

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 24/06/25 @ 00:50

*Choose your destiny:*

(click click 🎯 en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">??.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)       [2.](#)       [3.](#)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:

24/06/25 @ 00:50

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:**✿ *Descomposición en valores singulares:*

Tengo una matriz  $A \in K^{m \times n}$

$$A = U \Sigma V^*$$

Con  $U$  y  $V$  matrices unitarias, por lo tanto cuadradas, simétricas  $\left\{ \begin{array}{l} U^*U = I \\ V^*V = I \end{array} \right\}$ , y  $\Sigma \in K^{m \times n}$  el mismo tamaño que  $A$ .

- Para obtener  $\Sigma$  calculo los valores  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  donde:

$$A^* A v_i = \lambda_i v_i$$

y luego ordeno los elementos diagonales  $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$  de mayor a menor. Completo con *fila o columnas de ceros*, hasta llegar a la dimesión correcta.

- Para obtener la matriz  $V$  pongo a los  $v_i$  calculados previamente como columnas en orden correspondiente a su  $\sigma_i$ .
- Para calcular  $U$ :

$$A v_i = U \Sigma V^* v_i = U \Sigma e_i = U \sigma_i e_i = \sigma_i u_i \Leftrightarrow \boxed{A v_i = \sigma_i u_i}$$

De ese último resultado se desprende info de la matriz  $A$ . Como  $A \in K^{m \times n}$  con  $(m > n)$  tiene rango  $r < n$ :

$$\text{Nu}(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \quad \text{y} \quad \text{Im}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

✿ *Pseudo-inversa:*

Si se tiene una  $A \in K^{m \times n}$

$$A = U \Sigma V^* \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{pseudo}} A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*,$$

con la  $\Sigma^\dagger$  que sería como  $\Sigma^t$  invirtiendo los elementos diagonales  $[\Sigma^\dagger]_{ii} = \frac{1}{\sigma_{ii}}$ . Propiedades de esta cosa dignas de ser mencionadas:

- Si bien en general,  $AA^\dagger \neq I_m$  y los mismo con  $A^\dagger A \neq I_n$ , tenemos este simpático resultado:

$$AA^\dagger A = A \quad \text{y} \quad A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$$

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

- Hallar una descomposición de Schur  $A = UTU^*$ , con  $U$  unitaria y  $T$  triangular superior con los autovalores de la matriz  $A$  en la diagonal.
- Descomponer a la matriz  $T$  hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal  $D$  y una matriz triangular superior  $S$  con ceros en la diagonal. Probar que  $S^j = 0$  para todo  $j \geq 2$ .
- Usar los ítems anteriores para calcular  $A^{10}$

- Busco *autovalores* y *autovectores* de  $A$ :

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \quad \text{con} \quad E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1) \right\rangle$$

Solo salieron 2 autovectores del único autovalor  $\lambda = 9$ . Esto nos dice que la matriz no es diagonalizable. Pero nadie nos pidió que diagonalicemos, así que ahora para encontrar la *descomposición de Schur* expando a una *base ortonormal* de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{BON} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{5}(-2, -4, 5), \frac{1}{3}(1, 2, 2) \right\}$$

Donde usé Gram Schmidt para calcular el autovector  $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$  y también para calcular un **vector extra para formar todo  $\mathbb{R}^3$** .

Entonces tengo ya la base para encontrar la matriz unitaria  $U_1$ :

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora calculo:

$$\begin{aligned} U_1^t A U_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_T \end{aligned}$$

La matriz resultante quedó triangular superior.

Las dos primeras columnas de la matriz  $T$  están regaladas, porque son autovectores, entonces  $U^t A v_i = \lambda_i e_i$ . La tercera columna es parte de la arquitectura que sostiene al infierno.

