Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 11/06/25 @ 00:58

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:
11/06/25 @ 00:58
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

-

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a $\mathbb{R}$ se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n\times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \overset{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A apartir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.
Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{aligned} B + iC = \tfrac{A+A^*}{2} + i\tfrac{A-A^*}{2} = \tfrac{A+A^*}{2} + i\tfrac{A-A^*}{2} &= \tfrac{A+iA}{2} + \tfrac{A^*-iA^*}{2} \\ &\overset{!}{=} \tfrac{A+iA}{2} + \tfrac{A-iA}{2} \\ &\overset{!}{=} A \end{aligned}$$

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A, es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que $S^\perp$ es invariante por A.

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\underset{\in S^\perp}{\underset{\downarrow}{w^*}} \cdot \overset{\in S}{\overset{\uparrow}{v}} = 0$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A:

$$Av = \lambda v \overset{\times A^*}{\Longleftrightarrow} A^*Av \overset{!}{=} A^2\lambda Av = \lambda^2 v \overset{\star 1}{=} kv \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\overset{\in S}{\uparrow}}{Av} = w^* A^* \cdot Av \overset{\star^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \;\; \forall w \in S^\perp$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

($\Rightarrow$)

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v^*}{\Longleftrightarrow}} v^* Av = \lambda v * v \Leftrightarrow v^* Av \overset{\star^1}{=} \lambda \, \|v\|_2^2$$

$$Av = \lambda v \overset{*}{\Longleftrightarrow} v^* A^* = \overline{\lambda} v^* \underset{\leftarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} v^* A^* v = \overline{\lambda} v^* v \Leftrightarrow v^* A^* v \overset{\star^2}{=} \overline{\lambda} \, \|v\|_2^2$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en $\star^1$ y $\star^2$ es igual. Por lo tanto $\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} \underbrace{v^* Av}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^* v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \;\; \forall v \neq 0 \implies \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^* A v_1 \overset{!}{=} (Av_2)^* v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 & \overset{\star^3}{=} \quad \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ \qquad\qquad\qquad v_1^* A v_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 & \overset{\star^4}{=} \quad \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando $\star^3$ y $\star^4$:

$$0 \overset{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

($\Leftarrow$) CONSULTAR, probar por absurdo?

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

(a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$. Podría triangular la matriz con $\alpha = -1$, para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

(b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimientos puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* 💣 el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1,-1,0),(0,1,-2)\}$$
$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\tfrac{1}{\sqrt{5}},-\tfrac{2}{\sqrt{5}})\right\}$$

Como estoy en $\mathbb{R}^3$ no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector (2,2,1) funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1,-1,0)\cdot(x,y,z) & = & 0 \\ (0,1,-2)\cdot(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$$

Resolvelo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \{\underbrace{(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\tfrac{1}{\sqrt{5}},-\tfrac{2}{\sqrt{5}})}_{E_{(\lambda=0)}},\underbrace{(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})}_{E_{(\lambda=9)}}\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t, dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.

(d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

(a) Quieron encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U\Sigma V^*$$

Voy a calcular $A^* \cdot A$ para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer $A \cdot A^*$ o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calculo}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \left\{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\right\} \xrightarrow{\text{matriz}} \boxed{\Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$Hv_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\ & \text{y} & \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \end{cases} \implies \text{BON} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V, matriz que tiene a los v_i autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U, que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}\right\} \overset{!}{=} \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)\right\}$$

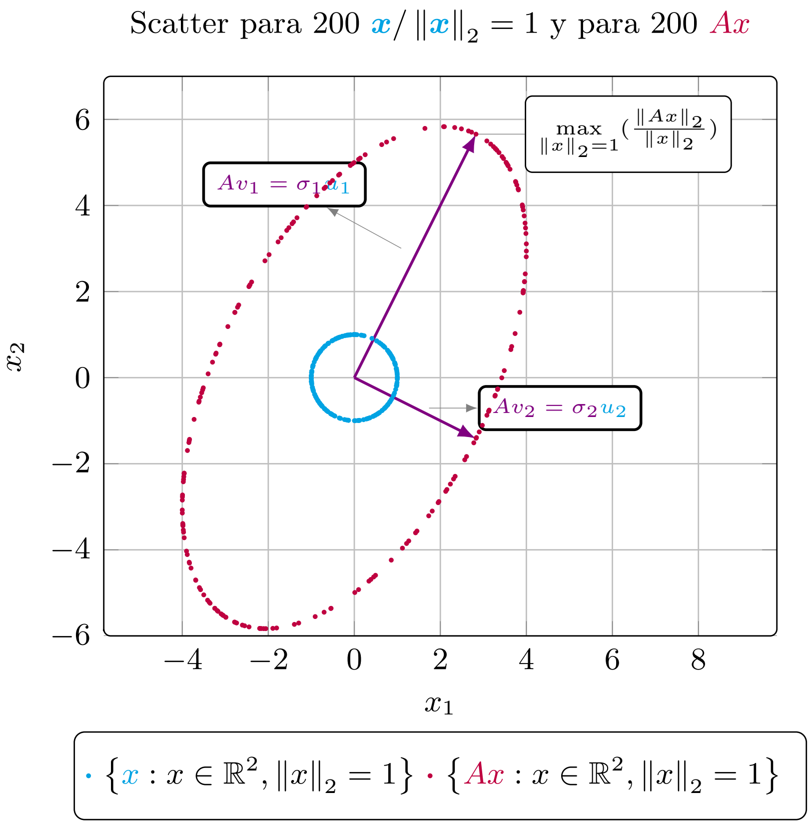
Entonces tengo:

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

(b)



(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \bigstar^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2$$

Ya tengo $\|A\|_2$, ahora quiero encontrar $\left\|A^{-1}\right\|$:

$$A = U\Sigma V^* \underset{\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}}{\overset{\text{invierto}}{\Longleftrightarrow}} A^{-1} = (V^*)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = V\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{\sigma_2} \quad \bigstar^2 \quad \underset{\bigstar^1 \bigstar^2}{\xrightarrow{\text{finalmente}}} \quad \boxed{\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Si bien esto es una descomposición de A^{-1}
¡No es una *descomposición en valores sigulares*!
Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de Σ no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.

Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

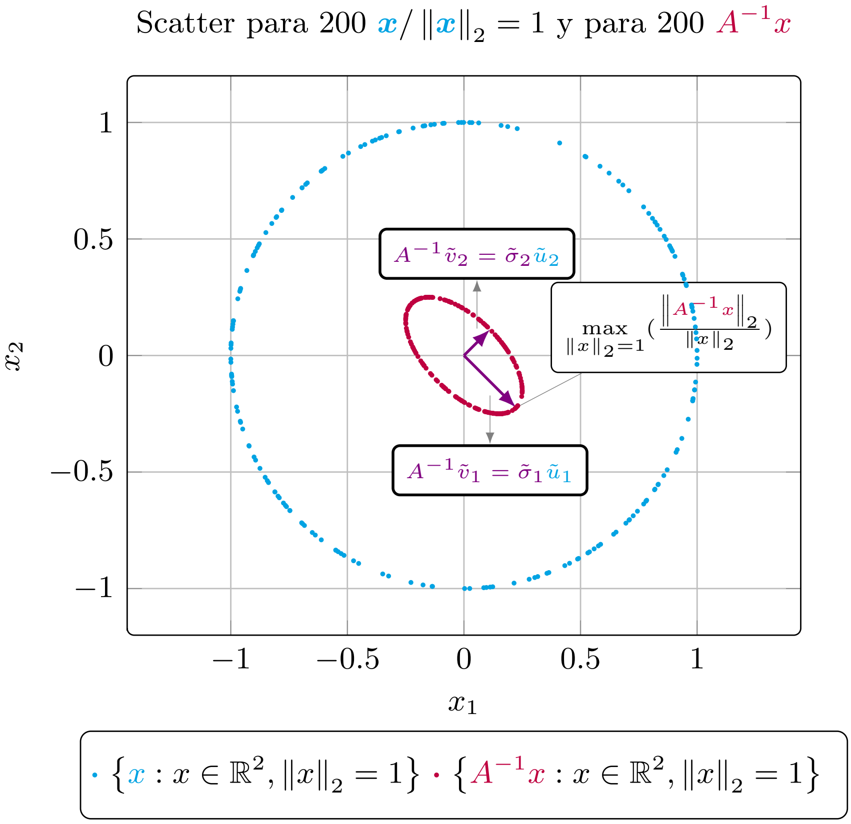
$$A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* \overset{!!!}{=} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}^{\text{permuto columnas}} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}^{\text{permuto filas y columnas}} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{20}\begin{pmatrix}5&0\\-3&4\end{pmatrix}$$

Notar que esa matriz $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de A^{-1} que nadie pidió pero todos queremos:

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para A^{-1}:



Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}7&1\\0&0\\5&5\end{pmatrix}$

(a) Si

$$A \overset{\bigstar^{1}}{=} \begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$$

llamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa la tonta A^t de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horrendos estereotipos de antes, *¡Pero el sombrero es nuevo!*

Voy a calcular la *descompsición en valores singulares* de $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$ porque así me quedo con la versión de 2×2 para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la *convierto* la descomposición a la de A.

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} & = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} & = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar $\hat{U}$, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo un $\sigma \neq 0$ voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x, y, z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la *descomposición en valores singulares* de A transpongo:

★[1] $$A = \hat{A}^t = \hat{V}\hat{\Sigma}^t\hat{U}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Quedó entonces sin el *sombrero*, la SVD de A:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=90} & = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda=10} & = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesito ahora encontrar U, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo dos σ_i voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con}]{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15 \|v\|_2$.

Let's calculate los singular values:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

¿Por qué esos números feos?

Calculo *autovalores* de H:

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

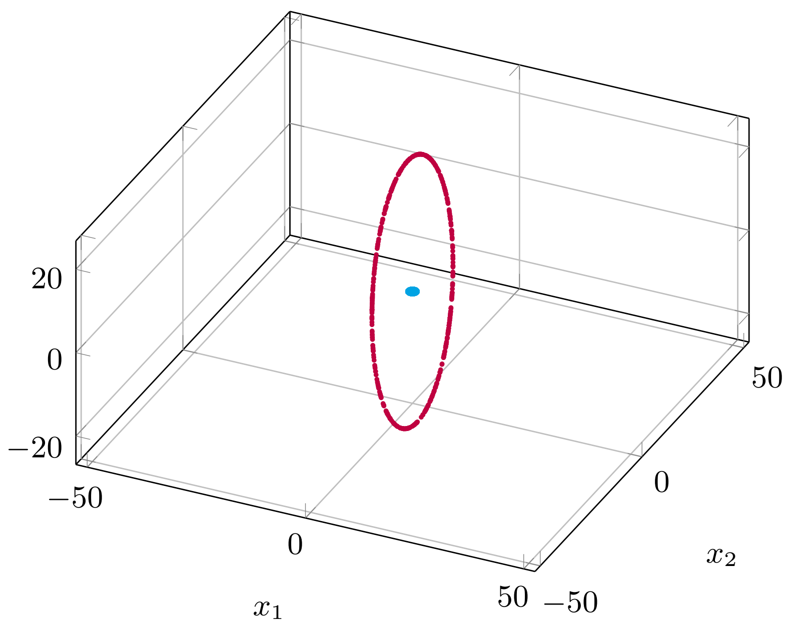
Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\|_2 = 1$ se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \leq \|Av\|_2 \leq \sigma_1 \rightsquigarrow 16.11 \leq \|Av\|_2 \leq 29.62 \Leftrightarrow \boxed{15 \leq \|Av\|_2 \leq 30} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2,\ \|v\|_2 = 1$$

Scatter para 200 $\boldsymbol{x}/\left\|\boldsymbol{x}\right\|_2 = 1$ y para 200 Ax



$\cdot \left\{x : x \in \mathbb{R}^2, \left\|x\right\|_2 = 1\right\} \cdot \left\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \left\|x\right\|_2 = 1\right\}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz A_s que satisface:

$$\|A - A_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: A_s resulta ser la mejor aproximación a A (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

(a) Para el caso en que la matriz A tiene más filas que columnas, es decir que $m > n$

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ m\times m}}{U} \overset{\substack{m\times n \\ \uparrow}}{\Sigma} \underset{\substack{\downarrow \\ n\times n}}{V^t}$$

Donde la Σ tiene a los r *valores sigulares* no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \hat{\Sigma}_i,$$

donde las $\hat{\Sigma}_i$ son las matrices de $m \times n$ que tienen solo al *valor singular* σ_i en la posición ii y ceros en los demás lugares. La suma es hasta r dado que el resto de los $n - r$ *demás valores sigulares son nulos* son nulos, por lo tanto las $\hat{\Sigma}_i$ con $i > r$ son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que A se puede expresar como una suma de r matrices singulares de $\text{rg}(\Sigma_i) = 1$, dado que solo tienen una columna no nula.

(b) Dado $s < r$ puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} U\hat{\Sigma}_i V^t}_{A_s} + \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \Leftrightarrow A - A_s = \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t$$

Ahora tomo norma a $A - A_s$:

$$\|A - A_s\|_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los *valores singulares*.

Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz A funciona como una transformación que *escala* a un vector v al hacer Av. Esa escala es proporcional a los *valores sigulares*. La matriz A_s, es entonces similar o cercana a A, ya que tiene las *mismas* s mayores componentes de mayor escalamiento.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .