

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 3

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 09/05/25 @ 13:16

*Choose your destiny:*

(click click  en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">23.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	<a href="#">24.</a>

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:

09/05/25 @ 13:16

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 3



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:**✚ *Matriz definida positiva:*

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva:

$$\forall x \neq 0 \quad x^t A x > 0 \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

Algunas propiedades de las matrices definidas positivas:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies \exists A^{-1}$ .
- Los elementos diagonales son positivos.
- Las submatrices principales también son matrices definidas positivas

✚ *Descomposición de Cholesky:*

La descomposición de Cholesky para una matriz  $A$  simétrica y definida positiva:

$$A = LL^t$$

con  $L$  triangular inferior. A partir de la descomposición:

$$A = \overbrace{\tilde{L}U}^{\text{la de siempre}} \xrightarrow{\text{✚}} A = \tilde{L} \overbrace{D\tilde{L}^t}^{\substack{\downarrow \\ \text{matriz diagonal} \\ \text{con los elementos} \\ \text{diagonales de } U}}.$$



$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$ , es definida positiva si y solo si  $D$  lo es. Como  $D$  es diagonal, solo es cuestión de ver que  $[D]_{ii} > 0$ .



Finalmente:

$$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t$$

✚ *Proyectores:*

Se llama *Proyector* a una transformación lineal  $P$  que cumple que:

- $P(v) = v$
- $P \circ P = P$

Con las propiedades:

- 👤 Si  $P : V \rightarrow V$  es proyector  $\implies \text{Nu}(P) = \{\mathbf{0}_V\}$
- 👤 Si  $P : V \rightarrow V$  es proyector  $\implies v - P(v) \in \text{Nu}(P) \quad \forall v \in V$
- 👤 Si  $P : V \rightarrow V$  es proyector  $\implies \text{Nu}(P) \oplus \text{Im}(P) = V$
- 👤  $P$  es un *proyector ortogonal* si  $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$
- 👤  $P$  es un *proyector ortogonal*  $\Leftrightarrow P = P^t$

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Sean  $A$  y  $B \in K^{n \times n}$ . Probar que:

- (a) Si  $A$  y  $B$  son triangulares superiores,  $AB$  es triangular superior.
- (b) Si  $A$  y  $B$  son diagonales,  $AB$  es diagonal.
- (c) Si  $A$  es estrictamente triangular superior (es decir,  $a_{ij} = 0$  si  $i \geq j$ ),  $A^n = 0$ .

- (a) Una matriz  $A$  va a ser triangular superior si todos los número debajo de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ a_{ij} & \text{si } i \leq j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Los  $a_{ij}$  no tienen que ser necesariamente distinto a cero. Ahora multiplico dos matrices triangulares superiores:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} \cdot b_{kj} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple  $\star^2$  son los que tiene las *filas* menores o iguales *columnas* y *filas* menores o iguales *columnas*, si no son cero. Básicamente la definición de matriz triangular superior.

- (b) Esta es un poco más fácil. Una matriz es diagonal si:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ij} & \text{si } i = j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Nuevamente, los elementos diagonales no tienen que ser necesariamente distintos de cero. Ahora multiplico dos matrices diagonales:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} a_{ii} \cdot b_{ii} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la sumatoria las *columnas* de los elementos de  $A$  coinciden con las filas de los elementos de  $B$ , pero solo cuando estemos multiplicando la *fila*  $i$  con la *columna*  $i$  es que ambos elementos podrían ser no nulos.

- (c) Una matriz  $A$  va a ser triangular superior estricta si todos los número debajo y de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{ij} & \text{si } i < j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Meto inducción porque es un viaje. Quiero probar que:

$$p(n) : A \in K^{n \times n} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^n = 0.$$

Caso base:

$$p(2) : A \in K^{2 \times 2} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^2 = 0$$

Cálculo directo

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto  $p(2)$  es verdadera.

*Paso inductivo:* Voy a asumir que para algún  $k \in \mathbb{Z}$

$$p(k) : \underbrace{A \in K^{k \times k} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^k = 0}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Por lo tanto ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : A \in K^{(k+1) \times (k+1)} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^{k+1} = 0$$

Para probar esta tremenda garompa, voy a usar el producto en bloques. Tengo una matriz  $A \in K^{(k+1) \times (k+1)}$  estrictamente triangular superior y la parto en bloques así:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{a_{12} \cdots a_{1k+1}} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} \ddots & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & a_{kk+1} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ \boxed{0} & \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0 \cdots 0} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a' & \cdots & a \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oka, esto se fue al carajo. Pero está demostrado. La última matriz, es el resultado de  $A^2$ . Tiene todos ceros excepto en el **bloque naranja**, que está en  $K^{k \times k}$  y es el producto de hacer el **bloque naranja** por el **bloque naranja** dado que el **bloque violeta** por el **bloque verde** dio 0. Por lo tanto el **bloque naranja** es la **hipótesis inductiva!!!** Multiplicar  $k+1$  veces  $A$  por si misma dará 0, porque el producto, será el (**bloque naranja**)<sup>2</sup> con cada vez más ceros.

Dado que  $p(2), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas, por el principio de inducción en  $p(n)$  también será verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$

El caso con  $n = 1$  es trivial, dejame en paz.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

🔗 ¿Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 09/05/25 @ 13:16 . Chequeá si hay una **versión nueva** → **acá**.

[Ir a índice ↑](#)

**Ejercicio 2.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

- (a) Escalonar la matriz  $A$  multiplicándola a izquierda por matrices elementales  $T^{ij}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , con  $i \neq j$ .

Recordar que  $T^{ij}(a) \in K^{n \times n}$  se define como:

$$T^{ij}(a) = I_n + aE^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, a \in K,$$

siendo  $E^{ij}$  las matrices canónicas de  $K^{n \times n}$

- (b) Hallar la descomposición  $LU$  de  $A$ .

- (c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema  $Ax = b$ , para  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Hacer una operación entre *filas* es multiplicar por esas matrices  $T^{ij}$ , pero dado que el *me da tremenda pajómetro* explota, escribo las  $T^{ij}$  para la primera *columna* de ceros no más.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{31}(-\frac{2}{1})=I_4+(-\frac{2}{1})E^{31}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{41}(\frac{3}{1})=I_4+(\frac{3}{1})E^{41}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \star^1 \end{aligned}$$

Ahí entonces están las  $T^{ij}$  para hacer ceros en la primera *columna*. Y como la *matemagia* en esta materia parece no tener parangón, cuando multiplicás esas matrices  $T^{ij}$  da lo mismo que sumar los elementos fuera de la diagonal componente a componente:

$$T^{31} \cdot T^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gracias a ese resultado que en el próximo paso podría armar solo una matriz con la info para triangular toda la *segunda columna*. solo un producto matricial. Continúo la triangulación de  $\star^1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32}(-1)=I_4+(-\frac{1}{1})E^{32}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto para que la matriz  $A$  quede triangulada superiormente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_U$$

$$T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31} \cdot A = U$$

- (b) La  $U$  está una vez triangulada la matriz  $A$ . Encontrar la  $L$  sale con las matrices que multiplicamos para obtener la matriz triangulada:

$$L^{-1} \cdot A = U \xrightarrow[L]{\times \text{izquierda}} L \cdot L^{-1} \cdot A = L \cdot U \Leftrightarrow A = L \cdot U$$

El producto de las matrices elementales me forma la inversa de  $L : L^{-1}$ . Por suerte encontrar la inversa de  $(L^{-1})^{-1}$  es sencillo:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +2 & +1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo hay que cambiarle los signos a los elementos que estás por debajo de la diagonal.

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A \cdot x = b \xLeftrightarrow{A=LU} LU \cdot x = b \Leftrightarrow L \underbrace{(U \cdot x)}_y = b \Leftrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b & \star^1 \text{ Arranco por acá.} \\ U \cdot x = y & \star^2 \text{ Sigo por acá una vez encontrado } y. \end{cases}$$

Entonces resuelvo primero  $\star^1$ :

$$Ly = b \xrightarrow{\text{armo sistema}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow y \stackrel{\star^3}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con la  $\star^3$  resuelvo  $\star^2$ :

$$Ux = y \xrightarrow[\text{con } \star^3]{\text{armo sistema}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y porque soy un tipazo (y le pifé 1000 veces a las cuentas) acá tenés el código para corroborar:

🐞 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🐞

```
import numpy as np
import scipy

# Matriz A
A = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [2, -1, 0, -2], [-3, 3, 0, -1]])
L = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [2, 1, 1, 0], [-3, 0, 0, 1]])
U = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [0, 0, -4, -4], [0, 0, 0, 2]])
b = np.array([[1], [-7], [-5], [1]])


print(f"A =\n {A}")
print(f"L =\n {L}")
print(f"U =\n {U}")

print(f"\nA == LU --> {np.array_equal(A, L @ U)}")
print(f"Ax = b --> x = {np.transpose(np.linalg.solve(A,b))}")
```

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 


 Ale S. 

**Ejercicio 3.** Escribir funciones de Python  que calculen la solución de un sistema:

- (a)  $Ly = b$ , siendo  $L$  triangular inferior.
- (b)  $Ux = y$ , siendo  $U$  triangular inferior.



 ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → [una pull request](#) al .

**Ejercicio 4.** Escribir funciones de Python  que realicen las siguientes tareas:

- (a) Calcular la descomposición  $LU$  de una matriz dada  $A$ , asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.
- (b) Resolver un sistema  $Ax = b$ , utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem (c) del ejercicio 2.

- (a) El siguiente *snippet* es en gran parte código para generar la matriz y después del cálculo de la triangulación formar las matrices  $L$  y  $U$ .

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
"""
Eliminacion Gausianna
"""

import numpy as np

def elim_gaussiana(A):
    m = A.shape[0]
    n = A.shape[1]
```



```
Ac = A.copy()

if m != n:
    print("Matriz no cuadrada")
    return

for i in range(0, n - 1):
    divisor = Ac[i][i]
    for j in range(i, n - 1):
        coef = Ac[j + 1][i] / divisor
        Ac[j + 1][i:] = np.subtract(Ac[j + 1][i:], coef * Ac[i][i:])
        Ac[j + 1][i] = coef

L = np.tril(Ac, -1) + np.eye(A.shape[0])
U = np.triu(Ac)

return L, U

def main():
    n = 7
    B = np.eye(n) - np.tril(np.ones((n, n)), -1)
    B[:, n - 1] = 1
    print(f"Matriz B = \n{B}\n")

    L, U = elim_gaussiana(B)

    print(f"Matriz L = \n{L}\n")
    print(f"Matriz U = \n{U}\n")
    print("B = LU? ", "Sí!" if np.allclose(np.linalg.norm(B - L @ U, 1), 0)
    else "No!")
    print("Norma infinito de U: ", np.max(np.sum(np.abs(U), axis=1)))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

---

### Ejercicio 5. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

---

### Ejercicio 6. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

---

### Ejercicio 7. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

---

**Ejercicio 8.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📧, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 9.** Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

*según la definición de matriz definida positiva:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \mathbf{x} &= 4x^2 - 4xz + 5y^2 + 10yz + 11z^2 \stackrel{!!}{=} (4x^2 - 4xz + z^2) + 5(y^2 + 2yz + z^2) + 5z^2 \\ &= 5z^2 + 5(y+z)^2 + (2x-z)^2 > 0 \end{aligned}$$

La matriz cumple la definición de *matriz definida positiva*  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ . Sí, oka, hacer eso es una locura, más fácil es hacer lo que sigue y mirar los elementos de la matriz  $D$ :

Hay un teorema que dice algo así:

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica y definida positiva si y solo si existe  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular inferior con diagonal positiva tal que  $A = LL^t$ .

