

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 3

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 13/05/25 @ 11:42

Choose your destiny:

(click click  en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.

☉ Ejercicios de Parciales

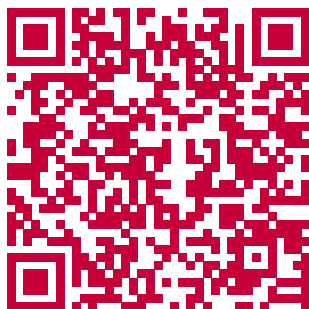
 [1.](#)

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:

13/05/25 @ 11:42

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

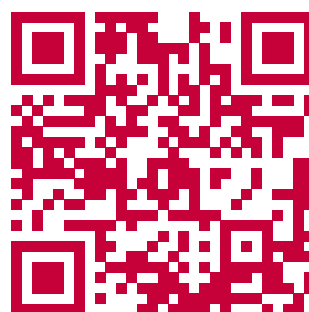
Guía 3



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:✚ *Matriz definida positiva:*

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva:

$$\forall x \neq 0 \quad x^t A x > 0 \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

Algunas propiedades de las matrices definidas positivas:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies \exists A^{-1}$.
- Los elementos diagonales son positivos.
- Las submatrices principales también son matrices definidas positivas

✚ *Descomposición de Cholesky:*

La descomposición de Cholesky para una matriz A simétrica y definida positiva:

$$A = LL^t$$

con L triangular inferior. A partir de la descomposición:

$$A = \overbrace{\tilde{L}U}^{\text{la misma LU de siempre}} \xrightarrow{\text{✚}} A = \tilde{L}D\tilde{L}^t.$$

\downarrow
 matriz diagonal
 con los elementos
 diagonales de U



$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$, es definida positiva si y solo si D lo es. Como D es diagonal, solo es cuestión de ver que $[D]_{ii} > 0$.



Finalmente:

$$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t$$

✚ *Proyectores:*

Se llama *Proyector* a una transformación lineal P que cumple que:

- $P(v) = v$
- $P \circ P = P$

Si $P : V \rightarrow V$ es proyector, están las siguientes propiedades:

$$\text{🏠 } v - P(v) \in \text{Nu}(P) \quad \forall v \in V$$

$$\text{🏠 } \text{Nu}(P) \oplus \text{Im}(P) = V \text{ lo mismo que decir que } \text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{\mathbf{0}\}$$

$$\text{🏠 } P \text{ un } \text{proyector ortogonal} \Leftrightarrow \text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$$

$$\text{🏠 } P \text{ es un } \text{proyector ortogonal} \text{ expresado en una base } \text{ortonormal} \implies P = P^t \quad (P = P^* \in \mathbb{C})$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Sean A y $B \in K^{n \times n}$. Probar que:

- (a) Si A y B son triangulares superiores, AB es triangular superior.
- (b) Si A y B son diagonales, AB es diagonal.
- (c) Si A es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

- (a) Una matriz A va a ser triangular superior si todos los número debajo de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ a_{ij} & \text{si } i \leq j \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \triangle \\ 0 \end{array} \right)$$

Los a_{ij} no tienen que ser necesariamente distinto a cero. Ahora multiplico dos matrices triangulares superiores:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} \cdot b_{kj} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple \star^2 son los que tiene las *filas* menores o iguales *columnas* y *filas* menores o iguales *columnas*, si no son cero. Básicamente la definición de matriz triangular superior.

- (b) Esta es un poco más fácil. Una matriz es diagonal si:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ij} & \text{si } i = j \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \right)$$

Nuevamente, los elementos diagonales no tienen que ser necesariamente distintos de cero. Ahora multiplico dos matrices diagonales:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} a_{ii} \cdot b_{ii} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la sumatoria las *columnas* de los elementos de A coinciden con las filas de los elementos de B , pero solo cuando estemos multiplicando la *fila* i con la *columna* i es que ambos elementos podrían ser no nulos.

- (c) Una matriz A va a ser triangular superior estricta si todos los número debajo y de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{ij} & \text{si } i < j \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 0 \quad a_{ij} \\ 0 \quad 0 \end{array} \right)$$

Meto inducción porque es un viaje. Quiero probar que:

$$p(n) : A \in K^{n \times n} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^n = 0.$$

Caso base:

$$p(2) : A \in K^{2 \times 2} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^2 = 0$$

Cálculo directo

$$A \cdot A \left(\begin{array}{cc} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

por lo tanto $p(2)$ es verdadera.

Paso inductivo: Voy a asumir que para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$p(k) : \underbrace{A \in K^{k \times k} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^k = 0}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Por lo tanto ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : A \in K^{(k+1) \times (k+1)} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^{k+1} = 0$$

Para probar esta tremenda garompa, voy a usar el producto en bloques. Tengo una matriz $A \in K^{(k+1) \times (k+1)}$ estrictamente triangular superior y la parto en bloques así:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{a_{12} \quad \cdots \quad a_{1k+1}} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{kk+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} \\ \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} \\ \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} & \boxed{} \boxed{} + \boxed{} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0 \cdots \cdots 0} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a' & \cdots & a \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oka, esto se fue al carajo. Pero está demostrado. La última matriz, es el resultado de A^2 . Tiene todos ceros excepto en el **bloque naranja**, que está en $K^{k \times k}$ y es el producto de hacer el **bloque naranja** por el **bloque naranja** dado que el **bloque violeta** por el **bloque verde** dio 0. Por lo tanto el **bloque naranja** es la **hipótesis inductiva!!!** Multiplicar $k+1$ veces A por si misma dará 0, porque el producto, será el (**bloque naranja**)² con cada vez más ceros.

Dado que $p(2), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción en $p(n)$ también será verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

El caso con $n = 1$ es trivial, dejame en paz.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

🔗 ¿Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 13/05/25 @ 11:42 . Chequeá si hay una **versión nueva** → **acá**.

[Ir a índice ↑](#)

Ejercicio 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

- (a) Escalonar la matriz A multiplicándola a izquierda por matrices elementales $T^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $T^{ij}(a) \in K^{n \times n}$ se define como:

$$T^{ij}(a) = I_n + aE^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, a \in K,$$

siendo E^{ij} las matrices canónicas de $K^{n \times n}$

- (b) Hallar la descomposición LU de A .

- (c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $Ax = b$, para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Hacer una operación entre *filas* es multiplicar por esas matrices T^{ij} , pero dado que el *me da tremenda pajómetro* explota, escribo las T^{ij} para la primera *columna* de ceros no más.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{31}(-\frac{2}{1})=I_4+(-\frac{2}{1})E^{31}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{41}(\frac{3}{1})=I_4+(\frac{3}{1})E^{41}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \star^1 \end{aligned}$$

Ahí entonces están las T^{ij} para hacer ceros en la primera *columna*. Y como la *matemagia* en esta materia parece no tener parangón, cuando multiplicás esas matrices T^{ij} da lo mismo que sumar los elementos fuera de la diagonal componente a componente:

$$T^{31} \cdot T^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gracias a ese resultado que en el próximo paso podría armar solo una matriz con la info para triangular toda la *segunda columna*. solo un producto matricial. Continúo la triangulación de \star^1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32}(-1)=I_4+(-\frac{1}{1})E^{32}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto para que la matriz A quede triangulada superiormente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_U$$

$$T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31} \cdot A = U$$

- (b) La U está una vez triangulada la matriz A . Encontrar la L sale con las matrices que multiplicamos para obtener la matriz triangulada:

$$L^{-1} \cdot A = U \xrightarrow[L]{\times \text{izquierda}} L \cdot L^{-1} \cdot A = L \cdot U \Leftrightarrow A = L \cdot U$$

El producto de las matrices elementales me forma la inversa de $L : L^{-1}$. Por suerte encontrar la inversa de $(L^{-1})^{-1}$ es sencillo:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +2 & +1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo hay que cambiarle los signos a los elementos que estás por debajo de la diagonal.

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A \cdot x = b \xLeftrightarrow{A=LU} LU \cdot x = b \Leftrightarrow L(\underbrace{U \cdot x}_y) = b \Leftrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b & \star^1 \text{ Arranco por acá.} \\ U \cdot x = y & \star^2 \text{ Sigo por acá una vez encontrado } y. \end{cases}$$

Entonces resuelvo primero \star^1 :

$$Ly = b \xrightarrow{\text{armo sistema}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow y \stackrel{\star^3}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con la \star^3 resuelvo \star^2 :

$$Ux = y \xrightarrow[\text{con } \star^3]{\text{armo sistema}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y porque soy un tipazo (y le pifí 1000 veces a las cuentas) acá tenés el código para corroborar:


🐞 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🐞

```
import numpy as np
import scipy

# Matriz A
A = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [2, -1, 0, -2], [-3, 3, 0, -1]])
L = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [2, 1, 1, 0], [-3, 0, 0, 1]])
U = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [0, 0, -4, -4], [0, 0, 0, 2]])
b = np.array([[1], [-7], [-5], [1]])


print(f"A =\n {A}")
print(f"L =\n {L}")
print(f"U =\n {U}")

print(f"\nA == LU --> {np.array_equal(A, L @ U)}")
print(f"Ax = b --> x = {np.transpose(np.linalg.solve(A,b))}")
```

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 


 Ale S. 

Ejercicio 3. Escribir funciones de Python  que calculen la solución de un sistema:

- (a) $Ly = b$, siendo L triangular inferior.
- (b) $Ux = y$, siendo U triangular inferior.



 ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una pull request al .

Ejercicio 4. Escribir funciones de Python  que realicen las siguientes tareas:

- (a) Calcular la descomposición LU de una matriz dada A , asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.
- (b) Resolver un sistema $Ax = b$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem (c) del ejercicio 2.

- (a) El siguiente *snippet* es en gran parte código para generar la matriz y después del cálculo de la triangulación formar las matrices L y U .

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
"""
Eliminacion Gausianna
"""

import numpy as np

def elim_gaussiana(A):
    m = A.shape[0]
    n = A.shape[1]
```



```
Ac = A.copy()

if m != n:
    print("Matriz no cuadrada")
    return

for i in range(0, n - 1):
    divisor = Ac[i][i]
    for j in range(i, n - 1):
        coef = Ac[j + 1][i] / divisor
        Ac[j + 1][i:] = np.subtract(Ac[j + 1][i:], coef * Ac[i][i:])
        Ac[j + 1][i] = coef

L = np.tril(Ac, -1) + np.eye(A.shape[0])
U = np.triu(Ac)

return L, U

def main():
    n = 7
    B = np.eye(n) - np.tril(np.ones((n, n)), -1)
    B[:n, n - 1] = 1
    print(f"Matriz B = \n{B}\n")

    L, U = elim_gaussiana(B)

    print(f"Matriz L = \n{L}\n")
    print(f"Matriz U = \n{U}\n")
    print("B = LU? ", "Sí!" if np.allclose(np.linalg.norm(B - L @ U, 1), 0)
    else "No!")
    print("Norma infinito de U: ", np.max(np.sum(np.abs(U), axis=1)))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Ejercicio 5. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 6. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 7. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 8. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 9. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

según la definición de matriz definida positiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \mathbf{x} &= 4x^2 - 4xz + 5y^2 + 10yz + 11z^2 \stackrel{!!}{=} (4x^2 - 4xz + z^2) + 5(y^2 + 2yz + z^2) + 5z^2 \\ &= 5z^2 + 5(y+z)^2 + (2x-z)^2 > 0 \end{aligned}$$

La matriz cumple la definición de *matriz definida positiva* $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$. Sí, oka, hacer eso es una locura, más fácil es hacer lo que sigue y mirar los elementos de la matriz D :

Hay un teorema que dice algo así:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y definida positiva si y solo si existe $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular inferior con diagonal positiva tal que $A = LL^t$.

Arranco como buscando la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{F_3 + \frac{1}{2}F_1}]{\underline{F_2 - \frac{1}{2}F_1}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{3}{2}F_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$



¡Sí! Ver los valores diagonales de U alcanza para ver que la matriz era efectivamente definida positiva. ¿Pero quién puede quitarnos el placer de haberlo comprobado de ambas formas?



Y ahora me formo la \tilde{L} a partir de la *eliminación gaussiana*:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto ya casi estamos:

$$A = \tilde{L}U = \tilde{L}D\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}(\tilde{L}\sqrt{D})^t = LL^t \text{ con } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pequeña verificación:

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
U = np.array([[4,2,-2],[0,4,6],[0, 0, 1]])

print(f"L_tilde U=\n{L_tilde@U}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 2 5 5]
#   [-2 5 11]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D = np.array([[4,0,0],[0,4,0],[0, 0, 1]])

print(f"D L_tilde_traspuesta=\n{D@np.transpose(L_tilde)}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 0 4 6]
#   [ 0 0 1]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D_sqrt = np.array([[2,0,0],[0,2,0],[0, 0, 1]])
L_chole = L_tilde @ D_sqrt

print(f"A=LL_traspuesta=\n{L_chole@np.transpose(L_chole)}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 2 5 5]
#   [-2 5 11]
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que A es definida positiva si y solo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = x_i^t x_j$

(\Rightarrow) Si A es una matriz simétrica y definida positiva va a admitir la descomposición de Cholesky ([mirá acá](#)).

$$A \xleftrightarrow[A \text{ def. pos.}]{A=A^t} A = \tilde{L} \overset{d_{ij}>0}{\uparrow} D \tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L} \sqrt{D} \sqrt{D} \tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t \xleftrightarrow[x \neq 0]{\times} 0 < x^t A x = x^t L L^t x = (L^t \cdot x)^t (L^t x) = y^t y$$

\downarrow
 la de LU

Ahora esos y tienen que ser *linealmente independientes*, más fácil, tengo que encontrar un solo conjunto:

$$y = L^t x \xrightarrow{\text{elijo}} \{x_1, \dots, x_n\} = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = L^t e_1 = \text{Col}(L^t)_1 \\ \vdots \\ y_n = L^t e_n = \text{Col}(L^t)_n \end{cases}$$

La matriz L es triangular inferior $\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \triangle & \\ a_{ij} & & \end{pmatrix}$, con unos en la diagonal por lo que sus columnas son *linealmente independientes*. Y dado que

$$x_i^t A x_j = e_i^t A e_j \stackrel{!}{=} a_{ij} = y_i^t y_j$$

tenemos que el conjunto que verifica lo pedido:

$$\{\text{Col}(L^t)_1, \dots, \text{Col}(L^t)_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

(\Leftarrow) La hipótesis ahora me dice que tengo vectores *linealmente independientes* y además que con esos vectores me formo la matriz A . Es decir que $A = X^t X$, con X :

$$X = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Rightarrow A = X^t X \xleftrightarrow[y \neq 0]{\times} y^t A y = y^t X^t X y \Leftrightarrow y^t A y = (X y)^t X y = \|X y\|_2^2 > 0$$

Queda demostrado ya que:

$$A = X^t X \xrightarrow{\text{transpongo}} A^t = (X^t X)^t = X^t X = A$$

$$y^t A y > 0 \quad \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n \xleftrightarrow{\text{y}} \xleftrightarrow{\text{def}} A \text{ es definida positiva}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) 🗣, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|A\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que $I - A^t A$ es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

(a) *Para la simetría:*

Transpongo y cruzo los dedos para que quede igual:

$$(I - A^t A)^t \stackrel{\text{linealidad en la transposición}}{=} I^t - (A^t A)^t = I - A^t A$$

Sobre la linealidad de la transposición:

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \xrightarrow{\text{transpongo}} [A + B]_{ij}^t = [A + B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

Es simétrica.

Para ver si es definida positiva:

Intentamos con la definición de *matriz definida positiva* y vemos que sale:

$$\begin{aligned} I - A^t A &\stackrel{\times}{\underset{x \neq 0}{\longleftrightarrow}} x^t(I - A^t A)x = \|x\|_2^2 - x^t A^t A x = \|x\|_2^2 - x^t A^t A x = \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \\ &\stackrel{!!}{=} \|x\|_2^2 \left(1 - \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right) \quad \star^1 \end{aligned}$$

Y por la definición de la norma inducida:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \underset{\text{enunciado}}{<} 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

queda entonces $\star^1 \underbrace{\|x\|_2^2}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right)}_{>0} > 0:$

$$x^t(I - A^t A)x > 0$$

(b) *Para la simetría:* Creo que esto se ve a simple vista:

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$$

Para ver si es definida positiva: Acá debería usar *Cholesky resumencito* [acá click click](#) 🍷

⚠️ $A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$, es definida positiva si y solo si D lo es. Como D es diagonal, solo es cuestión de ver que $[D]_{ii} > 0$. ⚠️

Acá surge naturalmente la pregunta de ¿Cómo 🤖 hago la descomposición?.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} &= \overbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & B \end{pmatrix}}^L \overbrace{\begin{pmatrix} I & M^t \\ 0 & B^t \end{pmatrix}}^{L^t} = \begin{pmatrix} I & M^t \\ M & MM^t + BB^t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = M^t \\ A^t = M \\ I = MM^t + BB^t \Leftrightarrow I - A^t A = BB^t \end{cases} \end{aligned}$$

Y en un giro totalmente inesperado, al menos por mí, quedó que esa expresión del ítem (a). BB^t es una matriz simétrica y definida positiva, por lo tanto tiene factorización de Cholesky,

$$C = BB^t = \tilde{B}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{B}^t$$

sé que existe esa matriz diagonal D que tiene sus elementos positivos.

Por lo tanto esto demuestra que efectivamente las matrices L y L^t son las matrices de la descomposición de Cholesky de la matriz del enunciado:

$$C = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = LL^t$$

Como la matriz C admite descomposición de Chole, es simétrica definida positiva.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 13. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C})

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{v_2^*}{\|v_2\|_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{v_n^*}{\|v_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $C_{EB} = C_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector v en base B son:

$$(v)_B = (v_1^*v, v_2^*v, \dots, v_n^*v).$$

(d) Calcular $(v)_B$ siendo $v = (1, -i, 3)$, $B = \left\{ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, i) \right\}$.

(a) Si B es una *base ortogonal*, una BOG, entonces sus vectores cumplen que:

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} \|v_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para calcular la matriz de cambio de base C_{EB} hay que calcular *las coordenadas de los vectores canónicos en la base B* : Ojo que esa llave son ecuaciones vectoriales, todo lo que está en **negrita**, **bold** es vector:

$$\begin{cases} e_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots + c_{1n}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{11}\|v_1\|_2^2 \Leftrightarrow c_{11} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ e_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{2n}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{21}\|v_2\|_2^2 \Leftrightarrow c_{21} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ \vdots \\ e_n = c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{n1}\|v_n\|_2^2 \Leftrightarrow c_{n1} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \end{cases}$$

Esos coeficientes c_{ij} me forman la primera fila, c_{ij} de la matriz C_{EB} :

$$(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}) = \left(\frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}, \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}, \dots, \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}$$

Cuando quiera calcular la fila j -ésima:

$$(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}) = \left(\frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \dots, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}$$

Y así me armo la matriz C_{EB} generando fila por fila con este método.

(b) Ahora B es una BON, así que:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} \|\mathbf{v}_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Y con esto la matriz del ítem (a) queda más simple como:

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{pmatrix} \star^1$$

La matriz de cambio de base C_{EB} toma *vectores en coordenadas de E* y da el resultado en *coordenadas de la base B*. Construir el cambio de base C_{BE} , es inmediato el cálculo de coordenadas haciendo el sistema como en el ítem (a) ¡Quedan los vectores de la base B conjugados como columnas de la matriz!

$$C_{BE} = \left(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n \right) \xrightarrow[\Rightarrow *]{\text{transpongo y conjuguo}} C_{BE}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{pmatrix} \star^1 C_{EB}$$

Eso funciona así porque:

$$C_{BE}^* C_{EB} = I$$

(c) Sale con el sistemita del ítem (a) nuevamente:

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \xleftrightarrow[\mathbf{v}_j^*]{\times \rightarrow} \mathbf{v}_j^* \cdot \mathbf{v} = c_j \underbrace{\|\mathbf{v}_1\|_2^2}_{=1} \Leftrightarrow c_j = \mathbf{v}_j^* \cdot \mathbf{v}$$

(d) Pajilla 😊. B es una BON. Usando el ítem (c):

$$(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3^*) \stackrel{!}{=} (0, -\frac{2}{\sqrt{2}}i, 3i)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤖

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una pull request al 🤖.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:

- (i) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (ii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (iii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

Acá un poco de cosas de proyectores, click, click 🗣️

- (i) Encuentro un *sistema de generadores* de $\text{Im}(f) = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$, y dado que el subespacio $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$, por ejemplo $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

Con esa data defino el proyector:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Si tomo como base $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco f , para lo cual multiplico por:

$$[C]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{calculo la}} [C]_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[f]_{EE} = [f]_{BE} \cdot [C]_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

(ii) Usando lo mismo de antes pero resuelvo de otra forma: Ahora tengo que una base del $\text{Nu}(f)$:

$$B_{\text{Nu}(f)} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

Completo esa base teniendo en cuenta que el vector que agrego va a ser un elemento de la $\text{Im}(f)$:

$$B_V = \underbrace{\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}}_{\in \text{Nu}(f)} \underbrace{\{(0, 0, 1)\}}_{\in \text{Im}(f)} = \mathbb{R}^3$$



Importante que $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = 0$, en \mathbb{R}^3 parece obvio, pero ya en \mathbb{R}^4 es más engañoso.



$$\star^1 \begin{cases} f(-1, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Voy a encontrar la expresión funcional de este proyector. La idea es escribir a esa base, B_V , en función de (x_1, x_2, x_3) para luego transformarla usando la propiedades de las viejas y queridas *transformaciones lineales*:

$$(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\star^2}{=} a \cdot (-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) + c(0, 0, 1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{sistema en}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Resolviendo ese sistema obtengo:

$$\begin{cases} a = x_2 \\ b = -x_1 - x_2 \\ c = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases},$$

es decir que \star^2 es:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot (-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1)$$



Aplicando f :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_2 \cdot (-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1)) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \cdot f(-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot f(-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot f(0, 0, 1) \\ f(x_1, x_2, x_3) &\stackrel{\star^1}{=} x_2 \cdot (0, 0, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (0, 0, 0) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Si por alguna razón quiero esto en forma matricial, transformo los canónicos y pongo los transformados como columnas:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ f(0, 1, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ f(0, 0, 1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

(iii) Ahora $\text{Nu}(f) = \langle (3, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

$$\begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Aprovechando que hay muchos ceros en la matriz, puedo encontrar los transformados de los *vectores canónicos* con un par de cuentas usando nuevamente propiedades de *transformaciones lineales*:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(3, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) &= (1, 1, 1) \end{cases} \xrightarrow{3F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \begin{cases} f(3, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 3, 2) &= (3, 3, 3) \end{cases} \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \rightarrow F_3} \begin{cases} f(3, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 2) &= (3, 3, 3) \end{cases} \\ \xrightarrow{2F_1 - 3F_3 \rightarrow F_1} \begin{cases} f(6, 0, 0) &= (-3, -3, -3) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 2) &= (3, 3, 3) \end{cases} \\ \xrightarrow{\frac{1}{6}F_1 \rightarrow F_1, \frac{1}{2}F_3 \rightarrow F_3} \begin{cases} f(1, 0, 0) &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ f(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 1) &= (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

En forma matricial quedaría:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando a $[f]_{EE}$ por (x_1, x_2, x_3) se obtiene la forma funcional:

$$[f]_{EE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix}$$

A mí me gusta escrito así:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \cdot (-x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

👉 Aportó con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Ejercicio 16.

- (a) Sea $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de \mathbb{R}^3 y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

- (b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Acá te dejo resumencito de proyector, [click](#), [click](#) 📄

- (a) Para calcular $[f]_B$ o $[f]_{BB}$ que me parece más descriptivo:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $[f]_{BB}$ hay que calcular las coordenadas en base B de los transformados de la base B .

$$\begin{cases} (f(1, -1, 0))_B = (1, -1, 0)_B \stackrel{!}{=} (1, 0, 0) \\ (f(0, 1, -1))_B = (0, 1, -1)_B \stackrel{!}{=} (0, 1, 0) \\ (f(0, 0, 1))_B = (0, 0, 0)_B \stackrel{!}{=} (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Salen a ojo esas coordenadas, porque son los casi mismos vectores que la base B . Si no lo ves, planteá las combinetas lineales para calcular las coordenadas y vas a llegar a lo mismo.

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si f es un proyector, lo va a ser en cualquier base, voy con la definición: $f \circ f = f$

$$[f]_{BB} \circ [f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [f]_{BB}$$

- (b) De ese subespacio saco uno de los muchos sistemas de generadores para $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$$

Propongo un proyector f con la condición de que $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$:

$$\star^1 \begin{cases} f(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(-3, 0, 1) = (-3, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$



Las cuentas estas que voy a hacer no son necesarias para contestar, pero quiero ver que no me quede simétrico.



Ojo que eso definido en \star^1 sería algo como $[f]_{BE}$ con $B = \{(-1, 1, 0), (3, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ para encontrar el proyector es su forma *más mejor*:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(3, 0, 1) = (3, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{✂}} \begin{cases} f(1, 0, 0) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\ f(0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\ f(0, 0, 1) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

También se podría haber usado lo de la combinación lineal:



$$(x_1, x_2, x_3) = a(-1, -1, 0) + b(3, 0, 1) + c(1, 1, 1)$$



para luego transformarlo y llegar a la expresión funcional de f . Mirá el ejercicio 15.(b)

El proyector en forma matricial en base E queda:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El proyector P no es un *proyector ortogonal*. Por un lado no se cumple que $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$, dado que $\underbrace{(1, 1, 1)}_{\in \text{Nu}(P)} \cdot \underbrace{(3, 0, 1)}_{\in \text{Im}(P)} \neq 0$. Además la expresión matricial tampoco cumple $P = P^t$.

Se puede encontrar una base en la que el proyector sí va a ser simétrico. En este caso particular:

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

igual que en el ítem (a), pero si bien es simétrica la expresión matricial no se puede concluir en esta base que sea un *proyector ortogonal*, debería estar expresado en una *base ortonormal* para ver ese resultado.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 17. Sea $v \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|v\|_2 = 1$. Probar que:

- (a) La transformación lineal definida por la matriz vv^* es la proyección ortogonal sobre $\langle v \rangle$.
- (b) Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S , entonces $A = \sum_{i=1}^m v_i v_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S .
- (c) Si A es como en el ítem anterior, $I - A$ es la proyección ortogonal sobre S^\perp .
- (d) Eligiendo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python 🐍 que $R = I - 2vv^*$ es la reflexión respecto de $\langle v \rangle^\perp$.

(a) Tenemos que:

$$\|v\|_2 = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} v^* \cdot v \stackrel{\star 1}{=} 1$$

Un *proyector ortogonal* sobre $\langle v \rangle$, P cumple:

$$P \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} v, \quad P \cdot v^\perp \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad P = P^* \quad \text{y} \quad \text{Nu } P \perp \text{Im } P$$

Entonces si esta *gaver* vv^* cumple eso, ganamos 🏆:

$$\overbrace{vv^*}^P \cdot v \stackrel{!}{=} v(v^* \cdot v) \stackrel{\star 1}{=} v,$$

that was easy. Vamos a por la otra. Agarro algún $w \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} vv^* \cdot \underbrace{(Pw - w)}_{\perp v} = 0 &\Leftrightarrow vv^* \cdot Pw - vv^* \cdot w = 0 \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} v(P^*v)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} v(Pv)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} vv^*w - vv^*w \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Me doy cuenta que podría haber probado que $(vv^*)^* = vv^*$ ¿Pero quien me quita lo bailado?:

- (b) Si tengo una base del subespacio, entonces puedo escribir a un vector genérico $w \in S$ como una combineta de los vectores de la base:

$$w = \sum_{j=1}^m a_j v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m$$

Transformo teniendo en cuenta que $v_i^*(a_j v_j) = \begin{cases} a_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, recordando que $\|v_i\|_2 = 1$:

$$Aw = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* w = \sum_{i=1}^m a_i v_i = w \implies Aw = w$$

Me doy cuenta que podría haber probado que $A = A^*$ ¿Pero quien me quita lo bailado?:

$$A^* = \left(\sum_{i=1}^m v_i v_i^* \right)^* \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^m (v_i v_i^*)^* = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* = A$$

- (c) Medio que usé algo de esto en el ítem (a). Un *proyector ortogonal* sobre S , va a mandar todo elemento del *complemento ortogonal* de S , S^\perp al 0.

Es decir, si $w \in S^\perp$:

$$Aw = 0 \quad \text{y} \quad (I - A)w = w \implies \underbrace{A(I - A)w}_w = (A - A^2)w \stackrel{!}{=} (A - A)w = 0.$$

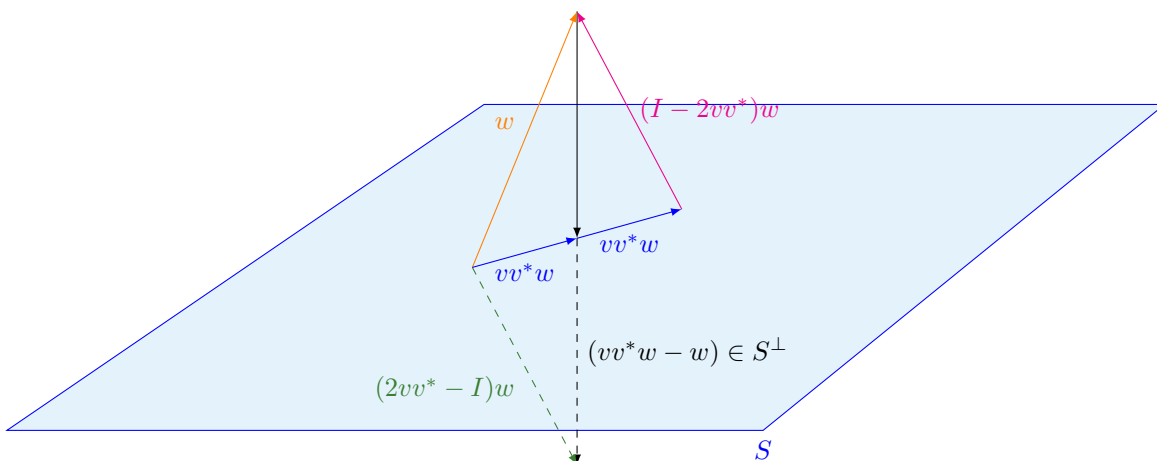
Podemos decir que $A(I - A)$ es el operador nulo.

En general para cualquier elemento v del *espacio vectorial* V : Puedo escribir $v = s + s^\perp$, una combineta única de elementos de S y S^\perp , ya que $S \oplus S^\perp$.

$$A(I - A)v = A(I - A)(s + s^\perp) = A(s + s^\perp - As - As^\perp) = As + As^\perp - As - A^2 s^\perp \stackrel{!}{=} 0$$

Los *proyectores ortogonales* cumplen que $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$, donde la imagen es el S al que se proyecta y el núcleo es el S^\perp .

- (d) Sí, lo sé, esto no es una implementación en Python 🐍.



Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 [naD](#)  [GarRaz](#) 

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(A)$.

Una proyección ortogonal P debe cumplir con que $\text{Im}(P) \perp \text{Nu}(P)$:

$$\text{Im}(P) = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(P) = \{(-1, 0, 1)\}$$

Por lo tanto mi candidato a *proyector ortogonal*:

$$\begin{cases} P(1, 0, 1) = (1, 0, 1) \\ P(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ P(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Voy a buscar la expresión funcional del proyector:

$$(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\star^1}{=} a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (-1, 0, 1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{resolver en}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$


Eso queda:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ b = x_2 \\ c = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{y transformando}]{\text{reemplazando en } \star^1} P(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \right)$$

Transformo los canónicos para hallar P en forma matricial:

$$[P]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quedó hermosamente simétrico, porque es un *proyector ortogonal* expresado en una *base ortonormal*.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 [naD](#)  [GarRaz](#) 

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo! 



Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 22. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 23. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  **al repo**, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Ejercicio 24. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicios de parciales:

 1. _____