

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/06/25 @ 11:34

Choose your destiny:

(click click  en el ejercicio para saltar)

⊙ [Notas teóricas](#)

⊙ Ejercicios de la guía:

1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	??.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	

⊙ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:

05/06/25 @ 11:34

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:



Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en IAT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n \times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a \mathbb{R} se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n \times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \stackrel{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n \times n}$ hermitiana, probar que existen matrices $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A partir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{aligned} B + iC &= \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \\ &\stackrel{!}{=} A \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n \times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A , es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que S^\perp es invariante por A .

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\begin{array}{c} \in S \\ \uparrow \\ w^* \cdot v = 0 \\ \downarrow \\ \in S^\perp \end{array}$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A :

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\times A^*} A^*Av \stackrel{!}{=} A^2\lambda v = \lambda^2 v \stackrel{!}{=} \lambda^2 v \in S$$

🐙 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\in S}{\uparrow} Av = w^* A^* \cdot Av \stackrel{\star^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \quad \forall w \in S^\perp$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n \times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

(\Rightarrow)

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\stackrel{\times v^*}{\rightarrow} v^* Av = \lambda v^* v \Leftrightarrow v^* Av \stackrel{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2 \\ Av = \lambda v &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} v^* A^* = \bar{\lambda} v^* \stackrel{\times v}{\leftarrow} v^* A^* v = \bar{\lambda} v^* v \Leftrightarrow v^* A^* v \stackrel{\star^2}{=} \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en \star^1 y \star^2 es igual. Por lo tanto $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \stackrel{\times v}{\rightarrow} \underbrace{v^* Av}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^* v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad y \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^* Av_1 \stackrel{!}{=} (Av_2)^* v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 \stackrel{\star^3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^* Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \stackrel{\star^4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando \star^3 y \star^4 :

$$0 \stackrel{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

(\Leftarrow) **CONSULTAR, probar por absurdo?**

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A .
- Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A .

- Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$. Podría triangular la matriz con $\alpha = -1$, para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

- (b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimiento puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1, -1, 0), (0, 1, -2)\}$$

$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Como estoy en \mathbb{R}^3 no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector $(2, 2, 1)$ funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (0, 1, -2) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Resuelvo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)}_{E_{(\lambda=9)}} \right\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t , dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de A .
- Dibujar el círculo unitario en \mathbb{R}^2 y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.
- Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

- Quieren encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U \Sigma V^*$$

Voy a calcular $A^* \cdot A$ para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer $A \cdot A^*$ o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calcula}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \xrightarrow{\text{matriz}} \Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$H v_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ & \text{y} \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \end{cases} \Rightarrow \text{BON} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V , matriz que tiene a los v_i autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U , que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{A v_1}{\sigma_1}, \frac{A v_2}{\sigma_2} \right\} \stackrel{!}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) \right\}$$

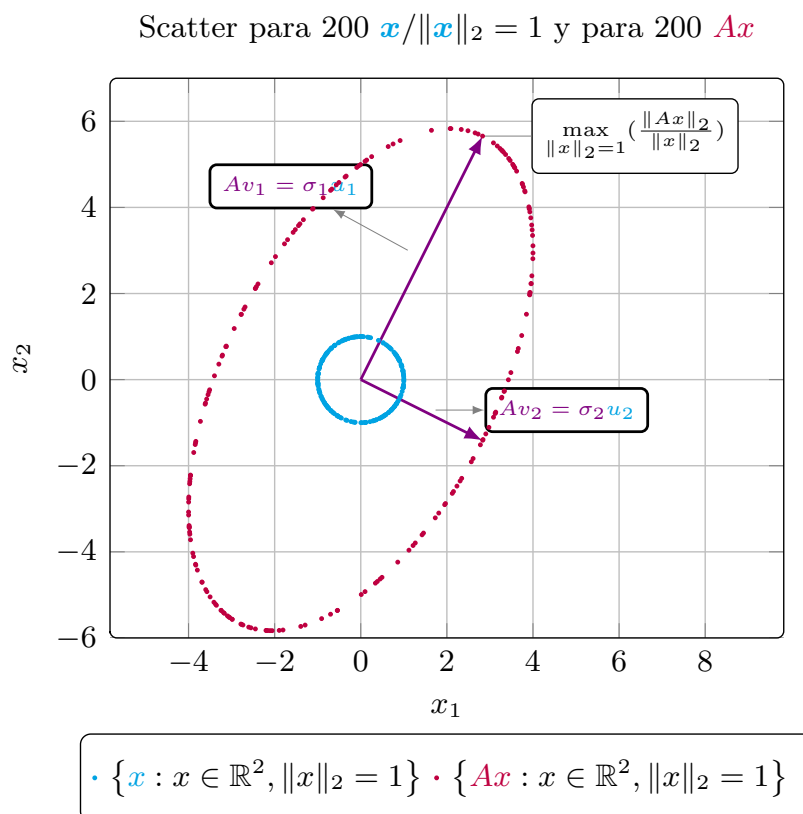
Entonces tengo:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)



