### Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

# Por alumnos de ALC Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

última actualización 26/03/25 @ 12:24

### Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	4.	<b>7.</b>	<b>10.</b>	<b>13.</b>	<b>16.</b>	19.
<b>2.</b>	<b>5.</b>	8.	11.	<b>14.</b>	<b>17.</b>	<b>20.</b>
<b>3.</b>	<b>6.</b>	9.	<b>12.</b>	<b>15.</b>	18.	<b>21.</b>

• Ejercicios de Parciales



## Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez: $\frac{26/03/25 \ @\ 12:24}{}$

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:



El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram <a>.</a>



#### Notas teóricas:

Espacios Vectoriales: Palabras guías

En un conjunto  $A \neq \emptyset$ 

- \* Operación: (a\*b) = c. Es una función  $*: A \times A \rightarrow A$ 
  - i) \* es asociativa si  $(a*b)*c = a*(b*c) \forall a,b,c \in A$ .
  - ii) \* tiene elemento neutro e si  $e * a = a * e = a \ \forall a \in A$ .
  - iii) si \* tiene elemento neutro e todo elemento tiene inverso para \* si  $\forall a \in A \ a * a' = a' * a = e$ .
  - iv) \* es conmutativa si  $a * b = b * a \ \forall a, b \in A$ .
- \* Grupo: (A,\*) es un grupo si se satisfacen i), ii)y iii). Si además se satisface iv) se tiene un grupo abeliano o conmutativo.
- \* Anillo:  $(A, +, \cdot)$ . Para ser anillo se debe cumplir:
  - i) (A, +) es un grupo abeliano o conmutativo.
  - ii) · es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
  - iii) Vale distribuir:  $\left\{ \begin{array}{l} a\cdot (b+c) = a\cdot b + a\cdot c \\ (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a \end{array} \right.$

Si además de cumplir eso,  $\cdot$  es conmutativa  $(A, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo.

- \* Cuerpo  $(K, +, \cdot)$ : Un conjunto  $K, + y \cdot$  operaciones de K, es un cuerpo si  $(K, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso.
  - i) (A, +) es un grupo abeliano o conmutativo,
  - ii)  $(K \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano, y
  - iii) vale la propiedad distributiva de · con respecto a +.
- \*  $Acción :: es una función :: A \times B \to B$ .
- \*  $K-espacio\ vectorial$ : Sea  $(K,+,\cdot)$  un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea + una operación en V y sea  $\cdot$  una acción de K en V. Se dice que  $(V,+,\cdot)$  es un  $K-espacio\ vectorial$  si se cumplen las siguiente condiciones:
  - i) (V, +) es un grupo abeliano.
  - ii) La acción  $: K \times V \to V$  satisface:
    - a)  $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \ \forall a \in K; \ \forall v, w \in V.$
    - b)  $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
    - c)  $1 \cdot v = v \ \forall v \in V$ .
    - d)  $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \ \forall a, b \in K; \ \forall v \in V.$

Los elementos de V son vectores y los elementos de K se llaman escalares. La acción  $\cdot$  se llama producto por escalares.

 $\triangle$ Dejo de escribir a "·" en rojo, porque no hay problema cuando el punto "·" actúa sobre un elemento de K y uno de V o entre 2 de K.

- \* Subespacios: Subconjunto de un K- espacio vectorial. Sea V un K- espacio vectoria y sea  $S\subseteq V$ . Entonces S es un subespacio de V si y solo si valen las siguientes condiciones:
  - i)  $0 \in S$
  - ii)  $v, w \in S \implies v + w \in S$
  - iii)  $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$ .

Repaso determinante:

••• Cálculo de determinantes:

**a** Si 
$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**A** Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (n \ge 2)$ , un ejemplo con n = 3:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

▲ Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

•• Clasificación de un sistema a partir de su determinante:

à Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

▲ Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

▲ En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = 0$$

▲ Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

#### Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asosciados en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{C}$ . Si la solución única, puede verificarse el resultado en Python utilizando el comando np.lianlg.solve.

(a) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$
 (c) 
$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$
 (d) 
$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases}$$

(a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\
3 & -2 & 1 & 5 & | & 3 \\
1 & -1 & 1 & 2 & | & 2
\end{pmatrix}
\quad
F_2 - 3F_1 \to F_2
\quad
F_3 - F_1 \to F_3
\quad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\
0 & -5 & 5 & 2 & | & 9 \\
0 & -2 & 3 & 1 & | & 4
\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{5} \cdot F_2 \to F_2
\quad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\
0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & | & -\frac{9}{5} \\
0 & -2 & 3 & 1 & | & 4
\end{pmatrix}$$

$$F_3 + 2F_2 \to F_3
\quad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\
0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & | & -\frac{9}{5} \\
0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}
\end{pmatrix}$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 & \stackrel{\bigstar^2 \text{ y } \bigstar^1}{\Longrightarrow} & x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 &= -\frac{9}{5} & \stackrel{\bigstar^1}{\Longrightarrow} & x_2 \stackrel{\bigstar^2}{=} -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= \frac{2}{5} & \Leftrightarrow & x_3 \stackrel{\bigstar^1}{=} -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Como el item anterior, mas incognitas que ecuaciones, asi que no tiene solución única.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$F_3 - 2F_2 \to F_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como en la ultima ecuación quedó que 0=-1, no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad Como \ arriba \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \iff x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 &= 0 \iff x_4 \triangleq \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de × y ÷ por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \xrightarrow{z = a + ib} \quad \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 &= -1\\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\ x_1 + 2ix_2 - x_3 &= 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} i & -1-i & 0 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2i & -1 & | & 2i \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{i}F_1 \to F_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 0 & | & i \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2i & -1 & | & 2i \end{pmatrix}$$

$$F_2 \to F_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 0 & | & i \\ 0 & -1-i & 1 & | & -i \\ 0 & 1+i & -1 & | & i \end{pmatrix}$$

$$F_2 + F_3 \to F_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 0 & | & i \\ 0 & -1-i & 1 & | & -i \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tuqui. Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 = i \to x_1 = i + (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 = -i \to x_3 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1-i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

(d) Hay mas incognitas que ecuaciones, no va a tener solución unica.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array} \right) \quad 2F_2+F_1 \to F_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= 2 \to x_4 \stackrel{\bigstar}{=} 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 &= 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de  $x_4$  en la otra ecuación:

$$6ix_3 = (5+i)x_2 + 11x_4 - 4 \stackrel{\text{def}}{=} (5+i)x_2 + 11(2-2x_1 + (1-i)x_2) - 4 =$$

$$= (5+i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11-11i)x_2 - 4 = (16-10i)x_2 - 22x_1 + 18$$

$$x_3 = \frac{(16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8 - 5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$
$$x_3 = -\frac{(-15 - 24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5 - 8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i$$

Yo estaba buscando algo de la pinta  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 😱

👸 Tomás A. 😱

#### Ejercicio 2.

(a) Determinar los valores  $k \in \mathbb{R}$  para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1\\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1\\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

- (b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.
- (a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$
$$= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Por lo tanto sé que para que el sistema no tenga solución única debe ocurrir que:

$$k=1$$
 o  $k=-1$ 

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda indeterminado o incompatible

Si k = 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 - 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

No hay solución con k=1

Si k = -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 - 2 & | & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Habrá infinitas soluciones con k = -1

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso k = -1:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2 x_3 &= 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1 - 2)x_3 &= 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes (★¹) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 4x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor 💚 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 🞧

#### Ejercicio 3. S... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución o al grupo de Telegram o, o mejor aún si querés subirlo en LoTeXo una pull request al o

**Ejercicio 4.** Encontrar los coeficientes de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos (1,1),(2,2) y (3,0). Verificar el resultado obtenido usando Python  $\clubsuit$ . Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # librería para graficar.

# ...
# Acá , crear la matriz y resolver el sistema para calcularl a , b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # general00 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right)$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

∆ Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien ∆

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # general00 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Dale las gracias y un poco de amor 💚 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 🞧

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y z = 0; \ x y = 0\}$
- (b)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d)  $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 ix_4 = 0; ix_1 + (1+i)x_2 x_3 = 0\}$

- (a) (1, 1, 2)
- (b) Describo a  $\mathbf{A}$  y a  $-\mathbf{A}^t$  como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \le i, j \le 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \le i, j \le 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal no se mueven, solo cambian de signo, mientas que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ -a_{ji} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \, \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right); \, \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \right\rangle$$

(C) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🤡, o mejor aún si querés subirlo en IATFX→ una *pull request* al 📢

(d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{PX}$  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 😱

#### Ejercicio 6. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución o al grupo de Telegram  $oldsymbol{rac{1}{2}}$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEXo una pull request al  $oldsymbol{rac{1}{2}}$ 

**Ejercicio 7.** Hallar un sistema de generadores para  $S \cap T$  y para S + T como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) 
$$V = \mathbb{R}^3$$
,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$ .

(b) 
$$V = \mathbb{R}^3$$
,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$ .

(c) 
$$V = \mathbb{R}^3$$
,  $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$ .

(d) 
$$V = \mathbb{R}^{3\times3}$$
,  $S = \{(x_{ij})/x_{ij} = x_{ji} \ \forall i,j\}$  y  $T = \{(x_{ij})/x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$ 

(e) 
$$V = \mathbb{C}^3$$
,  $S = \langle (i, 1, 33 - i), (4, 1 - i, 0) \rangle$  y  $T = \{ (x \in \mathbb{C}^3) : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \}$ .

(a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ 

(b) a hav que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{P}X\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

(d) S es un subespacios describiendo matrices sim'etricas, es decir que  $A=A^T$  y T el subespacio con matrices de traza 0, es decir,  $\sum t_{ii} = 0$ . Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{22} + t_{33}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{22} + x_{33}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T. El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$S \cap T = \left\langle \left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \, \left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \, \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \, \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right); \, \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo  $\mathbb{R}^{3\times3}$  a ver que onda la dimensión:

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9$$

Tuqui.

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATFX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ 

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 🞧

**Ejercicio 8.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales:

- (a)  $\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$ .
- (b)  $S \cap T = \langle (0,1,1) \rangle$  siendo  $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1,k,2), (-1,2,k) \rangle$ .
- (a) Lo primero que quiero hacer es que los generadores sean linealmente independientes y porque me gusta determinantes ⊚:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} F_2 + F_3 \to F_3 \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & k^2 + k - 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (k^2 + k - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (k^2 + k - 2) \cdot (-1 + k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Así me saco el tema de las k de encima, pero bueh todavía no se termina:

$$\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle \stackrel{?}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \langle (1,-2,-4), (-1,-1,2), (1,1,-2) \rangle = \langle (1,-2,-4), (1,1,-2) \rangle & \text{si} \quad k=-2 \\ \langle (1,1,2), (-1,-1,-1), (1,1,1) \rangle = \langle (1,1,2), (1,1,1) \rangle & \text{si} \quad k=1 \end{array} \right.$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver si se intersectan en todos sus elementos. Voy a buscar la expresión por comprensión de  $\langle (-2,1,6),(3,0,-8)\rangle$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & | & x_1 \\ 1 & 0 & | & x_2 \\ 6 & -8 & | & x_3 \end{pmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_2 \\ -2 & 3 & | & x_1 \\ 6 & -8 & | & x_3 \end{pmatrix} F_2 + 2F_1 \to F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_2 \\ 0 & 3 & | & x_1 + 2x_2 \\ 0 & -8 & | & x_3 - 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}F_2 \to F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_2 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & | & x_3 - 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 + 8F_2 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_2 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & | & \frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Dado que ese sistema no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es Ø se debe cumplir:

$$\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \} \star^{1}$$

Encontrar la intersección ahora es fácil:

Caso con k = -2:

$$(a+b, -2a+b, -4a-2b) \xrightarrow{\text{meto en}} 8(a+b) - 2(-2a+b) + 3(-4a-2b) = 0 \ \forall a \ y \ b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con k = -2

Caso con k = 1:

$$(a+b, a+b, 2a+b) \xrightarrow{\text{meto en}} 8(a+b) - 2(a+b) + 3(2a+b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluímos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$k = -2$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ 

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 naD GarRaz 🞧

**Ejercicio 9.** Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que  $S \cup T$  es un subespacio de V si y solo si  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ .

Hay que probar que:

$$S \cup T$$
 es subespacio  $\Leftrightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$ 

CONSULTAR, no me cierra el enunciado

Ejercicio 10. O... hay que hacerlo!

Ejercicio 11. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT<sub>F</sub>X $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ 

Ejercicio 12. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 13. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 14. O... hay que hacerlo! 😚

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{\rm E}$ X $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 15. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 16. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 17. O... hay que hacerlo! 😚

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{\rm E}$ X $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 18. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución o al grupo de Telegram o, o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{
m EX}$ o una pull request al o.

Ejercicio 19. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IAT $_{\rm E}$ X $\rightarrow$  una  $pull\ request$  al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 20. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .

Ejercicio 21. O... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX  $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .



**1.** ⊚... hay que hacerlo! ♠

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram  $\bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en IATEX $\rightarrow$  una pull request al  $\bigcirc$ .