Por lo tanto se tiene que:

$$U_1^t A U_1 = T \Leftrightarrow A = U_1 T U_1^t$$

$$A = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(b) Descompongo:

$$T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_S$$

Ahora tengo que ver que  $S^j = 0 \ \forall j \geq 2$ :

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hay que calcular  $A^{10}$ :

$$A = UTU^t = U(D + S)U^t \stackrel{!}{\Leftrightarrow} A^{10} = U(D + S)^{10}U^t$$

Y ahora esa horrible expresión:

$$(D + S)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (D^k S^{10-k}) \stackrel{!}{=} \binom{10}{10} D^{10} + \binom{10}{9} D^9 S + \underbrace{\binom{10}{8} D^8 S^2 + \dots + \binom{10}{1} D S^9 \binom{10}{0} S^{10}}_0 \stackrel{!}{=} 9 \cdot (D + 10S)$$

Donde usé que justo en este ejercicio  $D$  es una matriz escalar, es decir:  $kI$  entonces conmuta en el producto, porque sino *esto no funciona ni en pedo*.

Por lo tanto:

$$A^{10} = U(9 \cdot (D + 10S))U^t = 9U(D + 10S)U^t$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 2.** Probar que si  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal  $a_{ii} \in \mathbb{R}$ .

Si  $A$  es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a  $\mathbb{R}$  se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n \times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \stackrel{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si  $a_{ii}$  es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 3.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana, probar que existen matrices  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $B$  simétrica y  $C$  antisimétrica ( $C^t = -C$ ) tales que  $A = B + iC$ .

A partir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices  $B$  y  $C$  como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices  $B$  y  $C \in \mathbb{R}$  y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{aligned} B + iC &= \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \\ &\stackrel{!}{=} A \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 4.** Dada  $A \in K^{n \times n}$  hermitiana y  $S \subset K^n$  un subespacio invariante por  $A$ , es decir  $Av \in S$  para todo  $v \in S$ . Probar que  $S^\perp$  es invariante por  $A$ .

Si tomo un  $v \in S$  y un  $w \in S^\perp$ :

$$\begin{array}{c} \in S \\ \uparrow \\ w^* \cdot v = 0 \\ \downarrow \\ \in S^\perp \end{array}$$

Ahora que sé que  $S$  es un subespacio invariante por  $A$ :

$$Av = \lambda v \xLeftrightarrow{\times A^*} A^*Av \stackrel{!}{=} A^2\lambda v = \lambda^2 v \stackrel{\star^1}{=} \lambda v \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\in S}{\uparrow} Av = w^* A^* \cdot \overset{\star^1}{=} \lambda (w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto  $Aw \in S^\perp \quad \forall w \in S^\perp$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 5.** Probar que  $A \in K^{n \times n}$  es hermitiana y definida positiva si y solo si  $A$  es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\xLeftrightarrow[\rightarrow]{\times v^*} v^*Av = \lambda v^*v \Leftrightarrow v^*Av \stackrel{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2 \\ Av = \lambda v &\Leftrightarrow v^*A^* = \bar{\lambda}v^* \xLeftrightarrow[\leftarrow]{\times v} v^*A^*v = \bar{\lambda}v^*v \Leftrightarrow v^*A^*v \stackrel{\star^2}{=} \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Como  $A = A^*$  el miembro izquierdo en  $\star^1$  y  $\star^2$  es igual. Por lo tanto  $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ .

Ahora si  $A$  es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \xLeftrightarrow[\rightarrow]{\times v} \underbrace{v^*Av}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^*v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores  $v_1$  y  $v_2$  asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^*Av_1 \stackrel{!}{=} (Av_2)^*v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 \stackrel{\star^3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^*Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \stackrel{\star^4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando  $\star^3$  y  $\star^4$ :

$$0 \stackrel{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

(⇐) **CONSULTAR, probar por absurdo?**

**Ejercicio 6.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Hallar los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que  $A$  sea simétrica y  $\lambda = 0$  sea autovalor de  $A$ .  
 (b) Para el valor de  $\alpha$  hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz  $A$ .

