

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 29/03/25 @ 17:37

*Choose your destiny:*

*(doubleclick en los ejercicios para saltar)*

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>

- Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:

29/03/25 @ 17:37

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:***Espacios Vectoriales: Palabras guías*

En un conjunto  $A \neq \emptyset$

✦ **Operación:**  $(a * b) = c$ . Es una función  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$

- i)  $*$  es *asociativa* si  $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$ .
- ii)  $*$  *tiene elemento neutro*  $e$  si  $e * a = a * e = a \quad \forall a \in A$ .
- iii) si  $*$  *tiene elemento neutro*  $e$  todo elemento tiene *inverso* para  $*$  si  $\forall a \in A \quad a * a' = a' * a = e$ .
- iv)  $*$  es *conmutativa* si  $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$ .

✦ **Grupo:**  $(A, *)$  es un grupo si se satisfacen i), ii) y iii). Si además se satisface iv) se tiene un *grupo abeliano* o *conmutativo*.

✦ **Anillo:**  $(A, +, \cdot)$ . Para ser anillo se debe cumplir:

- i)  $(A, +)$  es un grupo abeliano o conmutativo.
- ii)  $\cdot$  es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
- iii) Vale distribuir: 
$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$$

Si además de cumplir eso,  $\cdot$  es conmutativa  $(A, +, \cdot)$  es un *anillo conmutativo*.

✦ **Cuerpo**  $(K, +, \cdot)$ : Un conjunto  $K$ ,  $+$  y  $\cdot$  operaciones de  $K$ , es un cuerpo si  $(K, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de  $K$  tiene inverso.

- i)  $(A, +)$  es un grupo abeliano o conmutativo,
- ii)  $(K - \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano, y
- iii) vale la propiedad distributiva de  $\cdot$  con respecto a  $+$ .

✦ **Acción**  $\cdot$ : es una función  $\cdot$  :  $A \times B \rightarrow B$ .

✦  **$K$ -espacio vectorial:** Sea  $(K, +, \cdot)$  un cuerpo. Sea  $V$  un conjunto no vacío, sea  $+$  una operación en  $V$  y sea  $\cdot$  una acción de  $K$  en  $V$ . Se dice que  $(V, +, \cdot)$  es un  $K$ -espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $(V, +)$  es un grupo abeliano.
- ii) La acción  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  satisface:
  - a)  $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall a \in K; \quad \forall v, w \in V$ .
  - b)  $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
  - c)  $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$ .
  - d)  $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad \forall a, b \in K; \quad \forall v \in V$ .

Los elementos de  $V$  son *vectores* y los elementos de  $K$  se llaman *escalares*. La acción  $\cdot$  se llama *producto por escalares*.

⚠ Dejo de escribir a " $\cdot$ " en rojo, porque no hay problema cuando el punto " $\cdot$ " actúa sobre un elemento de  $K$  y uno de  $V$  o entre 2 de  $K$ .

✦ **Subespacios:** Subconjunto de un  $K$ -espacio vectorial. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $S \subseteq V$ . Entonces  $S$  es un subespacio de  $V$  si y solo si valen las siguientes condiciones:

- i)  $0 \in S$
- ii)  $v, w \in S \implies v + w \in S$
- iii)  $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$ .

### ✚ Combinación lineal:

Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, y sea  $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ . Una *combinación lineal de  $G$*  es un elemento  $v \in V$  tal que  $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot v_i$  con  $\alpha_i \in K$  para cada  $1 \leq i \leq r$ .

✚ Independencia lineal: Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de vectores de  $V$ . Se dice que  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es *linealmente independiente* (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \cdot v_\alpha = 0 \implies a_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in I$$

### ✚ Bases y dimensión:

- *Escritura única:* Sea  $V$  un  $K$ -e.v. y  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto l.i. Entonces cualquier  $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  si puede escribirse de una manera única como combinación de  $A$ .
- *Definición base:* Sea  $V$  un  $K$ -e.v. .  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto. Se dice que es una *base de  $V$*  si:
  - $A$  genera todo  $V$ .
  - $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  son l.i.
- *Dimensión:* Sea  $V$  un  $K$ -e.v. .  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Entonces cualquier otra base  $B'$  de  $V$  tiene la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es *la dimensión de  $V$* .

✚ *Espacio columna:* Si  $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)$ . El espacio columna de  $A$  es  $\text{col}(A) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

✚ *Espacio fila:* Si  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ . El espacio fila de  $A$  es  $\text{fil}(A) = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$

### ✚ Matrices:

- *Definición de matriz:*

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in K \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

- *Igualdad de matrices:*

Dos matrices de la misma dimensión  $A$  y  $A'$  serán iguales:

$$A = A' \iff a_{ij} = a'_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

- *Operaciones de matrices:*

Suma  $A + A'$ , producto de un escalar por una matriz  $\alpha A$  y producto entre 2 matrices  $A \cdot B$ .

$$\begin{aligned} (A + A')_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} + a'_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ (\alpha A)_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ C_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

- *Inversa de una matriz:*  $A \in K^{n \times n}$  es inversible si  $\exists B \in K^{n \times n}$ .

### 🧮) Cálculo de determinantes:

▲ Dada  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  matriz cuadrada, definimos el determinante como

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) & n > 1 \end{cases}$$

donde  $M_{ij}$  es la matriz de  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$ .

▲ Si  $A \in K^{2 \times 2} / \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

▲ Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (n \geq 2)$ , un ejemplo con  $n = 3$ :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

▲ Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

🔊 2) Clasificación de un sistema a partir de su determinante:

▲ Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

▲ Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

▲ En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\mathbf{b} = 0]{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

▲ Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \begin{cases} \text{si } |A| \neq 0 & \xrightarrow[\text{tengo}]{\text{seguro}} \boxed{\text{S.C.D.}} \rightarrow \boxed{\text{UNA SOLA SOLUCIÓN}} \rightarrow \boxed{\text{A ES INVERSIBLE}} \\ \text{si } |A| = 0 & \xrightarrow[\text{casos}]{\text{dos}} \begin{cases} \text{si } A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} & \xrightarrow[\text{entonces}]{\text{tengo}} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{si } A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} & \xrightarrow[\text{de } \mathbf{b}]{\text{tengo dependiendo}} \begin{cases} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{o} \\ \boxed{\text{S.I.}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

NO ME GUSTA ESTO ACÁ. Pensar donde verga poner esto del labo

- Seccion a parte? No sé si va a haber coherencia entre número de guías y temas del labo
- PDF a parte? ... No sé si va a valer la pena
- escucho ideas:...

## Notas del labo

Escribir 0.25 en base 10:

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 = 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 = 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 en base 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 = 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_2 = 0.01$$

Escribir 0.3 en base 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 = 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ \vdots = \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10  $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$  con  $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2  $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$  con  $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si  $m = 3 \Rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$ . Para cada valor de *exp* voy a tener un total de  $\underset{a_1}{1} \cdot \underset{a_2}{2} \cdot \underset{a_3}{2} = 4$  posibles

valores de máquina. La separación entre 2 valores  $x_1$  y  $x_2$  consecutivos es de  $2^m$ , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es  $x = 0.3$ , la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{C}$ . Si la solución única, puede verificarse el resultado en Python utilizando el comando `np.linalg.solve`.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ & -\frac{1}{5} \cdot F_2 \rightarrow F_2 & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ & F_3 + 2F_2 \rightarrow F_3 & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 & \xleftrightarrow{\text{★}^2 \text{ y } \text{★}^1} x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = -\frac{9}{5} & \xleftrightarrow{\text{★}^1} x_2 = -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5} & \Leftrightarrow x_3 = -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right)$$

paso a sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\text{★}^2 \text{ y } \text{★}^1} x_1 = -x_3 + 2x_3 + x_3 = 2x_3 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\text{★}^1} x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 \text{★}^2 = x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = -x_3 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Como el item anterior, más incógnitas que ecuaciones, así que no tiene solución única.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como en la última ecuación quedó que  $0 = -1$ , no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\star^1} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de  $\times$  y  $\div$  por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \xrightarrow{z = a + ib} \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1 + i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} i & -1 - i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{i}F_1 \rightarrow F_1 \\ F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 0 & -1 - i & 1 & -i \\ 0 & 1 + i & -1 & i \end{array} \right)$$

$$F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 0 & -1 - i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



Tuqui. Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1 + i)x_2 = i & \rightarrow x_1 = i + (1 - i)x_2 \\ -(1 + i)x_2 + x_3 = -i & \rightarrow x_3 = -i + (1 + i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1 - i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} i & -1 - i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & 0 \\ 0 & -1 - i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1 + i)x_2 = 0 & \rightarrow x_1 = (1 - i)x_2 \\ -(1 + i)x_2 + x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = (1 + i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ (1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

(d) Hay más incógnitas que ecuaciones, no va a tener solución única.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 + i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array} \right) \quad 2F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 + i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 + i & -6i & 11 & 4 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1 + i)x_2 + x_4 = 2 & \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} 2 - 2x_1 - (-1 + i)x_2 \\ (5 + i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de  $x_4$  en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 &= (5 + i)x_2 + 11x_4 - 4 \stackrel{\star^1}{=} (5 + i)x_2 + 11(2 - 2x_1 + (-1 + i)x_2) - 4 = \\ &= (5 + i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11 - 11i)x_2 - 4 = (16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8 - 5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} \\ x_3 &= -\frac{(-15 - 24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5 - 8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \end{aligned}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1 - i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 0 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} -2x_1 - (-1+i)x_2$$

utilizo el resultado de  $x_4$  en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 &= (5+i)x_2 + 11x_4 \stackrel{\star^1}{=} (5+i)x_2 + 11(-2x_1 + (1-i)x_2) = \\ &= (5+i)x_2 - 22x_1 + (11-11i)x_2 = (16-10i)x_2 - 22x_1 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \\ -2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Tomás A. 

## Ejercicio 2.

- (a) Determinar los valores  $k \in \mathbb{R}$  para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

- (b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de  $k$  para los cuales admite solución no trivial. Para esos  $k$ , resolverlo.

- (a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix} \\ &= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto sé que para que el sistema no tenga solución única debe ocurrir que:

$$k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Ahora hay que probar a mano con cada valor de  $k$  para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si  $k = 1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

No hay solución con  $k = 1$

Si  $k = -1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)^{\star^1}$$

Habrán infinitas soluciones con  $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso  $k = -1$ :

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2x_3 & = & 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes ( $\star^1$ ) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ -2x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Tomás A. 

### Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  [una pull request](#) al .

**Ejercicio 4.** Encontrar los coeficientes de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos (1,1), (2,2) y (3,0). Verificar el resultado obtenido usando Python . Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # librería para graficar.

# ...
# Acá , crear la matriz y resolver el sistema para calcularl a , b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "x")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{\text{operaciones}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

🔔 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🔔

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

👤 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

**Ejercicio 5.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d)  $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

(a)  $\langle 1, 1, 2 \rangle$

(b) Describo a  $\mathbf{A}$  y a  $-\mathbf{A}^t$  como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -a_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) Veo que  $\text{tr}(\mathbf{A})$  es la función que suma los elementos de la diagonal principal de una matriz.

La matriz expandida es de la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces, la restricción que me impone este subespacio es:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

Despejando de la ecuación nos queda:

$$A_{11} = -A_{22} - A_{33}$$

O de forma matricial

$$\left\langle \begin{pmatrix} A_{-A_{22}-A_{33}} & A_2 & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📬, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐙 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 6.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📬, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 7.** Hallar un sistema de generadores para  $S \cap T$  y para  $S + T$  como subespacios de  $V$ , y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

- (a)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$ .
- (b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$ .
- (c)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$ .
- (d)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \ \forall i, j\}$  y  $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$ .
- (e)  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S = \langle (i, 1, 33 - i), (4, 1 - i, 0) \rangle$  y  $T = \{(x \in \mathbb{C}^3) : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$ .

- (a) Si los subespacios tienen intersección es una buena idea calcularla para armar el subespacio suma. Busco  $S \cap T$ , para eso pido que  $(x, y, z)$  cumpla ambas ecuaciones de los subespacios:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{meto en} \\ (x, y, z)}]{\text{meto en}} (x, y, z) = (-z, -z, z) = z \cdot (-1, -1, 1)$$

Obteniendo así una base de la intersección:

$$S \cap T = \{(-1, -1, 1)\}$$

La intersección está generada por un solo vector así que  $\dim(S \cap T) = 1$  por lo tanto usando el teorema de la dimensión para la suma de subespacios:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Es así que:

$$S + T = \mathbb{R}^3 \implies B_{S+T} = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}.$$

Peeeeero suponete que querés hacerlo de formás más mecánica, lo que podrías hacer es armar la base con algo de info:

Sé que:

$$\dim(S) = 2, \dim(T) = 2$$

Por lo tanto para encontrar una base *linda* de  $S + T$ , tengo que encontrar un conjunto de generadores, *linealmente independientes* que tenga adentro a todo  $S$  y a todo  $T$ . Saco un sistema de generadores de  $S$  y uno de  $T$ :

$$S = \langle (1, 0, -3); (0, 1, 2) \rangle \quad \text{y} \quad T = \langle (-1, 0, 1); (0, 1, 0) \rangle$$

Un sistema de generadores de  $S + T = \langle (1, 0, -3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1); (0, 1, 0) \rangle$ . Esto no es una base, porque tiene seguro algún vector l.d. con el resto. Entonces puedo sacar ese vector y ver si el resto son l.i.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_2 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Listo me quedo con los 3 vectores que sobrevivieron a la triangulación. Una base de  $S + T$ :

$$S + T = \{(1, 0, -3), (0, 1, 2), (0, 0, -2)\}$$

A mí me gusta usar una base que tenga la info de la intersección y saber a qué subespacio pertenece cada vector, porque me da más control en caso de tener que hacer algo luego con esa base. Onda, mirá el  $(0, 0, -2)$  de la base anterior, ese vector no está ni en  $S$  ni en  $T$ ! Da un poco de miedito, no 🐼?

Por eso me armo una base con un vector de  $S$  y uno de  $T$  sacados a ojo y también uso la intersección  $(-1, -1, 1)$  que ya se calculó antes. Esto va a ser un subespacio de  $S + T$ , porque tiene a todo  $S$  y a todo  $T$ :

$$S + T = \{(1, 0, -3), \overset{\in S}{\uparrow} (1, 1, -1), \underset{\in T}{\downarrow} (1, 0, -1)\}$$

Son *linealmente independientes*, sí. De no haberlo sido elegía otro vector hasta que alguno dé. Compróbalos con este código:

🐼 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🐼

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[1, 0, -3], [1, 1, -1], [1, 0, -1]])
b = [0, 0, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
x, y, z = np.linalg.solve(A, b)

print(f"x = {x}\ny = {y}\nz = {z}")
```

Los subespacios no están en suma directa.

- (b) Se puede ver a ojo que  $\dim(S) = 1$  y que  $\dim T = 2$  es decir que podrían estar en suma directa, porque podría no haber intersección. Voy a intentar calcularla. Me armo un elemento genérico de  $T$  y veo si cumple las ecuaciones de  $S$ :

$$t_g = a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (5, 7, 3) = (a + 5b, a + 7b, 3b) \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (a + 5b) - 2 \cdot (a + 7b) + 3b = 0 \xrightarrow{\star^1} a = 0 \\ (a + 5b) - (a + 7b) = 0 \Leftrightarrow b \stackrel{\star^1}{=} 0 \end{cases}$$

Ese resultado me dice que la intersección es el 0 o dicho de otra manera no tienen intersección:

$$B_{S \oplus T} = \mathbb{R}^3$$

Los subespacios  $S$  y  $T$  están en suma directa.

- (c) Lo primero que odio cuando veo este ejercicio es que tengo que ver si  $S$  tiene generadores *linealmente dependientes* y lo segundo que odio es que voy a tener que pasar a ecuaciones algo, para que sea fácil de calcular la intersección:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{estos generadores}]{\text{me quedo con}} S = \{(1, 1, 3); (0, 1, 1)\}$$

Sé que seguro va a haber una intersección entre  $S$  y  $T$ , porque hay 4 vectores y estoy laburando en  $\mathbb{R}^3$ . Busco las ecuaciones que generan a  $S$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ 1 & 1 & | & x_2 \\ 3 & 1 & | & x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & | & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & | & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & | & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & | & x_3 - x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

Para que ese sistema sea compatible necesito que:

$$x_3 - x_2 - 2x_1 = 0 \implies S = \{(x_1, x_2, x_3) / x_3 - x_2 - 2x_1 \stackrel{\star^1}{=} 0\}$$

Listo, ahora es cuestión de hacer como en el item anterior, agarro un genérico de  $T$  y lo meto en la ecuación de  $S$ :

$$t_g \stackrel{\star^2}{=} (a + 3b, a + 2b, b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} \left\{ b - (a + 2b) - 2(a + 3b) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{3}b \xrightarrow[\star^2]{\text{reemplazo}} t_g = b \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) \right.$$

Ese vector  $t_g$ , es un vector de  $T$  que también cumple la ecuación de  $S$  por lo tanto también está en  $S$ :

$$B_{S \cap T} \stackrel{!}{=} \{1, -2, 3\}$$

Los subespacios no están en suma directa. Y  $S + T \stackrel{!}{=} \mathbb{R}^3$ .

- (d)  $S$  es un subespacios describiendo matrices *simétricas*, es decir que  $A = A^T$  y  $T$  el subespacio con matrices de traza 0, es decir,  $\sum t_{ii} = 0$ . Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{22} + t_{33}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{22} + x_{33}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios  $S$  y  $T$ . El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  a ver que onda la dimensión:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9$$

Tuqui.

- (e) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) 🗣️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  [una pull request](#) al 🤖.



Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

**Ejercicio 8.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales:

- (a)  $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$ .
- (b)  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$  siendo  $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$ .

- (a) Lo primero que quiero hacer es que los generadores sean *linealmente independientes* y porque me gusta determinantes ☺:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & k^2 + k - 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (k^2 + k - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ = (k^2 + k - 2) \cdot (-1 + k) = 0 \\ \Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Así me saco el tema de las  $k$  de encima, pero buéh todavía no se termina:

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle \stackrel{?}{=} \begin{cases} \langle (1, -2, -4), (-1, -1, 2), (1, 1, -2) \rangle = \langle (1, -2, -4), (1, 1, -2) \rangle & \text{si } k = -2 \\ \langle (1, 1, 2), (-1, -1, -1), (1, 1, 1) \rangle = \langle (1, 1, 2), (1, 1, 1) \rangle & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver si se intersectan en todos sus elementos. Voy a buscar la expresión por comprensión de  $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{F_3 + 8F_2 \rightarrow F_3} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \end{array} \right)$$

Dado que ese sistema no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es  $\emptyset$  se debe cumplir:

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \star^1$$

Encontrar la intersección ahora es fácil:

Caso con  $k = -2$ :

$$(a + b, -2a + b, -4a - 2b) \xrightarrow{\text{meto en } \star^1} 8(a + b) - 2(-2a + b) + 3(-4a - 2b) = 0 \quad \forall a \text{ y } b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con  $k = -2$

Caso con  $k = 1$ :

$$(a + b, a + b, 2a + b) \xrightarrow{\text{meto en } \star^1} 8(a + b) - 2(a + b) + 3(2a + b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluimos que el único valor de  $k$  para el cual los subespacios son iguales es:

$$k = -2$$

(b) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📁, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 9.** Sean  $S$  y  $T$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ . Probar que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V$  si y solo si  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ .

Hay que probar que:

$$S \cup T \text{ es subespacio} \Leftrightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$$

**CONSULTAR**, no me cierra el enunciado**Ejercicio 10.** Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre  $K$ . Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.(a)  $\{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, 1), (0, 2, 1, -5)\} \in \mathbb{R}^4$ , para  $K = \mathbb{R}$ .(b)  $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \in \mathbb{C}^2$ , para  $K = \mathbb{C}$ .[Acá las definiciones de combinación lineal y coso](#) (← click)

(a)

$$a \cdot (1, 4, -1, 3) + b \cdot (2, 1, -3, 1) + c \cdot (0, 2, 1, -5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{triangulando}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Los vectores son *linealmente independientes*.(b) Ahora los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{C}$ 

$$\alpha \cdot (1 - i, i) + \beta \cdot (2, -1 + i) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 2 \\ i & -1 + i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-i} \cdot F_1 \rightarrow F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_2 - i \cdot F_1 \rightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\alpha = (1+i)\beta}$$

Y estos bichos no serían *linealmente independientes*.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 11.** 🤖... hay que hacerlo! 🤖Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📁, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.**Ejercicio 12.** Sean  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$  si y solo si  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{C}$ .Es un *si solo si* así que sale doble implicación:🐙 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ [al repo](#), críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

( $\Leftarrow$ ) Para este lado sale un poco más fácil, por eso arranco por acá.

Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y } z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y } r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Es inmediato ver que en este caso a pesar de que los coeficientes  $z_i$ , valen todos 0, es decir que particularmente son reales también! Puedo tomar  $r_i = z_i$  y listo, tengo la combinación lineal igualada a cero y todos los coeficientes son reales y nulos.

( $\Rightarrow$ ) Este es un poco más picante, porque no es *obvio* que deba ocurrir ¿O no lo es para mí?: Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y } r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \quad \star^1 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y } z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Laburo un poco  $\star^1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i &= z_1 \cdot v_1 + \cdots + z_k \cdot v_k = 0 \\ &\xleftrightarrow{z_j = a_j + ib_j} (a_1 + ib_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_k + ib_k) \cdot v_k = 0 \\ &\xleftrightarrow{v_j \in \mathbb{R}^n} \underbrace{(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k)}_{\star^2} + i \underbrace{(b_1 \cdot v_1 + \cdots + b_k \cdot v_k)}_{\star^3} = 0 \end{aligned}$$

Tuqui. Las combinetas en  $\star^2$  y  $\star^3$  cumplen nuestra hipótesis, porque los  $a_i$  y los  $b_i \in \mathbb{R}$ , es decir que son ambas nulas.

*Nota que puede ser de interés:*

Mirá que ese último  $!!$  es porque los  $v_j \in \mathbb{R}$ , porque si estuvieran en  $\mathbb{C}$ , por ejemplo:

$$\{(i, 1), (1, -i)\}$$

Esos  $v_j \in$  si laburás con  $K = \mathbb{R}$  son MEGA *linealmente independientes*, peeeero si  $K = \mathbb{C}$ :


$$i \cdot (i, 1) + 1 \cdot (1, -i) = 0$$

todo lo contrario. Solo se llega a las expresiones  $\star^2$  y  $\star^3$  gracias a que  $v_j \in \mathbb{R}^n$ .

*Fin de Nota que puede ser de interés:*

Dale las gracias y un poco de amor  $\heartsuit$  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

 Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 29/03/25 @ 17:37 . Chequeá si hay una **versión nueva**  $\rightarrow$  **acá**.

[Ir a índice  \$\uparrow\$](#)

**Ejercicio 13.** Sean  $m, n$  y  $r \in \mathbb{N}$ .

(a) Probar que si  $A \in K^{m \times n}$  satisface que  $Ax = 0 \ \forall x \in K^n$ , entonces  $A = 0$ . Deducir que si  $A, B \in K^{m \times n}$  satisfacen que  $Ax = Bx \ \forall x \in K^n$ , entonces  $A = B$ .

(b) Probar que si  $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times r}$  con  $B = (b_{ij})$  y, para  $1 \leq j \leq r$ ,  $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$  es la columna  $j$ -ésima de  $B$ , entonces  $AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$  (es decir,  $AB_j$  es la columna  $j$ -ésima de  $AB$ ).

(a) Tengo  $A \in K^{n \times n}$  entonces  $Ax$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

Probando particularmente con la base canónica de  $K^n$   $x \in K^n$  con  $x \in B$ , donde

$$B = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 1)\}$$

muestro así que las columnas de  $A$  son siempre nulas.



(b) Usando lo que hice en el anterior:

$$Ax = Bx \iff (A - B)x = 0 \iff Cx = 0$$

Dado que  $Cx = 0 \ \forall x \in K^n$  se muestra que  $A = B$ .

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

**Ejercicio 14.** Sean las siguiente matrices de  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto  $AB = C$  en bloques:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto  $C = AB$  en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque  $C_{ij}$  indicando sus dimensiones.

(a)  $A_{11} = [a_{11}]$ ,  $A_{12} = [a_{12} \ a_{13}]$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$B_{11} = [b_{11}], \quad B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], \quad B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

(b)  $A_{11} = [a_{11}a_{12}]$ ,  $A_{12} = [a_{13}]$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$$B_{11} = [b_{11}], \quad B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], \quad B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

(c)  $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ,  $A_{21} = [a_{31}]$ ,  $A_{22} = [a_{32} \ a_{33}]$

$$B_{11} = [b_{11}], \quad B_{12} = [b_{12} \ b_{13}], \quad B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

¡¿Que interesante, no?! peero: ¿Qué es esta verga?. A esta altura ya está clarísimo que para poder multiplicar dos matrices, se tiene que cumplir que *la cantidad de columnas del primer factor sea igual a la cantidad de filas del segundo*:

$$M \cdot M' \text{ se puede hacer si } M \in K^{n \times m} \text{ y } M' \in K^{m \times l}$$

Hay que prestar atención a eso y después hacer el producto y suma en bloques, es un *parecido pero distinto*.

(a)

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico  $A \cdot B$  en bloques:

☐<sub>1</sub>) Busco el bloque  $C_{11}$  ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = [1] \cdot [1] + [3 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 = C_{11} \in K^{1 \times 1}$$

☐<sub>2</sub>) Busco el bloque  $C_{12}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹:

$$A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = [1] \cdot [1 \ 1] + [3 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [1 \ 4] = C_{12} \in K^{1 \times 2}$$

☐<sub>3</sub>) Busco el bloque  $C_{21}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹☹:

$$A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1] + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{2 \times 1}$$

▣<sub>1</sub>) Busco el bloque  $C_{22}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹️:

$$A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2 \times 2}$$

Si todavía no te volaste la tapa de los sesos esto queda así:

$$A \cdot B = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ \hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Sí, multiplicar en bloques dio lo mismo que multiplicar como siempre. ¿Es magia? NO, es ~~matemagia~~.

(b)

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico  $A \cdot B$  en bloques:

▣<sub>1</sub>) Busco el bloque  $C_{11}$  ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Se pudo todo}$$

No me *matchean* las dimensiones como para poder multiplicar.

(c)

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplico  $A \cdot B$  en bloques:

▣<sub>1</sub>) Busco el bloque  $C_{11}$  ¿Se podrá hacer el cálculo?:

$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = C_{11} \in K^{2 \times 1}$$

▣<sub>2</sub>) Busco el bloque  $C_{12}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹️:

$$A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = C_{12} \in K^{2 \times 2}$$

▣<sub>3</sub>) Busco el bloque  $C_{21}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹️:

$$A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = C_{21} \in K^{1 \times 1}$$

▣<sub>4</sub>) Busco el bloque  $C_{22}$  ¿Se podrá hacer el cálculo? ☹️:

$$A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{22} \in K^{2 \times 2}$$

Esto queda así:

$$A \cdot B = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 10 & 1 & 4 \\ \hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

¿Hay más particiones que funcionarían? Creo que la cosa es que:

Se multiplican siempre bloques de la pinta  $A_{ij} \cdot B_{jk}$ . Necesito entonces que los bloques que forman la *columna bloque*  $j$ -ésima tengan igual cantidad de columnas como filas los bloques que forman la *fila bloque*  $j$ -ésima.

Si, no se entendió nada, eso. Ya vendrá alguien y lo escribirá mejor. Ejemplo:

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{No se puede}$$

No va a poderse multiplicar, porque la columna 1 de bloques azules, son bloques con **2** columnas, mientras que la fila 1 de bloques magenta tiene solo **1** fila por bloque.

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{Se puede } \checkmark$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \rightarrow \text{Se puede } \checkmark$$

me aburrí

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 15.** Dadas las bases de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\}$  y  $B' = \{(-1, 1, 1); (2, 0, 1); (1, -1, 3)\}$

- Calcular  $[(1, 1, 0)]_B$  y  $[(1, 1, 0)]'_{B'}$ .
- Calcular la matriz de cambio de base  $C(B, B')$ .
- Comprobar que  $C(B, B')[[(1, 1, 0)]_B] = [(1, 1, 0)]_{B'}$ .



- Para calcular las coordenadas en una base  $B$ :

$$(1, 1, 0) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) \xLeftrightarrow{\text{a ojo}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow [(1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0)$$

En la base  $B'$  voy a tener que hacer más cuentas:

$$(1, 1, 0) = a(-1, 1, 1) + b(2, 0, 1) + c(1, -1, 3)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{\text{✂}} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow [(1, 1, 0)]_{B'} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3]])
```

```

b = [1, 1, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

print(f"a = {a}\nb = {b}\nc = {c}")

```

(b) Quiero la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los generadores de  $B$  en la base  $B'$ :

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} (1, 1, 0) = a_1(-1, 1, 1) + b_1(2, 0, 1) + c_1(1, -1, 3) \\ (0, 1, 1) = a_2(-1, 1, 1) + b_2(2, 0, 1) + c_2(1, -1, 3) \\ (1, 0, 1) = a_3(-1, 1, 1) + b_3(2, 0, 1) + c_3(1, -1, 3) \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{\text{RREF}} \left( \begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \\ (a_2, b_2, c_2) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) \\ (a_3, b_3, c_3) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}) \end{cases}$$

🦉 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🦉

```

import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3]])
b = [1, 1, 0]

a1, b1, c1 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a1 = {a1}\nb1 = {b1}\nc1 = {c1}\n")

b = [0, 1, 1]
a2, b2, c2 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a2 = {a2}\nb2 = {b2}\nc2 = {c2}\n")

b = [1, 0, 1]
a3, b3, c3 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a3 = {a3}\nb3 = {b3}\nc3 = {c3}\n")

```

Finalmente la matriz  $C(B, B')$ :

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(c) Lo que hay que hacer es :

$$C(B, B') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tuqui. Da eso.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🦉

🦉 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)



**Ejercicio 16.** Sean  $A, A' \in K^{m \times n}$ ;  $B \in K^{n \times r}$ ;  $D, D' \in K^{n \times n}$ ;  $\alpha \in K$ . Probar:

- (a)  $(A + A')^t = A^t + (A')^t$  (e)  $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$   
 (b)  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$  (f)  $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$   
 (c)  $(AB)^t = B^t A^t$  (g)  $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$   
 (d)  $AA^t$  y  $A^t A$  son matrices simétricas.

Voy a usar [operaciones de matrices](#) ([← click](#)):

⚠ Mucha atención a los índices de las matrices que de eso trata este ejercicio básicamente.

- (a) Quiero probar que  $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ . Un elemento de la suma:

$$[(A + A')^t]_{ij} = [A + A']_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ji} + A'_{ji} = A^t_{ij} + (A')^t_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que  $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ .

- (b) Tengo ahora un producto de un escalar por una matriz:

$$[(\alpha \cdot A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha A^t_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Entonces queda mostrado que  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ .

- (c) Tengo ahora un producto matricial  $(AB)^t = B^t A^t$

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^n B^t_{ik} A^t_{kj} = [B^t A^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$$

Entonces queda mostrado que  $(AB)^t = B^t A^t$ .

- (d) Uso el truco de la multiplicación y transposición como antes:

$$[AA^t]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} A^t_{kj} = \sum_{k=1}^n A^t_{kj} A_{ik} = \sum_{k=1}^n A_{jk} A^t_{ki} = [AA^t]_{ji} = [(AA^t)^t]_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Así queda que una matriz es igual a su transpuesta, por lo tanto es simétrica.

Sería lo mismo mostrarlo para  $A^t A$ .

Entonces queda mostrado que  $AA^t$  y  $A^t A$  son matrices simétricas.

- (e) Quiero mostrar que:  $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$ . La traza la calculo sumando los elementos diagonales de la matriz:

$$\text{tr}(D + D') = \sum_{k=1}^n D_{kk} + D'_{kk} = \sum_{k=1}^n D_{kk} + \sum_{k=1}^n D'_{kk} = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$$

Tuqui.

- (f) Quiero mostrar que:  $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$ .


$$\text{tr}(\alpha D) = \sum_{k=1}^n \alpha D_{kk} = \alpha \cdot \sum_{k=1}^n D_{kk} = \alpha \cdot \text{tr}(D)$$

Tuqui.

(g) Quiero mostrar que:  $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$ . Parecido a lo hecho antes:

$$\begin{aligned} \text{tr}(DD') &= \sum_{k=1}^n [DD']_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n D_{kl} D'_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n D'_{lk} D_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D'_{lk} D_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^n [D'D]_{ll} = \text{tr}(D'D) \end{aligned}$$

Tuqui.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  

### Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → una *pull request* al .

### Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → una *pull request* al .

### Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → una *pull request* al .

### Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → una *pull request* al .

### Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → una *pull request* al .

## Ejercicios de parciales:

---

### 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → una *pull request* al .

---