*Arranco como buscando la descomposición LU:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{F_3 + \frac{1}{2}F_1}]{\frac{F_2 - \frac{1}{2}F_1}{F_3 - \frac{3}{2}F_2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{F_3 - \frac{3}{2}F_2}{F_3 - \frac{3}{2}F_2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$



¡Sí! Ver los valores diagonales de  $U$  alcanza para ver que la matriz era efectivamente definida positiva. ¿Pero quién puede quitarnos el placer de haberlo comprobado de ambas formas?



Y ahora me formo la  $\tilde{L}$  a partir de la *eliminación gaussiana*:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto ya casi estamos:

$$A = \tilde{L}U = \tilde{L}D\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}(\tilde{L}\sqrt{D})^t = LL^t \text{ con } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pequeña verificación:

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
U = np.array([[4,2,-2],[0,4,6],[0, 0, 1]])

print(f"L_tilde U=\n{L_tilde@U}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 2 5 5]
#   [-2 5 11]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D = np.array([[4,0,0],[0,4,0],[0, 0, 1]])

print(f"D L_tilde_traspuesta=\n{D@np.transpose(L_tilde)}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 0 4 6]
#   [ 0 0 1]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D_sqrt = np.array([[2,0,0],[0,2,0],[0, 0, 1]])
L_chole = L_tilde @ D_sqrt

print(f"A=LL_traspuesta=\n{L_chole@np.transpose(L_chole)}")
#   [ 4 2 -2]
#   [ 2 5 5]
#   [-2 5 11]
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 10.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica. Probar que  $A$  es definida positiva si y solo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $a_{ij} = x_i^t x_j$

( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva va a admitir la descomposición de Cholesky ([mirá acá](#)).

$$A \xleftrightarrow[A \text{ def. pos.}]{A=A^t} A = \tilde{L} \overset{d_{ij}>0}{\uparrow} D \tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L} \sqrt{D} \sqrt{D} \tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t \xleftrightarrow[x \neq 0]{\times} 0 < x^t A x = x^t L L^t x = (L^t \cdot x)^t (L^t x) = y^t y$$

la de LU

Ahora esos  $y$  tienen que ser *linealmente independientes*, más fácil, tengo que encontrar un solo conjunto:

$$y = L^t x \xrightarrow{\text{elijo}} \{x_1, \dots, x_n\} = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = L^t e_1 = \text{Col}(L^t)_1 \\ \vdots \\ y_n = L^t e_n = \text{Col}(L^t)_n \end{cases}$$

La matriz  $L$  es triangular inferior  $\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \triangle & \\ a_{ij} & & \end{pmatrix}$ , con unos en la diagonal por lo que sus columnas son *linealmente independientes*. Y dado que

$$x_i^t A x_j = e_i^t A e_j \stackrel{!}{=} a_{ij} = y_i^t y_j$$

tenemos que el conjunto que verifica lo pedido:

$$\{\text{Col}(L^T)_1, \dots, \text{Col}(L^T)_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

( $\Leftarrow$ ) La hipótesis ahora me dice que tengo vectores *linealmente independientes* y además que con esos vectores me formo la matriz  $A$ . Es decir que  $A = X^t X$ , con  $X$ :

$$X = \left( x_1 \mid \dots \mid x_n \right) \Rightarrow A = X^t X \xleftrightarrow[y \neq 0]{\times} y^t A y = y^t X^t X y \Leftrightarrow y^t A y = (X y)^t X y = \|X y\|_2^2 > 0$$

Queda demostrado ya que:

$$A = X^t X \xrightarrow{\text{transpongo}} A^t = (X^t X)^t = X^t X = A$$

$$y^t A y > 0 \quad \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n \xleftrightarrow[y]{\text{def}} A \text{ es definida positiva}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 11.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) 🗣, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  [una pull request](#) al 🐼.

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\|A\|_2 < 1$ , siendo  $\|\cdot\|_2$  la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que  $I - A^t A$  es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz  $\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$  es simétrica definida positiva.

a) *Para la simetría:*

Transpongo y cruzo los dedos para que quede igual:

$$(I - A^t A)^t = I^t - (A^t A)^t = I - A^t A$$

linealidad en la trasposición

Sobre la linealidad de la transposición:

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \xrightarrow{\text{transpongo}} [A + B]_{ij}^t = [A + B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

Es simétrica.

*Para ver si es definida positiva:*

Intentamos con la definición de *matriz definida positiva* y vemos que sale:

$$\begin{aligned} I - A^t A &\stackrel{\times}{\underset{x \neq 0}{\longleftrightarrow}} \mathbf{x}^t (I - A^t A) \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 - \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 - \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 - \|A \mathbf{x}\|_2^2 \\ &\stackrel{!!}{=} \|\mathbf{x}\|_2^2 \left(1 - \frac{\|A \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2}\right) \quad \star^1 \end{aligned}$$

Y por la definición de la norma inducida:

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \underset{\text{enunciado}}{<} 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

queda entonces  $\star^1 \underbrace{\|\mathbf{x}\|_2^2}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{\|A \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2}\right)}_{>0} > 0$ :

$$\boxed{\mathbf{x}^t (I - A^t A) \mathbf{x} > 0}$$

b) *Para la simetría:*

*Para ver si es definida positiva:*

Me parece que multiplicar por bloque hace que caigamos en el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{y_n} \underbrace{(x_{n+1}, \dots, x_{2n})}_{z_n} \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \\ &= \left( (x_1, \dots, x_n)I, (x_{n+1}, \dots, x_{2n})A^t, (x_1, \dots, x_n)A, (x_{n+1}, \dots, x_{2n})I \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \\ &= \|y_n\|_2^2 + z^t A^t z + y^t A y + \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

Usando el resultado del ejercicio anterior:

$$\mathbf{x}^t (I - A^t A) \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 - \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 - \|A \mathbf{x}\|_2^2$$

CONSULTAR

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

**Ejercicio 13.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $K^n$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

(a) Probar que si  $B$  es ortogonal, entonces

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{v_2^*}{\|v_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{v_n^*}{\|v_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si  $B$  es ortonormal, entonces  $C_{EB} = C_{BE}^*$ .

(c) Concluir que si  $B$  es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector  $v$  en base  $B$  son:

$$(v)_B = (v_1^*v, v_2^*v, \dots, v_n^*v).$$

(d) Calcular  $(v)_B$  siendo  $v = (1, -i, 3)$ ,  $B = \left\{ \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, i) \right\}$ .

(a) Si  $B$  es una *base ortogonal*, una BOG, entonces sus vectores cumplen que:

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} \|v_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para calcular la matriz de cambio de base  $C_{EB}$  hay que calcular *las coordenadas de los vectores canónicos en la base  $B$* : Ojo que esa llave son ecuaciones vectoriales, todo lo que está en **negrita**, **bold** es vector:

$$\begin{cases} e_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots + c_{1n}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} \underbrace{v_1^*}_{\in K} = c_{11}\|v_1\|_2^2 \Leftrightarrow c_{11} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ e_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{2n}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{21}\|v_2\|_2^2 \Leftrightarrow c_{21} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ \vdots \\ e_n = c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n \xrightarrow[\text{!}v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{n1}\|v_n\|_2^2 \Leftrightarrow c_{n1} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \end{cases}$$

Esos coeficientes  $c_{ij}$  me forman la primera fila,  $c_{ij}$  de la matriz  $C_{EB}$ :

$$(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}) = \left( \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}, \frac{v_1^*}{\|v_2\|_2^2}, \dots, \frac{v_1^*}{\|v_n\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}$$

Cuando quiera calcular la fila  $j$ -ésima:

$$(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}) = \left( \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \dots, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}$$

Y así me armo la matriz  $C_{EB}$  generando fila por fila con este método.

(b) Ahora  $B$  es una BON, así que:

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} \|v_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Y con esto la matriz del ítem (a) queda más simple como:

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & v_1^* & \cdots \\ \cdots & v_2^* & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & v_n^* & \cdots \end{pmatrix} \star^1$$

La matriz de cambio de base  $C_{EB}$  toma *vectores en coordenadas de E* y da el resultado en *coordenadas de la base B*. Construir el cambio de base  $C_{BE}$ , es inmediato el cálculo de coordenadas haciendo el sistema como en el ítem (a) ¡Quedan los vectores de la base  $B$  conjugados como columnas de la matriz!

$$\overline{C}_{BE} = \left( \overline{v}_1 \mid \overline{v}_2 \mid \dots \mid \overline{v}_n \right) \xrightarrow[\Rightarrow *]{\text{transpongo}} C_{BE}^* = \begin{pmatrix} \dots & v_1^* & \dots \\ \dots & v_2^* & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & v_n^* & \dots \end{pmatrix} \stackrel{\star 1}{=} C_{EB}$$

(c) Sale con el sistemita del ítem (a) nuevamente:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \xleftrightarrow[\downarrow v_j^*]{\times \rightarrow} v_j^* \cdot v = c_j \underbrace{\|v_1\|_2^2}_{=1} \Leftrightarrow c_j = v_j^* \cdot v$$

(d) Pajilla ☺.  $B$  es una BON. Usando el ítem (c):

$$(v)_B = (v \cdot v_1^*, v \cdot v_2^*, v \cdot v_3^*) \stackrel{!}{=} (0, -\frac{2}{\sqrt{2}}i, 3i)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

#### Ejercicio 14. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 15.** En cada uno de los siguientes casos construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla:

- (i)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (ii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (iii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

[Acá un poco de cosas de proyectores, click, click](#) 📌

- (i) Encuentro un *sistema de generadores* de  $\text{Im}(f) = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$ , y dado que el subespacio  $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$ , por ejemplo  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ .

Con esa data defino el proyector:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) &= (-1, 1, 0) \\ f(-1, 0, 1) &= (-1, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) &= (0, 0, 0) \end{cases}$$

Si tomo como base  $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ :

$$f_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco  $f$ , para lo cual multiplico por:

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} C_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

🐙 ¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ [al repo](#), críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Por lo tanto:

$$f = f_{EB} \cdot C_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

No sé si hay que expresar el resultado en base canónica, pero ahí está.

(ii) Usando lo mismo de antes:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

(iii) Ahora  $\text{Nu}(f) = \langle (3, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

$$\begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

## Ejercicio 16.

(a) Sea  $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular  $[f]_B$  y comprobar que  $f$  es un proyector.

(b) Construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$  e  $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ . ¿Es  $f$  una proyección ortogonal?

[Acá te dejo resumencito de proyector, click, click](#) 

(a) Para calcular  $[f]_B$  o  $[f]_{BB}$  que me parece más descriptivo:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular  $[f]_{BB}$  hay que calcular las coordenadas en base  $B$  de los transformados de la base  $B$ .

$$\begin{cases} (f(1, -1, 0))_B = (1, -1, 0)_B \stackrel{!}{=} (1, 0, 0) \\ (f(0, 1, -1))_B = (0, 1, -1)_B \stackrel{!}{=} (0, 1, 0) \\ (f(0, 0, 1))_B = (0, 0, 0)_B \stackrel{!}{=} (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Salen a ojo esas coordenadas, porque son los casi mismos vectores que la base  $B$ . Si no lo ves, planteá las combinetas lineales para calcular las coordenadas y vas a llegar a lo mismo.

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $f$  es un proyector, lo va a ser en cualquier base, voy con la definición:  $P \circ P = P$

$$[f]_{BB} \circ [f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [f]_{BB}$$

(b) De ese subespacio pedorro saco que:

$$\text{Im}(f) = \{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$$

Propongo un proyector  $P$ :

$$\begin{cases} P(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \rightarrow v \in \text{Im}(P) \implies P(v) = v \\ P(-3, 0, 1) = (-3, 0, 1) \rightarrow v \in \text{Im}(P) \implies P(v) = v \\ P(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Ojo que eso sería algo como  $[P]_{BE}$  con  $B = \{(-1, 1, 0), (3, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  para encontrar el proyector es su forma *más mejor*:



Las cuentas estas que voy a hacer no son necesarias para contestar, pero quiero ver que no me quede simétrico.



$$\begin{cases} P(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ P(3, 0, 1) = (3, 0, 1) \\ P(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{✗}} \begin{cases} P(1, 0, 0) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \\ P(0, 1, 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}) \\ P(0, 0, 1) = (-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \end{cases}$$

El proyector en base  $E$  queda:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El proyector  $P$  no es un proyector ortogonal. Por un lado no se cumple que  $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$ , dado que  $\underbrace{(1, 1, 1)}_{\in \text{Nu}(P)} \cdot \underbrace{(3, 0, 1)}_{\in \text{Im}(P)} \neq 0$ . Además la expresión matricial tampoco cumple  $P = P^t$ .

Se puede encontrar una base en la que el proyector sí va a ser simétrico. En este caso particular:

⚠ consultar

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ consultar

igual que en el ítem a.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 17.** Sea  $v \in \mathbb{C}^n$  un vector columna tal que  $\|v\|_2 = 1$ . Probar que:

- La transformación lineal definida por la matriz  $vv^*$  es la proyección ortogonal sobre  $\langle v \rangle$ .
- Si  $\{v_1, \dots, v_m\}$  es una base ortonormal del subespacio  $S$ , entonces  $A = \sum_{i=1}^m v_i v_i^*$  es la proyección ortogonal sobre  $S$ .
- Si  $A$  es como en el ítem anterior,  $I - A$  es la proyección ortogonal sobre  $S^\perp$ .
- Eligiendo  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|v\|_2 = 1$ , corroborar gráficamente en Python 🐍 que  $R = I - 2vv^*$  es la reflexión respecto de  $\langle v \rangle^\perp$ .

(a) Tenemos que:

$$\|v\|_2 = 1 \xLeftrightarrow{\text{def}} v^* \cdot v \stackrel{\star 1}{=} 1$$



Un *proyector ortogonal* sobre  $\langle v \rangle$ ,  $P$  cumple:

$$P \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} v, \quad P \cdot v^\perp \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad P = P^* \quad \text{y} \quad \text{Nu } P \perp \text{Im } P$$

Entonces si esta *gaver*  $vv^*$  cumple eso, ganamos 🏆:

$$\overbrace{vv^*}^P \cdot v \stackrel{!}{=} v(v^* \cdot v) \stackrel{\star^1}{=} v,$$

that was easy. Vamos a por la otra. Agarro algún  $w \in \mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} vv^* \cdot \underbrace{(Pw - w)}_{\perp v} = 0 &\Leftrightarrow vv^* \cdot Pw - vv^* \cdot w = 0 \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} v(P^*v)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} v(Pv)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} vv^*w - vv^*w \stackrel{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Me doy cuenta que podría haber probado que  $(vv^*)^* = vv^*$  ¿Pero quien me quita lo bailado?:

