

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 7

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 06/08/25 @ 15:26

Choose your destiny:

(click click 🎯 en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.

☉ Ejercicios de Parciales

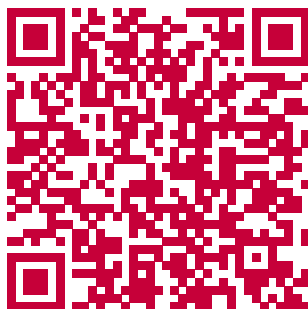
 [1.](#)  [2.](#)  [??.](#)

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:

06/08/25 @ 15:26

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:

✿ Matriz de iteraciones M_I :

Busco un sistema equivalente al clásico y querido $Ax = b$, porque invertir A se complica:

$$Ax = b \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \stackrel{!}{\Leftrightarrow} x = \underbrace{-B^{-1}C}_{M_I} x + \underbrace{B^{-1}b}_{\tilde{b}} \Leftrightarrow x = M_I x + \tilde{b} \star^1.$$

Donde B se elige porque es más fácil de invertir que A , *sino me estaría pegando un tiro en el pie*. La matriz M_I es la *matriz de iteraciones*, la cual se va a usar así:

$$\begin{array}{lcl} \text{espectativa} & \rightarrow & x = M_I x + \tilde{b} \\ \text{---} & & \text{---} \\ \text{realidad} & \rightarrow & x_{k+1} = M_I x_k + \tilde{b} \\ \hline \text{error} & \rightarrow & x - x_{k+1} = e_{k+1} = M_I e_k \end{array}$$

Y ese error, si le mando M_I reiteradas veces:

$$e_{k+1} = M_I \cdot e_k = M_I \cdot M_I e_{k-1} = \dots = M_I^{k+1} e_0 \Leftrightarrow e_{k+1} = M_I^{k+1} e_0$$

Si el error de iterar $k + 1$ veces $e_{k+1} \rightarrow 0$, entonces quiere decir que $M_I^{k+1} \rightarrow 0$ entonces la *espectativa* y la *realidad* no van a diferir más que lo que diferían al principio antes de iterar:



$$e_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow M_I^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \stackrel{!!}{\Leftrightarrow} \rho(M_I) < 1$$



$$\text{Donde } \rho(M_I) = |\lambda_{\max}|$$

Para el cálculo de los autovalores de M_I esta propiedad es *clave*:

$$M_I = -B^{-1}C \text{ tiene autovalor } \lambda \iff \det(\lambda B + C) = 0$$

✿ Jacobi y Gauss-Seidel: Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{array}{c} \text{diagonal} \\ \uparrow \\ A = L + D + U \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{triangular inferior} \quad \text{triangular superior} \end{array}$$

✿ Jacobi: Tomando en este caso $B = D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver \star^1 :

$$\begin{cases} M_J &= -D^{-1}(L + U) \\ \tilde{b} &= D^{-1}b \end{cases}$$

✿ Gauss-Seidel: Tomando en este caso $B = L + D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver \star^1 :

$$\begin{cases} M_{GS} &= -(L + D)^{-1}U \\ \tilde{b} &= (L + D)^{-1}b \end{cases}$$

- Si A es estrictamente diagonal dominante, es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

entonces *Jacobi* y *Gauss-Seidel* convergen.

- Si A es tridiagonal entonces $\rho(T_{GS}) = \rho^2(T_J)$
- Si A es simétrica (hermitiana) y definida positiva entonces *Gauss-Seidel* converge.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una pull request al 🐙.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ acota inferiormente a toda norma de \mathbf{A} , sin utilizar normas complejas.

Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sea $\lambda = a + ib$ un autovalor de \mathbf{A} y sea $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular $\mathbf{A}\mathbf{u}$ y $\mathbf{A}\mathbf{v}$ y probar que:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$ vale que:

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|.$$

Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$, entonces λ^m es autovalor de \mathbf{B} .

a)

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \underbrace{a\mathbf{u} - b\mathbf{v}}_{\in \mathbb{R}^n} + i \cdot \underbrace{(a\mathbf{v} + b\mathbf{u})}_{\in \mathbb{R}^n} \right) \wedge \left(\mathbf{A}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + i\mathbf{A}\mathbf{v} \right) \xrightarrow{\star^1} \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{u} &= a\mathbf{u} - b\mathbf{v} \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= a\mathbf{v} + b\mathbf{u} \end{cases}$$

Uso ese último resultado de \star^1 :

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2 = (\mathbf{A}\mathbf{u})^t(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (a\mathbf{u}^t - b\mathbf{v}^t) \cdot (a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) = a^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 - (a+b)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 & \star^2 \\ \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 = (\mathbf{A}\mathbf{v})^t(\mathbf{A}\mathbf{v}) = (a\mathbf{v}^t + b\mathbf{u}^t) \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{u}) = a^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + (a+b)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 & \star^3 \end{cases}$$

Sumando \star^2 y \star^3 y el hermoso factor común en grupos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 &= a^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 - (a+b)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + a^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + (a+b)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= a^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 + b^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + a^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + b^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= a^2(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2) + b^2(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2) \\ &= (a^2 + b^2) \cdot (\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2) \end{aligned}$$

b) El la $\|\cdot\|_2^2$ del autovector:

$$\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|_2^2 = (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^*(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\mathbf{u}^t - i\mathbf{v}^t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2$$

Ahora queda más claro. Si $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ con $\mathbf{w} \neq 0$, because autovector:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 &= (\mathbf{A}\mathbf{w})^* \cdot (\mathbf{A}\mathbf{w}) \stackrel{!}{=} \lambda^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 & \Leftrightarrow & \lambda^2 = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \\ & & \Leftrightarrow & |\lambda| = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} \\ & & \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} & \boxed{|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_2} \end{aligned}$$

- c) En un espacio vectorial de dimension finita todas las normas son equivalentes, entonces existen $c_1, c_2 > 0$ tal que:

$$c_1 \|w\|_2 \leq \|w\| \leq c_2 \|w\|_2$$

☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 📄.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 📄

Ejercicio 3. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)^t$.

- (a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.
- (b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J .
¿Contradice la convergencia del método?
- (c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1 .

Sugerencia: Considerar una base de autovectores de J .

- (a) Busco autovalores de J ,

Si bien es una matriz chica de 2×2 quiero practicar el método para calcular los autovalores sin calcular la inversa de D . Sea como sea, la *sugerencia del final* dice que voy a terminar calculando J .

Escribiendo a la matriz como $A = L + D + U$ ([ver acá el genérico](#) [click click](#) 📄), Si quiero los autovalores de la matriz de iteración es $J = -D^{-1}(L + U)$ puedo hacer:

$$J = -D^{-1}(L + U) \text{ tiene autovalor } \lambda \Leftrightarrow \det(\lambda D + (L + U)) = 0$$

con

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

Calculo el siguiente determinante para encontrar :

$$\det(\lambda D + (L + U)) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 64\lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Dado que el radio espectral $\rho(J) = \frac{3}{4} < 1$ el método de Jacobi converge para cualquier valor inicial.

- (b) La matriz de iteración de Jacobi:

$$J = - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{(L+U)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{32} \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo la $\|\cdot\|_2$ con la SVD. Sale fácil multiplicando por matrices de permutación a esa matriz fea:

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{32} \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahí tengo que $\sigma_1 = 6 \Rightarrow \|J\|_2 = 6$

Las normas pedidas:

$$(\text{ruler}) \quad \|J\|_1 = 6$$

$$(\text{ruler}) \quad \|J\|_\infty = 6$$

$$(\text{ruler}) \quad \|J\|_2 = 6$$

Recordar acá que:

Una matriz de iteración M_I converge si y solo si $\rho(M_I) \stackrel{\star^1}{<} 1$.



Por otro lado para cualquier norma $\|\cdot\|$, se tiene que $\rho(M_I) \leq \|M_I\|$. Por lo tanto es *suficiente* que $\|M_I\| < 1$ para garantizar convergencia.



Peeeeeero, si $\|M_I\| > 1$ no quiere decir que no converja el método, debido a que todo depende de \star^1 .

(c) Hay que usar:

$$\|A\|_W = \|W^{-1}AW\|_\infty$$

La matriz generada por los autovectores:


$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Y puedo hacer:

$$J = CDC^{-1} \Leftrightarrow C^{-1}JC = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto usando la norma $\|\cdot\|_C$

$$\|J\|_C = \|C^{-1}JC\|_\infty = \|D\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

Ejercicio 4. Decidir para cada una de las siguientes matrices si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel converge.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz A:

A es una matriz *tridiagonal* es decir que averiguando el radio espectral de algún método ya sé lo que pasa con el otro, debido a que para este tipo de matrices:



$$\rho(T_{GS}) \stackrel{\star^1}{=} \rho^2(T_J)$$

Calculo $T_J = -D^{-1}(L + U)$:

$$T_J = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo los autovalores:

$$\det(T_J - \lambda I) = -\lambda \cdot (\lambda^2 + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \lambda_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \rho(T_J) = \max_i (|\lambda_i|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \stackrel{\star^1}{\Rightarrow} \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2}$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Ambos métodos convergen dado que:

$$\rho(T_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad y \quad \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2} < 1.$$

En particular el método de Gauss-Seidel converge más rápido dado que el de Jacobi, dado que $\rho_{GS} < \rho_{TJ}$

Matriz B:

👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Matriz C: C es una matriz *simétrica y definida positiva*.

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 5. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

a) 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

b) 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 6. 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 7. 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 8. 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 9. 👤... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🏠.

Ejercicio 10. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

🔥 Ejercicios de parciales:

🔥 1. [recu 5/12/2024] Se desea resolver el sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar los valores de α para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para cualquier vector inicial x_0 .

(b) Probar que si $\alpha = 0$ el método de Jacobi converge en 3 pasos para cualquier x_0 .

Sugerencia: analizar B_J^3 , siendo B_J la matriz que gobierna la iteración del método de Jacobi.

(a) Busco α tal que $\rho(B_{GS}) < 1$. Interesante en este ejercicio es el *ratoneo*, demostración de como las pocas ganas de invertir una matriz revelan una forma de encontrar lo deseado minimizando el esfuerzo y coso, en fin:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \implies T_{GS} = -(D + L)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto T_{GS} tiene ceros en la primera y segunda columna, mientras que en la tercera tiene a la *primera columna* de $-(D + L)^{-1}$ multiplicada por α . Es *fácil* encontrar esa *primera columna* sin invertir toda la matriz:

$$(D + L) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así tengo T_{GS} :

$$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Matriz que tiene un *radio espectral*: $\rho(T_{GS}) = 2|\alpha|$. Por lo tanto para que el método de Gauss-Seidel converja para todo vector inicial x_0 :

$$|\alpha| < 1$$

Fin.

(b) Jacobi:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \implies T_J = -D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hago hasta la cuarta iteración, para comparar la tercera y cuarta:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= T_J x^{(0)} + b \\ x^{(2)} &= T_J x^{(1)} + b = T_J(T_J x^{(0)} + b) + b = T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b \\ x^{(3)} &= T_J x^{(2)} + b = T_J(T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b) + b = T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b \\ x^{(4)} &= T_J x^{(3)} + b = T_J(T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b) + b = T_J^4 x^{(0)} + T_J^3 b + T_J^2 b + T_J b + b \end{aligned}$$

Usando la sugerencia puedo ver que $x^{(3)}$ y $x^{(4)}$ son iguales:

$$T_J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{más}]{\text{una}} T_J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} x^{(4)} & = & T_J^4 x^{(0)} + T_J^3 b + T_J^2 b + T_J b + b = T_J^2 b + T_J b + b \\ - & & \\ x^{(3)} & = & T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b = T_J^2 b + T_J b + b \end{array} \rightarrow \boxed{x^{(4)} = x^{(3)}}$$

Por lo tanto converge en la tercera iteración.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

2. [segundo cuatri 2023] Dada una matriz real A , notamos $A = D + L + U$, donde D es diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

(a) Probar que x es solución de $Ax = b$ si y solo si x satisface:

$$(I + \frac{1}{2}L)x = -(D - I + \frac{1}{2}L + U)x + b.$$

(b) Considerar el método iterativo derivado de la formulación anterior:

$$x^{n+1} = Bx^n + c,$$

donde $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$ y $c = (I + \frac{1}{2}L)^{-1}b$. Probar que λ es un autovalor de B si y solo si λ es raíz de la ecuación:

$$\det(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)) = 0.$$

(c) Para $a \in \mathbb{R}$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método anterior converge para una matriz A si y solo si $|a| < 1$.

(d) Probar que para que el método de Jacobi converja se debe cumplir la misma condición. Deducir de esto que la condición para que Gauss-Seidel converja es la misma ¿Qué método es preferible para la matriz A ?

(a) Para que x sea solución solo hay que hacer un par de cuentas y ver que queda una igualdad:

$$\begin{aligned} (I + \frac{1}{2}L)x &= -(D - I + \frac{1}{2}L + U)x + b &\Leftrightarrow& Ix + \frac{1}{2}Lx = -Dx + Ix - \frac{1}{2}Lx - Ux + b \\ &&\Leftrightarrow& Dx + Lx + Ux = b \\ &&\Leftrightarrow& (D + L + U)x = b \\ &&\Leftrightarrow& Ax = b \end{aligned}$$

(b) B va a tener a λ como autovalor si y solo si $|B - \lambda I| = 0$. Hay que acomodar ese determinante feo y llegar a esa expresión:

$$\begin{aligned} \det(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)) &= 0 &\Leftrightarrow& \det(\underbrace{(-(I + \frac{1}{2}L)(-I + \frac{1}{2}L)^{-1})(D - I + \frac{1}{2}L + U) + \lambda(I + \frac{1}{2}L)}_{I_n}) = 0 \\ &&\Leftrightarrow& \det(-(I + \frac{1}{2}L)B + \lambda(I + \frac{1}{2}L)) = 0 \\ &&\Leftrightarrow& \det((-B + \lambda I)(I + \frac{1}{2}L)) = 0 \\ &&\Leftrightarrow& \det(-B + \lambda I) \cdot \underbrace{\det(I + \frac{1}{2}L)}_{\neq 0} = 0 \\ &&\Leftrightarrow& \det(-B + \lambda I) = 0 \\ &&\Leftrightarrow& \det(B - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

(c) De la teórica sabemos que:

$$\text{La sucesión } \{B^k\} \text{ converge} \iff \rho(B) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\} < 1$$

Por lo tanto quiero calcular los autovalores de la matriz de iteración $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$, lo cual, dado lo visto en el ítem anterior, es lo mismo que calcular:

$$\det(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)) = 0$$

Cálculo que *no requiere invertir nada*, lo cual nos saca una sonrisa 😊. Junto los ingredientes para cocinar eso:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

$$D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \frac{a}{2} & a^2 & a \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda\frac{a}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante de eso:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda^3 - a^2\lambda \stackrel{!}{=} \lambda \cdot (\lambda - a) \cdot (\lambda + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = a \\ \lambda_3 = -a \end{cases}$$

Por lo tanto para que la matriz de iteración B converga sin importar el vector inicial:

$$|a| < 1$$

(d) La matriz de iteración, B_J , para el método de Jacobi:

$$B_J = -D^{-1}(L + U).$$

Con la propiedad que se usó en el ejercicio anterior, para calcular los autovalores de esta B_J :

$$\lambda D + L + U = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante e igualo a cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(\lambda - \sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\right) \cdot \left(\lambda + \sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \\ \lambda_3 = -\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \end{cases}$$

Por lo tanto el radio espectral de B , $\rho(B)$ debe cumplir que:

$$\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\right| < 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{2a^2}{1+a^2} < 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} 0 < 2a^2 < 1+a^2 \Leftrightarrow -a^2 < a^2 < 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} |a| < 1$$

Misma condición que la matriz anterior.

Lo que sigue ahora queda servido para usar la propiedad de la *tridiagonalidad* que relaciona los *radios espectrales* de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Dado que A es tridiagonal para todo valor de a , sé que:

$$\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS}) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}}\right)^2 = \left|\frac{2a^2}{1+a^2}\right|$$

Para que el método de Gauss-Seidel converja:

$$\left|\frac{2a^2}{1+a^2}\right| < 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} |a| < 1$$

Por lo tanto tengo la misma condición que para el método de *Jacobi*.

Con respecto a la velocidad de convergencia, hay que pensar que lo que se está haciendo, *maomemo*, es multiplicar una matriz por sí misma una y otra vez, por lo tanto mientras más rápido se achique más rápido va a converger. Y dado que para cualquier norma subordinada:

$$\rho(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^k\|},$$

mientras más chico el $\rho(B)$ más rápido va a converger.

$$\rho(B_J) < 1 \quad y \quad \rho(B_{GS}) < 1 \quad y \quad (\rho(B_J))^2 = \rho(B_{GS}) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \boxed{\rho(B_J) > \rho(B_{GS})}$$

El método de Gauss-Seidel converge más rápido que el de Jacobi para esta matriz A . Comparo con $\rho(B) = |a|$:

$$\rho(B_{GS}) = \frac{2a^2}{1+a^2} \quad y \quad \rho(B) = |a|$$

Abro el módulo de a planteo un caso cuando $a > 0$ y otro cuando $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} \text{si } a > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \rho(B_{GS}) \stackrel{?}{>} \rho(B) \Leftrightarrow \frac{2a^2}{1+a^2} > a \\ \Leftrightarrow 2a^2 > a + a^3 \\ \Leftrightarrow 0 > a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a - 1)^2 \stackrel{!}{>} 0 \text{ ¡Absurdo!} \text{☠} \\ \Rightarrow \boxed{\rho(B_{GS}) \stackrel{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{array} \right. \\ \text{si } a < 0 & \left\{ \begin{array}{l} \rho(B_{GS}) \stackrel{?}{>} \rho(B) \Leftrightarrow \frac{2a^2}{1+a^2} > -a \\ \stackrel{!}{\Leftrightarrow} 2a^2 < a + a^3 \\ \Leftrightarrow 0 < a \cdot (1 - 2a + a^2) = a \cdot (a - 1)^2 \stackrel{!}{<} 0 \text{ ¡Absurdo!} \text{☠} \\ \Rightarrow \boxed{\rho(B_{GS}) \stackrel{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{array} \right. \end{cases}$$

Es así que el método de Gauss-Seidel es el más rápido para converger de los tres para la matriz A , porque tiene el menor *radio espectral*.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