Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 4

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 13/08/25 @ 13:15

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por última vez:
13/08/25 @ 13:15
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 4

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

- *Procesos de Markov:*

  Sucesión de vectores $\boldsymbol{v}_k$ con $k \in \mathbb{N}_0$

  $$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots\} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{v}_{k+1} = M\boldsymbol{v}_k.$$

  M es una matriz de *Markov* si es una matriz estocástica por columnas, es decir:

  - Todas los elementos m_{ij} de la matriz M son no negativos.
  - Cada columna de M suma 1:
  $$\left[\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\right]_j = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n}$$
  - M tiene por lo menos un autovalor $\lambda = 1$.
  - Los autovalores de M cumplen que $|\lambda| \leq 1$.

  La interpretación para un elemento m_{ij}, se lee:

  m_{ij} es la probabilidad de que la componente en el estado i pase a estar al estado j.

- *Vector estocástico, de estado o de probabilidad:*

  Sea un $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ cumple que sus coordenadas son no negativas y suman 1. Las coordenada $j-$ésima corresponde la probabilidad de estar en el estado $j-$ésimo o la proporción de la población que se encuentra en ese estado.

- *El estado límite* $v^{(\infty)}$ es el estado para el cual existe el límite:

  $$\lim_{k\to\infty} M^k v^{(0)} = \lim_{k\to\infty} v^{(k+1)} = v^{(\infty)}$$

  1. La existencia del estado límite, $v^{(\infty)}$, como se ve en la definición, depende del estado inicial $v^{(0)}$.
  2. Si los autovalores λ_i de A cumplen que si $|\lambda_i| = 1 \implies \lambda_i = 1 \implies$ podría existir existe el *estado límite*.

- *El estado de equilibrio* $v^{(eq)}$:

  $$Mv^{(eq)} = v^{(eq)},$$

  por lo tanto $v^{(eq)}$ no es otra cosa que el autovector asociado al autovalor 1 de M

  1. Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable y tiene un único autovalor de valor $\lambda = 1$ y $\lambda_i \neq -1$ con autovector asociado v^{eq}, entonces existe:

  $$\lim_{k\to\infty} A^k = A^{(\infty)} \quad \text{y} \quad A^{(\infty)} = \left(\begin{array}{c|c|c} v^{eq} & \cdots & v^{eq} \end{array}\right).$$

  Con ese resultado, para cualquier estado inicial escrito como combineta de la base de autovectores:

  $$v^{(0)} = c_1 v^{eq} + \cdots + c_n v_n \text{ con } c_1 \neq 0$$

  . Eventualmente $Av^{(0)} \xrightarrow[\text{a}]{\text{tiende}} v^{eq}$.

  Si hay estado límite $v^{(\infty)}$ entonces es v^{eq}.

  2. Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable, tiene $\lambda = 1$ con multiplicidad m y $\lambda_i \neq -1$ con autoespacio $E_{\lambda=1} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ entonces el estado $v^{(\infty)}$ es una combinación lineal de los vectores de $E_{\lambda=1}$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -ia & \text{con} \quad v_{\lambda=-ia} = (1, -i) \\ \lambda = ia & \text{con} \quad v_{\lambda=ia} = (1, i) \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) + 2 = 0 \bigstar^{1}$$

Que lindo ejercicio.

Si hago $x = (a - \lambda)$ entonces $\bigstar^{1}$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \big((a-\lambda) - 1\big)^2 \big((a-\lambda) + 2\big) = 0$$

Por lo tanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 1 & \text{con} \quad E_{\lambda=a-1} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle \\ \lambda_2 = a + 2 & \text{con} \quad E_{\lambda=a+2} = \langle (1,1,1) \rangle \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(f) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. Para cada una de la matrices A del ejercicio anterior, sea $f : K^n \to K^n$ la transformación lineal tal que $[f]_{EE} = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $[f]_{EE}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular C_{BE}.

Sea $A \in K^{n\times n}$ criterios para saber si una matriz es diagonalizable:

$$A \text{ es diagonalizable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tiene } n \textit{ autovectores linealmente independientes.}$$
$$A \text{ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.}$$
$$A \text{ es diagonalizable si } \operatorname{mg}(\lambda_i) = \operatorname{ma}(\lambda_i) \text{ para cada } \lambda_i \text{ de } A.$$

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

(a) Hallar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar A.

(c) Dar una fórmula cerrada para F_n.

(a) Quiero una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aF_{n+1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_{n+1} \overset{!}{=} F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistemita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para mostrar lo que sigue, inducción. Quiero mostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso base:

$$p(1) : A^1 \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_1 \\ F_0 + F_1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Es así que la proposición $p(1)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(k) : \underbrace{A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver ahora que la proposición:

$$p(k+1) : A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

también lo sea.

$$A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{HI}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

Tuqui, también resulta ser verdadera.

Es así que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción la proposición $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) *Ecuación característica a polinomio característico:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{característica}]{\text{ecuación}} (A - \lambda I)v_\lambda = 0 \xrightarrow[\text{característico}]{\text{polinomio}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Esa notación se complementa con:

$$\left\{ \ \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \right.$$

Diagonalizar esta matriz tiene un montón de *droga*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$$

No sé si están bien las cuentas, pero, a veces es mejor ni preguntar. *Beware* ⚠.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}$$

(c) Voy a agarrar la primera coordenada de este 👻:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Entonces la fórmula cerrada:

$$F_n = \frac{1}{1+\varphi^2}\left((\varphi^n + (\frac{-1}{\varphi})^n \varphi^2) F_0 + (\varphi^{n+1}) - \frac{-1}{\varphi})^n \varphi) F_1 \right),$$

ponele.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 4. Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial $x(0)c_0$ es $x(t)c_0e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz C tal que $C^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Enunciado aterrador, pero es un ejercicio para desacoplar las ecuaciones, cosa que no se mezclen la x con las y. Lo primer es escribir la matriz de coeficientes en forma diagonal:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 3y(t) \end{array} \right. \xrightarrow[\text{matricial}]{\text{forma}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Diagonalizo la matriz:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{7, 2\} \implies \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El cambio de variables planteado:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \overset{\star 1}{=} C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Multiplico la ecuación diferencial a izquierda por C^{-1}:

$$\underbrace{C^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}} = C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{C^{-1} A C}_{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema queda desacoplado, *no hay mezcla* de las cosas de u con las cosas de v y se puede resolver como dos ecuaciones diferenciales por separación de variables:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 7u(t) \Leftrightarrow u(t) = c_0 e^{7t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star 1]{\text{condiciones}} u(0) = 1 = c_0 e^{7 \cdot 0} \Leftrightarrow c_0 = 1 \\ v'(t) & = & 2v(t) \Leftrightarrow v(t) = c_1 e^{2t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star 1]{\text{condiciones}} v(0) = 1 = c_1 e^{2 \cdot 0} \Leftrightarrow c_1 = 1 \end{array} \right.$$

Ahora hay que volver a las variables originales:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 5. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Demostracion:
Por propiedades del determinante sabemos que:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Sabemos que los autovalores λ son los que tienen la siguiente propiedad:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Usando la propiedad del determinante, tenemos que:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t)$$

Y, como sabemos que λ es un autovalor de A

$$0 = \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\mathcal{X}_A(\lambda)} = \underbrace{\det((A - \lambda I)^t)}_{\mathcal{X}_{A^t}(\lambda)} \Leftrightarrow \mathcal{X}_A(\lambda) = \mathcal{X}_{A^t}(\lambda) = 0$$

Probando así que tienen los mismos autovalores, dado que los *polinomios característicos de ambas expresiones* son iguales
Si tengo la siguiente matriz:

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(1,0)\}} \xrightarrow{\text{transponiendo}} \underbrace{A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(0,1)\}}$$

Esas matrices no son diagonalizables. Ambas tienen los mismos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pero no generan una base de autovectores para poder diagonalizar la matriz.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Iñaki Frutos` `naD GarRaz`

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de A. Probar que:

(a) Si A es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de A^k, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + \mu I$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$.

(a) Sea A triangular

Arranca el lema

Voy a usar y demostrar el lema:

Si A es una matriz triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales.

¡¡A demostrarlo!!

Caso base:

$p(2)$: una matriz $M \in K^{2\times 2}$ triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales

Sea $M \in K^{2\times 2}$ triangular inferior (la 1×1 es trivial, no es divertido), el caso triangular superior es análogo: $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c_{21} & b \end{pmatrix}$, entonces $\det(M) = a \cdot b - 0 \cdot c_{21} = a \cdot b$ cumpliendo así el caso base.

Paso inductivo:

Asumo que

$$p(h) : \text{M triangular inferior, } \forall M \in K^{h\times h} \text{ se tiene que } \underbrace{\det(M) = \prod_{i=1}^{h} m_{ii}}_{\text{hipótesis inductiva}},$$

es verdadera para algún $h \in \mathbb{N}$, entonces quiero probar que:

$$p(h+1): \text{M triangular inferior, } \forall M \in K^{(h+1)\times(h+1)} \text{ se tiene que } \underbrace{\det(M) = \prod_{i=1}^{h+1} m_{ii}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

también sea verdadera.

Nuevamente voy a hacerlo en el caso en que sea triangular inferior, el caso superior es enteramente análogo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 \\ a_{(h+1)1} & a_{(h+1)2} & \cdots & a_{(h+1)(h)} & a_{(h+1)(h+1)} \end{pmatrix}$$

Calculo el determinate. Lo voy a hacer desarrollando por la última columna:

$$\det(A) = 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{(h+1)(h+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \overset{\text{HI}}{=} a_{(h+1)(h+1)} \cdot \prod_{i=1}^{h} a_{ii} = \prod_{i=1}^{h+1} a_{ii}$$

El lema queda probado. La demo de cuando es triangular superior que la haga Dios, o vos, pero no yo.

Terminó el lema

Ahora volviendo con la demostración del ejercicio.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Por lema y recordando que A es triangular por lo que la resta de A con una matriz diagonal seguirá siéndolo:

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

¡Ta rahh!, los a_{ii} son autovalores de $A \quad \forall i \leq n$.

(b) Supongo que λ es autovalor de A.

Demostracion por inducción:

Caso base:

$$p(1): A^1 v = \lambda^1 v$$

Es verdadera por simple definción de autovalor.

Paso inductivo: Asumo como verdadera la proposición:

$$p(k): A^k v = \lambda^k v \text{ con el autovector de } Av = \lambda v$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces quiero probar que:

$$p(k+1): A^{k+1} v = A^{k+1} v$$

también lo sea.

$$A^{k+1} v = A \cdot A^k v \overset{\text{HI}}{=} A \cdot \lambda^k v \overset{!}{=} \lambda^{k+1} v$$

Fin

(c) Sea λ autovalor de A con su autovector correspondiente v . Sea μ un número.

Tenemos que por definición:

$$Av = \lambda v$$

Veamos

$$(A + \mu I)v = Av + \mu I v \overset{\text{def}}{=} \lambda v + \mu I v = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$$

Fin.

(d) Sea p un polinomio, λ un autovalor con v autovector asociado de A

Demostración por inducción en el grado del polinomio p_n. Quiero probar que:

$$p(n) : p(\lambda) \text{ es autovalor de } p(A)$$

Caso base:

$$p(\text{gr}(p) = 1) : p_1(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_1(A) = a_1 A + a_0 \underset{I_n}{\underset{\downarrow}{A^0}}$$

Y de lo que vio en el ítem (c):

$$p_1(A)v = a_1 A v + a_0 I_n v \Leftrightarrow \underbrace{(a_1 A + a_0 I_n)}_{p(A)} v = \underbrace{(a_1 \lambda + a_0)}_{p(\lambda)} v$$

Por lo cual la proposición $p(\text{gr}(p) = 1)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo como verdadera la proposición:

$$p(\text{gr}(p) = k) : \underbrace{p_k(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_k(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

para algún $k en \mathbb{N}$. Entonces quiero probar que

$$p(\text{gr}(p) = k+1) : p_{k+1}(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_k(A) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i A^i$$

Veamos un polinomio de grado $k + 1$:

$$p_{k+1}(X) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot X^i = a_{k+1} X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i$$

Evalúo en A y multiplico por v autovector de A:

$$p_{k+1}(A)v = a_{k+1} A^{k+1} v + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot A^i v \underset{(b)}{\overset{\text{HI}}{=}} a_{k+1} \lambda^{k+1} v + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot \lambda^i v = \underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot \lambda^i}_{p(k+1)(\lambda)} v$$

Concluyendo así que

$$p_{k+1}(A)v \overset{!!}{=} p_{k+1}(\lambda)v$$

Entonces, probé que es verdadera la proposición.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Iñaki Frutos

Ejercicio 7.

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\operatorname{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I$. Hallar los restantes autovalores de A.

(a) Truquini de escribir la cosita y sacar factor común las cositas de los costaditos:

$$A = CDC^{-1} \implies \begin{cases} A^2 = CD^2C^{-1} \\ 2A = C2DC^{-1} \end{cases} \implies A^2 + 2A = CD^2C^{-1} + C2DC^{-1} \overset{!}{=} C\underbrace{(D^2 + 2D)}_{\lambda_i' = \lambda_i{}^2 + 2\lambda_i}C^{-1}$$

Donde λ_i' son los autovalores de $A^2 + 2A$ mientras que los λ_i los autovalores de A. Por enunciado:

$$\begin{cases} -1 &= \lambda_1{}^2 + 2\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \\ 3 &= \lambda_2{}^2 + 2\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \in \{-3, 1\} \\ 8 &= \lambda_3{}^2 + 2\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 \in \{-4, 2\} \end{cases}$$

Tenemos un millón de *posibles autovalores* para A, busquemos la combineta que haga que $\operatorname{tr}(A) = -4$:

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -4 \end{cases}}$$

(b) Sabemos que determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

En este caso:

$$\det(A) = 6 = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\lambda_1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -2}}{\lambda_2} \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -3$$

Luego tenemos por la *definición* de lo que es un autovector:

$$(A - 3I)v = -4v \Leftrightarrow Av = -v$$

Es decir que encontré otro autovalor:

$$\lambda_3 = -1 \implies \underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{\lambda_3} \cdot \lambda_4 = -3 \Leftrightarrow \lambda_4 = 3$$

Los autovalores de A:

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_4 &= 3 \end{cases}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de A son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si A es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si A es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si A es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

(a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sus autovalores $\lambda_i \in \mathbb{R}$, eso se calculó con un polinomio característico:

$$\mathcal{X}(A) = \det(A - \lambda_i)$$

Los autovalores resultaron reales y ahora tengo que calcular los autovectores asociados resolviendo el sistema:

$$(A - \lambda I_n)v = 0.$$

Donde no hay razón *necesaria* para que la solución de ese sistema tenga elementos con parte imaginaria no nula. Los v serán vectores con todas sus coordenadas reales.

Siempre uno puede complicar la vida y hacer cosas como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ concluyendo que el autovector $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ es un autovector $\in \mathbb{C}$ asociado al autovalor 0, pero el <u>*pueden tomarse del enunciado*</u> justamente dice que para no pegarnos un tiro en el pie, *tomaríamos* el $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y listo el KFC. ⚠

(b) A es simétrica, supongo que λ es un autovalor con autovector asociado v:

$$\begin{cases} v^* A v = \lambda v^* v = \lambda \|v\|_2^2 \\ v^* A v \overset{!!}{=} (Av)^* v = \bar{\lambda} v^* v = \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{cases} \implies \lambda \|v\|_2^2 = \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) Si a es una matriz SDP, por lo visto antes tiene autovalores reales. Si λ es un autovalor de A con autovector asociado v:

$$v^t A v \overset{(<)}{>} 0 \underset{\text{para } Av = \lambda v}{\overset{\text{en particular}}{\Longleftrightarrow}} \lambda \|v\|_2^2 \overset{(<)}{>} 0 \Leftrightarrow \lambda \overset{(<)}{>} 0$$

(d) Si a es una matriz simétrica, y tengo 2 autovalores λ_1 y λ_2 con autovectores asociado v_1 y v_2 respectivamente:

$$\begin{cases} v_2^t A v_1 = \lambda_1 v_2^t v_1 \\ v_2^t A v_1 \overset{!!}{=} (A v_2)^t A v_1 = \lambda_2 v_2^t v_1 \end{cases} \underset{\text{M.A.M.}}{\overset{\text{restando}}{\Longleftrightarrow}} 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2^t \cdot v_1 \implies v_1 \perp v_2$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in K^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

Dejame escribir al proyector como P en vez de f, porque me da *cosita* sino. Tenemos un proyector y por definición:

$$P \circ P = P \quad \text{y} \quad Pv = v$$

Una forma de ver esto, dado un v autovector asociado a λ:

$$\begin{cases} Pv = \lambda v \\ \wedge \\ P(Pv) = \lambda^2 v \end{cases} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda v = \lambda^2 v \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 1 \\ & \text{o} & \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Suponiendo que el proyector siempre puede ser diagonalizado ¿Es esto cierto? Sí. ¿Por qué? Me contó un 🐦:

$$P = CDC^{-1} \Leftrightarrow P = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$P \circ P = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1} = \underbrace{C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^{-1}}_{P \circ P} = \underbrace{C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}}_{P}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 = \lambda_1 & \Leftrightarrow & \boxed{\lambda_1 \in \{0, 1\}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n^2 = \lambda_n & \Leftrightarrow & \boxed{\lambda_n \in \{0, 1\}} \end{cases}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que f es un proyector y hallar una base B tal que $[f]_{BB}$ sea diagonal.

Por inspección, sino calculalos, ese proyector tiene:

$$\text{Im}(P) = \{(1, 2, 3)\} \ , \quad \text{Nu}(P) = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$$

Se ve que $\underline{Pv = v}$ $\forall v \in \text{Im}(P)$, y ya esa ecuación que escribí te dice que:

$$E_{\lambda=1} = \{v\} = \{(1, 2, 3)\} = \text{Im}(P)$$

Similar sucede con los elementos del núcleo:

$$E_{\lambda=0} = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} = \text{Nu}(P)$$

En forma diagonal para <u>una</u> base $B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 0), (0, 0, 1)\}$:

$$P = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 11. Considerar la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon \ll 1$ es arbitrario. Calcular los polinomios característicos y los autovalores de A y de B. Concluir que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un polinomio pueden conducir a grandes variaciones en sus raíces (el problema está mal condicionado). En particular, esto afecta el cómputo de autovalores como raíces del polinomio característico.

El polinomio característico de A y B:

$$\mathcal{X}_A = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda \cdot (\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{X}_B = (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Medio que el enunciado cuenta todo. En particular se puede acotar la condición de esas matrices.

Por ejemplo para $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\text{cond}_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A - C\|_\infty} = \frac{1 + \frac{1}{\epsilon}}{\epsilon + 1} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \infty$$

Lo mismo se puede hacer para la matriz B. Esas matrices están mal condicionadas y como se puede ver en los autovalores, a pesar de tener elementos similares los resultados en el cálculo de los *autovalores* las resultados pueden variar mucho.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`♉ naD GarRaz`

Ejercicio 12. Una matriz $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ se dice estocástica (o de Markov) si sus elementos son todos no negativos y sus columnas suman uno. Los elementos p_{ij} representan la proporción de individuos que pasan del estado j al estado i en cada iteración (también pueden interpretarse) como la probabilidad de pasar j a i).

(a) Probar que si λ es autovalor de P, entonces $|\lambda| \leq 1$.

(b) Sea $\mathbf{1}$ el vector con todas sus coordenadas iguales a 1. Mostrar que $\mathbf{1}^t P = \mathbf{1}^t$. De hecho: P es estocástica si y solo si sus elementos son no negativos y $\mathbf{1}^t P = \mathbf{1}^t$

(c) Probar que toda matriz estocástica tiene a 1 por autovalor.

(a) La matriz P es estocástica, sus columnas suman 1. Si λ es autovalor de P:

$$\begin{aligned}
P\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Fila}_i(P)\cdot\boldsymbol{v} = (\lambda\boldsymbol{v})_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}v_j = \lambda v_i \\
&\Leftrightarrow \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} p_{ij}v_j\Big| = |\lambda||v_i| \\
&\xLeftrightarrow[\text{coordenadas } i]{\text{sumo todas las}} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}v_j| = |\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i| \\
&\xLeftrightarrow[\text{triangular}]{\text{desigualdad}} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}||v_j| \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}v_j| = |\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i| \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}||v_j| \geq |\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i| \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n}|v_j|\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}|p_{ij}|\Big) \geq |\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i| \\
&\overset{!!}{\Leftrightarrow} \quad \|\boldsymbol{v}\|_1 \geq |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{v}\|_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{1 \geq |\lambda|}
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbf{1}^tP = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}^t\cdot\text{Col}_1(P) & \cdots & \mathbf{1}^t\cdot\text{Col}_n(P)\end{array}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(\text{Col}_1(P))_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(\text{Col}_n(P))_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} = \mathbf{1}^t$$

Dado que P es estocástica y sus columnas suman 1.

(c) La matriz P es estocástica:

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} \text{Col}_1(P) & \cdots & \text{Col}_n(P)\end{array}\right) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n}(\text{Col}_j(P))_i = 1 \quad \forall j \in [1,n]$$

Ahora si calculo la matriz traspuesta de P el producto por un vector v queda como el producto escalar de las columnas de P por el vector:

$$P^t = \begin{pmatrix} (\text{Col}_1(P))^t \\ \hline \vdots \\ \hline (\text{Col}_n(P))^t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}}$$

$$P^t\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} \overset{!!}{=} \begin{pmatrix} \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(\text{Col}_1(P))_i \\ \vdots \\ \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(\text{Col}_n(P))_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} \implies P^tv = v \Leftrightarrow 1 \text{ es autovalor de } P^t$$

Y dado que si:

$$A = CDC^{-1} \xrightarrow{\text{trasponer}} A^t = (CDC^{-1})^t = (C^{-1})^tD^tC^t \overset{!}{=} (C^{-1})^tDC^t \xLeftrightarrow[M=(C^{-1})^t]{!} A^t = MDM^{-1}$$

los autovalores son comunes a P y P^t, se obtiene que si P^t tiene autovalor 1, entonces también lo tiene P.

Ejercicio 13. Probar que P y Q son matrices estocásticas, entonces:

(a) PQ es estocástica.

(b) P^n es estocástica ($n \in \mathbb{N}$).

(c) $P^n Q^m$ es estocástica (n, $m \in \mathbb{N}$).

(a) Los elementos de cada columna de una matriz estocástica suman 1. La idea es probar que al multiplicar dos matrices estocásticas se sigue cumpliendo esa propiedad:

$$PQ = \left(\begin{array}{c|c|c} P\,\mathrm{Col}_1(Q) & \cdots & P\,\mathrm{Col}_n(Q) \end{array} \right)$$

En particular para el elemento $[PQ]_{ki}$, el elemento de la fila k−ésima y columna i−ésima:

$$[P\,\mathrm{Col}_i(Q)]_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} q_{ji} \xLeftrightarrow[\text{toda la columna } i]{\text{sumando en}} \sum_{k=1}^{n} [P\,\mathrm{Col}_i(Q)]_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{kj} q_{ji}$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{n} [P\,\mathrm{Col}_i(Q)]_k = \sum_{j=1}^{n} q_{ji} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} \right) = \sum_{j=1}^{n} q_{ji} = 1$$

Se uso repetidas veces que las columnas de este tipo de matrices suman 1. Es así que el producto de dos matrices de *Markov* sigue siéndo una matriz de *Markov*.

(b) Quiero probar la proposición:

$$p(n) : \text{Si } A \text{ es una matriz de } \textit{Markov} \implies A^n \text{ también es una matriz de } \textit{Markov}$$

Caso base:

$$p(2) : \text{Si } A \text{ es una matriz de } \textit{Markov} \implies A^2 \text{ también es una matriz de } \textit{Markov}$$

Lo cual es verdadero por el ejercicio anterior, donde se vio que si A y B son estocásticas, entonces $A \cdot B$ también lo es.

Paso inductivo

Asumo para un $k \in \mathbb{N}_{>=2}$ que:

$$p(k) : \underbrace{\text{Si } A \text{ es una matriz de } \textit{Markov} \implies A^k \text{ también es una matriz de } \textit{Markov}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : \text{Si } A \text{ es una matriz de } \textit{Markov} \implies A^{k+1} \text{ también es una matriz de } \textit{Markov}$$

también sea verdadera.

Es inmediato:

$$A^{k+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{es de} \\ \textit{Markov}}}{A} \cdot \overset{\substack{\text{es de} \\ \textit{Markov} \\ \uparrow}}{A^k} \xRightarrow[\text{es de } \textit{Markov}]{\text{el producto también}} p(k+1) \text{ es verdadera.}$$

Por principio de inducción y dado que $p(2)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas, también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

(c) Es lo mismo que el anterior. Quizás acá se amerita mencionar la siguiente definición:

Vector de probabilidad $\boldsymbol{v}$:

$\boldsymbol{v}$ es un vector de probabilidad si cumple que:

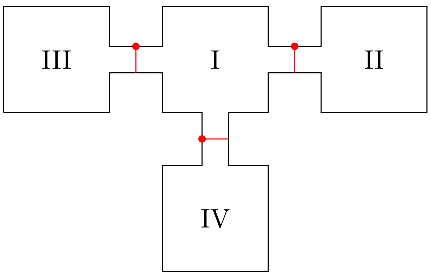
$$v_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$$

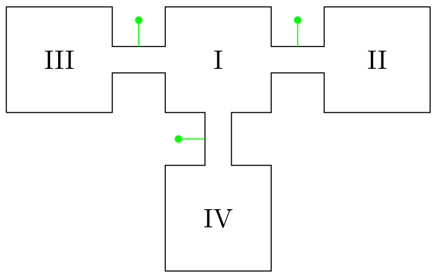
Con esa defición se pueden demostrar todos estos ejercicios probando que una matriz de *Markov* mantiene las proporciones. Las columnas de una matriz de *Markov* son vectores de probabilidad. Esto quiere decir que para un vector $\boldsymbol{w}$ y una matriz de *Markov* A:

$$w = \begin{pmatrix} w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{'normalización'}]{\text{se conserva la}} \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 14. En el instante inicial 20 ratones se encuentran en el compartimiento I. Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante





un breve lapso cada hora, donde los ratones pueden pasar a un compartimiento adyacente o permanecer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimiento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquier de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.

(a) Determinar la matriz de transición del proceso P.

(b) Determinar cuántos ratones habrá en cada celda al cabo de 4 horas.

(c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

(d) Decidir si existe P^{∞} y en tal caso calcularla. ¿Qué aspecto tiene? ¿Por qué?

(a) Pensando que no hay ninguna preferencia por ir a un u otro compartimiento adyacente y dado que la matriz resultante tiene que ser de *Markov*:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Comenzando el experimento tengo 20 ratones en el compartimiento I:

$$\begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{pmatrix}^{(0)} = v^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego para conseguir el estado siguiente, $v^{(1)}$, multiplico por la matriz P:

$$v^{(1)} = Pv^{(0)} = P\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente, $v^{(2)}$, multiplico por la matriz P nuevamente:

$$v^{(2)} = Pv^{(1)} = P\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente, $v^{(3)}$, multiplico por la matriz P nuevamente:

$$v^{(3)} = Pv^{(2)} = P\begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{125}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.8125 \\ 4.0625 \\ 4.0625 \\ 4.0625 \end{pmatrix}$$

Siguiendo para conseguir el estado siguiente, $v^{(4)}$, multiplico por la matriz P nuevamente:

$$v^{(4)} = Pv^{(3)} = P\begin{pmatrix} \frac{125}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \\ \frac{65}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{514}{64} \\ \frac{255}{64} \\ \frac{255}{64} \\ \frac{255}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.046875 \\ 3.984375 \\ 3.984375 \\ 3.984375 \end{pmatrix}$$

Se esperan entonce 8 ratones en el compratimiento I y 4 en los compartimientos II, III, IV.

```python
import numpy as np

A = np.array(
    # Matriz de Markov P
    [[0.25, 0.5, 0.5, 0.5],
     [0.25, 0.5, 0, 0],
     [0.25, 0, 0.5, 0],
     [0.25, 0, 0, 0.5]]
)

# No importa el estado inicial, de donde partas, siempre llegás al equilibrio
v = np.array([20, 0, 0, 0]) # Estado inicial
#v = np.array([5, 5, 5, 5])

hasta_estado = 10
for i in range(hasta_estado + 1):
    print(f"v{i}: {v}")
    if i <= hasta_estado:
        v = A @ v # Estado siguiente
```

(c) Hay un equilibrio, parece ser que la sucesión converge al estado $v^{\text{eq}} = (8, 4, 4, 4)^t$

Calculo los autovalores y autovectores:

```python
import numpy as np
# Matriz de Markov P
A = np.array(
    [[0.25, 0.5, 0.5, 0.5],
```

```
      [0.25, 0.5, 0, 0],
      [0.25, 0, 0.5, 0],
      [0.25, 0, 0, 0.5]]
)

print(np.linalg.eig(A)[0]) # autovalores --> [-0.25  1.    0.5   0.5 ]
print(np.linalg.eig(A)[1]) # autovectores:
                           # [-8.66e-01  7.55e-01 -1.81e-16  0.00e+00]
                           # [ 2.88e-01  3.77e-01 -8.16e-01  0.00e+00]
                           # [ 2.88e-01  3.77e-01  4.08e-01 -7.07e-01]
                           # [ 2.88e-01  3.77e-01  4.08e-01  7.07e-01]
```

Dado que tengo un solo autovalor igual a 1, me agarro de eso para decir que va a haber un equilibrio estable hacia el autovector asociado:

$$E_{\lambda=1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) Tengo 4 autovectores que forman una base de $\mathbb{R}^4$, por lo tanto la P es diagonalizable:

$$\begin{aligned} P = CDC^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad P^n &= CD^nC^{-1} \\ &= C \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} C^{-1} \\ &\xrightarrow{n \to \infty} C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P^n &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{CD^n} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \\ &= \left(CD^n \begin{pmatrix} a \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} b \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} c \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \middle| CD^n \begin{pmatrix} d \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\overset{!!!}{=} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &\overset{!}{=} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En el !!! encuentro que $a = b = c = d = \frac{1}{5}$ porque P^{∞} debe ser una matriz de Markov, por lo tanto sus columnas deben sumar 1.

La matriz tiene como todas sus columnas al autovector de autovalor $\lambda = 1$. Multiplicar una matriz A por un vector $\boldsymbol{v}$ es equivalente a escribir al vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz. En este caso todas las columnas son el vector normalizado $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})^t$, por lo que sin importar el estado, es decir el vector $\boldsymbol{v}$ que uses, en una sola multiplicación ya se va al equilibrio.

Puede surgir la pregunta:

¿Qué pasa si encuentro un estado inicial $\boldsymbol{v}^{(0)}$ cuyas coordenadas en la *base de autovectores* de P $\{\boldsymbol{v}^{eq}, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ tenga 0 para el autovector $\boldsymbol{v}^{eq}$, el autovector asociado a $\lambda = 1$?