- (b) Si tengo una base del subespacio, entonces puedo escribir a un vector genérico  $w \in S$  como una combineta de los vectores de la base:

$$w = \sum_{j=1}^m a_j v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Transformo teniendo en cuenta que  $v_i^*(a_j v_j) = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ , recordando que  $\|v_i\|_2 = 1$ :

$$Aw = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* w = \sum_{i=1}^m a_i v_i = w \implies Aw = w$$

Me doy cuenta que podría haber probado que  $A = A^*$  ¿Pero quien me quita lo bailado?:

$$A^* = \left( \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \right)^* \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^m (v_i v_i^*)^* = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* = A$$

- (c) Medio que usé algo de esto en el ítem (a). Un *proyector ortogonal* sobre  $S$ , va a mandar todo elemento del *complemento ortogonal* de  $S$ ,  $S^\perp$  al 0.

Es decir, si  $w \in S^\perp$ :

$$Aw = 0 \quad \text{y} \quad (I - A)w = w \implies \underbrace{A(I - A)w}_w = (A - A^2)w \stackrel{!}{=} (A - A)w = 0.$$

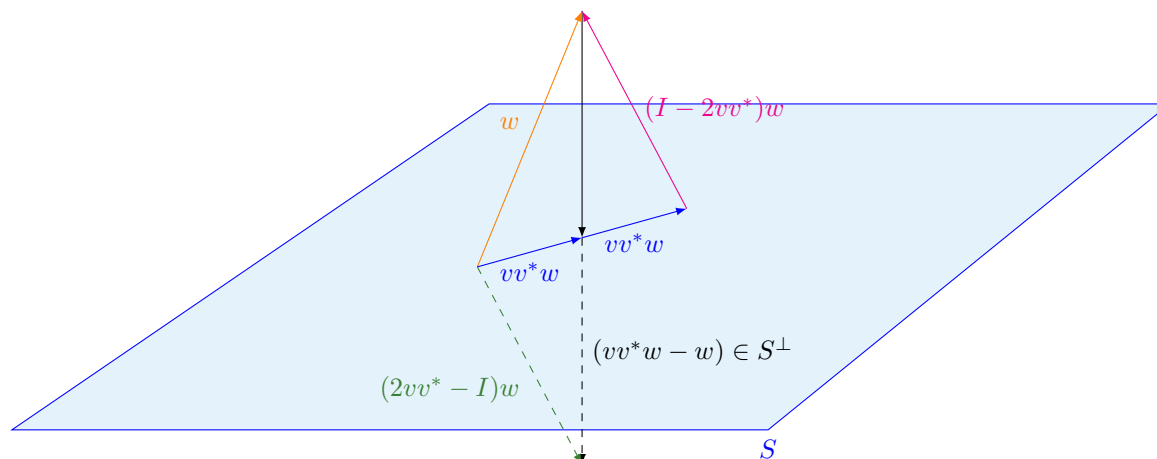
Podemos decir que  $A(I - A)$  es el operador nulo.

En general para cualquier elemento  $v$  del *espacio vectorial*  $V$ : Puedo escribir  $v = s + s^\perp$ , una combineta única de elementos de  $S$  y  $S^\perp$ , ya que  $S \oplus S^\perp$ .

$$A(I - A)v = A(I - A)(s + s^\perp) = A(s + s^\perp - As - As^\perp) = As + As^\perp - As - A^2 s^\perp \stackrel{!}{=} 0$$

Los *proyectores ortogonales* cumplen que  $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$ , donde la imagen es el  $S$  al que se proyecta y el núcleo es el  $S^\perp$ .

(d) Sí, lo sé, esto no es una implementación en Python 🤖.



Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

### Ejercicio 18. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 19. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 20. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 21. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 22. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 23. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

### Ejercicio 24. 🤖... hay que hacerlo! 🐙

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{I}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

## Ejercicios de parciales:

---

 1. \_\_\_\_\_