

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 4

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 17/05/25 @ 21:35

*Choose your destiny:*

(click click  en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">23.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	<a href="#">??.</a>

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)       [2.](#)       [3.](#)       [??.](#)

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por última vez:

17/05/25 @ 21:35

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 4



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



## Notas teóricas:



## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ):

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(f) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ecuación característica, a polinomio característico:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -ia & \text{con} \\ \lambda = ia & \text{con} \end{cases} \begin{cases} v_{\lambda=-ia} = (1, -i) \\ v_{\lambda=ia} = (1, i) \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request al](#).

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request al](#).

(d) Ecuación característica, a polinomio característico:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & a - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)^3 - 3(a - \lambda) + 2 = 0 \star^1$$

Que lindo ejercicio.

Si hago  $x = (a - \lambda)$  entonces  $\star^1$ :

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow ((a - \lambda) - 1)^2((a - \lambda) + 2) = 0$$

Por lo tanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 1 & \text{con} \\ \lambda_2 = a + 2 & \text{con} \end{cases} \begin{cases} E_{\lambda=a-1} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \\ E_{\lambda=a+2} = \langle (1, 1, 1) \rangle \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al [repositorio](#).

(f) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al [repositorio](#).

**Ejercicio 2.** Para cada una de la matrices  $A$  del ejercicio anterior, sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal tal que  $[f]_{EE} = A$ . Decidir si es posible encontrar una base  $B$  de  $K^n$  tal que  $[f]_{EE}$  sea diagonal. En caso afirmativo, calcular  $C_{BE}$ .

Sea  $A \in K^{n \times n}$  criterios para saber si una matriz es diagonalizable:

$A$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes.

$A$  es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

$A$  es diagonalizable si  $\text{mg}(\lambda_i) = \text{ma}(\lambda_i)$  para cada  $\lambda_i$  de  $A$ .

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#), o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al [repositorio](#).

**Ejercicio 3.** Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

- (a) Hallar una matriz  $A$  tal que  $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$ . Mostrar que  $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$
- (b) Diagonalizar  $A$ .
- (c) Dar una fórmula cerrada para  $F_n$ .

- (a) Quiero una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aF_{n-1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_{n+1} \end{cases} \stackrel{!}{=} \begin{cases} aF_{n-1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistemita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para mostrar lo que sigue, inducción. Quiero mostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso base:

$$p(1) : A^1 \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_1 \\ F_0 + F_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Es así que la proposición  $p(1)$  resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$  la proposición:

$$p(k) : A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix}$$

hipótesis inductiva

es verdadera. Entonces quiero ver ahora que la proposición:

$$p(k+1) : A^{k+1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

también lo sea.

$$A^{k+1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{HI}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

Tuqui, también resulta ser verdadera.

Es así que  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas y por el principio de inducción la proposición  $p(n)$  también lo será  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) *Ecuación característica a polinomio característico:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{característica}]{\text{ecuación}} (A - \lambda I)v_\lambda = 0 \xrightarrow[\text{característico}]{\text{polinomio}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Esa notación se complementa con:

$$\left\{ \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \right.$$

Diagonalizar esta matriz tiene un montón de *droga*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$$

No sé si están bien las cuentas, pero, a veces es mejor ni preguntar. *Beware* ⚠.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}$$

(c) **Viene por acá esto? CONSULTAR**

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

#### Ejercicio 4. 🐙... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

#### Ejercicio 5. 🐙... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

#### Ejercicio 6. 🐙... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

🐙Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ [al repo](#), críticas, todo sirve.  
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Ejercicio 7. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 8. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 9. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 10. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 17. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 18. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → *una pull request* al 🐙.

---

**Ejercicio 19.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

**Ejercicio 20.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

**Ejercicio 21.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

**Ejercicio 22.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---

**Ejercicio 23.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → *una pull request* al 🐙.

---



## 🔥 Ejercicios de parciales:

🔥1. Sea  $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $v = (1, 2, 0)$ ,  $w = (2, 6, 0)$  y  $u = (-2, -2, -1)$  son autovectores de  $A$ .

- Probar que  $A$  es diagonalizable.
- Calcular los autovalores de  $A$  y determinar  $r, s$  y  $t$ .

- Es diagonalizable porque estamos en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  y hay una base de dimensión 3 de autovectores:

$$B = \{(1, 2, 0), (2, 6, 0), (-2, -2, -1)\},$$

son autovectores de  $A$ .

- Los *autovectores*, son vectores que cumplen la *ecuación característica*:

$$A \cdot v_\lambda = \lambda \cdot v_\lambda$$

Es solo cuestión de pedirle a los autovectores del enunciado que cumplan esa ecuación y despejar.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} r & \stackrel{\star^1}{=} -2s \\ \lambda & = 0 \end{cases}$$

Siguiente autovector:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} s & = 1 \\ \lambda & = 2 \end{cases} \Rightarrow r \stackrel{\star^1}{=} -2$$

Siguiente y último autovector

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} t & = 6 \\ \lambda & = 2 \end{cases}$$

Listo hay subespacios para justificar aún más la diagonalidad de la matriz:

$$E_{\lambda=0} = \langle (1, 2, 0) \rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=2} = \langle (-2, -2, -1), (2, 6, 0) \rangle$$

La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética:

$$\text{mg}_A(\lambda = 2) = \text{ma}_A(\lambda = 2) = 2 \quad \text{y} \quad \text{mg}_A(\lambda = 0) = \text{ma}_A(\lambda = 0) = 1$$

La matriz en forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

🔗 ¿Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 17/05/25 @ 21:35 . Chequeá si hay una **versión nueva** → **acá**.

[Ir a índice ↑](#)

## 2.

a) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que si  $A$  es inversible y diagonalizable, entonces  $A^{-1}$  y  $A^k - kI_n$  son diagonalizables para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .

b) Sea  $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

i) Probar que  $J$  es una matriz diagonalizable.

ii) Calcular  $J^5 - 5I_3$ .

a) Truquito destacable:  $I_n = PP^1$  para luego sacar factor común al calcular  $A^k - kI_n$ . Por otro lado, la inversibilidad de una matriz diagonalizable asegura que los autovalores son distintos de cero:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| \stackrel{!}{=} |D| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Las matrices inversibles tienen  $\det(A) \neq 0$ .

b) i) Se calculan los autovectores y autovalores:

$$E_{\lambda=2} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda=4} = \{(0, 1, 1)\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Te debo la inversa por *pajilla*.

ii) Sale combinando lo que se usó hasta ahora.

**3.** Dadas las matrices  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y un vector  $v \in \mathbb{C}^n$ , para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

(a) Si  $v$  es un autovector de  $A$ , y  $A$  es inversible, entonces  $v$  es un autovector de  $A^{-1}$ .

(b) Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables,  $A + B$  también lo es.

(c) Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables, entonces  $AB$  es diagonalizable.

(d) Si  $A$  o  $B$  es inversible y  $AB$  es diagonalizable entonces  $BA$  también es diagonalizable.



Ejercicio de demostraciones. Dependiendo las horas que dormiste la noche anterior esto puede salir enseguida o en horas. La matriz que uso en los contraejemplos suele ser un *caballito de batalla* para estos problemas, guardátela.



(a) Si  $v$  es un autovector y además  $\exists A^{-1}$  entonces:

$$Av = \lambda v \stackrel{!}{\iff} A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \stackrel{!}{\iff} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

Por lo tanto:

resultó verdadera

(b) Si las matrices son diagonalizables, ¿La suma también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1, 0)\}$$

Por lo tanto:

resultó falsa

(c) Si las matrices son diagonalizables, ¿El producto también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1, 0)\}$$

Por lo tanto:

resultó falsa

(d) alguna de las dos matrices es inversible y  $AB$  es diagonalizable, entonces ¿ $BA$  es diagonalizable también?

Supongo que  $\exists A^{-1}$ :

$$AB = CDC^{-1} \xrightarrow[\leftarrow \times A]{\rightarrow \times A^{-1}} A^{-1}ABA = A^{-1}CDC^{-1}A \Leftrightarrow BA = A^{-1}CD(A^{-1}C)^{-1} \xrightarrow{P = A^{-1}C} BA = PDP^{-1}$$

La expresión de  $BA$  resultó diagonalizable. La demostración con  $B$  diagonal es análoga. Por lo tanto:

resultó verdadera