(a) Quiero que  $A$  sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si  $\alpha = 2$  la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando  $\alpha = 2$  tengo autovalor  $\lambda = 0$ . Podría triangular la matriz con  $\alpha = -1$ , para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

- (b) Dado que  $A$  es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimiento puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de  $\lambda = 0$ , que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz  $A$  a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1, -1, 0), (0, 1, -2)\}$$

$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Como estoy en  $\mathbb{R}^3$  no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector  $(2, 2, 1)$  funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (0, 1, -2) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Resuelvo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{\left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)}_{E_{(\lambda=9)}} \right\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores  $C$  es  $C^t$ , dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 🍷 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🍷 naD GarRaz 🍷

**Ejercicio 7.** Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de  $A$ .
- Dibujar el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  y la elipse  $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ , señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular  $\|A\|_2$  y  $\text{cond}_2(A)$ .
- Calcular  $A^{-1}$  usando la descomposición hallada.

- Quieron encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U \Sigma V^*$$

Voy a calcular  $A^* \cdot A$  para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer  $A \cdot A^*$  o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calculo}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \xrightarrow{\text{matriz}} \Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo autovectores de  $H$  y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$H v_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ & \text{y} \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \end{cases} \Rightarrow \text{BON} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como  $H$  los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz  $V$ , matriz que tiene a los  $v_i$  autovectores de  $H$  normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la  $U$ , que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{A v_1}{\sigma_1}, \frac{A v_2}{\sigma_2} \right\} \stackrel{!}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) \right\}$$

Entonces tengo:

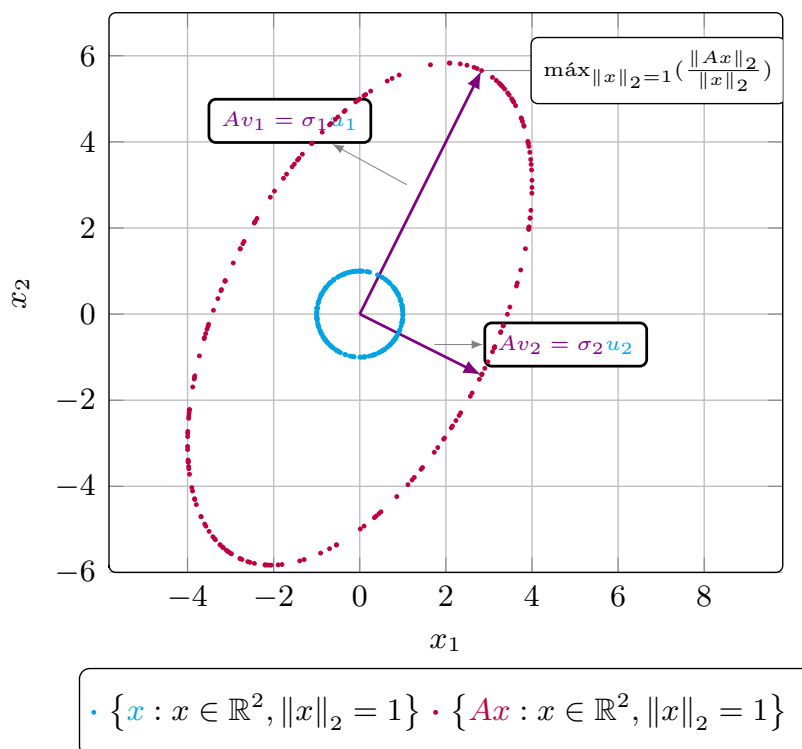
$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$



(b)

Scatter para 200  $x/\|x\|_2 = 1$  y para 200  $Ax$ 

(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left( \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \star^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo  $\|A\|_2$ , ahora quiero encontrar  $\|A^{-1}\|_2$ :

$$A = U\Sigma V^* \xleftrightarrow[\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}]{\text{invierto}} A^{-1} = (V^*)^{-1} \Sigma^{-1} U^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_2} \xrightarrow[\star^1 \star^2]{\star^2 \text{ finalmente}} \text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si bien esto es una descomposición de  $A^{-1}$ ¡No es una *descomposición en valores singulares*!

Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de  $\Sigma$  no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.



Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

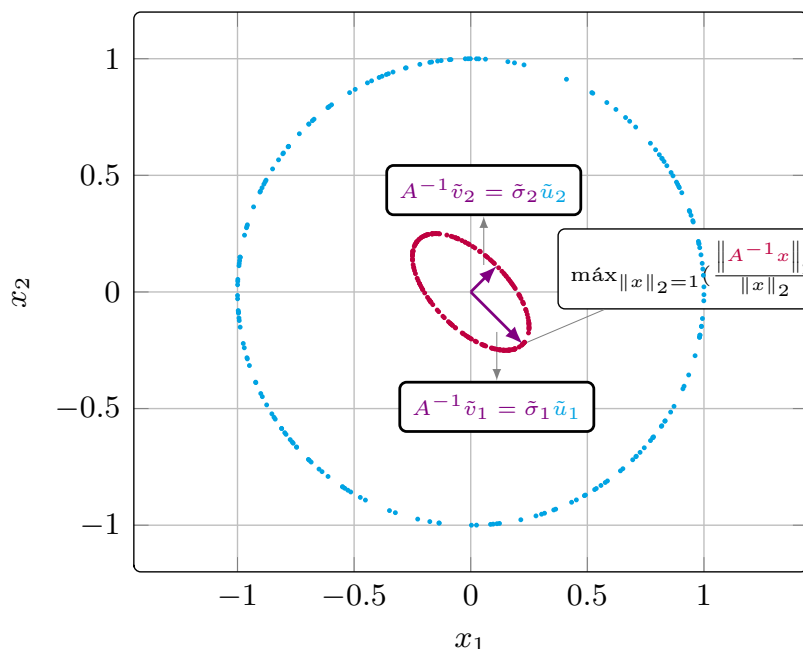
$$\begin{aligned}
 A^{-1} &\stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* \stackrel{!!!}{=} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto columnas}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas y columnas}} \frac{1}{\sqrt{10}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}} \frac{1}{\sqrt{5}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Notar que esa matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de  $A^{-1}$  que nadie pidió pero todos queremos:

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para  $A^{-1}$ :

Scatter para 200  $x / \|x\|_2 = 1$  y para 200  $A^{-1}x$



$$\cdot \{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\} \cdot \{A^{-1}x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐛 naD GarRaz 🐛

**Ejercicio 8.** Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Si

$$A^{\star 1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

llamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa la tonta  $A^t$  de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horribles estereotipos de antes, ¡Pero el sombrero es nuevo!

Voy a calcular la *descomposición en valores singulares* de  $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$  porque así me quedo con la versión de  $2 \times 2$  para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la *convierto* la descomposición a la de  $A$ .

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calcula autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} = \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} = \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar  $\hat{U}$ , necesito una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Como solo tengo un  $\sigma \neq 0$  voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x, y, z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la *descomposición en valores singulares* de  $A$  transpongo:

$$\star^1 A = \hat{A}^t = \hat{V}\hat{\Sigma}^t\hat{U}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Quedó entonces sin el *sombrero*, la SVD de  $A$ :

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calcula autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=90} = \left\langle \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle \\ E_{\lambda=10} = \left\langle \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesito ahora encontrar  $U$ , necesito una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Como solo tengo dos  $\sigma_i$  voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:


$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con}]{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 9.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $\|Av\|_2 \geq 15\|v\|_2$ .

*Let's calculate los singular values:*

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

*¿Por qué esos números feos?*

Calculo *autovalores* de  $H$ :

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

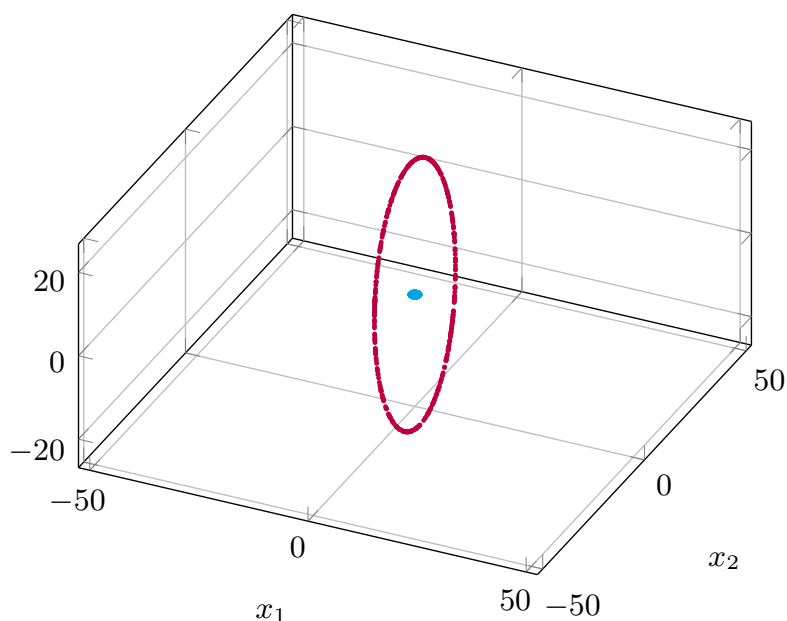
Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  con  $\|v\|_2 = 1$  se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \leq \|Av\|_2 \leq \sigma_1 \iff 16.11 \leq \|Av\|_2 \leq 29.62 \Leftrightarrow 15 \leq \|Av\|_2 \leq 30 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \|v\|_2 = 1$$

Scatter para 200  $x/\|x\|_2 = 1$  y para 200  $Ax$



$$\cdot \{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\} \cdot \{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 10.** Mostrar que  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tiene un valor singular nulo si y solo si tiene un autovalor nulo.

( $\Leftarrow$ ) Si  $A$  tiene un autovalor  $\lambda_i = 0$  tiene  $\text{Nu}(A) \neq 0$  y existe  $Av = 0$  para algún  $v$ . Entonces  $A^*A$ :

$$A^*Av = 0$$

Por lo tanto  $A^*A$  tiene un autovalor nulo y como  $\sigma_i^2 = \lambda_i$  hay un valor singular nulo.

( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es cuadrada, su descomposición *en valores singulares* es el producto de matrices cuadradas:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{calculo}} |A| = |U\Sigma V^*| = |U| \cdot |\Sigma| \cdot |V^*| = 0$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $\neq 0$   $= 0$   $\neq 0$

Porque sigma tiene la forma:

$$[\Sigma]_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & si & i = j \\ 0 & si & i \neq j \end{cases}$$

Y si uno de los  $\sigma_i = 0$ , buéh,  $\det(A) = 0$ . Por lo tanto

$$\text{Nu}(A) \neq \{0\}$$

Entonces existe un  $v$  tal que:

$$Av = 0 \Leftrightarrow Av = \underset{\lambda_i}{0} \cdot v$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , demostrar que los valores singulares de la matriz  $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$  son  $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$  donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\sigma_i$  es el  $i$ -ésimo valor singular de  $A$ .

Apunto a obtener los *valores singulares*,  $\varsigma_i$  de la matriz:

$$G = \underbrace{\begin{pmatrix} I_n & A^* \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{(n+m) \times n}} = I_n + \underbrace{A^* A}_{\in \mathbb{C}^{n \times n}} = I_n + H$$

Donde bauticé a  $A^* A$  como  $H$ . Calculo los autovalores de  $G = I_n + H$ :

$$|I_n + H - \lambda \cdot I_n| = |H - \underbrace{(\lambda - 1) \cdot I_n}_{\mu}| = |H - \mu \cdot I_n| = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \mu \text{ autovalores de } H$$

Ahora identificando bien cada cosa:

Si  $\mu_i$  es un autovalor de  $H$ , entonces los valores singulares de  $A$ :

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\lambda_i - 1} \star^1$$

es un valor singular de  $A$ .

Y si tengo que  $\lambda_i$  es un autovalor de  $G$ , entonces los valores singulares de  $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ :

$$\boxed{\varsigma_i = \sqrt{\lambda_i} \star^1 = \sqrt{1 + \sigma_i^2}}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\sigma > 0$ . Demostrar que  $\sigma$  es valor singular de  $A$  si y solo si la matriz  $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$  es singular, donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

( $\Rightarrow$ ) Sé que  $\sigma$  es un *valor singular* de  $A$ . Calculo el determinante:

$$\det \begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(A^* A - \sigma^2 I_n).$$

Y si  $\sigma > 0$  es un valor singular de  $A$ , entonces  $\sigma^2 = \lambda$  con  $\lambda$  autovalor de  $A^* A$

$$\det(A^* A - \underbrace{\lambda I_n}_{\sigma^2}) = 0$$

Entonces la matriz  $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$  tiene determinante nulo, es decir que es singular si  $\sigma$  es un valor singular de  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) ¿Es lo mismo que el otro pero en reversa? Sé que  $\det \begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(\underbrace{A^* A - \sigma^2 I_n}_{\text{ecuación característica}}) = 0$  La ecuación

característica da 0 para los autovalores de  $A^* A$ , por lo tanto  $\sqrt{\sigma^2} \stackrel{\sigma > 0}{=} \sigma$  tiene que ser un *valor singular* de  $A$ .

**CONSULTAR**, esta demo con gusto a mal

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 13.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , probar que los valores singulares de  $A^t$ ,  $\bar{A}$  y  $A^*$  son iguales a los de  $A$ .

🔴... hay que hacerlo! 🔴

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 14.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , de rango  $r$ , con valores singulares no nulos:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

- (a) Probar que  $A$  puede escribirse como una suma de  $r$  matrices de rango 1.
- (b) Probar que dado  $s < r$  se pueden sumar  $s$  matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz  $A_s$  que satisfice:

$$\|A - A_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

*Nota:*  $A_s$  resulta ser la mejor aproximación a  $A$  (en norma 2), entre todas las matrices de rango  $s$ .

- (a) Para el caso en que la matriz  $A$  tiene más filas que columnas, es decir que  $m > n$

$$A = \underset{m \times m}{U} \overset{m \times n}{\Sigma} \underset{n \times n}{V}^t$$

Donde la  $\Sigma$  tiene a los  $r$  *valores singulares* no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^r \hat{\Sigma}_i,$$

donde las  $\hat{\Sigma}_i$  son las matrices de  $m \times n$  que tienen solo al *valor singular*  $\sigma_i$  en la posición  $ii$  y ceros en los demás lugares. La suma es hasta  $r$  dado que el resto de los  $n - r$  *demás valores singulares son nulos* son nulos, por lo tanto las  $\hat{\Sigma}_i$  con  $i > r$  son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que  $A$  se puede expresar como una suma de  $r$  matrices singulares de  $\text{rg}(\Sigma_i) = 1$ , dado que solo tienen una columna no nula.

- (b) Dado  $s < r$  puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^s U \hat{\Sigma}_i V^t}_{A_s} + \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t \Leftrightarrow A - A_s = \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t$$

Ahora tomo norma a  $A - A_s$ :

$$\|A - A_s\|_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los *valores singulares*.



Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz  $A$  funciona como una transformación que *escala* a un vector  $v$  al hacer  $Av$ . Esa escala es proporcional a los *valores singulares*. La matriz  $A_s$ , es entonces similar o cercana a  $A$ , ya que tiene las *mismas*  $s$  mayores componentes de mayor escalamiento.



Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 15.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a  $A$  en norma 2.  
 (b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a  $A$  en norma 2.

- (a) Tengo que calcular la *descomposición en valores singulares*:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco autovalores de  $H$ :

$$|H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, 9, 25\} \text{ y autovectores } H v_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=25} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda=4} = \langle (0, 0, 1) \rangle \end{cases}$$

Los autovalores de una matriz simétrica resultaron todos distintos, por lo tanto los autovectores resultaron ortogonales. Por lo tanto tengo a la matriz  $V$  y  $\Sigma$ :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora necesito la  $U$ , que la consigo con una BON:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}, \frac{Av_3}{\sigma_3} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

$$A = U \Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz de rango 2 que mejor aproxima a  $A$ :

$$B = U \Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) La de rango 1:

$$B = U \Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

---

### Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---

### Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---

### Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---


### Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---

### Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---

### Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

---

### Ejercicio 22. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$ → [una pull request](#) al .

---

## 🔥 Ejercicios de parciales:

1. [segundo recu 5/12/2024] Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (a) Probar que  $A^t A = B^t B$  si y solo si existe una matriz ortogonal  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $B = UA$ .
- (b) Sea  $A = QR$  la factorización  $QR$  de  $A$ . Probar que  $A$  y  $R$  tienen los mismos valores singulares.
- (c) Sea  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = QR$  una factorización  $QR$  de  $A$ . Hallar una matriz  $C$  tal que  $\|C\|_2 = \|A\|_2$ ,  $\text{Im}(C) = \text{Im}(A)$  y  $C^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Expresar  $C$  en función de su descomposición en valores singulares.

- (a) ( $\Rightarrow$ ) Multiplico por una  $I_n = U^* U$  con  $U$  una matriz ortogonal. Luego acomodo y nombro a la matriz adecuada como  $B$ :

$$A^t A = A^t U^t U A = (UA)^t (UA) = B^t B$$

- ( $\Leftarrow$ ) Parto de  $B = UA$ , con  $U$  una matriz ortogonal:

$$B = UA \Leftrightarrow B^t = (UA)^t \Rightarrow B^t B = (UA)^t UA = A^t U^t U A = A^t A$$

- (b) Los valores singulares de una matriz  $A$ :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{con } \lambda_i \text{ tal que } |A^t A - \lambda_i I| = 0$$

Usando el resultado del punto anterior y recordando que la  $Q$  en la descomposición  $QR$  tiene como columnas una base ortonormal, es decir que  $Q$  es una matriz ortogonal, de forma tal que:

$$Q^t Q = I_n \Rightarrow A^t A = (QR)^t (QR) \stackrel{!}{=} R^t R$$

. Por lo tanto los valores singulares de  $A$  y  $R$  serán los mismos, más aún el cálculo de las columnas de  $V$  también va a dar lo mismo.

- (c) Esto de la *descomposición en valores singulares* es mucho más sencillo cuando la matriz es cuadrada, porque hay menos cosas que contemplar. Ya sé los tamaños de la matrices y no tengo que pensar que conviene hacer:

$$C = \begin{matrix} & \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ & \uparrow \\ U & \Sigma & V^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & & \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{matrix}$$

Nos dan una  $A$  que está casi en SVD. ¿Se ve?, voy a empezar a permutar para dejar bien ordenados los valores singulares:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora permuto para mover ese 7 para la izquierda:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

!Magia! ¿Y para qué me sirve eso? No sé, pero tenía ganas de hacerlo. ¡Nah, mentira! **Se terminó el ejercicio.** Esa última matriz es la  $C$  que cumple lo pedido.

Lo que viene a continuación es la forma menos *hacker* de hacerlo, básicamente como lo encaré yo antes de darme cuenta 🤖 que esa SVD cumplía todo lo pedido.

Entendiendo como funciona la *descomposición en valores singulares* (mirá acá estos resultados [click click](#) 🤖) sé que:

$$\begin{cases} \text{Nu}(A) &= \langle (0, 1) \rangle \\ \text{Im}(A) &= \langle (-1, 1) \rangle \\ \|A\|_2 &= 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad C^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\star^1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $\|C\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1 = 7$
- $\dim(\text{Nu}(C)) = 1 \implies \sigma_2 = 0$
- $V$  tiene como columnas a una *base ortonormal*  $B_V = \{v_1, v_2\}$  donde  $v_2 \in \text{Nu}(C)$  Quizás te estés preguntando: ¿Y  $v_1$ ? Me importa poco.
- $U$  tiene como columnas a una *base ortonormal*  $B_U = \{u_1, u_2\}$  donde  $u_1 \in \text{Im}(C)$  Quizás te estés preguntando: ¿Y  $u_2$ ? Me importa otro poco.

El dato de  $\star^1$  me dice que  $(0, 7\sqrt{2})$  es una combinación de las columnas de  $V$ . No sé si es la mejor forma de encararlo, pero me lo imagino así:

$$C = U\Sigma V^t \stackrel{!}{\iff} C^t = V\Sigma U^t$$

Por lo tanto los generadores de la  $\text{Im}(C^t)$  son las columnas de  $V$  ahora. Como  $\dim(\text{Im}(C^t)) = 1$  están diciendo que  $(0, 7\sqrt{2}) \in \langle (0, 1) \rangle$  lo cual es cierto!

Con toda esa data se puede encontrar una matriz  $C$  sin mucha rosca dado que al matriz es cuadrada y estamos en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  a tener en cuenta:

$$C_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Otra que cumpliría:

$$C_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤖

🔥 2. [segundo parcial 8/7/2023] Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontrar la descomposición SVD de la matriz  $A$ .
- Construir una matriz  $B$  de dimensión apropiada que satisfaga a la vez:  $B^t B = A^t A$  y  $\text{Im}(B) = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$ .

- La descomposición será algo como:

$$A = \underbrace{U}_{\substack{\in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ \downarrow}} \underbrace{\Sigma}_{\substack{\in \mathbb{R}^{3 \times 2} \\ \uparrow}} \underbrace{V^t}_{\substack{\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \downarrow}}$$

Primero busco los valores singulares  $\sigma_i$  para formarme  $\Sigma$ :

$$|A^t A - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{6} \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

$$E_{\lambda=6} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \right\rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \right\rangle$$

Listo ya tengo  $\Sigma$  y  $V$  los autovectores ortonormalizados de  $A^t A$  me forman las columnas de  $V$ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora falta encontrar  $U$  solo voy a poder encontrar 2, luego completo con un vector perpendicular a ambos:

$$Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \Rightarrow \text{BON}_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1) \right\}$$

La descomposición queda como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

(b) Tiro data para pensar y armar la matriz:

- $\text{Im}(B) = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$  lo voy a usar para las dos primeras columnas de  $U$ .
- $B$  manda cosas de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , como la  $\dim(\text{Im}(B)) = 2$  entonces  $\dim(\text{Nu}(B)) = 0$ , esto implica que ninguna columna de  $V$ ,  $v_i \in \text{Nu}(B)$
- $B^t B = A^t A$  la matriz  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  y además tienen los mismos valores singulares que  $A$ .

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con eso estoy cumpliendo los requerimientos del enunciado. Falta expandir las columnas de  $U$  a una base ortonormal. Sale a ojo, si no se ve, entonces Gram-Schmidt:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y la versión reducida o algo así que da el mismo resultado:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

👤 Aportó con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.



[Ir al índice ↑](#)

### 3.

(a) Hallar, si existe, una matriz  $A$  de coeficientes reales y del tamaño adecuado tal que

$$A^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_2 = 5, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \in \text{Nu}(A^t)$$

(b) Graficar la imagen de la esfera unitaria  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2\}$  por la transformación lineal  $T(x) = Ax$ .

- a)
- Todo indicaría que  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , ya que  $A$  come   $\in \mathbb{R}^2$  y  $A^t$  come   $\in \mathbb{R}^3$ .
  - Si  $\|A\|_2 = 5 = \sigma_1$ .
  - Con el dato del autovector de  $A^t A$ , si  $A = U \Sigma V^t$ :

$$A^t A = (U \Sigma V^t)^t (U \Sigma V^t) = V \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V$$

$$A^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$   
 $\sigma_2^2$

- Si  $(4, 1, 8) \in \text{Nu}(A^t)$ :

Es un vector de la matriz  $U$  que siempre se multiplica donde hay ceros en  $\Sigma$

$$A = U \Sigma V^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{65}}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{\sqrt{65}} & -\frac{4}{9\sqrt{65}} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{\sqrt{65}} & -\frac{32}{9\sqrt{65}} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b) ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  [una pull request](#) al .