Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 08/04/25 @ 15:44

Choose your destiny:

(dobleclick en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:
08/04/25 @ 15:44

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

Transformaciones lineales

- Dados V y W dos $K-$espacio vectoriales, una $f : V \to W$ es *transformación lineal* si cumple:
  - $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v, w \in V$
  - $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \qquad \forall \alpha \in K, v \in V$

- $f : K^n \to K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in K^{n\times 1}}\Big) \overset{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{f(e_i)}_{\in K^{m\times 1}} = \underbrace{\big(\ f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n)\ \big)}_{A\in K^{m\times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m\times 1}}$$

- *Matriz de una transformación lineal:*

  Dados V y W dos $K-$espacios vectoriales y $f : V \to W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \cdots, v_2\}$ base de V y $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \qquad \forall v \in V$$

- Sea V un $K-$espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \ldots n$.

- Sea $A \in K^{m\times n}$, define $f : K^n \to K^m$. El $\text{Nu}(A) = \{x \in K^n / Ax = 0\}$

- Sea $A \in K^{m\times n}$, define $f : K^n \to K^m$. La $\text{Im}(A) = \{Ax \in K^m \text{ con } x \in K^n\} = \langle c_1(A), \ldots, c_n(A)\rangle$. También $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$

- *Propiedades de una transformación lineal:*

  Sea $f : V \to W$ una t.l. y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V. Entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es un conjunto generador para la imagen de f.

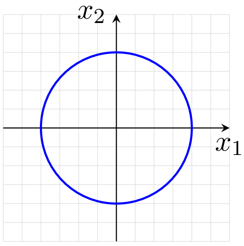
  - f se dice *monomorfismo* si es inyectiva. Si f es *mono*, $\dim(\text{Nu}(f)) = 0$
  - f se dice *epimorfismo* si es suryectiva. Si f es *epi*, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$
  - f se dice *isomorfismo* si es *mono* y *epi*. Si f es iso es inversible.

- *Norma* Sea $\|\cdot\| : K^n \to \mathbb{R} \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma si cumpe:

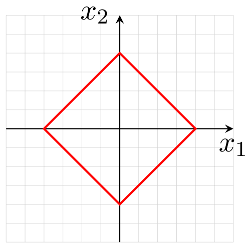
  1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in K^n$
  2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ con $\alpha \in K$ y $x \in K^n$
  3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ con $x, y \in K$

- Ejemplos:

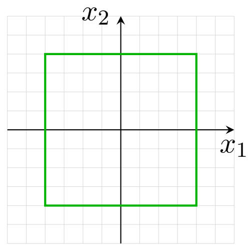
  - Norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2} \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_2 = 1$



- Norma p: $\|x\|_p = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p} \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_p = 1$



- Norma ∞: $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\le i\le n} |x_i| \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_\infty = 1$



Aritmética de punto flotante:

- *Escribir* 0.25 *en base* 10:

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 &= 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 &= 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 &= 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 &= 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 &= 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 &= 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{2} = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

Escribir 0.3 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 &= 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ \vdots &= \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} + 1\cdot 2^{-6} + 0\cdot 2^{-7} + 0\cdot 2^{-8} + 1\cdot 2^{-9} + 1\cdot 2^{-10} + 0\cdot 2^{-11} + 0\cdot 2^{-12} \cdots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

$$\text{En base } 10 \rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \cdot 10^{exp} \text{ con } 0 \le a_i \le 9 (a_1 \neq 0)$$
$$\text{En base } 2 \rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \cdot 2^{exp} \text{ con } 0 \le a_i \le 1 (a_1 \neq 0)$$

Por ejemplo si $m = 3 \implies x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{2}} \cdot \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{2}} = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m, por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

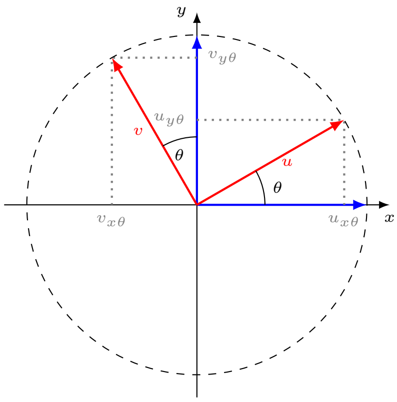
Y en forma relativa como:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (ponele):
Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0}_{\star^1} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0}_{\star^2} = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y $\star^1$:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\overset{!}{=}} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y $\star^2$:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\overset{!}{=}} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)
$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d)
$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Ahora veo:

$$f(v) + f(w) = (y_1 - 3x_1 + \sqrt{2}z_1, x_1 - \frac{1}{2}y_1) + (y_2 - 3x_2 + \sqrt{2}z_2, x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $v = (x, y, z)$. Entonces,

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y)$$

$$= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z)$$

El producto es lineal

f es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, la suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera A y B:

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(d) Veo que valga la suma:

Sea A, B matrices cualesquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A + B) = \begin{pmatrix} (a_{22} + b_{22}) & 0 & (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) \\ 0 & (a_{11} + b_{11}) & (a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) \end{pmatrix}$$

Ahora miro,

$$f(A)+f(B)=\begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12}+a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22}-a_{11}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{22} & 0 & b_{12}+b_{21} \\ 0 & b_{11} & b_{22}-b_{11}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{22}+b_{22} & 0 & (a_{12}+a_{21})+(b_{12}+b_{21}) \\ 0 & a_{11}+b_{11} & (a_{22}-a_{11})+(b_{22}-b_{11})\end{pmatrix}$$

La suma es lineal.

Ahora veo el producto:

$$f(\alpha A)=f\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{22} & 0 & \alpha(a_{12}+a_{21}) \\ 0 & \alpha a_{11} & \alpha(a_{22}-a_{11})\end{pmatrix}=\alpha f(A)$$

El producto y la suma son lineales, f es transformacion lineal

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Juan D Elia

Ejercicio 2. Escribir la matriz de las siguientes transformaciones lineales en base canónica. Interpretar geométricamente cada transformación.

(a) $f(x,y)=(x,0)$

(b) $f(x,y)=(x,-y)$

(c) $f(x,y)=(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y))$

(d) $f(x,y)=(x\cos t-y\sin t, x\sin t+y\cos t)$

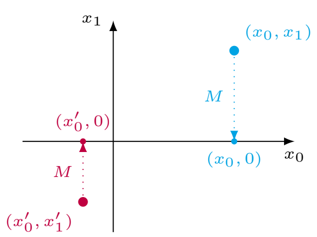
(a) Para la base canónica:

$$f(1,0)=(1,0),\quad f(0,1)=(0,0)$$

Entonces, la matriz asociada es:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Geométricamente estamos proyectando al eje x_0.



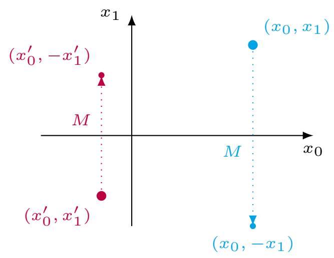
(b) Para la base canónica:

$$f(1,0)=(1,0),\quad f(0,1)=(0,-1)$$

Entonces, la matriz asociada es:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Geométricamente estamos haciendo una reflexión respecto del eje x_0.



(c) Para la base canónica:

$$f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad f(0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces, la matriz asociada es:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Geométricamente estamos *haciendo, llevando* (*mejores palabras serán bienvenidas*) todo a la dirección $(1,1)$, ponele.

$$f(x_0, x_1) = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \cdot (1,1) \approx \lambda \cdot (1,1)$$

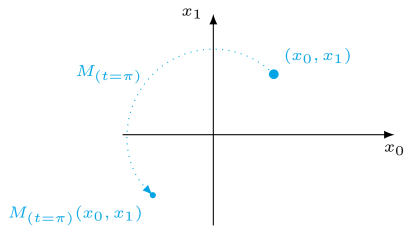
(d) Para la base canónica:

$$f(1,0) = (\cos t, \sin t), \quad f(0,1) = (-\sin t, \cos t)$$

Entonces, la matriz asociada es:

$$M = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Geométricamente estamos rotando en sentido antihorario al eje $\underset{\substack{\downarrow \\ z}}{x_2}$.



Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Juan D Elia   naD GarRaz

Ejercicio 3.

(a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

(b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

(c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1), f(2,1,0) = (2,1,0), f(-1,0,0) = (1,2,1)$$
$$g(1,1,1) = (1,1,0), g(3,2,0) = (0,0,1), g(2,2,-1) = (3,-1,2)$$

De la teoría se tiene que:

Sea V un $K-$espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \dots n$.

(a) Sale casi solo usando propiedades de *transformación lineal:*

$$\begin{cases} f(1,1) &= (-5,3) \\ f(-1,1) &= (5,2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} F_2 + F_1 \to F_2 \\ \\ \frac{1}{2}F_2 \to F_2 \\ \\ F_1 - F_2 \to F_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} f(1,1) &= (-5,3) \\ f(0,2) &= (0,5) \end{cases} \\ \begin{cases} f(1,1) &= (-5,3) \\ f(0,1) &= (0,\frac{5}{2}) \end{cases} \\ \begin{cases} f(1,0) &= (-5,\frac{1}{2}) \\ f(0,1) &= (0,\frac{5}{2}) \end{cases} \end{array}$$

Si bien no es necesario, puedo escribir a la *transformación lineal* como:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y \end{pmatrix}$$

Y ahora calculo lo más pancho:

$$\boxed{f(5,3) = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(-1,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Se llega a un absurdo con algunas operaciones.

$$\begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(-1,1) &= (2,1) \\ f(2,7) &= (5,3) \end{cases} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{array} \begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(0,2) &= (4,7) \\ f(0,5) &= (1,-9) \end{cases} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot F_2 \to F_2 \\ \frac{1}{5} \cdot F_3 \to F_3 \end{array} \begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(0,1) &= (2,\frac{7}{2}) \\ f(0,1) &= (\frac{1}{5},\frac{-9}{5}) \end{cases}$$

Las operaciones de triangulación aplicadas en la triangulación son lineales y se usó todo el tiempo la definición de linealidad.

(c) Ataco igual que al anterior, la idea es poder compararlos con la misma *base del espacio de partida* V:

$$\begin{cases} f(1,0,1) &= (1,2,1) \\ f(2,1,0) &= (2,1,0) \\ f(-1,0,0) &= (1,2,1) \end{cases} \xrightarrow{} \begin{cases} f(1,0,0) &= (1,2,1) \\ f(0,1,0) &= (0,-3,-2) \\ f(0,0,1) &= (2,4,2) \end{cases}$$

Ahora con g:

$$\begin{cases} g(1,0,1) &= (1,2,1) \\ g(2,1,0) &= (2,1,0) \\ g(-1,0,0) &= (1,2,1) \end{cases} \begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \to F_1 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{array} \begin{cases} g(1,1,1) &= (1,1,0) \\ g(0,-1,-2) &= (-3,-3,1) \\ g(0,0,-3) &= (1,-3,2) \end{cases}$$

Podría seguir triangulando y llegar hasta que me queden ambas expresiones en la canónica de $\mathbb{R}^3$, pero pajilla. Resalté en azul dos filas que me *gritan* que si:

$$(0,0,1) \xrightarrow{f} (2,4,2) \implies (0,0,-3) \xrightarrow[!]{f} (-6,-12,-6)$$

No obstante:

$$(0,0,-3) \xrightarrow{g} (1,-3,2) \neq (0,0,0)$$

Así se concluye que :

$$\boxed{f \neq g}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 4. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que satisfaga:

$$f(1, -1, 1) = (2, a, -1),$$

$$f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1),$$

$$f(1, -1, -2) = (5, -1, -7).$$

Si los vectores de la salida son linealmente independientes, la transformación lineal existe para cualquier a. Si alguno de ellos es linealmente dependiente, hay que buscar a para que no indetermine el sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Como el tercer vector es LD se puede escribir:

$$\alpha(1, -1, 1) + \beta(1, -1, 2) = (1, -1, -2).$$

Hallamos α y β resolviendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos $\alpha = 4$, $\beta = -3$.
Entonces:

$$f(1, -1, -2) = f(4(1, -1, 1) - 3(1, -1, 2)) = \ = 4(2, a, -1) - 3(a^2, -1, 1) = (8 - 3a^2, 4a + 3, -7)$$

Solo es T.L si ese vector es igual al (5,-1,-7) Esto da el sistema:

$$8 - 3a^2 = 5,$$

$$4a + 3 = -1.$$

Resolviendo:

$$4a = -4 \Rightarrow a = -1.$$

$$8 - 3(-1)^2 = 5 \Rightarrow 8 - 3 = 5, \quad \text{(se cumple)}.$$

Por lo tanto, la transformación lineal existe si y solo si $a = -1$.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Juan D Elia`

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definido por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$$

y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2).$$

Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$.
Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Cálculo de la imagen de f
Aplicamos f a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0)$$

Por lo tanto, el generador de la imagen de f es:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$$

Como (1,1,0,0) LD:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$$

La dimensión de la imagen es 2.

Cálculo del núcleo de f
Buscamos los coeficientes α, β, γ tales que:

$$\alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 0, 0) + \gamma(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Esto da el sistema:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

Resolviendo:

$$\alpha = -\beta$$

$$\alpha = -\gamma$$

Reemplazo en los vectores de salida:

$$\alpha(1, 0, 0) - \alpha(0, 1, 0) - \alpha(0, 0, 1) = \alpha(1, -1, -1)$$

Por lo tanto, el núcleo de f es:

$$\mathrm{Nu}(f) = \langle (1, -1, -1) \rangle$$

Entonces podemos concluir:
i) Como $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, no es epimorfismo.
ii)Como $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, no es monomorfismo.

Cálculo de la imagen de g

Aplicamos g a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^4$:

$$g(1,0,0,0) = (1,2)$$

$$g(0,1,0,0) = (-1,-1)$$

$$g(0,0,1,0) = (0,0)$$

$$g(0,0,0,1) = (0,0)$$

Por lo tanto, el generador de la imagen de g es:

$$\mathrm{Im}(g) = \langle (1,2), (-1,-1) \rangle$$

Los vectores son LI, asi que la dimension es 2. Implica que Im g es $\mathbb{R}^2$.

Cálculo del núcleo de g

Buscamos los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que:

$$\alpha(1,2) + \beta(-1,-1) + \gamma(0,0) + \delta(0,0) = (0,0)$$

Esto nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\alpha - \beta = 0$$

$$2\alpha - \beta = 0$$

Resolviendo:

$$\alpha = \beta$$

$$2\alpha - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

Por lo tanto, el núcleo de g es:

$$0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0) + \delta(0,0,0,1) = \gamma(0,0,1,0) + \delta(0,0,0,1)$$

$$\mathrm{Nu}(g) = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

En conclusion

- Como $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, es epimorfismo.
- Como $\mathrm{Nu}(g) \neq \{0\}$, no es monomorfismo.
- No es isomorfismo.

Calculo $g \circ f$

$$g(f(x_1,x_2,x_3)) = g(x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0) =$$

$$g(x_1 + x_2 - x_1 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_1 - x_3) =$$

$$(x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) = g \circ f(x_1,x_2,x_3)$$

Cálculo de la imagen de $g \circ f$

Usando los canonicos como vectores de salida:

$$g(1,0,0) = (0,1)$$

$$g(0,1,0) = (1,2)$$

$$g(0,0,1) = (-1,-1)$$

Por lo tanto, el generador de la imagen de g es:

$$\text{Im}(g) = \langle (0,1), (1,2), (-1,-1) \rangle$$

Es LD (-1,-1):

$$\text{Im}(g) = \langle (0,1), (1,2) \rangle$$

La dimension es 2. Implica que Im es $\mathbb{R}^2$.
Cálculo del núcleo de $g \circ f$
Buscamos los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que:

$$\alpha(0,1) + \beta(1,2) + \gamma(-1,-1) = 0$$

Resolviendo obtenemos:

$$\beta = \gamma$$

$$\alpha = -\beta$$

Por lo tanto, el núcleo de g es:

$$-\beta(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \beta(0,0,1) = \beta(-1,1,1)$$

$$\text{Nu}(g) = \langle (-1,1,1,) \rangle$$

En conclusion

- Como $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, es epimorfismo.
- Como $\text{Nu}(g) \neq \{0\}$, no es monomorfismo.
- No es isomorfismo.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Juan D Elia`

Aritmética de punto flotante

Ejercicio 7. Algunos experimentos: Realizar las siguientes operaciones en `Python`. En todos los casos, pensar: ¿Cuál es el resultado esperado? ¿Coincide con el obtenido? ¿A qué se debe el problema (si lo hay)? (Notamos ϵ al épsilon de la máquina. Puede obtenerse importando la librería `numpy` como `np` y ejecutando el comando `np.finfo(float).eps`).

a) Tomando $p = 1e34, q = 1$, calcular $p + q - p$.

b) Tomando $p = 100, q = 1e-15$, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.

c) `0.1 + 0.2 == 0.3`

d) `0.1 + 0.3 == 0.4`

e) $1e - 323$

f) $1e - 324$

g) $\frac{\epsilon}{2}$

h) $(1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}$

i) $1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})$

j) $((1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}) - 1$

k) $(1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})) - 1$

l) $\sin(10^j \pi)$ para $1 \le j \le 25$.

m) $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi 10^j)$ para $1 \le j \le 25$.

---

a) El epsilon sería el número más chico tal que:

$$1 + \epsilon \neq 1$$

En el ejercicio estamos haciendo una cuenta fuera del rango de precisión de la máquina:

$$\epsilon = 2.220446049250313 \cdot 10^{-16} = 0.\underbrace{2220446049250313}_{m=16} \cdot 10^{-15}$$ ⚠ $\to$ así noto la precisión

Con una mantisa m de 16 números significativos, puedo hacer la cuenta:

$$1 + \epsilon \overset{!}{=} 1.\underset{16^{\underline{\text{to}}}\ \text{decimal}}{000000000000000\underset{\downarrow}{2}}$$

Primero $p + 1$:

$$\begin{aligned} p = 1 \cdot 10^{34} &= 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 \\ p + 1 &= 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.001 = 0.\underbrace{1000000000000000}_{m=16}\underbrace{0000000000000000001}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^{-35} \\ p + 1 &= 0.1000000000000000 \cdot 10^{-35} = 1 \cdot 10^{34} \overset{!}{=} p \end{aligned}$$

Segundo $p + 1 - p$:

Bueh:

$$\underbrace{p - 1}_{p} - p \overset{!}{=} p - p = 0$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}")    # epsilon = 2.220446049250313e-16
```

```python
p = 1e34 # p = 10000000000000000000000000000000000
q = 1

calculo = p + q - p # calculo = 0

print(f"p = {p}\nq = {q}\np + q - p = {calculo}")
```

b) Acá el problema es parecido al anterior:

$$
\begin{aligned}
p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
q = 1 \cdot 10^{-15} &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
p + q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{\substack{16^{\underline{\text{to}}}\,decimal \\ \uparrow}}{0}\,\underbrace{01}_{\text{fue un placer 🤝}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100 \\
(p + q) + q &\overset{!}{=} 100 = p \\
((p + q) + q) + q &\overset{!}{=} 100 = p
\end{aligned}
$$

Comparando:

$$
\begin{aligned}
p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
2q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,002 \cdot 10^3 \\
3q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,003 \cdot 10^3 \\
p + 2q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{\substack{16^{\underline{\text{to}}}\,decimal \\ \uparrow}}{0}\,\underbrace{02}_{\text{fue un placer 🤝}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100 \\
p + 3q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{\substack{16^{\underline{\text{to}}}\,decimal \\ \uparrow}}{0}\,\underbrace{03}_{\text{fue un placer 🤝}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100
\end{aligned}
$$

```python
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}")    # epsilon = 2.220446049250313e-16

p = 100
q = 1e-15

calculo1 = (p + q) + q
calculo2 = ((p + q) + q) + q
calculo3 = p + 2*q
calculo4 = p + 3*q


print(f"p = {p}\nq = {q}")
print(f"(p + q) + q = {calculo1}")
print(f"((p + q) + q) + q = {calculo2}")
print(f"p + 2q = {calculo3}")
print(f"p + 3q = {calculo4}")
```

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

e) ¿Qué onda este ejercicio? Creo que está bueno notar que ese número no es igual a 0

```python
a = 1e-323

print(f"r: {a}\na == 0  => {a == 0}")
```

f) ¿Qué onda este ejercicio? Creo que está bueno notar que ese número justo con ese exponente se llega al límite de qué tan pequeño puede representarse un número, porque en este caso python lo toma como 0.

```python
a = 1e-324

print(f"r: {a}\na == 0  => {a == 0}")
```

g) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

h) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

i) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

j) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

k) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

l) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

m) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ir al índice ↑

Ejercicio 22.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al.

Ejercicio 23.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al.

Ejercicio 24.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al.

Ejercicio 25.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al.

Ejercicios de parciales: