

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/04/25 @ 11:29

Choose your destiny:

(doubleclick en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.
2.	6.	10.	14.	18.	22.	
3.	7.	11.	15.	19.	23.	
4.	8.	12.	16.	20.	24.	

☉ Ejercicios de Parciales

🔥??.

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:

05/04/25 @ 11:29

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:*Transformaciones lineales*

✚ Dados V y W dos K -espacios vectoriales, una $f : V \rightarrow W$ es *transformación lineal* si cumple:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v, w \in V$
- $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \quad \forall \alpha \in K, v \in V$

✚ $f : K^n \rightarrow K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{e_k}_{\in K^{n \times 1}}\right) \stackrel{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{f(e_k)}_{\in K^{m \times 1}} = \underbrace{\left(f(e_1) \mid \dots \mid f(e_n)\right)}_{A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m \times 1}}$$

✚ *Matriz de una transformación lineal:*

Dados V y W dos K -espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \quad \forall v \in V$$

✚ Sea V un K -espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \dots, n$.

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. El $\text{Nu}(A) = \{x \in K^n / Ax = 0\}$

✚ Sea $A \in K^{m \times n}$, define $f : K^n \rightarrow K^m$. La $\text{Im}(A) = \{Ax \in K^m \text{ con } x \in K^n\} = \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle$. También $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$

✚ *Propiedades de una transformación lineal:*

Sea $f : V \rightarrow W$ una t.l. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V . Entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es un conjunto generador para la imagen de f .

- f se dice *monomorfismo* si es inyectiva.
- f se dice *epimorfismo* si es suryectiva.
- f se dice *isomorfismo* si es *mono* y *epi*.

✚ *Norma* Sea $\|\cdot\| : K^n \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma si cumple:

- 1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in K^n$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ con $\alpha \in K$ y $x \in K^n$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ con $x, y \in K$

✚ Ejemplos:

- Norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$
- Norma p: $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$
- Norma p: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max |x_i|$

Aritmética de punto flotante:

✿ *Escribir 0.25 en base 10:*

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 &= 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 &= 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 &= 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 en base 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 &= 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 &= 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 &= 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

Escribir 0.3 en base 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 &= 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ \vdots &= \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si $m = 3 \implies x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

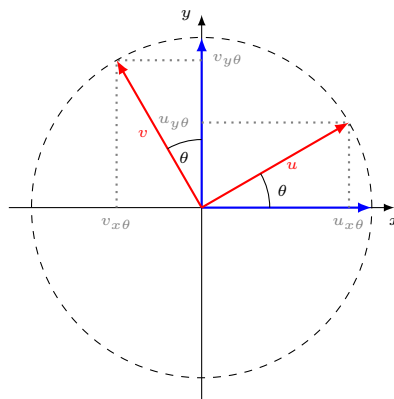
$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (ponele):

Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\star^1} \cdot u_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\star^2} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y ★¹:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y ★²:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{! \\ \downarrow \text{sohcatoa}}}{=} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 2. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 3. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 4. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 5. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 6. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 7. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 8. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 9. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 10. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 11. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 12. 🤖... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 13. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 14. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 15. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 16. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 17. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 18. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 19. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 20. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 21. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 22. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 23. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 24. 🚩... hay que hacerlo! 🚩

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📎, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 25. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📩, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → *una [pull request](#)* al 🐙.

Ejercicios de parciales: