Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 27/03/25 @ 13:12

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**4.**	**7.**	**10.**	**13.**	**16.**	**19.**
2.	**5.**	**8.**	**11.**	**14.**	**17.**	**20.**
3.	**6.**	**9.**	**12.**	**15.**	**18.**	**21.**

- Ejercicios de Parciales

🔥**1.**

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:
27/03/25 @ 13:12
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

Espacios Vectoriales: Palabras guías
En un conjunto $A \neq \varnothing$

- *Operación:* $(a * b) = c$. Es una función $* : A \times A \to A$

  i) $*$ es *asociativa* si $(a * b) * c = a * (b * c)\ \ \forall a, b, c \in A$.
  ii) $*$ *tiene elemento neutro* e si $e * a = a * e = a\ \ \forall a \in A$.
  iii) si $*$ *tiene elemento neutro* e todo elemento tiene *inverso* para $*$ si $\ \forall a \in A \quad a * a' = a' * a = e$.
  iv) $*$ es *conmutativa* si $a * b = b * a\ \ \forall a, b \in A$.

- *Grupo:* $(A, *)$ es un grupo si se satisfacen i), ii)y iii). Si además se satisface iv) se tiene un *grupo abeliano o conmutativo.*

- *Anillo:* $(A, +, \cdot)$. Para ser anillo se debe cumplir:

  i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo.
  ii) $\cdot$ es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
  iii) Vale distribuir: $\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$

  Si además de cumplir eso, $\cdot$ es conmutativa $(A, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo.*

- *Cuerpo* $(K, +, \cdot)$*:* Un conjunto K, $+$ y $\cdot$ operaciones de K, es un cuerpo si $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso.

  i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo,
  ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y
  iii) vale la propiedad distributiva de $\cdot$ con respecto a $+$.

- *Acción* $\cdot$*:* es una función $\cdot : A \times B \to B$.

- *$K-$espacio vectorial:* Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en V y sea $\cdot$ una acción de K en V. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un $K-$*espacio vectorial* si se cumplen las siguiente condiciones:

  i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.
  ii) La acción $\cdot$: $K \times V \to V$ satisface:
     a) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w\ \ \forall a \in K;\ \ \forall v, w \in V$.
     b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
     c) $1 \cdot v = v\ \ \forall v \in V$.
     d) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)\ \ \forall a, b \in K;\ \ \forall v \in V$.

  Los elementos de V son *vectores* y los elementos de K se llaman *escalares.* La acción $\cdot$ se llama *producto por escalares.*
  ⚠Dejo de escribir a "$\cdot$" en rojo, porque no hay problema cuando el punto "$\cdot$" actúa sobre un elemento de K y uno de V o entre 2 de K.

- *Subespacios:* Subconjunto de un $K-$ espacio vectorial. Sea V un $K-$espacio vectoria y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y solo si valen las siguientes condiciones:

  i) $0 \in S$
  ii) $v, w \in S \implies v + w \in S$
  iii) $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$.

Repaso determinante:

$_{1)}$ *Cálculo de determinantes:*

- Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Big/ \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n} (n \geq 2)$, un ejemplo con $n = 3$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$_{2)}$ *Clasificación de un sistema a partir de su determinante:*

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\mathbf{b}=0]{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = 0$$

- Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} \text{si} \quad |A| \neq 0 \xrightarrow[\text{tengo}]{\text{seguro}} \boxed{\text{S.C.D.}} \to \boxed{\text{UNA SOLA SOLUCIÓN}} \to \boxed{\text{A ES INVERSIBLE}} \\ \text{si} \quad |A| = 0 \xrightarrow[\text{casos}]{\text{dos}} \begin{cases} \text{si} \quad A \cdot \mathbf{x} = 0 \xrightarrow[\text{entonces}]{\text{tengo}} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{si} \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\text{de } \mathbf{b}]{\text{tengo dependiendo}} \begin{cases} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{o} \\ \boxed{\text{S.I.}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando `np.lianlg.solve`.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases}$

(a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5} \cdot F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 & \overset{\star^2 \text{ y } \star^1}{\Longleftrightarrow} & x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = -\frac{9}{5} & \overset{\star^1}{\Longleftrightarrow} & x_2 \overset{\star^2}{=} -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5} & \Leftrightarrow & x_3 \overset{\star^1}{=} -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right)$$

paso a sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \overset{\star^2 \text{ y } \star^1}{\Longleftrightarrow} & x_1 = -x_3 + 2x_3 + x_3 = 2x_3 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 & \overset{\star^1}{\Longleftrightarrow} & x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 \overset{\star^2}{=} x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 & \Leftrightarrow & x_4 \overset{\star^1}{=} -x_3 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Como el item anterior, mas incognitas que ecuaciones, asi que no tiene solución única.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como en la ultima ecuación quedó que $0 = -1$, no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \overset{\star 1}{\iff} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 &= 0 \iff x_4 \overset{\star 1}{=} \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de $\times$ y $\div$ por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \xrightarrow{z\,=\,a\,+\,ib} \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{i}F_1 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 \to F_1 \\ F_3 \to F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 1+i & -1 & i \end{array}\right)$$

$$F_2 + F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tuqui. Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 &= i & \to & x_1 = i + (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 &= -i & \to & x_3 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1-i)\cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 &= 0 & \to & x_1 = (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 &= 0 & \to & x_3 = (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)\cdot x_2 \\ x_2 \\ (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}}$$

(d) Hay mas incognitas que ecuaciones, no va a tener solución unica.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array}\right) \quad 2F_2 + F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 & \to & x_4 \overset{\bigstar 1}{=} 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 &= 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 - 4 \overset{\bigstar 1}{=} (5+i)x_2 + 11(2 - 2x_1 + (1-i)x_2) - 4 =$$

$$= (5+i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11-11i)x_2 - 4 = (16-10i)x_2 - 22x_1 + 18$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{como} \quad \text{arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 0 \end{array}\right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 0 \quad \to \quad x_4 \overset{\star^1}{=} -2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 &= 0 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 \overset{\star^1}{=} (5+i)x_2 + 11(-2x_1 + (1-i)x_2) =$$

$$= (5+i)x_2 - 22x_1 + (11-11i)x_2 = (16-10i)x_2 - 22x_1$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \\ -2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz   Tomás A.

Ejercicio 2.

(a) Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

(a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$
$$= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Por lo tanto sé que para que el sistema no tenga solución única debe ocurrir que:

$$\boxed{k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1}$$

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No hay solución con $k = 1$

Si $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \star^1$$

Habrá infinitas soluciones con $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso $k = -1$:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2 x_3 & = 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 & = 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes ($\star^1$) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ -2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1), (2,2)$ y $(3,0)$. Verificar el resultado obtenido usando Python. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt  # librería para graficar.

# ...
# Acá , crear la matriz y resolver el sistema para calcularl a , b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100)  # genera100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c  # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{3}{2} \\ b &= \frac{11}{2} \\ c &= -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3}$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100)  # genera100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0;\ x - y = 0\}$

(b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$

(c) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(\mathbf{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

(a) $\langle 1, 1, 2\rangle$

(b) Describo a $\mathbf{A}$ y a $-\mathbf{A}^t$ como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \le i, j \le 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \le i, j \le 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientas que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \overset{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ -a_{ji} & \text{si} \quad i \ne j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S+T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = \langle (1,1,0),\ (5,7,3) \rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle$ y $T = \langle (1,1,0),\ (3,2,1) \rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji}\ \ \forall i,j\}$ y $T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 33 - i), (4, 1 - i, 0) \rangle$ y $T = \{(x \in \mathbb{C}^3) : (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

(d) S es un subespacios describiendo matrices *simétricas*, es decir que $A = A^T$ y T el subespacio con matrices de traza 0, es decir, $\sum t_{ii} = 0$. Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{22}+t_{33}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{22}+x_{33}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T. El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$\boxed{S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo $\mathbb{R}^{3\times 3}$ a ver que onda la dimensión:

$$\boxed{\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9}$$

Tuqui.

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$.

(b) $S \cap T = \langle (0,1,1) \rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1,k,2), (-1,2,k) \rangle$.

(a) Lo primero que quiero hacer es que los generadores sean *linealmente independientes* y porque me gusta determinantes ☺:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{F_2+F_3 \to F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (k^2+k-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (k^2+k-2)\cdot(-1+k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Así me saco el tema de las k de encima, pero bueh todavía no se termina:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle \overset{?}{=} \begin{cases} \langle(1,-2,-4),(-1,-1,2),(1,1,-2)\rangle = \langle(1,-2,-4),(1,1,-2)\rangle & \text{si} \quad k=-2 \\ \langle(1,1,2),(-1,-1,-1),(1,1,1)\rangle = \langle(1,1,2),(1,1,1)\rangle & \text{si} \quad k=1 \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver si se intersectan en todos sus elementos. Voy a buscar la expresión por comprensión de $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2+2F_1 \to F_2 \\ F_3-6F_1 \to F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1+2x_2 \\ 0 & -8 & x_3-6x_2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{3}F_2 \to F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3-6x_2 \end{array}\right) \overset{F_3+8F_2 \to F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+x_3 \end{array}\right)$$

Dado que ese sistema no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es $\varnothing$ se debe cumplir:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\right\} \bigstar^1$$

Encontrar la intersección ahora es fácil:

Caso con $k=-2$:

$$(a+b,-2a+b,-4a-2b) \xrightarrow[\bigstar^1]{\text{meto en}} 8(a+b)-2(-2a+b)+3(-4a-2b) = 0 \ \forall a \text{ y } b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con $k=-2$

Caso con $k=1$:

$$(a+b,a+b,2a+b) \xrightarrow[\bigstar^1]{\text{meto en}} 8(a+b)-2(a+b)+3(2a+b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluímos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$\boxed{k=-2}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Hay que probar que:

$$S \cup T \text{ es subespacio } \Leftrightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$$

CONSULTAR, no me cierra el enunciado

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1,4,-1,3),(2,1,-3,1),(0,2,1,-5)\} \in \mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i,i),(2,-1+i)\} \in \mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

Un poco de teoría:

Combinación lineal:

Sea V un $K-$espacio vectorial, y sea $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$. Una *combinación lineal de G* es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

Independencia lineal: Sea V un $K-$espacio vectorial y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V. Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *linealmente independiente* (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \cdot v_\alpha = 0 \implies a_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$$

Todo muy lindo.

(a)

$$a \cdot (1,4,-1,3) + b \cdot (2,1,-3,1) + c \cdot (0,2,1,-5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{triangulando}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}}$$

Los vectores son *linealmente independientes.*

(b) Ahora los coeficientes α y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha \cdot (1-i,i) + \beta \cdot (2,-1+i) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & -1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{1-i} \cdot F_1 \to F_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ i & -1+i & 0 \end{array}\right) \ F_2 - i \cdot F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\{ \ \alpha = (1+i)\beta}$$

Y estos bichos <u>no</u> serían *linealmente independientes.*

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 13.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .