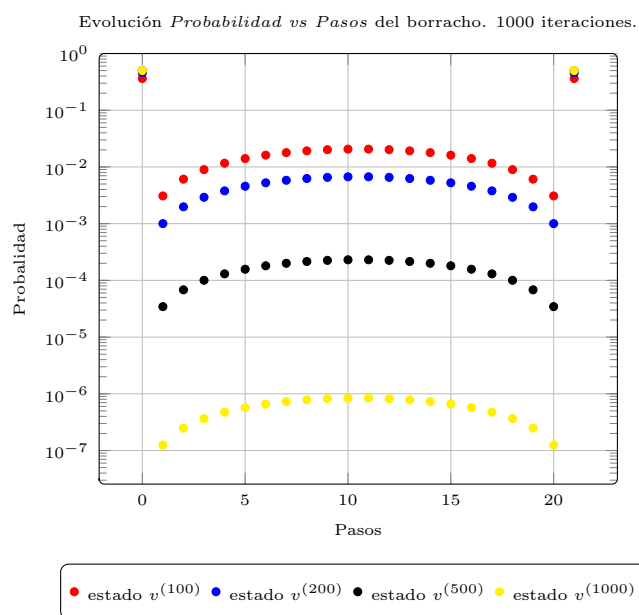
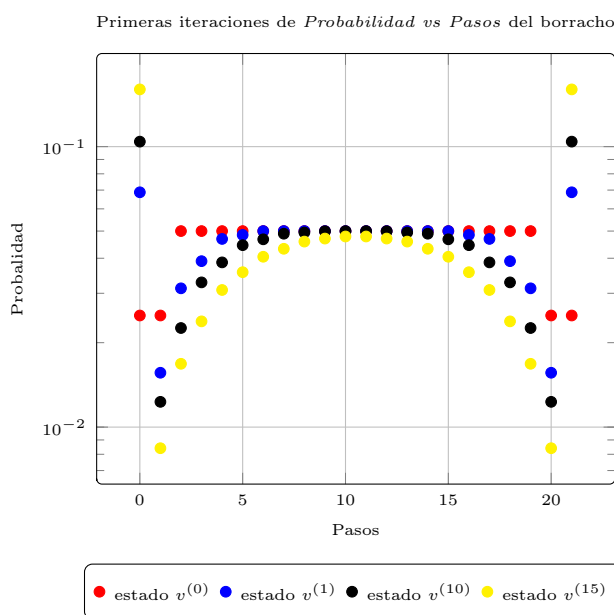
```

"-step-item-c.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 1001, 4, estado_inicial2, final, "item-c-plot/", "-step-item-c-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 30, 4, estado_inicial1, principio, "item-d-plot/", "-step-item-d.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 1001, 4, estado_inicial1, final, "item-d-plot/", "-step-item-d-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 30, 4, estado_inicial2, principio, "item-d-plot/", "-step-item-d2.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 1001, 4, estado_inicial2, final, "item-d-plot/", "-step-item-d2-final.data")

```

El código te va a mostrar 2 gráficos, uno para 10 y otro para 1000 iteraciones. El estado evoluciona hacia el:

$$v^\infty = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right),$$



¡Atención a la escala logarítmica del eje y, que parece que no se cumple que los estados suman 1, pero suman.

Algo que podría ser esperable. Mientras tanto el tipo va a pasar más tiempo en el medio del camino que en otro lugar. Cuando se aleja del centro del camino la probabilidad aumenta para que vuelva al centro. Eso se ve en los gráficos, porque para un estado en particular, siempre el siguiente paso tiene más probabilidad de ir hacia el centro para.

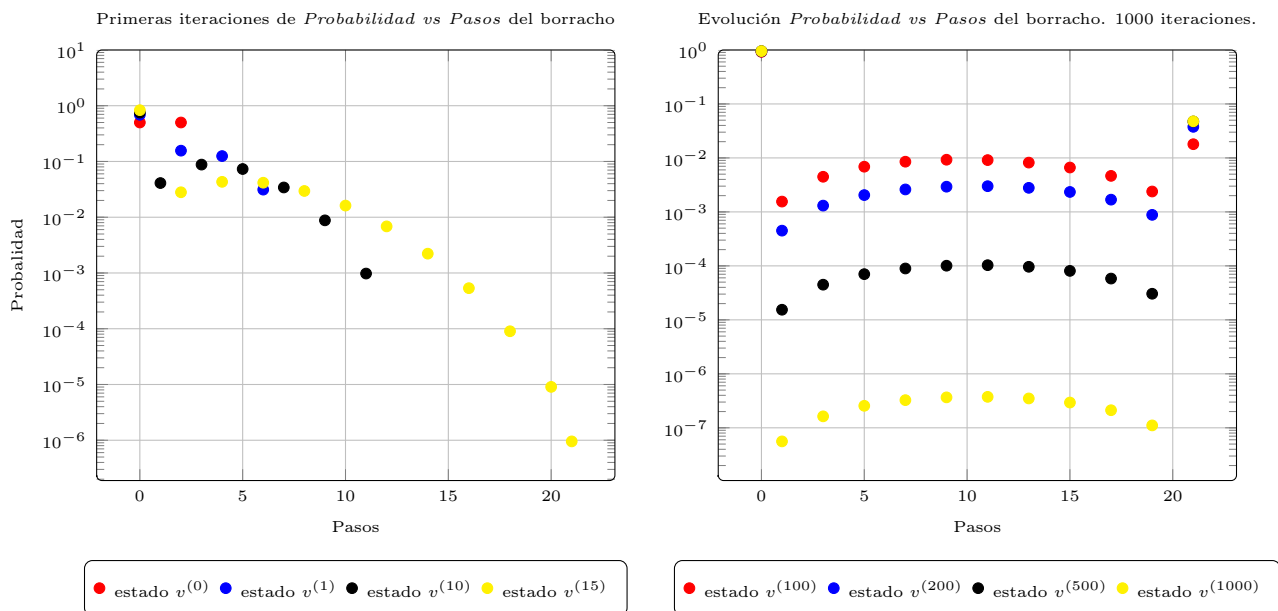
Después de 1000 pasos el tipo tiene igual probabilidad,  $p \approx 0.5$  de estar en el [bar](#) que en su [casa](#).

(c) Ahora la simulación arranca en:

$$v^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \text{ con } \|v^0\|_1 = 1$$



Haciendo los mismo cálculos de antes el resultado que sale de la simulación



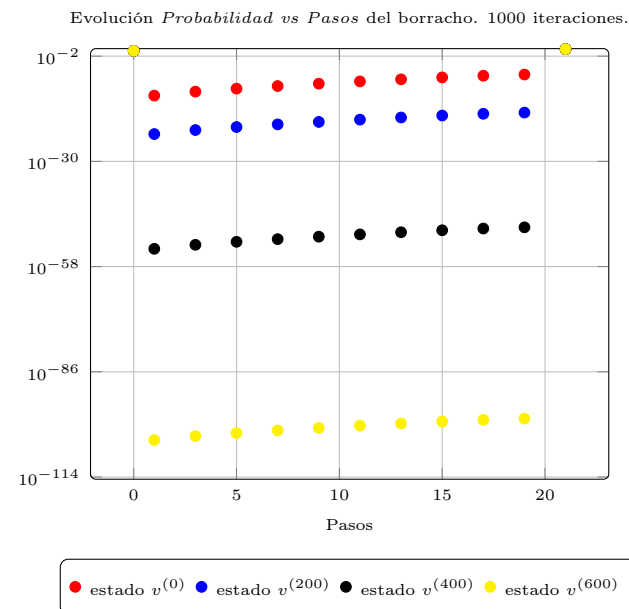
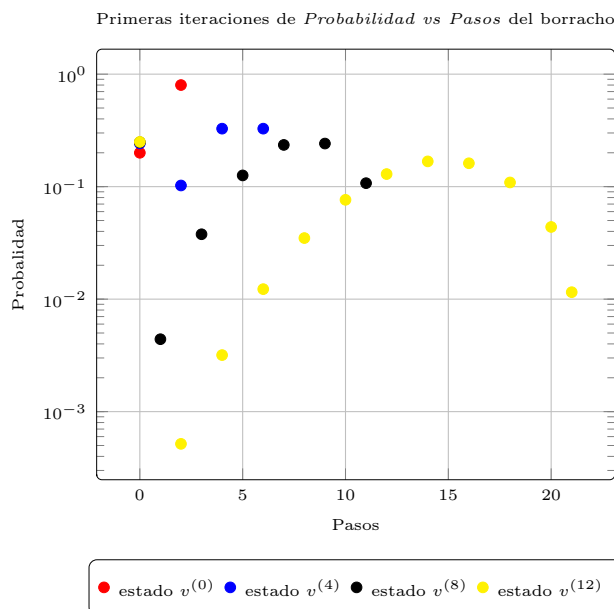
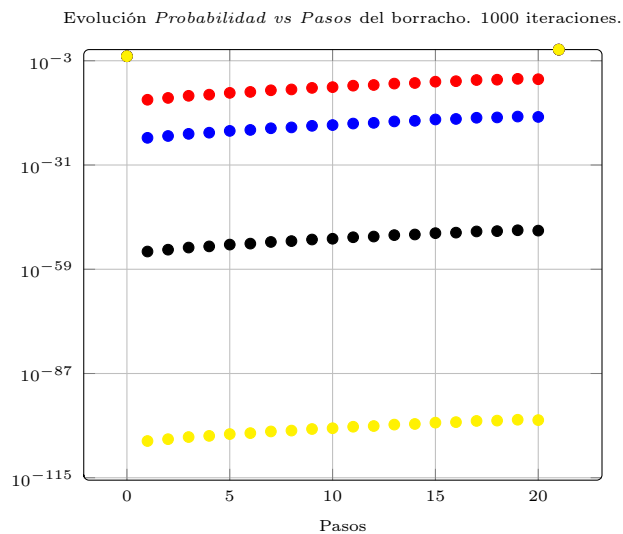
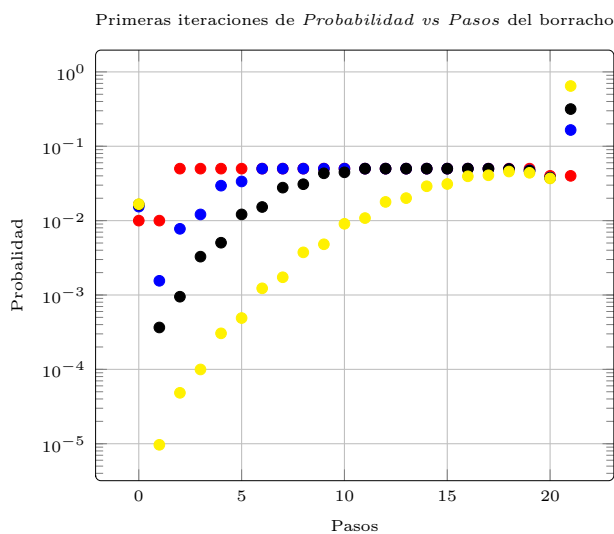
¡Atención a la escala logarítmica del eje y, que parece que no se cumple que los estados suman 1, pero suman.

En los gráficos puede verse que en las primeras iteraciones la probabilidad de quedarse en el [bar](#) crece mucho más que la probabilidad de acercarse a la [casa](#). De hecho, después de dar 1000 pasos, 500 veces más pasos de lo necesario, la probabilidad de que el tipo llegue a su [casa](#) es de  $\approx 0.05$ , durísimo.

- (d) Acá el chabón le aflojó a la sidra, se tomó una coquita y arrancó para casa que está la mujer esperando que hoy le toca cocinar, así que se despide de la gente arranca y buéh, llega antes, probabilísticamente antes.

En estas circunstancias, la probabilidad de que el tipo esté caminando 200 pasos para llegar a la [casa](#)

es bajísima  $p \approx 10^{-10}$



(e) Mirando la matriz tengo unos autovectores:

$$E_{\lambda=1} = \langle (1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1) \rangle$$

y los otros te los debo. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📁, o mejor aún si querés subirlo en IAT<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🤖.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤖

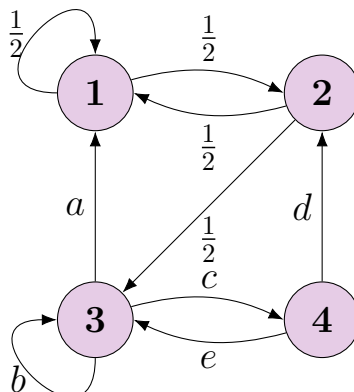
👉 Iñaki Frutos 🤖

🤖Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ [al repo](#), críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

**Ejercicio 16.** El movimiento anual entre 4 ciudades está refido por el siguiente diagrama de transición:



Se sabe que  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  es un estado de equilibrio.

- Hallar la matriz de transición  $P$ .
- Determinar la distribución de población después de 10 años, si la distribución inicial es de  $\mathbf{v}_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^t$ .
- ¿Existe un estado límite cualquiera sea el estado inicial? ¿Existe  $P^\infty$ ?
- ¿Existe estado límite para  $\mathbf{v}_0 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$ ?

- Matriz de transición: Tiene en el elemento  $p_{ij}$  la probabilidad de que se pase del estado  $i$  al  $j$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📄, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 📄.

- ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📄, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 📄.

- ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📄, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 📄.

**Ejercicio 17.** ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📄, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 📄.

**Ejercicio 18.** ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📄, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 📄.

---

**Ejercicio 19.** 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_\text{E}^\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

---

**Ejercicio 20.** 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_\text{E}^\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

---

**Ejercicio 21.** 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_\text{E}^\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

---

**Ejercicio 22.** 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_\text{E}^\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

---

**Ejercicio 23.** 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_\text{E}^\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

## 🔥 Ejercicios de parciales:

🔥 1. Sea  $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $v = (1, 2, 0)$ ,  $w = (2, 6, 0)$  y  $u = (-2, -2, -1)$  son autovectores de  $A$ .

- Probar que  $A$  es diagonalizable.
- Calcular los autovalores de  $A$  y determinar  $r, s$  y  $t$ .

a) Es diagonalizable porque estamos en *reales*<sup>3×3</sup> y hay una base de dimensión 3 de autovectores:

$$B = \{(1, 2, 0), (2, 6, 0), (-2, -2, -1)\},$$

son autovectores de  $A$ .

b) Los *autovectores*, son vectores que cumplen la *ecuación característica*:

$$A \cdot v_\lambda = \lambda \cdot v_\lambda$$

Es solo cuestión de pedirle a los autovectores del enunciado que cumplan esa ecuación y despejar.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} r & \stackrel{\star^1}{=} -2s \\ \lambda & = 0 \end{cases}$$

Siguiente autovector:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} s & = 1 \\ \lambda & = 2 \end{cases} \implies r \stackrel{\star^1}{=} -2$$

Siguiente y último autovector

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} t & = 6 \\ \lambda & = 2 \end{cases}$$

Listo hay subespacios para justificar aún más la diagonalidad de la matriz:

$$E_{\lambda=0} = \langle 1, 2, 0 \rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=2} = \langle (-2, -2, -1), (2, 6, 0) \rangle$$

La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética:

$$\text{mg}_A(\lambda = 2) = \text{ma}_A(\lambda = 2) = 2 \quad \text{y} \quad \text{mg}_A(\lambda = 0) = \text{ma}_A(\lambda = 0) = 1$$

La matriz en forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐶

## 2.

- a) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que si  $A$  es inversible y diagonalizable, entonces  $A^{-1}$  y  $A^k - kI_n$  son diagonalizables para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Sea  $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
- Probar que  $J$  es una matriz diagonalizable.
  - Calcular  $J^5 - 5I_3$ .

- a) Truquito destacable:  $I_n = PP^1$  para luego sacar factor común al calcular  $A^k - kI_n$ . Por otro lado, la inversibilidad de una matriz diagonalizable asegura que los autovalores son distintos de cero:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| \stackrel{!}{=} |D| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Las matrices inversibles tienen  $\det(A) \neq 0$ .

- b) i) Se calculan los autovectores y autovalores:

$$E_{\lambda=2} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad y \quad E_{\lambda=4} = \{(0, 1, 1)\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Te debo la inversa por *pajilla*.

- ii) Sale combinando lo que se usó hasta ahora.

**3.** Dadas las matrices  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y un vector  $v \in \mathbb{C}^n$ , para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

- Si  $v$  es un autovector de  $A$ , y  $A$  es inversible, entonces  $v$  es un autovector de  $A^{-1}$ .
- Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables,  $A + B$  también lo es.
- Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables, entonces  $AB$  es diagonalizable.
- Si  $A$  o  $B$  es inversible y  $AB$  es diagonalizable entonces  $BA$  también es diagonalizable.

Ejercicio de demostraciones. Dependiendo las horas que dormiste la noche anterior esto puede salir enseguida o en horas. La matriz que uso en los contraejemplos suele ser un *caballito de batalla* para estos problemas, guardátela.



- a) Si  $v$  es un autovector y además  $\exists A^{-1}$  entonces:

$$Av = \lambda v \stackrel{!}{\iff} A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \stackrel{!}{\iff} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

Por lo tanto:

resultó verdadera

- (b) Si las matrices son diagonalizables, ¿La suma también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1, 0)\}$$

Por lo tanto:

resultó falsa

- (c) Si las matrices son diagonalizables, ¿El producto también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1, 0)\}$$

Por lo tanto:

resultó falsa

- (d) alguna de las dos matrices es inversible y  $AB$  es diagonalizable, entonces ¿ $BA$  es diagonalizable también?

Supongo que  $\exists A^{-1}$ :

$$AB = CDC^{-1} \xleftrightarrow[\leftarrow \times A]{\rightarrow \times A^{-1}} A^{-1}ABA = A^{-1}CDC^{-1}A \Leftrightarrow BA = A^{-1}CD(A^{-1}C)^{-1} \xleftrightarrow{P = A^{-1}C} BA = PDP^{-1}$$

La expresión de  $BA$  resultó diagonalizable. La demostración con  $B$  diagonal es análoga. Por lo tanto:

resultó verdadera

#### 4. [Segundo cuatrimestre del 2023]

Supongamos que los resultados de las elecciones presidenciales del próximo 22 de octubre dependen únicamente de los votos de las primarias del 13 de Agosto. Consideremos los tres candidatos más votados, denominados L, T y G. Los encuestadores nos dicen que:

- Para los votantes de L:
  - 80% mantiene su voto a L
  - Ninguno cambiará su voto a G
- Para los votantes de T:
  - El porcentaje de gente que cambia su voto a G y el porcentaje de gente que cambia su voto a L es el mismo.
  - El porcentaje de gente que cambia su voto es el mismo porcentaje de gente que cambia su voto para los votantes de L.
- Para los votantes de G:
  - 40% mantiene su voto a G
  - El resto se divide equitativamente entre L y T.

(a) Construir la matriz de transición  $A$  del proceso.

(b) Si el 13 de Agosto la cantidad de votos para cada uno de los candidatos fue

- L: 30%
- T: 34%
- G: 36%

determinar el porcentaje esperado para cada candidato en las elecciones del 22 de octubre.

(c) Asumiendo que el proceso seguirá a largo plazo para próximas elecciones (considerando como una unidad de tiempo el tiempo entre una elección y la siguiente), decidir si existe un estado límite para los datos iniciales datos, y calcular, si existe,  $A^{(\infty)}$

(a) Teniendo en cuenta la interpretación de los elementos de una matriz de *Markov*, pensando que las columnas tienen que sumar 1, [mirá acá el resumen](#) [click](#) [click](#) 🐞:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.34 \\ 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.403 \\ 0.4818 \\ 0.1152 \end{pmatrix}$$

(c)  $A$  tiene un autovalor igual a 1 y ninguno igual a  $-1$ . Listo con eso sé que va a existir  $A^{(\infty)}$  más aún sé que las columnas de  $A^{(\infty)}$  son el autovector  $v_1$ , autovector asociado a  $\lambda = 1$

$$A = \left( v_1 \mid \dots \mid v_1 \right)$$