

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 18/06/25 @ 10:56

Choose your destiny:

(click click  en el ejercicio para saltar)

☉ [Notas teóricas](#)

☉ Ejercicios de la guía:

1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	??.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	

☉ Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:

18/06/25 @ 10:56

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:



Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

- Hallar una descomposición de Schur $A = UTU^*$, con U unitaria y T triangular superior con los autovalores de la matriz A en la diagonal.
- Descomponer a la matriz T hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal D y una matriz triangular superior S con ceros en la diagonal. Probar que $S^j = 0$ para todo $j \geq 2$.
- Usar los ítems anteriores para calcular A^{10}

- Busco *autovalores* y *autovectores* de A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \quad \text{con} \quad E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1) \right\rangle$$

Solo salieron 2 autovectores del único autovalor $\lambda = 9$. Esto nos dice que la matriz no es diagonalizable. Pero nadie nos pidió que diagonalicemos, así que ahora para encontrar la *descomposición de Schur* expando a una *base ortonormal* de \mathbb{R}^3 :

$$\text{BON} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{5}(-2, -4, 5), \frac{1}{3}(1, 2, 2) \right\}$$

Donde usé Gram Schmidt para calcular el autovector $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$ y también para calcular un **vector extra para formar todo \mathbb{R}^3** .

Entonces tengo ya la base para encontrar la matriz unitaria U_1 :

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora calculo:

$$\begin{aligned} U_1^t A U_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_T \end{aligned}$$

La matriz resultante quedó triangular superior.

Las dos primeras columnas de la matriz T están regaladas, porque son autovectores, entonces $U^t A v_i = \lambda_i e_i$. La tercera columna es parte de la arquitectura que sostiene al infierno.

Por lo tanto se tiene que:

$$U_1^t A U_1 = T \Leftrightarrow A = U_1 T U_1^t$$

$$A = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(b) Descompongo:

$$T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_S$$

Ahora tengo que ver que $S^j = 0 \ \forall j \geq 2$:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hay que calcular A^{10} :

$$A = UTU^t = U(D + S)U^t \stackrel{!}{\Leftrightarrow} A^{10} = U(D + S)^{10}U^t$$

Y ahora esa horrible expresión:

$$(D + S)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (D^k S^{10-k}) \stackrel{!}{=} \binom{10}{10} D^{10} + \binom{10}{9} D^9 S + \underbrace{\binom{10}{8} D^8 S^2 + \dots + \binom{10}{1} D S^9 \binom{10}{0} S^{10}}_0 \stackrel{!}{=} 9 \cdot (D + 10S)$$

Donde usé que justo en este ejercicio D es una matriz escalar, es decir: kI entonces conmuta en el producto, porque sino *esto no funciona ni en pedo*.

Por lo tanto:

$$A^{10} = U(9 \cdot (D + 10S))U^t = 9U(D + 10S)U^t$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n \times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a \mathbb{R} se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n \times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \stackrel{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n \times n}$ hermitiana, probar que existen matrices $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A partir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{aligned} B + iC &= \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \\ &\stackrel{!}{=} A \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n \times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A , es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que S^\perp es invariante por A .

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\begin{array}{c} \in S \\ \uparrow \\ w^* \cdot v = 0 \\ \downarrow \\ \in S^\perp \end{array}$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A :

$$Av = \lambda v \xLeftrightarrow{\times A^*} A^*Av \stackrel{!}{=} A^2\lambda v = \lambda^2 v \stackrel{\star^1}{=} \lambda v \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\in S}{\uparrow} Av = w^* A^* \cdot \overset{\star^1}{=} \lambda (w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \quad \forall w \in S^\perp$.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n \times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

(\Rightarrow)

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\xLeftrightarrow[\rightarrow]{\times v^*} v^*Av = \lambda v^*v \Leftrightarrow v^*Av \stackrel{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2 \\ Av = \lambda v &\Leftrightarrow v^*A^* = \bar{\lambda}v^* \xLeftrightarrow[\leftarrow]{\times v} v^*A^*v = \bar{\lambda}v^*v \Leftrightarrow v^*A^*v \stackrel{\star^2}{=} \bar{\lambda} \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en \star^1 y \star^2 es igual. Por lo tanto $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \xLeftrightarrow[\rightarrow]{\times v} \underbrace{v^*Av}_{>0 \text{ si } v \neq 0} = \lambda v^*v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^*Av_1 \stackrel{!}{=} (Av_2)^*v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 \stackrel{\star^3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^*Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \stackrel{\star^4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando \star^3 y \star^4 :

$$0 \stackrel{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

(⇐) **CONSULTAR, probar por absurdo?**

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A .
 (b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A .

- (a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$. Podría triangular la matriz con $\alpha = -1$, para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

- (b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimiento puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1, -1, 0), (0, 1, -2)\}$$

$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Como estoy en \mathbb{R}^3 no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector $(2, 2, 1)$ funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (0, 1, -2) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Resuelvo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)}_{E_{(\lambda=9)}} \right\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t , dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐛 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de A .
- Dibujar el círculo unitario en \mathbb{R}^2 y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.
- Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

- Quieron encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U \Sigma V^*$$

Voy a calcular $A^* \cdot A$ para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer $A \cdot A^*$ o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calcula}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xrightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \xrightarrow{\text{matriz}} \Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$H v_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ & \text{y} \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \end{cases} \Rightarrow \text{BON} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V , matriz que tiene a los v_i autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U , que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{A v_1}{\sigma_1}, \frac{A v_2}{\sigma_2} \right\} \stackrel{!}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) \right\}$$

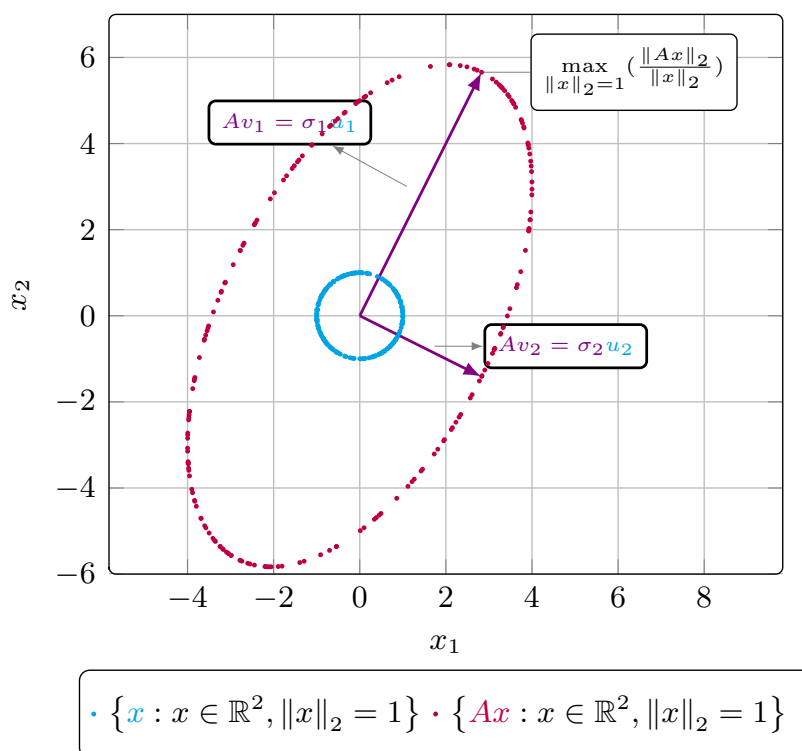
Entonces tengo:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

Scatter para 200 $x/\|x\|_2 = 1$ y para 200 Ax 

(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \star^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo $\|A\|_2$, ahora quiero encontrar $\|A^{-1}\|$:

$$A = U\Sigma V^* \xleftrightarrow[\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}]{\text{invierto}} A^{-1} = (V^*)^{-1} \Sigma^{-1} U^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_2} \xrightarrow[\star^1 \star^2]{\star^2 \text{ finalmente}} \text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si bien esto es una descomposición de A^{-1} ¡No es una *descomposición en valores singulares*!

Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de Σ no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.



Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

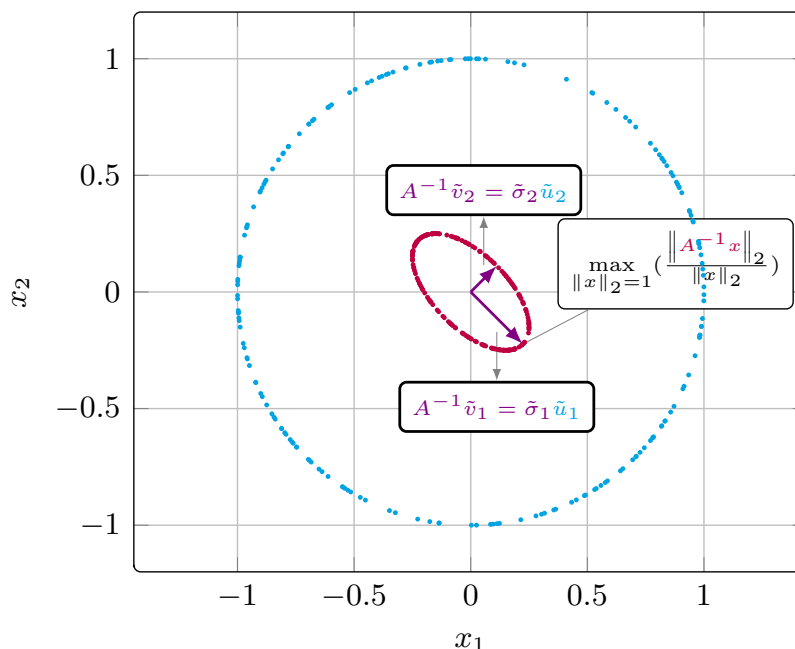
$$\begin{aligned}
 A^{-1} &\stackrel{!}{=} V \Sigma^{-1} U^* \stackrel{!!!}{=} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto columnas}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas y columnas}} \frac{1}{\sqrt{10}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}} \frac{1}{\sqrt{5}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Notar que esa matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de A^{-1} que nadie pidió pero todos queremos:

$$A^{-1} \stackrel{!}{=} \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para A^{-1} :

Scatter para 200 $x / \|x\|_2 = 1$ y para 200 $A^{-1}x$



$$\cdot \{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\} \cdot \{A^{-1}x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐛 naD GarRaz 🐛

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Si

$$A \stackrel{\star}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

llamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa la tonta A^t de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horribles estereotipos de antes, *¡Pero el sombrero es nuevo!*

Voy a calcular la *descomposición en valores singulares* de $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$ porque así me quedo con la versión de 2×2 para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la *convierto* la descomposición a la de A .

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calcula autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar \hat{U} , necesito una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Como solo tengo un $\sigma \neq 0$ voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x, y, z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la *descomposición en valores singulares* de A transpongo:

$$\star^1 A = \hat{A}^t = \hat{V}\hat{\Sigma}^t\hat{U}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Quedó entonces sin el *sombrero*, la SVD de A :

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calcula autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=90} = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle \\ E_{\lambda=10} = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesito ahora encontrar U , necesito una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Como solo tengo dos σ_i voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:


$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con}]{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\|v\|_2$.

Let's calculate los singular values:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

¿Por qué esos números feos?

Calculo *autovalores* de H :

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

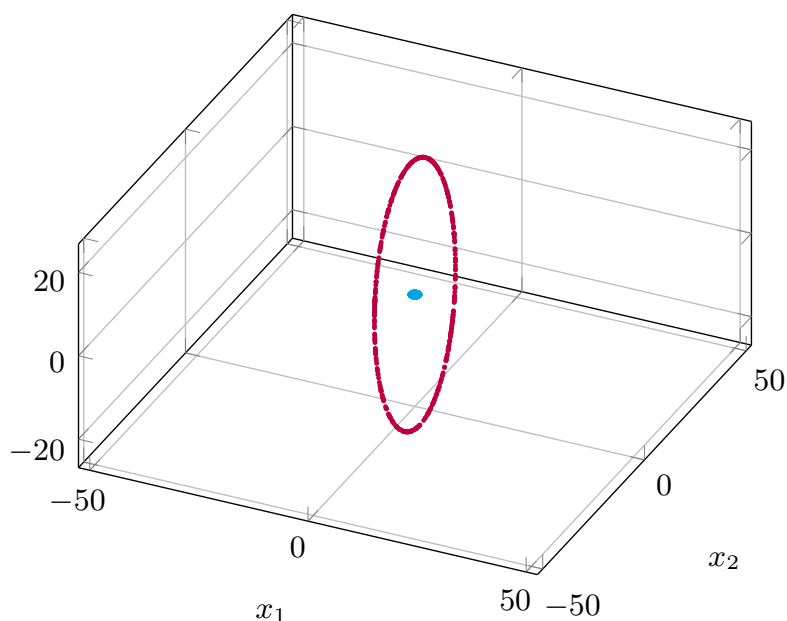
Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\|_2 = 1$ se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \leq \|Av\|_2 \leq \sigma_1 \iff 16.11 \leq \|Av\|_2 \leq 29.62 \Leftrightarrow 15 \leq \|Av\|_2 \leq 30 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \|v\|_2 = 1$$

Scatter para 200 $x/\|x\|_2 = 1$ y para 200 Ax



$$\cdot \{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\} \cdot \{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 10. Mostrar que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene un valor singular nulo si y solo si tiene un autovalor nulo.

(\Leftarrow) Si A tiene un autovalor $\lambda_i = 0$ tiene $\text{Nu}(A) \neq 0$ y existe $Av = 0$ para algún v . Entonces A^*A :

$$A^*Av = 0$$

Por lo tanto A^*A tiene un autovalor nulo y como $\sigma_i^2 = \lambda_i$ hay un valor singular nulo.

(\Rightarrow) Si A es cuadrada, su descomposición *en valores singulares* es el producto de matrices cuadradas:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{calculo}} |A| = |U\Sigma V^*| = |U| \cdot |\Sigma| \cdot |V^*| = 0$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $\neq 0$ $= 0$ $\neq 0$

Porque sigma tiene la forma:

$$[\Sigma]_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases}$$

Y si uno de los $\sigma_i = 0$, buéh, $\det(A) = 0$. Por lo tanto

$$\text{Nu}(A) \neq \{0\}$$

Entonces existe un v tal que:

$$Av = 0 \Leftrightarrow Av = \underset{\lambda_i}{0} \cdot v$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$ donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n \times n}$ y σ_i es el i -ésimo valor singular de A .

🔗... hay que hacerlo! 📧

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 📁.

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de A si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$ es singular, donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n \times n}$.

🔗... hay que hacerlo! 📧

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 📁.

Ejercicio 13. 🔗... hay que hacerlo! 📧

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 📁.

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango r , con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

- Probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.
- Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz A_s que satisfice:

$$\|A - A_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: A_s resulta ser la mejor aproximación a A (en norma 2), entre todas las matrices de rango s .

- Para el caso en que la matriz A tiene más filas que columnas, es decir que $m > n$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ m \times n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \times m \\ \downarrow \end{matrix} & U \Sigma V^t & \begin{matrix} n \times n \\ \downarrow \end{matrix} \end{matrix}$$

Donde la Σ tiene a los r valores singulares no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^r \hat{\Sigma}_i,$$

donde las $\hat{\Sigma}_i$ son las matrices de $m \times n$ que tienen solo al valor singular σ_i en la posición ii y ceros en los demás lugares. La suma es hasta r dado que el resto de los $n - r$ demás valores singulares son nulos, por lo tanto las $\hat{\Sigma}_i$ con $i > r$ son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que A se puede expresar como una suma de r matrices singulares de $\text{rg}(\Sigma_i) = 1$, dado que solo tienen una columna no nula.

- Dado $s < r$ puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^s U \hat{\Sigma}_i V^t}_{A_s} + \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t \Leftrightarrow A - A_s = \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t$$

Ahora tomo norma a $A - A_s$:

$$\|A - A_s\|_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^r U \hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los *valores singulares*.

Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz A funciona como una transformación que *escala* a un vector v al hacer Av . Esa escala es proporcional a los *valores singulares*. La matriz A_s , es entonces similar o cercana a A , ya que tiene las *mismas* s mayores componentes de mayor escalamiento.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

Ejercicio 15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a A en norma 2.
- Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.

- Tengo que calcular la *descomposición en valores singulares*:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco autovalores de H :

$$|H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, 9, 25\} \text{ y autovectores } H v_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=25} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle \\ E_{\lambda=4} = \langle (0, 0, 1) \rangle \end{cases}$$

Los autovalores de una matriz simétrica resultaron todos distintos, por lo tanto los autovectores resultaron ortogonales. Por lo tanto tengo a la matriz V y Σ :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora necesito la U , que la consigo con una BON:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}, \frac{Av_3}{\sigma_3} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:


$$A = U \Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz de rango 2 que mejor aproxima a A :

$$B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


(b) La de rango 1:

$$B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!


Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicio 22. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al .

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una *pull request* al .