Es decir:

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c_1} \boldsymbol{v}^{eq} + c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n$$

Bueno, resulta que en una base de autovectores de una *matriz de Markov* eso no va a pasar nunca. Por esto:

$$\begin{cases} \vec{1}^t = (1, \cdots, 1) \\ P : \text{ matriz de Markov} \\ B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \text{ autovectores de } P, \end{cases}$$

La siguiente cuenta hace todo:

$$0 = \vec{1}^t P \boldsymbol{v}_i - \vec{1}^t P \boldsymbol{v}_i = (\vec{1}^t P) \boldsymbol{v}_i - \vec{1}^t (P \boldsymbol{v}_i) = \vec{1}^t \boldsymbol{v}_i - \vec{1}^t \lambda_i \boldsymbol{v}_i = (1 - \lambda) \vec{1}^t \boldsymbol{v}_i \overset{!!!}{\iff} \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ \text{o} \\ \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i)_j = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto si el autovector no es $\boldsymbol{v}^{eq}$, el autovector de P asociado al $\lambda = 1$, los otros autovectores no son *vectores de probabilidad*, más aún la suma de sus coordenadas es 0. Y una combinación así:

$$\vec{1}^t \cdot \boldsymbol{v}^{(0)} = \vec{1}^t \cdot \overbrace{(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c_1} \boldsymbol{v}^{eq} + c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n)}^{\boldsymbol{v}^{(0)}} \overset{!}{=} c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n = 0$$

nunca podría ser un vector de probabilidad, porque sus coordenadas sumarían 0.

Ejercicio 15. Un sujeto en evidente estado de ebriedad oscila entre su casa y el bar, separados por n pasos. En cada instante de tiempo da un paso hacia adelante (acercándose a su casa), con probabilidad p o hacia atrás (acercándose nuevamente al bar), con probabilidad $1-p$. Si llega a alguno de los dos extremos, se queda allí y no vuelve a moverse.

(a) Sin hacer ninguna cuenta, mostrar que el proceso admite al menos dos estados límite linealmente independientes entre sí. Implementar un programa que reciba como `input` la distancia entre la casa y el bar (n) y la probabilidad p y devuelva la matriz de transición del proceso. Verificar que el resultado sea correcto corriéndolo para $n = 5$ y $p = 0.5$.

(b) Para $n = 20$, tomar $p = 0.5$ y $\boldsymbol{v}^0$ el vector que corresponde a ubicar al sujeto en cualquiera de los puntos intermedios del trayecto con igual probabilidad. Realizar una simulación del proceso hasta que se estabilice ¿Cuál es el estado límite? ¿Cómo se interpreta?

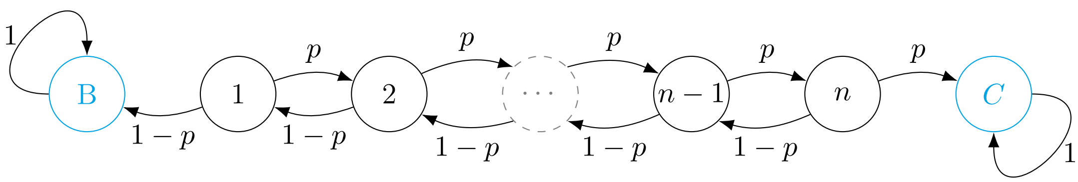
(c) Repetir la simulación tomando como vector inicial $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{e}_2$ (el segundo canónico). Interpretar el resultado.

(d) Repetir la simulaciones con $p = 0.8$. ¿Qué se observa?

(e) Explicar los resultados de todas las simulaciones a partir del análisis de los autovalores y autovectores de la matriz.

(a) Después de que no se me ocurriera como hacer esto, quizás porque, no hay ninguna razón para eso, lo que quedó es:

- Sin dibujar un grafo esto no se te debería ocurrir ni a palos:



- Hay 2 estados de equilibrio. Voy a tener un $\lambda = 1$ de multiplicidad 2. Esos estados son cuando el loco está en C o B. Fijate que tienen una flecha saliendo con valor 1. Es decir que ese el único valor distinto de 0 que va a haber en la columna, para que sea una *matriz estocástica*.
- Cada nodo es una posible ubicación del tipo, y como de un paso a otro siempre se mueve, en la matriz hay ceros en los elementos a_{ij}, excepto en los límites.
- Con esta data, ponele que tenés 2 pasos para ir desde el Bar hasta tu Casa, i.e. $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} & B & 1 & 2 & C \\ \hline B & 1 & 1-p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 2 & 0 & p & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}$$

- Ahora vas y le pedís a algún LLM y le pedís un programita al que le das n, p y te devuelva esa *matriz de Markov* o también si te interesa hacerlo a mano, tenés mi bendición.

  A mí me salió esto:

```python
import numpy as np

# Quiero darle el input n y p y que devuelva la matriz
# de transición del proceso.


def generar_matriz_transicion(n, p):
    orden_matriz = n + 2
    matriz_transicion = np.zeros((orden_matriz, orden_matriz))
    matriz_transicion[0][0] = 1
    matriz_transicion[orden_matriz - 1][orden_matriz - 1] = 1

    for col in range(1, orden_matriz - 1):
        row = col - 1
        matriz_transicion[row][col] = 1 - p
        matriz_transicion[row + 2][col] = p
                                                            # [1   0.5  0    0    0    0
      0]
    return matriz_transicion                                # [0   0    0.5  0    0    0
      0]
                                                            # [0   0.5  0    0.5  0    0
      0]
print(generar_matriz_transicion(5, 0.5)) # ->               # [0   0    0.5  0    0.5  0
      0]
                                                            # [0   0    0    0.5  0    0.5
      0]
                                                            # [0   0    0    0    0.5  0
      0]
                                                            # [0   0    0    0    0    0.5
      1]
```

(b) Si $p = 0.5$ el tipo se tomó el *trago de Schrödinger*, es decir que está borracho y sobrio a la vez, hasta que le hacen el test de alcoholemia y el resultado tiene que ser o que bien está en pedo o no, o algo así, no sé, ni que fuera físico ni bartender.

Lo que si sabemos es que el tipo va a estar acá:

$$\boldsymbol{v}^0 = \left(0, \frac{1}{20}, 0\right)^t \text{ con } \left\|\boldsymbol{v}^0\right\|_1 = 1$$

Es decir con igual probabilidad en alguno de los pasos entre el bar y la casa y seguro que no está ni en el bar ni en la casa.

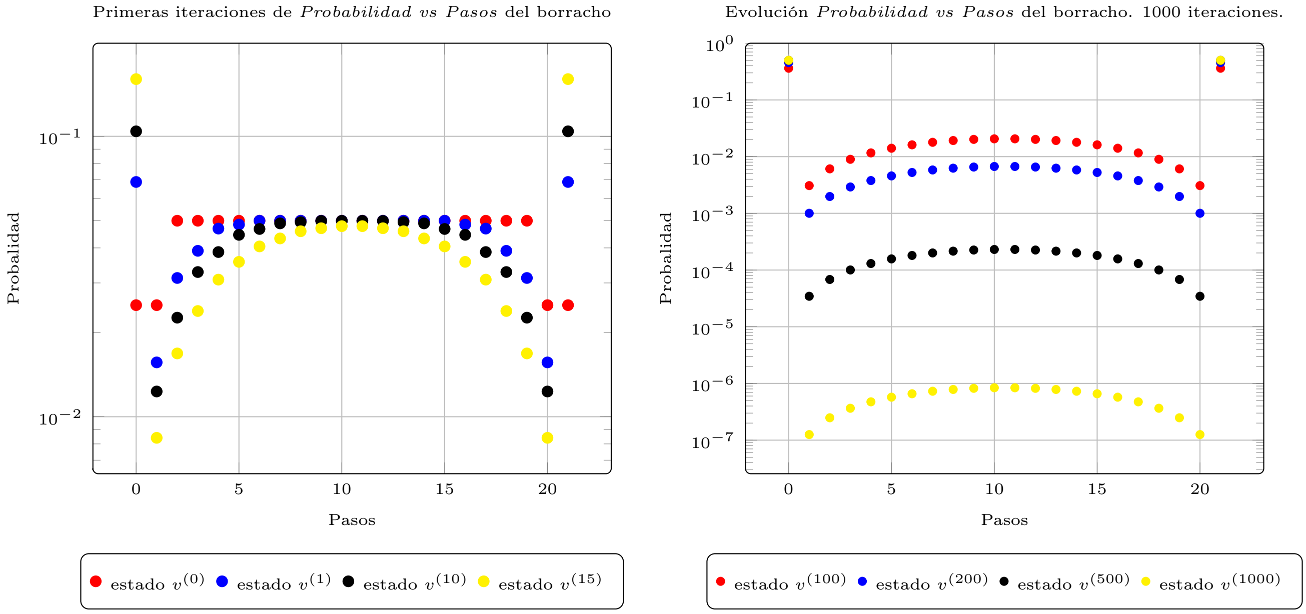
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Genera la matriz de transición
def generar_matriz_transicion(n, p):
    cantidad_pasos = n
    casa = cantidad_pasos + 1
    bar = 0
    matriz_transicion = np.zeros((cantidad_pasos + 2, cantidad_pasos + 2))
    matriz_transicion[bar][bar] = 1
    matriz_transicion[casa][casa] = 1
```

```
    for col in range(1, cantidad_pasos + 1):
        row = col - 1
        matriz_transicion[row][col] = 1 - p
        matriz_transicion[row + 2][col] = p

    return np.array(matriz_transicion)


def generar_estado_inicial1(n):
    cantidad_pasos = n
    v = np.zeros(cantidad_pasos + 2) # inicializo en ceros y luego lleno.
    for estado in range(1, cantidad_pasos + 1):
        v[estado] = 1 / cantidad_pasos

    return np.array(v)


def generar_estado_inicial2(n): # Estado inicial del INCISO C
    cantidad_pasos = n
    v = np.zeros(cantidad_pasos + 2)
    v[1] = 1
    return np.array(v)


def generar_plot_evolucion( # Código para generar figuras con la info de los
    estados
    pasos_entre_bar_casa, p, iteraciones, muestras, v, state, dir, file
):
    P = generar_matriz_transicion(pasos_entre_bar_casa, p)

    estados_a_plotear = np.array(np.zeros((iteraciones + 1,
   pasos_entre_bar_casa + 2)))
    estados_a_plotear[0] = v

    for i in range(1, iteraciones):
        if i <= iteraciones:
            v = P @ v  # Estado siguiente
            estados_a_plotear[i] = v

    pasos_vector = np.arange(0.0, 22.0, 1)  # data para el eje x

    # Ploteo
    # Genero el gráfico loopeando en algunos resultados de la matriz
    fig = plt.figure()
    ax1 = fig.subplots(1, 1, sharex=True)

    for i in range(0, muestras):
        ax1.scatter(
            pasos_vector,
            estados_a_plotear[state[i]],
            label=f"estado {state[i]}",
            alpha=0.7,
```

```
        )

        # Genero data para poder hacer el gráfico en TiKz
        np.savetxt(
            f"./dataFiles/{dir}/{i}{file}",
            np.transpose( [pasos_vector, estados_a_plotear[state[i]]]),
            fmt="%.10e",
            header="Output para la simulación de ejercicio de Markov
borracho",
            comments="# Data pasos vs probabilidad"
        )

    ax1.legend(loc="upper center")
    ax1.set_yscale("log")
    ax1.grid(True, alpha=0.3)
    ax1.set_title(f"Estados del beodo que dio {iteraciones} pasos")

    plt.show()


estado_inicial1 = generar_estado_inicial1(20)
estado_inicial2 = generar_estado_inicial2(20)

principio = [1, 5, 10, 21]
final = [100, 200, 500, 1000]
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 30, 4, estado_inicial1, principio, "item-b-
   plot/", "-step-item-b.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 1001, 4, estado_inicial1, final, "item-b-
   plot/", "-step-item-b-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 30, 4, estado_inicial2, principio, "item-c-
   plot/", "-step-item-c.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.5, 1001, 4, estado_inicial2, final, "item-c-
   plot/", "-step-item-c-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 30, 4, estado_inicial1, principio, "item-d-
   plot/", "-step-item-d.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 1001, 4, estado_inicial1, final, "item-d-
   plot/", "-step-item-d-final.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 30, 4, estado_inicial2, principio, "item-d-
   plot/", "-step-item-d2.data")
generar_plot_evolucion( 20, 0.8, 1001, 4, estado_inicial2, final, "item-d-
   plot/", "-step-item-d2-final.data")
```

El código te va a mostrar 2 gráficos, uno para 10 y otro para 1000 iteraciones. El estado evoluciona hacia el:

$$\boldsymbol{v}^{\infty} = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}),$$



¡Atención a la escala logarítmica del eje y, que parece que no se cumple que los estados suman 1, pero suman.

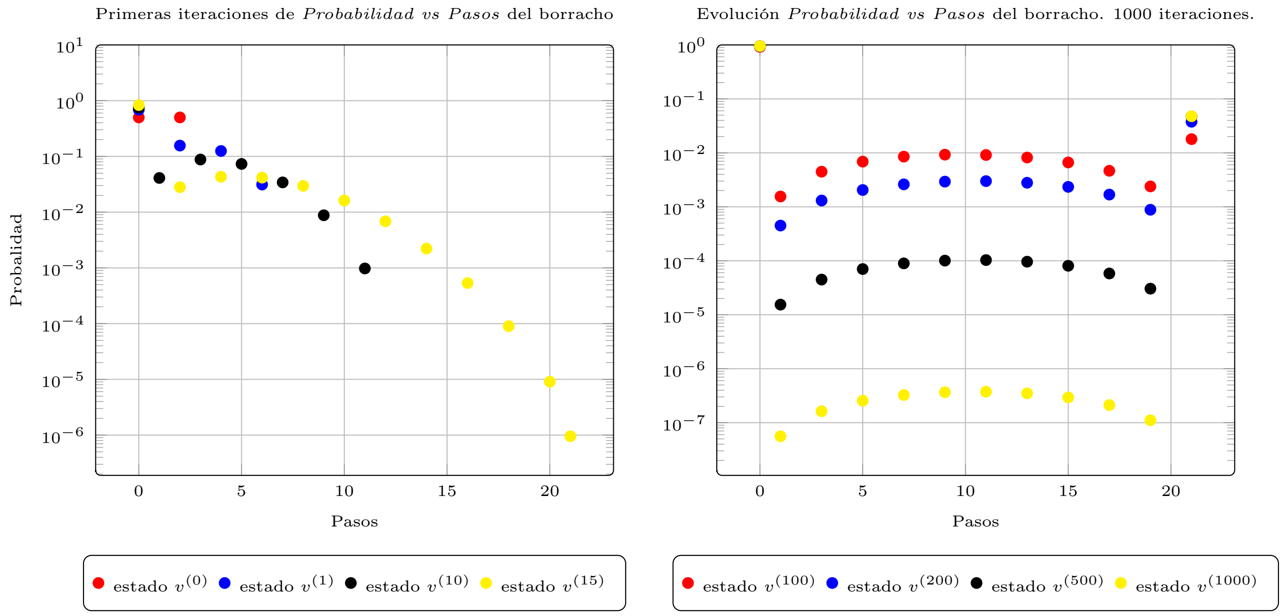
Algo que podría ser esperable. Mientras tanto el tipo va a pasar más tiempo en el medio del camino que en otro lugar. Cuando se aleja del centro del camino la probabilidad aumenta para que vuelva al centro. Eso se ve en los gráficos, porque para un estado en particular, siempre el siguiente paso tiene más probabilidad de ir hacia el centro para.

Después de 1000 pasos el tipo tiene igual probabilidad, $p \approx 0.5$ de estar en el bar que en su casa.

(c) Ahora la simulación arranca en:

$$\boldsymbol{v}^0 = (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)^t \text{ con } \left\|\boldsymbol{v}^0\right\|_1 = 1$$

Haciendo los mismo cálculos de antes el resultado que sale de la simulación

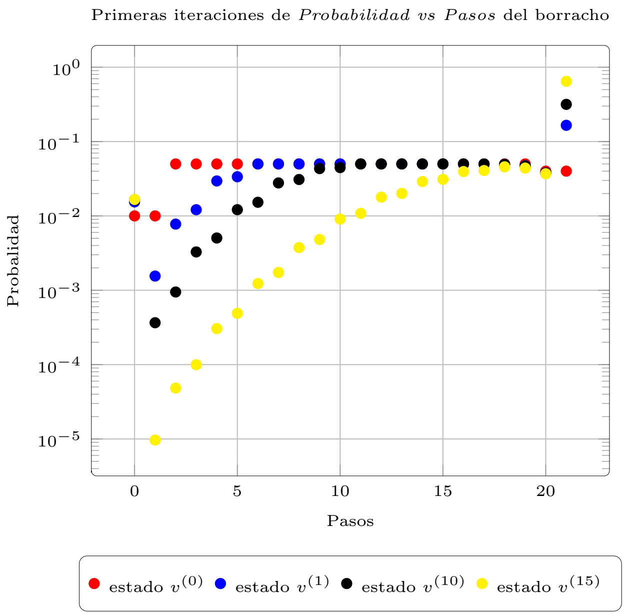


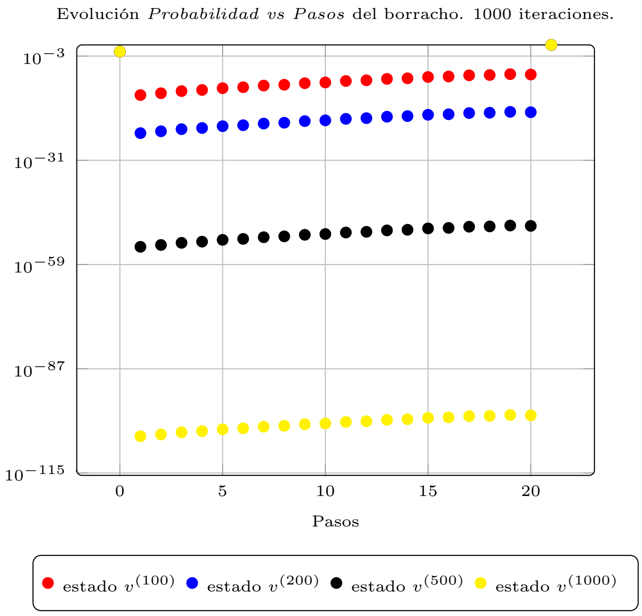
¡Atención a la escala logarítmica del eje y, que parece que no se cumple que los estados suman 1, pero suman.

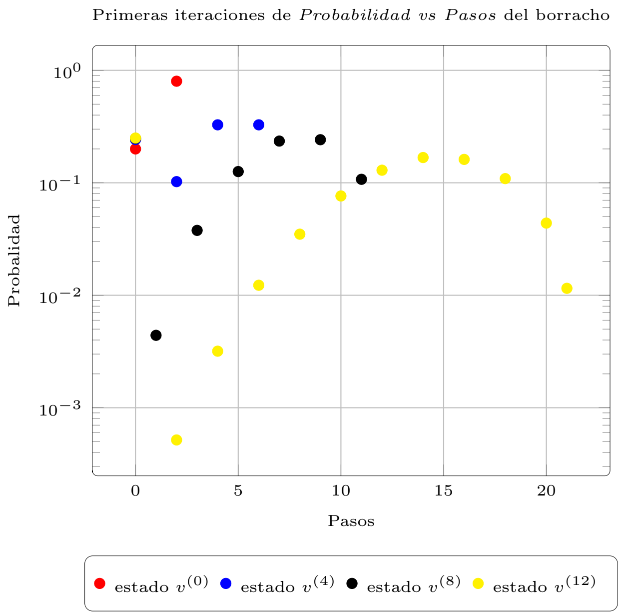
En los gráficos puede verse que en las primeras iteraciones la probabilidad de quedarse en el bar crece mucho más que la probabilidad de acercarse a la casa. De hecho, después de dar 1000 pasos, 500 veces más pasos de lo necesario, la probabilidad de que el tipo llegue a su casa es de ≈ 0.05, durísimo.

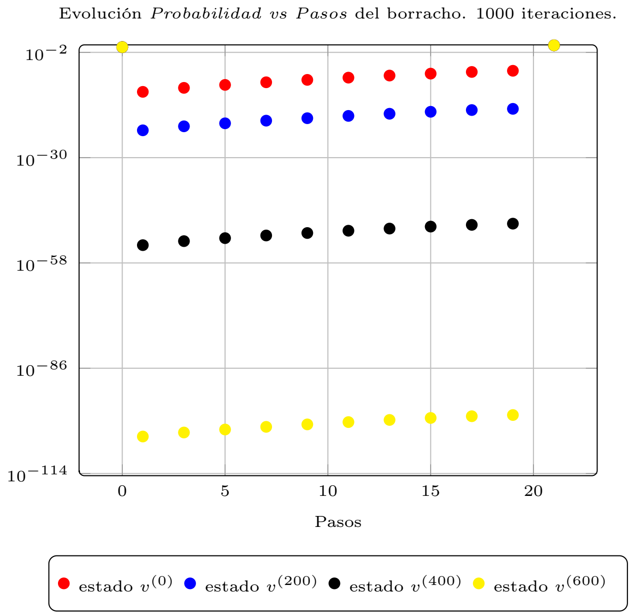
(d) Acá el chabón le aflojó a la sidra, se tomó una coquita y arrancó para casa que está la mujer esperando que hoy le toca cocinar, así que se despide de la gente arranca y bueh, llega antes, probabilísticamente antes.

En estas circunstancias, la probabilidad de que el tipo esté caminando 200 pasos para llegar a la casa es bajísima $p \approx 10^{-10}$









(e) Mirando la matriz tengo unos autovectores:

$$E_{\lambda=1} = \langle (1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1) \rangle$$

y los otros te los debo. ... hay que hacerlo!

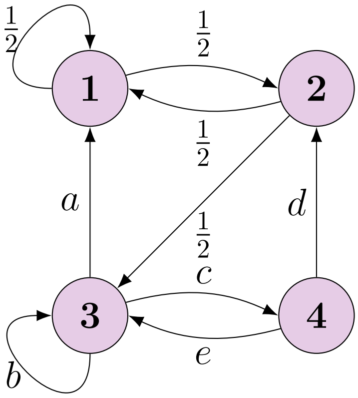
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Iñaki Frutos

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 16. El movimiento anual entre 4 ciudades está refido por el siguiente diagrama de transición:



Se sabe que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es un estado de equilibrio.

(a) Hallar la matriz de transición P.

(b) Determinar la distribución de población después de 10 años, si la distribución inicial es de $\boldsymbol{v}_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^t$.

(c) ¿Existe un estado límite cualquiera sea el estado inicial? ¿Existe P^∞?

(d) ¿Existe estado límite para $\boldsymbol{v_0} = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$?

(a) Matriz de transición: Tiene en el elemento p_{ij} la probabilidad de que se pase del estado i al j

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & a & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & d \\ 0 & \frac{1}{2} & b & e \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Para que eso sea una matriz de *Markov* necesito que las columnas sumen cada una 1:

$$\star^1 \begin{cases} a + b + c &= 1 \\ d + e &= 1 \end{cases}$$

Multiplicar por el vector de equilibrio $\boldsymbol{v}$ el cual cumple que $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ me va a dar más data para determinar los valores de las constantes:

$$P\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & a & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & d \\ 0 & \frac{1}{2} & b & e \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{d}{2} \\ \frac{b+e}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ d &= 0 \\ b + e &= 1 \\ c &= 1 \end{cases}$$

Juntando $\star^1$ con este último resultado:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Si $\boldsymbol{v}_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^t$ hay que hacer $P^{10}\boldsymbol{v}_0$ o ir de a poco con:

$$v^{(k+1)} = Pv^{(k)}$$

¡Arranco!

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = P\boldsymbol{v}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(2)} = P\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(3)} = P\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(4)} = P\boldsymbol{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} \\ \frac{3}{32} \\ \frac{11}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

No sé que onda, esto pero me rindo.

(c) Calculo autovalores para ver que el único autovalor de módulo 1 sea el 1:

$$\begin{aligned}
\det(A - I_4\lambda) = 0 \quad &\iff \quad (-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \quad (-1)[(\tfrac{1}{2}-\lambda)(-\lambda) - \tfrac{1}{4}] + \lambda^2[(\tfrac{1}{2}-\lambda)(-\lambda) - \tfrac{1}{4}] = 0 \\
&\iff \quad \tfrac{1}{4}[4\lambda^2 - 2\lambda - 1](\lambda^2 - 1) = 0 \\
&\iff \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \\ \lambda_4 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Con los autovalores se puede contestar que <u>no</u>. Para que haya un estado límite, debe existir el límite:

$$\lim_{k\to\infty} P^k \boldsymbol{v}^{(0)} = \boldsymbol{v}^{(\infty)}$$

Para que exista el estado límite para un $\boldsymbol{v}^{(0)}$ se necesita que para una combinación lineal en la base de autovectores, el estado inicial tenga coordenada 0 en el autovector $\boldsymbol{v}_{-1}$ asociado al autovalor $\lambda = -1$:

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = c_1\boldsymbol{v}^{eq} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{debe} \\ \text{ser } 0}}{c_2}\boldsymbol{v}_{-1} + c_3\boldsymbol{v}_{\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})} + c_4\boldsymbol{v}_{\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})}$$

La matriz P^∞ no existe, porque no existe el límite:

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \lim_{k\to\infty} CD^kC^{-1} = \lim_{k\to\infty} C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^k}(1+\sqrt{5})^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4^k}(1-\sqrt{5})^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

Y bueh: $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^k \ \to \nexists$

(d) Otra forma de decir esto del límite es que la sucesión de estados, $\{v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(\infty)}, \dots, v^{(\infty)}, \dots\}$ tiene que converger. Para el estado inicial esto no sucede

$$v^{(0)} = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t, \ v^{(1)} = Pv^{(0)} = (0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^t, \ v^{(2)} = Pv^{(1)} = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t.$$

Y así los sucesivos estados van a estar oscilando entre un estado y otro. Más aún:

$$v^{(0)} = 1 \cdot \underbrace{(0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}_{\boldsymbol{v}_1} + \tfrac{1}{3}\underbrace{(0, 0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}_{\boldsymbol{v}_{-1}} = (0, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

Claramente la coordenada del autovector asociado al $\lambda = -1$ en la combineta de autovectores no es 0, por lo tanto <u>ese estado inicial no tiene un estado límite</u>.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que admite una base de autovectores $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (que supondremos normalizados) y, además, tiene un único autovalor de máximo módulo (digamos: λ_1). Es decir, sus autovalores satisfacen:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|.$$

Dado $v^{(0)}$ un vector cualquiera tal que sus coordenadas en base $\mathcal{B}$ son $(a_1, \dots, a_n)$, con $a_1 \neq 0$.
Definimos $v^{(k+1)} = Av^{(k)} = A^k v^{(0)}$.

a) Probar que $Av^{(k)} = a_1\lambda_1^k v_1 + \dots + a_n\lambda_n^k v_n$.

b) Deducir que $Av^{(k)} = \lambda_1^k(a_1 v_1 + \varepsilon_k)$, donde $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

c) Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una funcional lineal tal que $\varphi(v_1) \neq 0$. Probar que:

$$\frac{\varphi(Av^{(k)})}{\varphi(v^{(k)})} \to \lambda_1.$$

d) Para evitar que $\|v^{(k)}\|$ tianda a 0 o a ∞ es usual normalizar $v^{(k)}$ al cabo de cada iteración. Probar que en tal caso, si λ_1 es real positivo, se tiene que $v^{(k)} \to v_1$.

---

a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19. Mostrar que si en el Ejercicio 17 se toma una funcional lineal φ_k distinta en cada paso, el método converfe igualemente a λ_1. Concluir que los cocientes de Raleigh:

$$r_k = \frac{v^{(k)t}Av^{(k)}}{v^{(k)t}v^{(k)}},$$

convergen a λ_1. Observar que si $v^{(0)}$ es tal que $a_1 \neq 0$, las aplicaciones φ_k correspondientes a los cocientes de Raleigh nunca se anulan en v_1. Modificar el programa del ejercicio anterior de modo de utilizar el cociente de Raleigh como aproximación de λ_1.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

a) Probar que A es diagonalizable.

b) Calcular los autovalores de A y determinar r, s y t.

---

a) Es diagonalizable porque estamos en $reales^{3\times 3}$ y hay una base de dimensión 3 de autovectores:

$$B = \{(1,2,0), (2,6,0), (-2,-2,-1)\},$$

son autovectores de A.

b) Los *autovectores*, son vectores que cumplen la *ecuación característica*:

$$A \cdot v_\lambda = \lambda \cdot v_\lambda$$

Es solo cuestión de pedirle a los autovectores del enunciado que cumplan esa ecuación y despejar.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} r & \overset{\star 1}{=} & -2s \\ \lambda & = & 0 \end{cases}$$

Siguiente autovector:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} s & = & 1 \implies r \overset{\star 1}{=} -2 \\ \lambda & = & 2 \end{cases}$$

Siguiente y último autovector

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} t & = & 6 \\ \lambda & = & 2 \end{cases}$$

Listo hay subespacios para justificar aún más la diagonabilidad de la matriz:

$$E_{\lambda=0} = \langle 1,2,0 \rangle \qquad \text{y} \qquad E_{\lambda=2} = \langle (-2,-2,-1), (2,6,0) \rangle$$

La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética:

$$\text{mg}_A(\lambda = 2) = \text{ma}_A(\lambda = 2) = 2 \qquad \text{y} \qquad \text{mg}_A(\lambda = 0) = \text{ma}_A(\lambda = 0) = 1$$

La matriz en forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

2.

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si A es inversible y diagonalizable, entonces A^{-1} y $A^k - kI_n$ son diagonalizables para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

b) Sea $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   i) Probar que J es una matriz diagonalizable.

   ii) Calcular $J^5 - 5I_3$.

---

a) Truquito destacable: $I_n = PP^1$ para luego sacar factor común al calcular $A^k - kI_n$ Por otro lado, la inversibilidad de una matriz diagonalizable asegura que los autovalores son distintos de cero:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| \overset{!}{=} |D| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Las matrices inversibles tienen $\det(A) \neq 0$.

b) i) Se calculan los autovectores y autovalores:

$$E_{\lambda=2} = \{(1,0,1),(-1,1,0)\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda=4} = \{(0,1,1)\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Te debo la inversa por *pajilla*.

   ii) Sale combinando lo que se usó hasta ahora.

---

3. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$, para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

(a) Si v es un autovector de A, y A es inversible, entonces v es un autovector de A^{-1}.

(b) Si A y B son diagonalizables, $A + B$ también lo es.

(c) Si A y B son diagonalizables, entonces AB es diagonalizable.

(d) Si A o B es inversible y AB es diagonalizable entonces BA también es diagonalizables.

⚠ Ejercicio de demostraciones. Dependiendo las horas que dormiste la noche anterior esto puede salir enseguida o en horas. La matriz que uso en los contraejemplos suele ser un *caballito de batalla* para estos problemas, guardátela. ⚠

(a) Si v es un autovector y además $\exists\, A^{-1}$ entonces:

$$Av = \lambda v \overset{!}{\Leftrightarrow} A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \underset{\lambda \neq 0}{\overset{!}{\Longleftrightarrow}} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó verdadera}}$$

(b) Si las matrices son diagonalizables, ¿La suma también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(c) Si las matrices son diagonalizables, ¿El producto también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(d) Alguna de las dos matrices es inversible y AB es diagonalizable, entonces ¿BA es diagonalizable también?

Supongo que $\exists\, A^{-1}$ y por hipótesis $AB = CDC^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} AB = CDC^{-1} & \overset{\rightarrow \times A^{-1}}{\underset{\leftarrow \times A}{\Longleftrightarrow}} & \overbrace{A^{-1}A}^{I}BA = A^{-1}CDC^{-1}A \\ & \overset{!}{\Leftrightarrow} & BA = (A^{-1}C)D(A^{-1}C)^{-1} \\ & \overset{P = A^{-1}C}{\Longleftrightarrow} & BA = PDP^{-1} \end{array}$$

La expresión de BA resultó diagonalizable. La demostración con B diagonal es análoga. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó verdadera}}$$

4. [Segundo cuatrimestre del 2023]
Supongamos que los resultados de las elecciones presidenciales del próximo 22 de octubre dependen únicamente de los votos de las primarias del 13 de Agosto. Consideremos los tres candidatos más votados, denominados L, T y G. Los encuestadores nos dicen que:

- Para los votantes de L:
  - 80% mantiene su voto a L
  - Ninguno cambiará su voto a G
- Para los votantes de T:
  - El porcentaje de gente que cambia su voto a G y el porcentaje de gente que cambia su voto a L es el mismo.
  - El porcentaje de gente que cambia su voto es el mismo porcentaje de gente que cambia su voto para los votantes de L.
- Para los votantes de G:
  - 40% mantiene su voto a G
  - El resto se divide equitativamente entre L y T.

(a) Construir la matriz de transición A del proceso.

(b) Si el 13 de Agosto la cantidad de votos para cada uno de los candidatos fue

- L: 30%
- T: 34%
- G: 36%

determinar el porcentaje esperado para cada candidato en las elecciones del 22 de octubre.

(c) Asumiendo que el proceso seguirá a largo plazo para próximas elecciones (considerando como una unidad de tiempo el tiempo entre una elección y la siguiente), decidir si existe un estado límite para los datos iniciales datos, y calcular, si existe, $A^{(\infty)}$

(a) Teniendo en cuenta la interpretación de los elementos de una matriz de $Markov$, pensando que las columnas tienen que sumar 1, mirá acá el resumen click click:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

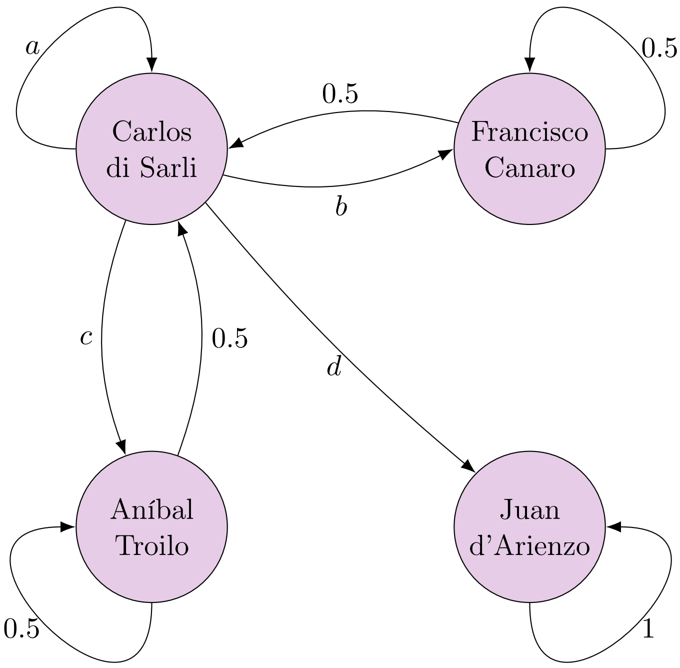
(b)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.34 \\ 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.403 \\ 0.4818 \\ 0.1152 \end{pmatrix}$$

(c) A tiene un autovalor igual a 1 y ninguno igual a -1. Listo con eso sé que va a existir $A^{(\infty)}$ más aún sé que las columnas de $A^{(\infty)}$ son el autovector v_1, autovector asociado a $\lambda = 1$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \dots & v_1 \end{array} \right)$$

5. Una aplicación para escuchar música estudiar un estraño comportamiento en las elecciones musicales de sus usuarios. Cada dos minutos cambian entre, *Juan d'Arienzo*, *Carlos di Sarli*, *Aníbal Troilo* y *Francisco Canaro* según el diagrama:



Por ejemplo, de quienes están escuchando a *Pancho Canaro*, en dos minutos el 50% pasará a escuchar a *Carlos Di Sarli* y el otro 50% seguirá escuchando a *Francisco Canaro*.

Sabiendo que la matriz P que representa el proceso de transición es de Markov y que

$$v = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{Carlos di Sarli} \\ \to \text{Francisco Canaro} \\ \to \text{Aníbal Troilo} \\ \to \text{Juan d'Arienzo} \end{array}$$

es un estado de equilibrio.

(a) (1 pt.) Dar la matriz de transición P y determinar si existe P^{∞}.

(b) (1.5 pt.) Si en el instante inicial del estudio hay 300 usuarios escuchando a *Carlos di Sarli*, 100 usuarios escuchando a *Francisco Canaro* y 300 usuarios escuchando a *Aníbal Troilo*. ¿Cuántos usuarios aproximandamente estarán escuchando a *Aníbal Troilo* a los 20 minutos?

(a)

$$\begin{array}{r} \text{Di Sarli} \to \\ \text{Canaro} \to \\ \text{Troilo} \to \\ \text{d'Arienzo} \to \end{array} \begin{pmatrix} a & 0.5 & 0.5 & 0 \\ b & 0.5 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0.5 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Para que sea una matriz *estocástica, de probabilidad o de Markov*, sus columnas tienen que sumar 1. Si v es un estado de equilibrio:

$$Pv = v \Leftrightarrow Pv = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3a+2 \\ 3b+1 \\ 3c+1 \\ 3d+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & \frac{1}{3} \\ c & = & \frac{1}{3} \\ d & = & 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0.5 & 0.5 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0.5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar la existencia de P^∞ necesito que los autovalores de la matriz de módulo 1 sean solo el 1:

$$\text{Si} \quad \forall \lambda \text{ tal que } |\lambda| = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = 1 \implies \exists\, P^\infty$$

Calculo autovalores:

$$|P - \lambda I_4| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & 0.5 & 0.5 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0.5-\lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0.5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{!!}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \overset{!}{=} & 1 & \to & E_{\lambda=1} = \left\langle (0,0,0,1), (\frac{3}{2},1,1,0) \right\rangle \\ \lambda_2 & = & \frac{1}{2} & \to & E_{\lambda=\frac{1}{2}} = \langle (0,-1,1,0) \rangle \\ \lambda_3 & = & \frac{-1}{6} & \to & E_{\lambda=\frac{-1}{6}} = \langle (-2,1,1,0) \rangle \end{array} \right.$$

Dado que los únicos autovalores de módulo uno son el 1, la matriz P^∞ existirá. En este caso el autovalor 1 es múltiple raíz del polinomio característico y su espacio asociado junto los otros autovectores generan una base de $\mathbb{R}^4$. Esto me asegura la convergencia de cualquier estado inicial a un estado límite $v^{(0)} \to v^\infty$ donde $v^{(\infty)} \in E_{\lambda=1}$.

Como la matriz es diagonalizable puedo encontrar P^∞. El límite:

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \lim_{k\to\infty} C_j D^k C_j^{-1} = P^\infty$$

existirá para cualquier matriz C_j, cuyas columnas son una base de los autovectores de P, que elija. El subíndice j lo pongo para designar que habrá distintas C según los autovectores que uno haya despejado en $E_{\lambda=1}$.

Como P es diagonalizable, puedo encontrar una forma exacta de P^∞, si bien en el enunciado no piden el cálculo.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P^k = C_j D^k C_j^{-1} &= \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{-1}{6})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^\infty
\end{aligned}$$

A primera vista no parece obvio que al cambiar una C_j por otra C_i las cuentas den siempre el mismo resultado, pero esto debe ser así. El límite de $\lim\limits_{k\to\infty} P^k$ existe y por definición de límite, no importa *el camino usado* siempre se debe llegar al mismo resultado.

(b) Hay que agarrar la calculadora y armarse de paciencia. Me voy a basar en las *palabras del enunciado, sobre todo en la de aproximadamente.*

Quieren que se calcule $v^{(10)} = P^{(10)}v^{(0)}$ para el estado inicial:

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculo:

$$\begin{array}{ccccc} v^{(1)} & = & Pv^{(0)} & = & (300, 150, 250, 0) \\ v^{(2)} & = & Pv^{(1)} & = & (300, 175, 225, 0) \\ v^{(3)} & = & Pv^{(2)} & = & (300, 187.5, 212.5, 0) \\ v^{(4)} & = & Pv^{(3)} & = & (300, 193.75, 206.25, 0) \\ v^{(5)} & = & Pv^{(4)} & = & (300, 196.875, 203.125, 0) \\ v^{(6)} & = & Pv^{(5)} & = & (300, 198.437, 201.563, 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v^{(10)} & = & Pv^{(9)} & = & (300, 199.9, 200.1, 0) \approx (300, 200, 200, 0) \end{array}$$

Así habrá aproximadamente:

$$\boxed{v^{(10)} \approx (300, 200, 200, 0)}$$

O también está la versión con P^{10}:

$$\begin{array}{rcl} P^{10} = CD^{10}C^{-1} & = & \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{-1}{6})^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix} \\ & \approx & \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00000002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix} \\ & \approx & P^{\infty} \end{array}$$

Por lo tanto, nuevamente, me voy a agarrar de las palabras del enunciado, y aproximadamente habrá:

$$\boxed{P^{(10)}v^{(0)} \approx P^{\infty}v^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Por lo tanto de los 700 usuarios con un muy buen gusto musical, es decir no escuchan la *basura* que se escucha hoy en día, estarían escuchando 300 a *el señor del tango*, 200 a *Pirincho* y otros 200 a *Pichuco*.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

6. [final 21/7/25] Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n autovalores mayores a cero y distintos entre sí. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores y $v_1, \dots, v_n$ los autovectores asociados. Mostrar que:

a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ forma una base de $\mathbb{R}^n$. Justificar.

b) La matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cuyas columnas están dadas por los vectores $v_1, \dots, v_n$ es inversible y cumple que $AC = CS$, con S una matriz diagonal con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en la diagonal.

c) La matriz A es diagonalizable.

a) Si los autovalores son distintos entre sí los autovectores son *linealmente independientes*, eso se puede probar por inducción:

Voy a probar la proposición:

$$p(n) : \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ y } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j \text{ entonces los autovectores asociados son } LI.$$

Caso base:

$$p(2) : \{\lambda_1, \lambda_2\} \text{ y } \{v_1, v_2\} \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ entonces } v_1 \text{ y } v_2 \text{ son } LI.$$

$$E_{\lambda_1} = \{v_1\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda_2} = \{v_2\}$$

Voy a suponer que son <u>*linealmente dependientes*</u>, es decir que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \neq \{0\}$ y así llegar a un absurdo. Dado un $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$:

$$\begin{array}{rrcl} & Av & \overset{!}{=} & \lambda_1 v \\ - & & & \\ & Av & \overset{!}{=} & \lambda_2 v \\ \hline & 0 & = & \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot v \Leftrightarrow v = 0 \end{array}$$

Dado que v es un vector genérico de la intersección y ese es 0, se concluye $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \neq \{0\}$ y por lo tanto que v_1 y v_2 son LI.

Paso inductivo:

Para algún $k \in \mathbb{N}$ supongo que la proposición:

$$p(k) : \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \text{ y } \{v_1, \dots, v_k\} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j \text{ entonces los autovectores asociados son } LI}_{\text{hipótesis inductiva}},$$

es verdadera. Entonces quiero probar que la proposición:

$$p(k+1) : \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_{(k+1)}\right\} \text{ y } \left\{v_1, \dots, v_{(k+1)}\right\} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j \text{ entonces los autovectores asociados son } LI,$$

también lo sea.

Similar a lo planteado anteriormente puedo suponer que $E_{\lambda_{(k+1)}} \cap \{v_1, \dots, v_k\} \neq 0$ para llegar a un absurdo. Dado un $v \in (E_{\lambda_{(k+1)}} \cap \{v_1, \dots, v_k\})$:

$$\underbrace{v = v_1 + \dots + v_k}_{\bigstar^1} \ \underset{\rightarrow}{\overset{\times A}{\Longleftrightarrow}} \ \underbrace{Av = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k}_{\bigstar^2}$$

Si elijo a $v = v_{(k+1)}$ y multiplico por $\lambda_{(k+1)}$ en $\bigstar^1$:

$$\begin{array}{rrcl} \bigstar^1 \rightarrow & \lambda_{(k+1)} \cdot v_{(k+1)} & \overset{!}{=} & \lambda_{(k+1)} \cdot v_1 + \dots + \lambda_{(k+1)} \cdot v_k \\ - & & & \\ \bigstar^2 \rightarrow & \lambda_{(k+1)} \cdot v_{(k+1)} & \overset{!}{=} & \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \\ \hline & 0 & = & \underbrace{(\lambda_{(k+1)} - \lambda_1)}_{\neq 0} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_{(k+1)} - \lambda_k)}_{\neq 0} \cdot v_k \quad \bigstar^3 \end{array}$$

La ecuación en $\bigstar^3$ es una combinación lineal de vectores LI por hipótesis inductiva, y dado que los coeficientes de la combinación son no nulos, entonces los vectores deben serlo. Por lo tanto $v = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{v_1} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{v_k} = v_{(k+1)}$, es decir $E_{\lambda_{(k+1)}} \cap \{v_1, \dots, v_k\} = \{0\}$.

Por principio de inducción, los autovectores asociados a distintos autovalores son *linealmente independientes* por lo tanto de haber n autovalores distintos en $\mathbb{R}^n$ generaran una base del espacio.

b) Hecho el anterior ejercicio no hay mucho que hacer acá. Si las columnas de una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ son una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz tiene determinante distinto de 0, por lo tanto es inversible.

$$AC = CS \Leftrightarrow \left(Av_1 \middle| \cdots \middle| Av_n \right) = \left(C\lambda_1 \middle| \cdots \middle| C\lambda_n \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda_1 v_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n v_n \right) = \left(\mathrm{Col}_1(C)\cdot\lambda_1 \middle| \cdots \middle| \mathrm{Col}_n(C)\cdot\lambda_n \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda_1 v_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n v_n \right) = \left(v_1\cdot\lambda_1 \middle| \cdots \middle| v_n\cdot\lambda_n \right)$$

c) En el ítem anterior es hacer:

$$AC = CS \overset{\times C^{-1}}{\underset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}} A = CSC^{-1}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

7. [final 24/02/25] Se dice que $A \in K^{n\times n}$ es semejante a $B \in K^{n\times n}$ si existe una matriz invertible $S \in K^{n\times n}$ tal que:

$$SA(S)^{-1} = B$$

1. Demostrar que la relación de semejanza es una relación de equivalencia.
2. Demostrar que si A es semejante a B, entonces:

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$$

Sugerencia: Utilizar la propiedad $\mathrm{tr}(EC) = \mathrm{tr}(CE)$ para matrices C y E

3. Probar que si A es diagonalizable (es decir, A es semejante a una matriz diagonal D) y los valores propios de A son 0 y 1, entonces:

$$A^2 = A$$

---

1. Para demostrar que es una relación de equivalencia voy a demostrar que la relación es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*:

Reflexividad: ¿Es B semejante a B?

$$B = I_n B I_n^{-1}$$

Sí, la relación de semejanza es *reflexiva*.

Simetría: Si B es semejante a A, ¿A es semejante a B?

$$B = SAS^{-1} \underset{\text{invertible}}{\overset{S \text{ es}}{\Longleftrightarrow}} S^{-1}BS = A$$

Sí, la relación de semejanza es *simétrica*.

Transitividad: Si B es semejante a A y A es semejante a C ¿B es semejante a C?

$$B = SAS^{-1} \quad \text{y} \quad A = QCQ^{-1} \overset{\text{reemplazo}}{\Longleftrightarrow} B = SQCQ^{-1}S^{-1} \Leftrightarrow B = (SQ)C(SQ)^{-1} \overset{P=SQ}{\Longleftrightarrow} B = PCP^{-1}$$

Sí, la relación de semejanza es *transitiva*.

Así de muestra que la relación de semejanza es una relación de equivalencia.

2. Usando la **sugerencia** y que $A = SBS^{-1}$:

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(SBS^{-1}) = \mathrm{tr}((S)\cdot(BS^{-1})) \underset{\textbf{sug.}}{\overset{!}{=}} \mathrm{tr}((BS^{-1})\cdot(S)) = \mathrm{tr}(B)$$

3. hola

$$\begin{aligned}
A = CDC^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad A^2 = CDC^{-1}\cdot CDC^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad A^2 = CD^2C^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad A^2 = C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^{-1} \\
&\xLeftrightarrow[\lambda_i=0\Rightarrow\lambda_i^2=0]{\lambda=1\Rightarrow\lambda_i^2=1} \quad \boxed{A^2 = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} = A}
\end{aligned}$$

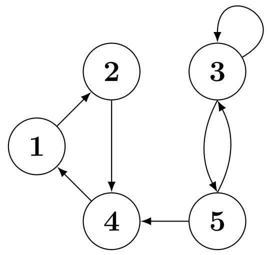
`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

8. [final 7/8/25]

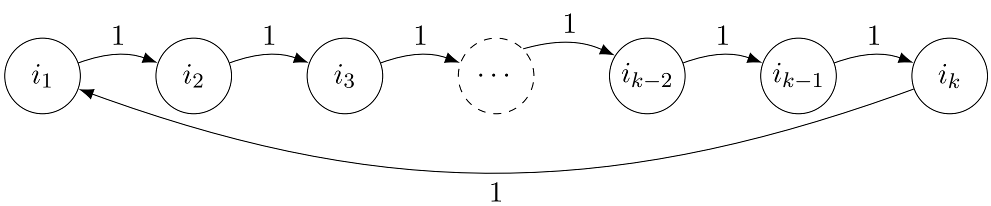
a) Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz de un proceso de Markov en el que hay k estados i_1, i_2, ..., i_k tales que la probabilidad de pasar de i_j i_{j+1} para $j = 1, \dots, k-1$ y de i_k a i_1 es 1. Probar que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de P tal que $\lambda \neq 1$, pero $|\lambda| = 1$.

b) Considerar el proceso descripto por el grafo, donde las probabilidades de transición desde cada nodo se reparten en partes iguales entre todas la ramas salientes. Hallar un estado de equilibrio. ¿Es único? ¿Se alcanza este equilibrio desde cualquier estado inicial?



---

a) El grafo que describe el proceso de Markov para $k \leq n$ estados:



Cuya matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c|c} \mathbf{0}^t & 1 \\ \hline I_{k-1} & \mathbf{0} \end{array} & & A_{(n-k)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-k)} & & B_k \end{array}\right)$$

Con el bloque de arriba a la izquierda, lo llamo C:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores del bloque C:

$$\det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \underset{\text{por } F_1 \text{ y } \star^1}{\overset{\text{desarrollando}}{\Longleftrightarrow}} \lambda^k - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \in G_k}$$

Donde G_k son la k raíces $k-$ésimas de la unidad, *esas de álgebra 1, sí, esas que no te acordas ni a palos*:

$$G_k = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{k}h} \right\} \quad \text{con} \quad h \in \mathbb{Z}\,[0, k-1]$$

Todos los elementos de G_k tienen módulo 1, son todos distintos. El autovalor $\lambda = 1$ está en el grupo.

El autovector de M, $v_{\lambda=1} \in \mathbb{R}^n$ asociado al autovalor 1:

$$v_{\lambda=1} = (\overbrace{1, \cdots, 1}^{k \text{ elementos}}, 0, \cdots, 0)$$

Es el estado en que cada nodo le pasa uno, pero es un grafo circular por lo que el estado no cambia.

Un estado que tiene un autovalor de módulo 1, pero donde $\lambda \neq 1$ es por ejemplo el:

$$v_{|\lambda|=1} = (\overbrace{1, 0, \cdots, 0}^{k \text{ elementos}}, 0, \cdots, 0)$$

Ese estado va a ir pasando circularmente ese uno infinitamente sin alterar su módulo.

$\star^1$ Este resultado se da para k par, si k es impar quedan las raíces rotadas, porque el polinomio característico queda

$$\lambda^k + 1 = 0$$

b) Este grafo es similar al anterior, donde $k = 3$ y la cadena circular está formada por los nodos $1, 2$ y 4.

Hallar un estado de equilibrio.

Únicamente viendo el grafo, los nodos 1, 2 y 4, tienen una arista de probabilidad **1** de ir de uno a otro estado. Considero:

$$v_{eq} = (1, 1, 0, 1, 0)^t$$

Ese estado es de equilibrio porque en cierta forma se van a estar pasando la pelota entre los 3 nodos y nada va a cambiar.

¿Es único? Sí, (creo) tiene pinta, pero no quiero hacer las cuentas y no se me ocurre otra cosa que calcular la matriz del proceso y ver la multiplicidad aritmética de $\lambda = 1$.

¿Se alcanza este equilibrio desde cualquier estado inicial?

No. Por ejemplo:

$$v = (1, 0, 0, 0, 0)^t$$

Ese estado va a oscilar entre los estados:

$$(1, 0, 0, 0, 0)^t \to (0, 1, 0, 0, 0)^t \to (0, 0, 0, 1, 0)^t \to (1, 0, 0, 0, 0)^t$$

...and so on.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

♉ naD GarRaz