

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/04/25 @ 12:56

Choose your destiny:

(doubleclick en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.
??.	??.	??.	??.	??.	??.	
??.	??.	??.	??.	??.	??.	
??.	??.	??.	??.	??.	??.	

☉ Ejercicios de Parciales

🔥??.

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:

05/04/25 @ 12:56

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:*Transformaciones lineales*

✚ Dados V y W dos K -espacios vectoriales, una $f : V \rightarrow W$ es *transformación lineal* si cumple:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v, w \in V$
- $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \quad \forall \alpha \in K, v \in V$

✚ $f : K^n \rightarrow K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{e_k}_{\in K^{n \times 1}}\right) \stackrel{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{f(e_k)}_{\in K^{m \times 1}} = \underbrace{\left(f(e_1) \mid \dots \mid f(e_n)\right)}_{A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m \times 1}}$$

✚ *Matriz de una transformación lineal:*

Dados V y W dos K -espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \quad \forall v \in V$$

✚ Sea V un K -espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \dots, n$.

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. El $\text{Nu}(A) = \{x \in K^n / Ax = 0\}$

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. La $\text{Im}(A) = \{Ax \in K^m \text{ con } x \in K^n\} = \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle$. También $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$

✚ *Propiedades de una transformación lineal:*

Sea $f : V \rightarrow W$ una t.l. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V . Entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es un conjunto generador para la imagen de f .

- f se dice *monomorfismo* si es inyectiva.
- f se dice *epimorfismo* si es suryectiva.
- f se dice *isomorfismo* si es *mono* y *epi*.

✚ *Norma* Sea $\|\cdot\| : K^n \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma si cumple:

- 1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in K^n$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ con $\alpha \in K$ y $x \in K^n$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ con $x, y \in K$

✚ Ejemplos:

- Norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$
- Norma p: $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$
- Norma p: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max |x_i|$

Aritmética de punto flotante:

✿ Escribir 0.25 en base 10:

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 = 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 = 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 en base 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 = 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

Escribir 0.3 en base 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 = 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ \vdots = \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si $m = 3 \implies x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

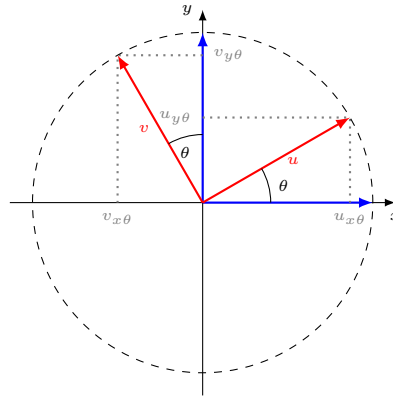
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (*ponete*):

Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\star^1} \cdot u_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\star^2} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y ★¹:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \\ \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y ★²:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \\ \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d)

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Ahora veo:

$$f(v) + f(w) = (y_1 - 3x_1 + \sqrt{2}z_1, x_1 - \frac{1}{2}y_1) + (y_2 - 3x_2 + \sqrt{2}z_2, x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $v = (x, y, z)$. Entonces,

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y)$$

$$= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z)$$

El producto es lineal

f es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, la suma no es lineal.

$\Rightarrow f$ no es una transformación lineal.

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera A y B :

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$\Rightarrow f$ no es una transformación lineal.

(d) Veo que valga la suma:

Sea A, B matrices cualesquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A + B) = \begin{pmatrix} (a_{22} + b_{22}) & 0 & (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) \\ 0 & (a_{11} + b_{11}) & (a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) \end{pmatrix}$$

Ahora miro,


$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & b_{12} + b_{21} \\ 0 & b_{11} & b_{22} - b_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{22} + b_{22} & 0 & (a_{12} + a_{21}) + (b_{12} + b_{21}) \\ 0 & a_{11} + b_{11} & (a_{22} - a_{11}) + (b_{22} - b_{11}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La suma es lineal.

Ahora veo el producto:

$$f(\alpha A) = f\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{22} & 0 & \alpha(a_{12} + a_{21}) \\ 0 & \alpha a_{11} & \alpha(a_{22} - a_{11}) \end{pmatrix} = \alpha f(A)$$

El producto y la suma son lineales, f es transformacion lineal

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Juan D Elia 

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!



Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al .

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al [repo](#), críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Ejercicio 10. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 17. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 18. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 19. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 20. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 21. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 22. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 23. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 24. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 25. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicios de parciales: