

# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 3

Por alumnos de ALC  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 15/05/25 @ 13:50

*Choose your destiny:*

(click click 🎯 en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">22.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">23.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">21.</a>	<a href="#">24.</a>

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)       [2.](#)       [3.](#)

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:

15/05/25 @ 13:50

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 3



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



## Notas teóricas:

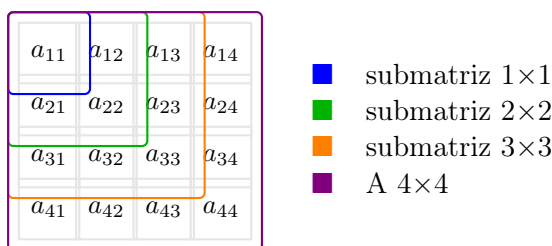
## ✚ Matriz definida positiva:

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva:

$$\forall x \neq 0 \quad x^t A x > 0 \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

Algunas propiedades de las matrices definidas positivas:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  *simétrica definida positiva*  $\implies$  A es invertible
- Los elementos diagonales de una matriz *simétrica definida positiva* son positivos
- Las submatrices principales también son matrices definidas positivas

✚ Descomposición LU:  $A = LU$ 

✚<sub>1</sub>) Sea  $A \in K^{n \times n}$ , **A invertible**, entonces:

$$A \text{ tiene descomposición LU} \Leftrightarrow \underbrace{A(1:k, 1:k)}_{\text{submatrices principales}} \text{ es invertible } \forall k \in [1, n]$$

✚<sub>2</sub>) Sea  $A \in K^{n \times n}$ , **A invertible**, entonces:

$$A \text{ tiene descomposición LU} \implies \text{esa factorización es única}$$

✚ Descomposición LU con swap de filas:  $PA = LU$ 

## ✚ Descomposición de Cholesky:

La descomposición de Cholesky para una matriz  $A$  simétrica y definida positiva:

$$A = LL^t$$

con  $L$  triangular inferior. A partir de la descomposición:

$$A = \overbrace{\tilde{L}U}^{\text{la misma LU de siempre}} \xrightarrow{\text{✚}} A = \tilde{L}D\tilde{L}^t.$$

↓  
matriz diagonal  
con los elementos  
diagonales de  $U$



$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$ , es definida positiva si y solo si  $D$  lo es. Como  $D$  es diagonal, solo es cuestión de ver que  $[D]_{ii} > 0$ .



Finalmente:

$$A = \tilde{L}D\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t$$


## ✚ Proyectores:

Se llama *Proyector* a una transformación lineal  $P$  que cumple que:


- $P(v) = v$
- $P \circ P = P$

Si  $P : V \rightarrow V$  es proyector, están las siguientes propiedades:

  $v - P(v) \in \text{Nu}(P) \quad \forall v \in V$

  $\text{Nu}(P) \oplus \text{Im}(P) = V$  lo mismo que decir que  $\text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$

  $P$  un *proyector ortogonal*  $\Leftrightarrow \text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$

  $P$  es un *proyector ortogonal* expresado en una base *ortonormal*  $\Rightarrow P = P^t \quad (P = P^* \in \mathbb{C})$

### Gram-Schmidt:

- 1) Proceso para construir una base que generará el mismo espacio, pero con elementos perpendiculares entre sí.

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_r\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{\{u_1, \dots, u_r\}}_{\text{Base final}} \quad \text{con } u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

- 2) La mecánica es cuentosa pero razonable:

- 1) Agarro el primer vector de la base inicial  $v_1$  como primer vector de la base final:

$$\begin{array}{c} \{u_1\} \\ \downarrow \\ = v_1 \end{array}$$

- 2) Agarro el segundo vector de la base inicial  $v_2$  y calculo el segundo vector de la base final:

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1^* \cdot v_2}{\|u_1\|^2} u_1 \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, u_2\}$$

- 3) Y voy así hasta usar todos los vectores el segundo vector de la base inicial  $v_2$  y calculo el segundo vector de la base final:

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1^* \cdot v_3}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{u_2^* \cdot v_3}{\|u_2\|^2} u_2 \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, u_2, u_3\}$$

- 4) En general cuando agarre el  $i$ -ésimo vector de la base inicial y calcule el  $i$ -ésimo vector de la base final:

$$u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|^2} u_k \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, \dots, u_i\}$$

- 5) Así hasta haber usado todos los vectores de la base inicial, para obtener la base con los vectores ortogonalizados:

$$\{u_1, \dots, u_r\}$$

es una base ortogonal, para los amigos una BOG, si quiero que sea una *base ortonormal*, BON:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\}$$

### Matriz Ortogonal:




Una matriz *ortogonal* tiene sus columnas *ortonormales*.



- Si  $A$  es una *matriz ortogonal* entonces  $A^{-1} = A^*$ .
- Si  $A$  y  $B$  son *matrices ortogonales* entonces  $AB$  es una *matriz ortogonal*.

### Factorización QR: $A = QR$

La factorización  $QR$  no tiene un pedo que ver con las  $LU$ , Chole y amigos.  $QR$  es un fantasma  que sale de *Gram-Schmidt*.

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_r\}}_{\text{Columnas de } A} \xrightarrow[\text{más normalizar}]{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\}}_{\text{Columnas de } Q} \quad \text{con } u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

- ⊥ 1)  $Q$  es una *matriz ortogonal* que va a tener en sus columnas el resultado de **ortonormalizar** las columnas de  $A$ .
- ⊥ 2)  $R$  es una *matriz triangular superior* con las normas de las columnas de  $Q$  en la diagonal
- ⊥ 3) Mini derivación:

$$\overbrace{u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|^2} u_k}^{\text{Gram-Schmidt, duro y puro}} \xrightarrow[\text{y acomodo}]{\text{despejo el } v_i} \overbrace{v_i = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|} \frac{u_k}{\|u_k\|}}^{\star^1}$$

↓  
col- $i$   
de  $A$

Eso ahora lo uso para armar  $A = QR$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} & \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ | & | & | \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \|u_1\| & \frac{u_1^* \cdot v_2}{\|u_2\|} & \frac{u_1^* \cdot v_3}{\|u_3\|} \\ 0 & \|u_2\| & \frac{u_2^* \cdot v_3}{\|u_3\|} \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix}}_R$$

Ya sé que hice el ejemplo matricial en  $\mathbb{R}^3$ , pero con el poder de tu imaginación fijate que la columna  $j$ -ésima para una matriz imaginaria de  $n \times n$  sería algo así:

$$\text{Col}(A)_j = v_j \stackrel{\star^1}{=} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{u_k^* \cdot v_j}{\|u_k\|} \frac{u_k}{\|u_k\|} + u_j$$

- ⊥ 4) No sé si ayuda a la notación o no, pero quiero cambiar la notación así:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\} \xrightarrow{\text{le pongo la gorra}} \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r\} \text{ donde los } \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \underset{i \neq j}{=} 0 \text{ y } \|\hat{u}_i\| = 1 \quad \forall i$$

Dejando así la expresión de la descomposición:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{Q \text{ con cols } \textbf{ortonormales}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \|u_1\| & \hat{u}_1^* \cdot v_2 & \hat{u}_1^* \cdot v_3 \\ 0 & \|u_2\| & \hat{u}_2^* \cdot v_3 \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix}}_{R \text{ triangular superior}}$$

🔴 *Matriz de HouseHolder:* ☹... hay que hacerlo! ☹

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Sean  $A$  y  $B \in K^{n \times n}$ . Probar que:

- (a) Si  $A$  y  $B$  son triangulares superiores,  $AB$  es triangular superior.
- (b) Si  $A$  y  $B$  son diagonales,  $AB$  es diagonal.
- (c) Si  $A$  es estrictamente triangular superior (es decir,  $a_{ij} = 0$  si  $i \geq j$ ),  $A^n = 0$ .

- (a) Una matriz  $A$  va a ser triangular superior si todos los número debajo de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ a_{ij} & \text{si } i \leq j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Los  $a_{ij}$  no tienen que ser necesariamente distinto a cero. Ahora multiplico dos matrices triangulares superiores:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} \cdot b_{kj} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple  $\star^2$  son los que tiene las *filas* menores o iguales *columnas* y *filas* menores o iguales *columnas*, si no son cero. Básicamente la definición de matriz triangular superior.

- (b) Esta es un poco más fácil. Una matriz es diagonal si:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ij} & \text{si } i = j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Nuevamente, los elementos diagonales no tienen que ser necesariamente distintos de cero. Ahora multiplico dos matrices diagonales:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} a_{ii} \cdot b_{ii} & \star^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la sumatoria las *columnas* de los elementos de  $A$  coinciden con las filas de los elementos de  $B$ , pero solo cuando estemos multiplicando la *fila*  $i$  con la *columna*  $i$  es que ambos elementos podrían ser no nulos.

- (c) Una matriz  $A$  va a ser triangular superior estricta si todos los número debajo y de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \stackrel{\star^1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{ij} & \text{si } i < j \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

Meto inducción porque es un viaje. Quiero probar que:

$$p(n) : A \in K^{n \times n} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^n = 0.$$

Caso base:

$$p(2) : A \in K^{2 \times 2} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^2 = 0$$

Cálculo directo

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto  $p(2)$  es verdadera.

*Paso inductivo:* Voy a asumir que para algún  $k \in \mathbb{Z}$

$$p(k) : \underbrace{A \in K^{k \times k} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^k = 0}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Por lo tanto ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : A \in K^{(k+1) \times (k+1)} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^{k+1} = 0$$

Para probar esta tremenda garompa, voy a usar el producto en bloques. Tengo una matriz  $A \in K^{(k+1) \times (k+1)}$  estrictamente triangular superior y la parto en bloques así:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{a_{12} \cdots a_{1k+1}} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} \ddots & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & a_{kk+1} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ \boxed{0} & \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times k} \\ \boxed{k \times 1} & \boxed{k \times k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0 \cdots 0} \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & a' & \cdots & a \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oka, esto se fue al carajo. Pero está demostrado. La última matriz, es el resultado de  $A^2$ . Tiene todos ceros excepto en el **bloque naranja**, que está en  $K^{k \times k}$  y es el producto de hacer el **bloque naranja** por el **bloque naranja** dado que el **bloque violeta** por el **bloque verde** dio 0. Por lo tanto el **bloque naranja** es la **hipótesis inductiva!!!** Multiplicar  $k+1$  veces  $A$  por si misma dará 0, porque el producto, será el (**bloque naranja**)<sup>2</sup> con cada vez más ceros.

Dado que  $p(2), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas, por el principio de inducción en  $p(n)$  también será verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$

El caso con  $n = 1$  es trivial, dejame en paz.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

🔗 ¿Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 15/05/25 @ 13:50 . Chequeá si hay una **versión nueva** → **acá**.

[Ir a índice ↑](#)

**Ejercicio 2.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

- (a) Escalonar la matriz  $A$  multiplicándola a izquierda por matrices elementales  $T^{ij}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , con  $i \neq j$ .

Recordar que  $T^{ij}(a) \in K^{n \times n}$  se define como:

$$T^{ij}(a) = I_n + aE^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, a \in K,$$

siendo  $E^{ij}$  las matrices canónicas de  $K^{n \times n}$

- (b) Hallar la descomposición  $LU$  de  $A$ .

- (c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema  $Ax = b$ , para  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Hacer una operación entre *filas* es multiplicar por esas matrices  $T^{ij}$ , pero dado que el *me da tremenda pajómetro* explota, escribo las  $T^{ij}$  para la primera *columna* de ceros no más.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{31}(-\frac{2}{1})=I_4+(-\frac{2}{1})E^{31}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{41}(\frac{3}{1})=I_4+(\frac{3}{1})E^{41}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \star^1 \end{aligned}$$

Ahí entonces están las  $T^{ij}$  para hacer ceros en la primera *columna*. Y como la *matemagia* en esta materia parece no tener parangón, cuando multiplicás esas matrices  $T^{ij}$  da lo mismo que sumar los elementos fuera de la diagonal componente a componente:

$$T^{41} \cdot T^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gracias a ese resultado que en el próximo paso podría armar solo una matriz con la info para triangular toda la *segunda columna*. solo un producto matricial. Continúo la triangulación de  $\star^1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32}(-1)=I_4+(-\frac{1}{1})E^{32}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Por lo tanto para que la matriz  $A$  quede triangulada superiormente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_U$$

$$T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31} \cdot A = U$$

- (b) La  $U$  está una vez triangulada la matriz  $A$ . Encontrar la  $L$  sale con las matrices que multiplicamos para obtener la matriz triangulada:

$$L^{-1} \cdot A = U \xrightarrow[L]{\times \text{izquierda}} L \cdot L^{-1} \cdot A = L \cdot U \Leftrightarrow A = L \cdot U$$

El producto de las matrices elementales me forma la inversa de  $L : L^{-1}$ . Por suerte encontrar la inversa de  $(L^{-1})^{-1}$  es sencillo:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +2 & +1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo hay que cambiarle los signos a los elementos que estás por debajo de la diagonal.

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A \cdot x = b \xLeftrightarrow{A=LU} LU \cdot x = b \Leftrightarrow L(\underbrace{U \cdot x}_y) = b \Leftrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b & \star^1 \text{ Arranco por acá.} \\ U \cdot x = y & \star^2 \text{ Sigo por acá una vez encontrado } y. \end{cases}$$

Entonces resuelvo primero  $\star^1$ :

$$Ly = b \xrightarrow{\text{armo sistema}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow y \stackrel{\star^3}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con la  $\star^3$  resuelvo  $\star^2$ :

$$Ux = y \xrightarrow[\text{con } \star^3]{\text{armo sistema}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y porque soy un tipazo (y le pifé 1000 veces a las cuentas) acá tenés el código para corroborar:


🐞 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🐞

```
import numpy as np
import scipy

# Matriz A
A = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [2, -1, 0, -2], [-3, 3, 0, -1]])
L = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [2, 1, 1, 0], [-3, 0, 0, 1]])
U = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [0, 0, -4, -4], [0, 0, 0, 2]])
b = np.array([[1], [-7], [-5], [1]])


print(f"A =\n {A}")
print(f"L =\n {L}")
print(f"U =\n {U}")

print(f"\nA == LU --> {np.array_equal(A, L @ U)}")
print(f"Ax = b --> x = {np.transpose(np.linalg.solve(A, b))}")
```

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Ale S. 

**Ejercicio 3.** Escribir funciones de Python  que calculen la solución de un sistema:

- (a)  $Ly = b$ , siendo  $L$  triangular inferior.
- (b)  $Ux = y$ , siendo  $U$  triangular inferior.



 ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → [una pull request](#) al .

**Ejercicio 4.** Escribir funciones de Python  que realicen las siguientes tareas:

- (a) Calcular la descomposición  $LU$  de una matriz dada  $A$ , asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.
- (b) Resolver un sistema  $Ax = b$ , utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem (c) del ejercicio 2.

- (a) El siguiente *snippet* es en gran parte código para generar la matriz y después del cálculo de la triangulación formar las matrices  $L$  y  $U$ .

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
"""
Eliminacion Gausianna
"""

import numpy as np

def elim_gaussiana(A):
    m = A.shape[0]
    n = A.shape[1]
```

```

Ac = A.copy()

if m != n:
    print("Matriz no cuadrada")
    return

for i in range(0, n - 1):
    divisor = Ac[i][i]
    for j in range(i, n - 1):
        coef = Ac[j + 1][i] / divisor
        Ac[j + 1][i:] = np.subtract(Ac[j + 1][i:], coef * Ac[i][i:])
        Ac[j + 1][i] = coef

L = np.tril(Ac, -1) + np.eye(A.shape[0])
U = np.triu(Ac)

return L, U

def main():
    n = 7
    B = np.eye(n) - np.tril(np.ones((n, n)), -1)
    B[:, n - 1] = 1
    print(f"Matriz B = \n{B}\n")

    L, U = elim_gaussiana(B)

    print(f"Matriz L = \n{L}\n")
    print(f"Matriz U = \n{U}\n")
    print("B = LU? ", "Sí!" if np.allclose(np.linalg.norm(B - L @ U, 1), 0)
    else "No!")
    print("Norma infinito de U: ", np.max(np.sum(np.abs(U), axis=1)))

if __name__ == "__main__":
    main()

```

**Ejercicio 5.** Considerar la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Probar que  $A$  no admite descomposición  $LU$ .
- Hallar la descomposición  $LU$  de  $PA$  para alguna matriz de permutación  $P$  adecuada.

- Si la matriz tiene descomposición  $LU$ , entonces debería poder escribir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & u_{22} & u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Tremenda matriz para que falle enseguida:

$$u_{11} = 0 \implies l_{21}u_{11} = 0 \neq 1 \implies \text{no existe } A = LU$$

(b) Quiero hacer  $F_1 \leftrightarrow F_3$

$$PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para hacer la factorización  $PA = \tilde{A} = LU$  calculo  $LU$  como siempre para una matriz  $\tilde{A}$ :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo  $L$  con las inversas de las matrices de triangulación:

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$



Por lo tanto para comprobar:

$$\tilde{A} = PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

### Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → [una pull request](#) al .

### Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → [una pull request](#) al .

### Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{LaTeX}$  → [una pull request](#) al .



### Ejercicio 9. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

*según la definición de matriz definida positiva:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \mathbf{x} &= 4x^2 - 4xz + 5y^2 + 10yz + 11z^2 \stackrel{!!}{=} (4x^2 - 4xz + z^2) + 5(y^2 + 2yz + z^2) + 5z^2 \\ &= 5z^2 + 5(y+z)^2 + (2x-z)^2 > 0 \end{aligned}$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al [repo](#), críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

La matriz cumple la definición de *matriz definida positiva*  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ . Sí, oka, hacer eso es una locura, más fácil es hacer lo que sigue y mirar los elementos de la matriz  $D$ :

Hay un teorema que dice algo así:

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica y definida positiva si y solo si existe  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular inferior con diagonal positiva tal que  $A = LL^t$ .

Arranco como buscando la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + \frac{1}{2}F_1]{F_2 - \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{3}{2}F_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$



¡Sí! Ver los valores diagonales de  $U$  alcanza para ver que la matriz era efectivamente definida positiva. ¿Pero quién puede quitarnos el placer de haberlo comprobado de ambas formas?



Y ahora me formo la  $\tilde{L}$  a partir de la *eliminación gaussiana*:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto ya casi estamos:

$$A = \tilde{L}U = \tilde{L}D\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}(\tilde{L}\sqrt{D})^t = LL^t \text{ con } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pequeña verificación:

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
U = np.array([[4,2,-2],[0,4,6],[0, 0, 1]])

print(f"L_tilde U=\n{L_tilde@U}")
# [ 4 2 -2]
# [ 2 5 5]
# [-2 5 11]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D = np.array([[4,0,0],[0,4,0],[0, 0, 1]])

print(f"D L_tilde_traspuesta=\n{D@np.transpose(L_tilde)}")
# [ 4 2 -2]
# [ 0 4 6]
# [ 0 0 1]
```

```
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5, 1]])
D_sqrt = np.array([[2,0,0],[0,2,0],[0, 0, 1]])
L_chole = L_tilde @ D_sqrt

print(f"A=LL_traspuesta=\n{L_chole@np.transpose(L_chole)}")
# [ 4 2 -2]
# [ 2 5 5]
# [-2 5 11]
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🍷

**Ejercicio 10.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica. Probar que  $A$  es definida positiva si y solo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $a_{ij} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_j$

( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva va a admitir la descomposición de Cholesky ([mirá acá](#)).

$$A \xleftrightarrow[A \text{ def. pos.}]{A = A^t} A = \tilde{L}D\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t \xleftrightarrow[x \neq 0]{\times} 0 < \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{x}^t L L^t \mathbf{x} = (L^t \cdot \mathbf{x})^t (L^t \mathbf{x}) = \mathbf{y}^t \mathbf{y}$$

$d_{ij} > 0$   
 $\uparrow$   
la de LU

Ahora esos  $\mathbf{y}$  tienen que ser *linealmente independientes*, más fácil, tengo que encontrar un solo conjunto:

$$\mathbf{y} = L^t \mathbf{x} \xrightarrow{\text{elijo}} \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{y}_1 = L^t \mathbf{e}_1 = \text{Col}(L^t)_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n = L^t \mathbf{e}_n = \text{Col}(L^t)_n \end{cases}$$

La matriz  $L$  es triangular inferior  $\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \text{triángulo azul} & \\ a_{ij} & & \end{pmatrix}$ , con unos en la diagonal por lo que sus columnas son *linealmente independientes*. Y dado que

$$\mathbf{x}_i^t A \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j \stackrel{!}{=} a_{ij} = \mathbf{y}_i^t \mathbf{y}_j$$

tenemos que el conjunto que verifica lo pedido:


$$\{\text{Col}(L^T)_1, \dots, \text{Col}(L^T)_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

( $\Leftarrow$ ) La hipótesis ahora me dice que tengo vectores *linealmente independientes* y además que con esos vectores me formo la matriz  $A$ . Es decir que  $A = X^t X$ , con  $X$ :

$$X = \left( \mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n \right) \Rightarrow A = X^t X \begin{array}{c} \xleftrightarrow[\mathbf{y} \neq \mathbf{0}]{\times} \\ \Leftrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{y}^t A \mathbf{y} = \mathbf{y}^t X^t X \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^t A \mathbf{y} = (X \mathbf{y})^t X \mathbf{y} = \|X \mathbf{y}\|_2^2 > 0 \end{array}$$

Queda demostrado ya que:

$$\begin{array}{l} A = X^t X \xrightarrow{\text{transpongo}} A^t = (X^t X)^t = X X^t = A \\ \mathbf{y}^t A \mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \xleftrightarrow{\text{def}} A \text{ es definida positiva} \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

### Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX  $\rightarrow$  [una pull request](#) al .

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\|A\|_2 < 1$ , siendo  $\|\cdot\|_2$  la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que  $I - A^t A$  es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz  $\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$  es simétrica definida positiva.

(a) *Para la simetría:*

Transpongo y cruzo los dedos para que quede igual:

$$(I - A^t A)^t \stackrel{\text{linealidad en la trasposición}}{=} I^t - (A^t A)^t = I - A^t A$$

Sobre la linealidad de la transposición:

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \xrightarrow{\text{transpongo}} [A + B]_{ij}^t = [A + B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

Es simétrica.

*Para ver si es definida positiva:*

Intentamos con la definición de *matriz definida positiva* y vemos que sale:

$$I - A^t A \overset{x \neq 0}{\xrightarrow{\times}} x^t(I - A^t A)x = \|x\|_2^2 - x^t A^t A x = \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 = \|x\|_2^2 \left(1 - \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right) \stackrel{!!}{=} \|x\|_2^2 \left(1 - \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right) \star^1$$

Y por la definición de la norma inducida:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \underset{\text{enunciado}}{< 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

queda entonces  $\star^1 \underbrace{\|x\|_2^2}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right)}_{>0} > 0$ :

$$x^t(I - A^t A)x > 0$$

(b) *Para la simetría*: Creo que esto se ve a simple vista:

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$$

*Para ver si es definida positiva*: Acá debería usar *Cholesky resumencito* [acá click click](#) 🍷

⚠  $A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$ , es definida positiva si y solo si  $D$  lo es. Como  $D$  es diagonal, solo es cuestión de ver que  $[D]_{ii} > 0$ . ⚠

Acá surge naturalmente la pregunta de ¿Cómo 🤖 hago la descomposición?.

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & B \end{pmatrix}}^L \overbrace{\begin{pmatrix} I & M^t \\ 0 & B^t \end{pmatrix}}^{L^t} = \begin{pmatrix} I & M^t \\ M & MM^t + BB^t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = M^t \\ A^t = M \\ I = MM^t + BB^t \Leftrightarrow I - A^t A = BB^t \end{cases}$$

Y en un giro totalmente inesperado, al menos por mí, quedó que esa expresión del ítem (a).  $BB^t$  es una matriz simétrica y definida positiva, por lo tanto tiene factorización de Cholesky,

$$C = BB^t = \tilde{B}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{B}^t$$

sé que existe esa matriz diagonal  $D$  que tiene sus elementos positivos.

Por lo tanto esto demuestra que efectivamente las matrices  $L$  y  $L^t$  son las matrices de la descomposición de Cholesky de la matriz del enunciado:

$$C = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = LL^t$$

Como la matriz  $C$  admite descomposición de *Chole*, es simétrica definida positiva.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

🔗 ¿Errores? [Avisá acá](#) así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 15/05/25 @ 13:50 . Chequeá si hay una [versión nueva](#) → [acá](#).

[Ir a índice](#) ↑

**Ejercicio 13.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $K^n$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

(a) Probar que si  $B$  es ortogonal, entonces

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{v_2^*}{\|v_2\|_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{v_n^*}{\|v_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si  $B$  es ortonormal, entonces  $C_{EB} = C_{BE}^*$ .

(c) Concluir que si  $B$  es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector  $v$  en base  $B$  son:

$$(v)_B = (v_1^*v, v_2^*v, \dots, v_n^*v).$$

(d) Calcular  $(v)_B$  siendo  $v = (1, -i, 3)$ ,  $B = \left\{ \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, i) \right\}$ .

(a) Si  $B$  es una *base ortogonal*, una BOG, entonces sus vectores cumplen que:

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} \|v_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para calcular la matriz de cambio de base  $C_{EB}$  hay que calcular *las coordenadas de los vectores canónicos en la base  $B$* : Ojo que esa llave son ecuaciones vectoriales, todo lo que está en **negrita**, **bold** es vector:

$$\begin{cases} e_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots + c_{1n}v_n \xrightarrow[\text{! } v_1^*]{\times \rightarrow} \underbrace{v_1^*}_{\in K} = c_{11}\|v_1\|_2^2 \Leftrightarrow c_{11} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ e_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{2n}v_n \xrightarrow[\text{! } v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{21}\|v_2\|_2^2 \Leftrightarrow c_{21} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \\ \vdots \\ e_n = c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n \xrightarrow[\text{! } v_1^*]{\times \rightarrow} v_1^* = c_{n1}\|v_n\|_2^2 \Leftrightarrow c_{n1} = \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \end{cases}$$

Esos coeficientes  $c_{ij}$  me forman la primera fila,  $c_{ij}$  de la matriz  $C_{EB}$ :

$$(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}) = \left( \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}, \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}, \dots, \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2}$$

Cuando quiera calcular la fila  $j$ -ésima:

$$(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}) = \left( \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}, \dots, \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{v_j^*}{\|v_j\|_2^2}$$

Y así me armo la matriz  $C_{EB}$  generando fila por fila con este método.

(b) Ahora  $B$  es una BON, así que:

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} \|v_i\|_2^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Y con esto la matriz del ítem (a) queda más simple como:

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \star^1$$



La matriz de cambio de base  $C_{EB}$  toma *vectores en coordenadas de E* y da el resultado en *coordenadas de la base B*. Construir el cambio de base  $C_{BE}$ , es inmediato el cálculo de coordenadas haciendo el sistema como en el ítem (a) ¡Quedan los vectores de la base  $B$  conjugados como columnas de la matriz!

$$C_{BE} = \left( \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n \right) \xrightarrow[\Rightarrow *]{\text{transpongo y conjugó}} C_{BE}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{pmatrix} \stackrel{\star^1}{=} C_{EB}$$

Eso funciona así porque:

$$C_{BE}^* C_{EB} = I$$

(c) Sale con el sistemita del ítem (a) nuevamente:

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \xleftrightarrow[\downarrow \mathbf{v}_j^*]{\times \rightarrow} \mathbf{v}_j^* \cdot \mathbf{v} = c_j \underbrace{\|\mathbf{v}_1\|_2^2}_{=1} \Leftrightarrow c_j = \mathbf{v}_j^* \cdot \mathbf{v}$$

(d) Pajilla ☹.  $B$  es una BON. Usando el ítem (c):

$$(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3^*) \stackrel{!}{=} (0, -\frac{2}{\sqrt{2}}i, 3i)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

#### Ejercicio 14. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 15.** En cada uno de los siguientes casos construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla:

- (i)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (ii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (iii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

Acá un poco de cosas de proyectores, click, click 🍷

- (i) Encuentro un *sistema de generadores* de  $\text{Im}(f) = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$ , y dado que el subespacio  $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$ , por ejemplo  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ .

Con esa data defino el proyector:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) &= (-1, 1, 0) \\ f(-1, 0, 1) &= (-1, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) &= (0, 0, 0) \end{cases}$$

Si tomo como base  $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ :

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco  $f$ , para lo cual multiplico por:

$$[C]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{calculo la}} [C]_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[f]_{EE} = [f]_{BE} \cdot [C]_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

(ii) Usando lo mismo de antes pero resuelvo de otra forma: Ahora tengo que una base del  $\text{Nu}(f)$ :

$$B_{\text{Nu}(f)} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

Completo esa base teniendo en cuenta que el vector que agrego va a ser un elemento de la  $\text{Im}(f)$ :

$$B_V = \underbrace{\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}}_{\in \text{Nu}(f)} \underbrace{\{(0, 0, 1)\}}_{\in \text{Im}(f)} = \mathbb{R}^3$$

⚠ Importante que  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = 0$ , en  $\mathbb{R}^3$  parece obvio, pero ya en  $\mathbb{R}^4$  es más engañoso. ⚠

$$\star^1 \begin{cases} f(-1, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ f(-1, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 1) &= (0, 0, 1) \end{cases}$$

Voy a encontrar la expresión funcional de este proyector. La idea es escribir a esa base,  $B_V$ , en función de  $(x_1, x_2, x_3)$  para luego transformarla usando la propiedades de las viejas y queridas *transformaciones lineales*:

$$(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\star^2}{=} a \cdot (-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) + c(0, 0, 1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{sistema en}} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Resolviendo ese sistema obtengo:

$$\begin{cases} a = x_2 \\ b = -x_1 - x_2 \\ c = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases},$$

es decir que  $\star^2$  es:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot (-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1)$$

Aplicando  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_2 \cdot (-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1)) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \cdot f(-1, 1, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot f(-1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot f(0, 0, 1) \\ f(x_1, x_2, x_3) &\stackrel{\star^1}{=} x_2 \cdot (0, 0, 0) + (-x_1 - x_2) \cdot (0, 0, 0) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (0, 0, 1) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Si por alguna razón quiero esto en forma matricial, transformo los canónicos y pongo los transformados como columnas:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ f(0, 1, 0) &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ f(0, 0, 1) &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

(iii) Ahora  $\text{Nu}(f) = \langle (3, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

$$\begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Aprovechando que hay muchos ceros en la matriz, puedo encontrar los transformados de los *vectores canónicos* con un par de cuentas usando nuevamente propiedades de *transformaciones lineales*:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \end{cases} &\xrightarrow{3F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(0, 3, 2) = (3, 3, 3) \end{cases} &\xrightarrow{F_3 - 3F_2 \rightarrow F_3} \begin{cases} f(3, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 2) = (3, 3, 3) \end{cases} \\ & &\xrightarrow{2F_1 - 3F_3 \rightarrow F_1} \begin{cases} f(6, 0, 0) = (-3, -3, -3) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 2) = (3, 3, 3) \end{cases} \\ & &\xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{6}F_1 \rightarrow F_1 \\ \frac{1}{2}F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{cases} f(1, 0, 0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 1) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

En forma matricial quedaría:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando a  $[f]_{EE}$  por  $(x_1, x_2, x_3)$  se obtiene la forma funcional:

$$[f]_{EE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix}$$

A mí me gusta escrito así:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \cdot (-x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐛 naD GarRaz 🐼

## Ejercicio 16.

(a) Sea  $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular  $[f]_B$  y comprobar que  $f$  es un proyector.

(b) Construir un proyector  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$  e  $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ . ¿Es  $f$  una proyección ortogonal?

Acá te dejo resumencito de proyector, click, click 🐼

(a) Para calcular  $[f]_B$  o  $[f]_{BB}$  que me parece más descriptivo:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular  $[f]_{BB}$  hay que calcular las coordenadas en base  $B$  de los transformados de la base  $B$ .

$$\begin{cases} (f(1, -1, 0))_B = (1, -1, 0)_B \stackrel{!}{=} (1, 0, 0) \\ (f(0, 1, -1))_B = (0, 1, -1)_B \stackrel{!}{=} (0, 1, 0) \\ (f(0, 0, 1))_B = (0, 0, 0)_B \stackrel{!}{=} (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Salen a ojo esas coordenadas, porque son los casi mismos vectores que la base  $B$ . Si no lo ves, planteá las combinetas lineales para calcular las coordenadas y vas a llegar a lo mismo.

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $f$  es un proyector, lo va a ser en cualquier base, voy con la definición:  $f \circ f = f$

$$[f]_{BB} \circ [f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [f]_{BB}$$

(b) De ese subespacio saco uno de los muchos sistemas de generadores para  $\text{Im}(f)$ :

$$\text{Im}(f) = \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$$

Propongo un proyector  $f$  con la condición de que  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ :

$$\star^1 \begin{cases} f(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(-3, 0, 1) = (-3, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$



Las cuentas estas que voy a hacer no son necesarias para contestar, pero quiero ver que no me quede simétrico.



Ojo que eso definido en  $\star^1$  sería algo como  $[f]_{BE}$  con  $B = \{(-1, 1, 0), (3, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  para encontrar el proyector es su forma *más mejor*:

$$\begin{cases} f(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(3, 0, 1) = (3, 0, 1) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{no}} \begin{cases} f(1, 0, 0) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \\ f(0, 1, 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}) \\ f(0, 0, 1) = (-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \end{cases}$$

También se podría haber usado lo de la combinación lineal:



$$(x_1, x_2, x_3) = a(-1, -1, 0) + b(3, 0, 1) + c(1, 1, 1)$$



para luego transformarlo y llegar a la expresión funcional de  $f$ . Mirá el ejercicio 15.(b)

El proyector en forma matricial en base  $E$  queda:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El proyector  $P$  no es un proyector ortogonal. Por un lado no se cumple que  $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$ , dado que  $\underbrace{(1, 1, 1)}_{\in \text{Nu}(P)} \cdot \underbrace{(3, 0, 1)}_{\in \text{Im}(P)} \neq 0$ . Además la expresión matricial tampoco cumple  $P = P^t$ .

Se puede encontrar una base en la que el proyector sí va a ser simétrico. En este caso particular:

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

igual que en el ítem (a), pero si bien es simétrica la expresión matricial no se puede concluir en esta base que sea un proyector ortogonal, debería estar expresado en una base ortonormal para ver ese resultado.

Dale las gracias y un poco de amor 🍷 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🍷 naD GarRaz 🍷

**Ejercicio 17.** Sea  $v \in \mathbb{C}^n$  un vector columna tal que  $\|v\|_2 = 1$ . Probar que:

- (a) La transformación lineal definida por la matriz  $vv^*$  es la proyección ortogonal sobre  $\langle v \rangle$ .
- (b) Si  $\{v_1, \dots, v_m\}$  es una base ortonormal del subespacio  $S$ , entonces  $A = \sum_{i=1}^m v_i v_i^*$  es la proyección ortogonal sobre  $S$ .
- (c) Si  $A$  es como en el ítem anterior,  $I - A$  es la proyección ortogonal sobre  $S^\perp$ .
- (d) Eligiendo  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|v\|_2 = 1$ , corroborar gráficamente en Python 🐍 que  $R = I - 2vv^*$  es la reflexión respecto de  $\langle v \rangle^\perp$ .

- (a) Tenemos que:

$$\|v\|_2 = 1 \stackrel{\text{def}}{\iff} v^* \cdot v \stackrel{!}{=} 1$$

Un *proyector ortogonal* sobre  $\langle v \rangle$ ,  $P$  cumple:

$$P \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} v, \quad P \cdot v^\perp \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad P = P^* \quad \text{y} \quad \text{Nu } P \perp \text{Im } P$$

Entonces si esta *gaver*  $vv^*$  cumple eso, ganamos 🏆:

$$\overbrace{vv^*}^P \cdot v \stackrel{!}{=} v(v^* \cdot v) \stackrel{!}{=} v,$$

*that was easy.* Vamos a por la otra. Agarro algún  $w \in \mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} vv^* \cdot \underbrace{(Pw - w)}_{\perp v} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad vv^* \cdot Pw - vv^* \cdot w = 0 \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} \quad v(P^*v)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} \quad v(Pv)^*w - vv^*w = 0 \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad vv^*w - vv^*w \stackrel{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Me doy cuenta que podría haber probado que  $(vv^*)^* = vv^*$  ¿Pero quien me quita lo bailado?:

- (b) Si tengo una base del subespacio, entonces puedo escribir a un vector genérico  $w \in S$  como una combineta de los vectores de la base:

$$w = \sum_{j=1}^m a_j v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$$

Transformo teniendo en cuenta que  $v_i^*(a_j v_j) = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ , recordando que  $\|v_i\|_2 = 1$ :

$$Aw = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* w = \sum_{i=1}^m a_i v_i = w \implies Aw = w$$

Me doy cuenta que podría haber probado que  $A = A^*$  ¿Pero quien me quita lo bailado?:

$$A^* = \left( \sum_{i=1}^m v_i v_i^* \right)^* \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^m (v_i v_i^*)^* = \sum_{i=1}^m v_i v_i^* = A$$

- (c) Medio que usé algo de esto en el ítem (a). Un *proyector ortogonal* sobre  $S$ , va a mandar todo elemento del *complemento ortogonal* de  $S$ ,  $S^\perp$  al 0.

Es decir, si  $w \in S^\perp$ :

$$Aw = 0 \quad \text{y} \quad (I - A)w = w \implies \underbrace{A(I - A)}_w w = (A - A^2)w \stackrel{!}{=} (A - A)w = 0.$$

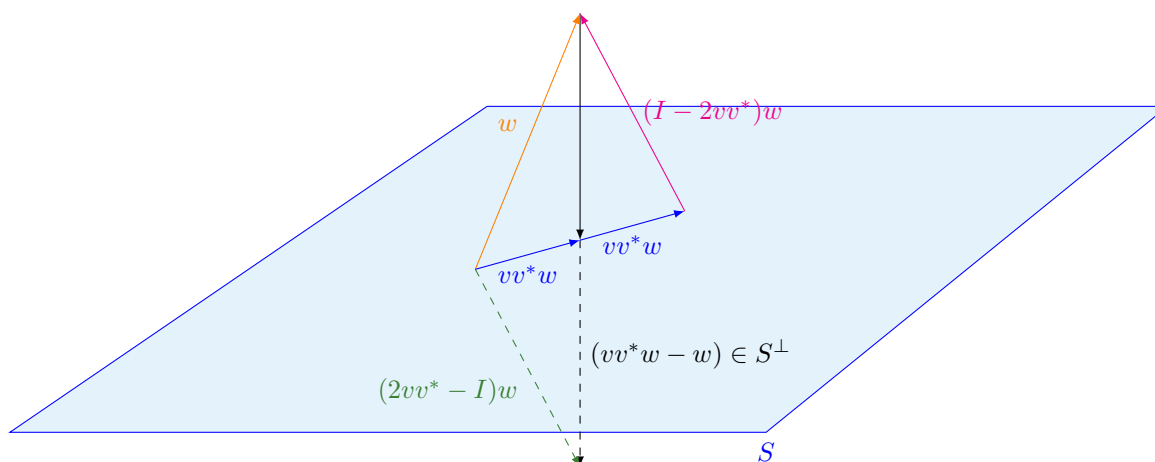
Podemos decir que  $A(I - A)$  es el operador nulo.

En general para cualquier elemento  $v$  del *espacio vectorial*  $V$ : Puedo escribir  $v = s + s^\perp$ , una combinación única de elementos de  $S$  y  $S^\perp$ , ya que  $S \oplus S^\perp$ .

$$A(I - A)v = A(I - A)(s + s^\perp) = A(s + s^\perp - As - As^\perp) = As + As^\perp - As - A^2s^\perp \stackrel{!}{=} 0$$

Los *proyectores ortogonales* cumplen que  $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$ , donde la imagen es el  $S$  al que se proyecta y el núcleo es el  $S^\perp$ .

- (d) Sí, lo sé, esto no es una implementación en Python 🐍.



Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

**Ejercicio 18.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre  $\text{Im}(A)$ .

Una proyección ortogonal  $P$  debe cumplir con que  $\text{Im}(P) \perp \text{Nu}(P)$ :

$$\text{Im}(P) = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(P) = \{(-1, 0, 1)\}$$

Por lo tanto mi candidato a *proyector ortogonal*:

$$\begin{cases} P(1, 0, 1) = (1, 0, 1) \\ P(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ P(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Voy a buscar la expresión funcional del proyector:

$$(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\star^1}{=} a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (-1, 0, 1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{resolver en}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Eso queda:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ b = x_2 \\ c = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{y transformando}]{\text{reemplazando en } \star^1} P(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, x_2, \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \right)$$

🐙 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Transformo los canónicos para hallar  $P$  en forma matricial:

$$[P]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quedó hermosamente simétrico, porque es un *proyector ortogonal* expresado en una *base ortonormal*.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**Ejercicio 19.** Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que son equivalentes:

- (a)  $Q^{-1} = Q^t$ .
- (b) Las columnas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal.
- (c) Las filas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal.
- (d)  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Interpretar (d) geométricamente.

*Sugerencia:* Para demostrar la implicación ((d)  $\implies$  (b)) usar que  $x^t y = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$ .

a) Quiero probar que:

$$\begin{aligned} \text{Si } \underbrace{Q^{-1} = Q^t}_{\text{hipótesis}} &\implies \underbrace{\text{las columnas de } Q \text{ forman un conjunto ortonormal}}_{\text{tesis}} \\ Q^{-1} \cdot Q = I &\xLeftrightarrow{\text{HIP}} Q^t \cdot Q = I \xLeftrightarrow{\text{zoom}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{q}_1^t}{\vdots} \\ \frac{\mathbf{q}_n^t}{\vdots} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^t \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^t \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_1^t \mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n^t \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n^t \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_n^t \mathbf{q}_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estaría quedando que:

$$Q^t Q = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \implies \text{Col}(Q) = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\} \text{ es un conjunto ortonormal}$$

b) Quiero probar que:

$$\text{Si } \underbrace{\text{Col}(Q) \text{ es un conjunto ortonormal}}_{\text{hipótesis}} \implies \underbrace{\text{Fila}(Q) \text{ es un conjunto ortonormal}}_{\text{tesis}}$$

Antes vi que si las columnas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal, entonces  $Q^t Q = I$ .

$$I = Q^t \cdot Q \xLeftrightarrow{!} I = Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{q}_1^t}{\vdots} \\ \frac{\mathbf{q}_n^t}{\vdots} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Fila}_1(Q) \cdot Q^t \\ \vdots \\ \text{Fila}_n(Q) \cdot Q^t \end{pmatrix}}_{\star^1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En  $\star^1$  está de un lado el producto de las filas de  $Q$  con la matriz  $Q^t$  que tiene como columnas a las filas de  $Q$ . Por lo tanto, para la primera fila, el producto con todas las filas de  $Q$  da  $\mathbf{e}_1^t$ , en general voy a tener:

$$\text{Fila}_i(Q) \cdot \text{Fila}_j(Q)^t = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

c) Quiero probar que:

$$\underbrace{\text{Si Fila}(Q) \text{ es un conjunto ortonormal}}_{\text{hipótesis}} \implies \underbrace{\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}_{\text{tesis}}$$

☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

d) ☹... hay que hacerlo! 📄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

**Ejercicio 20.** Hallar la factorización  $QR$  de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Acá un poco de lore  $A = QR$  click click 🐙

a) La matriz no es cuadrada ☹. A la descomposición  $QR$  le chupa un huevo. ¡Gram-Schmidt a  $\text{Col}(A)$ !

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} &\xrightarrow{\text{🔪}} \text{Col}(A)_{\text{BOG}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\xrightarrow{\text{normalizo}} \text{Col}(A)_{\text{BON}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-5}{\|(0,0,-5)\|} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4}{\|(0,0,-4)\|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\xrightarrow[\text{queda}]{\text{cocinado}} \text{Col}(A)_{\text{BON}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Listo, ahora expreso a  $A$  como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_R$$

Fijate que:

$$A = QR \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\times Q^*} Q^*A = \underbrace{Q^*Q}_{I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}} R \overset{\text{triangular superior}}{\uparrow} = R \Leftrightarrow Q^*A = R$$

La  $Q^*$  te triangula la  $A$ .

b) Cuando te ponen una matriz de  $2 \times 2$ , sabés que las cuentas van a ser un cosa horrible:

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} &\xrightarrow{\text{🔪}} \text{Col}(A)_{\text{BOG}} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{28}{25} \\ \frac{21}{25} \end{pmatrix} \right\} \\ &\xrightarrow{\text{normalizo}} \text{Col}(A)_{\text{BON}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{28}{5} \\ \frac{21}{5} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad \text{¡😊 quedó hermosa!}$$

Listo expreso a  $A$  como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}}_R$$





Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

---


### Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X→ *una pull request* al .

---

---


### Ejercicio 22. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X→ *una pull request* al .

---

---



### Ejercicio 23. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X→ *una pull request* al .

---

---

### Ejercicio 24. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X→ *una pull request* al .

---

## 🔥 Ejercicios de parciales:

🔥1. Sea  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$  y las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Probar que no existen matrices  $L$  triangular inferior con unos en la diagonal y  $U$  triangular superior tales que  $C = LU$ .
- Hallar  $P, L, U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tales que  $PP^T = I_3$  y  $PC = LU$  con  $L$  triangular inferior con unos en la diagonal y  $U$  triangular superior.
- ¿Cuántas factorizaciones  $LU$  ( $L$  con unos en la diagonal) existen para la matriz  $CB$ ? Si no existe ninguna, demostrarlo; si existe solo una, hallarla; si existe más de una, decir cuántas y mostrar dos distintas.
- Probar que  $\text{cond}_1(C + B) \rightarrow \infty$  para  $c \rightarrow -3$ .

a) planteo existencia de algo genérico y luego a contradicción.

b) row swap y luego voy a encontrar:

$$P_{13}C = LU \quad \text{con} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → [una pull request](#) al 🐙.

d) Matriz singular a usar:

$$\begin{pmatrix} 1 & c+1 & 0 \\ c & c & 0 \\ c+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

🔥2. Sean  $S_1 = \langle (2, 1, 3) \rangle$  y  $S_2 = \langle (4, 2, 6), (1, 0, 4) \rangle$ .

- Mostrar que  $S_1 \subset S_2$ .
- Sea  $P$  el proyector ortogonal sobre  $S_2$ . Probar que  $S_1 \subset \text{Nu}(I - P^T)$ .
- Calcular la distancia de  $(-2, 6, 4)$  a  $S_2$  usando  $P(-2, 6, 4)$ .

a) Busco ecuación de  $S_2$ :

$$a(4, 2, 6) + b(1, 0, 4) = (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\text{armo sistema}} \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 6 & 4 & x_3 \end{array} \right)$$

resolviendo ese sistema obtengo:

$$B_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / -8x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 0\}$$

Saco de paso y barato mirando los coeficientes de la ecuación de  $S$ :

$$B_{S^\perp} = \{(-4, 5, 1)\}$$

Volviendo al ejercicio ¿ $S_1 \subset S_2$ ? Sí, porque cumple la ecuación del subespacio.

b) La papa está acá  $I - P_{S_2}^t$ , un *proyector ortogonal* cumple que su expresión matricial es simétrica:

$$I - P_{S_2}^t = I - P_{S_2}$$

Por lo tanto si quiero buscar ver si un vector pertenece al núcleo de  $I - \text{Nu}(P_{S_2})$ :

$$S_1 \subset S_2 \implies P_{S_2}(S_1) = S_1$$

Por lo tanto:

$$(I - P_{S_2})S_1 = S_1 - P_{S_2}S_1 = S_1 - S_1 = 0$$

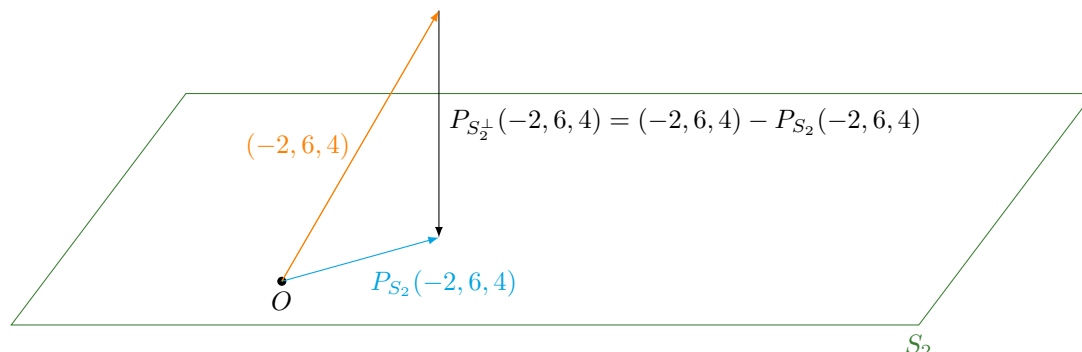
c) La distancia la puedo calcular como :

$$\|(-2, 6, 4) - P_{S_2}(-2, 6, 4)\|$$

Calculo una BON para  $S_2$  y  $S_2^\perp$ :

$$BON_{S_2} = \left\{ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \right\}$$

$$BON_{S_2^\perp} = \left\{ \left( -\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{2}{\sqrt{42}} \right) \right\}$$



Viendo el gráfico conviene calcular para hacer quinientas cuentas menos:

$$\|P_{S_2^\perp}(-2, 6, 4)\| = \left\| \underbrace{\left( (-2, 6, 4) \cdot \left( -\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{2}{\sqrt{42}} \right) \right)}_{\frac{22}{\sqrt{42}}} \left( -\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{2}{\sqrt{42}} \right) \right\| = \left\| \left( \frac{44}{21}, \frac{11}{21}, \frac{22}{21} \right) \right\|$$

Por lo tanto la distancia buscada:

$$d((-2, 6, 4), S_2) = \frac{11}{\sqrt{21}}$$

Oka, decía usando  $P_{S_2}$ , pero, pero... me chupa un huevo.

Pero bueh, ahí queda la base  $BON_{S_2} = \{v_1, v_2\}$ , calculá con  $v = (-2, 4, 6)$ :

$$P_{S_2}(v) = (v_1 \cdot v) \cdot v_1 + (v_2 \cdot v) \cdot v_2$$

eso sería la proyección azul del gráfico, entonces para calcular la longitud del vector negro:

$$\|v - (v_1 \cdot v) \cdot v_1 - (v_2 \cdot v) \cdot v_2\| = d((-2, 6, 4), S_2)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

🔥3. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz inversible con  $A^t A = LL^t$  la factorización de Cholesky de la matriz  $A^t A$ . Si llamamos  $L^{-t} = (L^t)^{-1}$ .

- Probar que  $AL^{-t}$  es una matriz ortogonal.
- Calcular la factorización  $QR$  de  $A$  en función de  $A$  y  $L$ .
- Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^t$$

la factorización de Cholesky de la matriz  $B$ . Sin calcular  $B$  explícitamente, calcular la factorización  $QR$  de  $L$  y usarla para hallar la factorización  $QR$  de  $B$ .

- Una matriz  $A$  es ortogonal si su  $\text{Col}(A)$  es un conjunto *ortonormal*. Más propiedades de estas matrices [acá click click](#) 🎯. Una *matriz ortogonal* tiene por inversa a sí misma transpuesta y conjugada. A ver si pasa eso

$$\begin{aligned} AL^{-t} \cdot (AL^{-t})^t &\stackrel{\text{def}}{=} I \xleftrightarrow[A^t]{\times \rightarrow} A^t AL^{-t} \cdot (AL^{-t})^t = A^t \\ &\Leftrightarrow LL^t (L^t)^{-1} \cdot (AL^{-t})^t = A^t \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} L \cdot (AL^{-t})^t = A^t \\ &\Leftrightarrow L \cdot (L^{-t})^t A^t = A^t \\ &\xleftrightarrow[A]{\times \leftarrow} L \cdot (L^{-t})^t A^t A = A^t A \\ &\Leftrightarrow L \cdot (L^{-t})^t LL^t = A^t A \\ &\Leftrightarrow L \cdot (\textcolor{violet}{L}^t \textcolor{violet}{L}^{-t})^t L^t = A^t A \\ &\Leftrightarrow LL^t \stackrel{\text{def}}{=} A^t A \quad \checkmark \end{aligned}$$

- En el ítem a) se mostró que  $A(L^t)^{-1}$  es una *matriz ortogonal*, al igual que lo debe ser  $Q$ .  $R$  tiene que ser una matriz diagonal superior como lo es  $L^t$  que sale de la descomposición de Cholesky. El resto es historia:

$$A = QR = A(L^t)^{-1} \cdot L^t = A \cdot \underbrace{((L^t)^{-1} \cdot L^t)}_I = A$$

La descomposición  $A = QR$ :

$$A = \underbrace{AL^{-t}}_Q \underbrace{L^t}_R$$

-