(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \star^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo $\|A\|_2$, ahora quiero encontrar $\|A^{-1}\|$:

$$A = U\Sigma V^* \xleftrightarrow[\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}]{\text{invierto}} A^{-1} = (V^*)^{-1} \Sigma^{-1} U^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_2} \xrightarrow[\star^1 \star^2]{\star^2 \text{ finalmente}} \text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si bien esto es una descomposición de A^{-1} ¡No es una descomposición en valores singulares!

Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de Σ no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.



Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

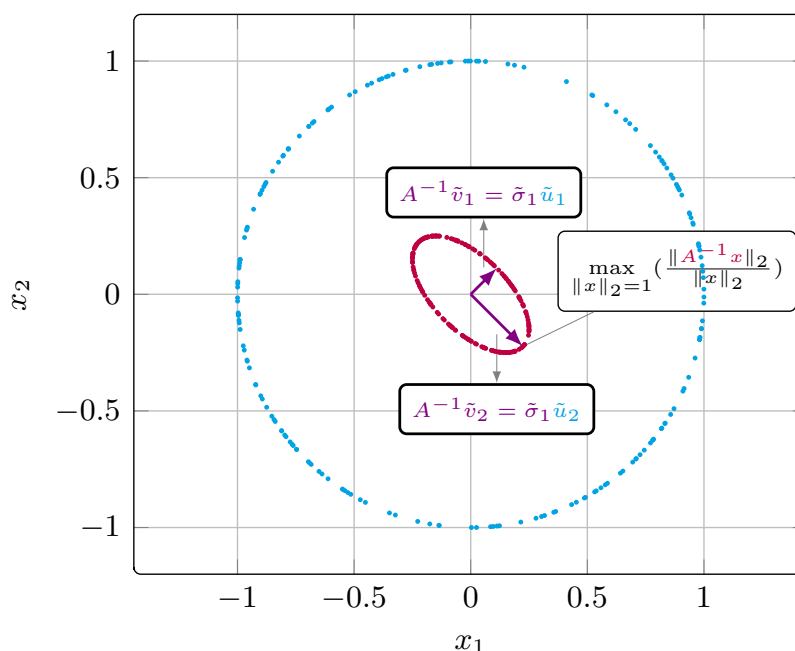
$$\begin{aligned}
 A^{-1} &\stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* \stackrel{!!!}{=} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto columnas}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas y columnas}} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Notar que esa matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de A^{-1} que nadie pidió pero todos queremos:

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para A^{-1} :

Scatter para 200 $x/\|x\|_2 = 1$ y para 200 $A^{-1}x$



$$\cdot \{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\} \cdot \{A^{-1}x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 8. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 9. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 10. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐼.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 13. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 16. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 17. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 18. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 19. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 20. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 21. 🤖... hay que hacerlo! 🤖



Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 22. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una *pull request* al .
