Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/04/25 @ 12:27

Choose your destiny:

(dobleclick en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:
05/04/25 @ 12:27
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

Transformaciones lineales

- Dados V y W dos $K-$espacio vectoriales, una $f : V \to W$ es *transformación lineal* si cumple:
  - $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v, w \in V$
  - $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \qquad \forall \alpha \in K, v \in V$
- $f : K^n \to K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in K^{n\times 1}}\Big) \overset{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{f(e_i)}_{\in K^{m\times 1}} = \underbrace{\Big(\ f(e_1)\ \Big|\ \cdots\ \Big|\ f(e_n)\ \Big)}_{A \in K^{m\times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m\times 1}}$$

- *Matriz de una transformación lineal:*

  Dados V y W dos $K-$espacios vectoriales y $f : V \to W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \cdots, v_2\}$ base de V y $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \qquad \forall v \in V$$

Aritmética de punto flotante:

- *Escribir* 0.25 *en base* 10:

  Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 &= 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 &= 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 &= 0 + 0 \end{cases} \to (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

  Escribir 0.25 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 &= 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 &= 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 &= 0 + 0 \end{cases} \to (0.25)_{2} = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

  Escribir 0.3 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 &= 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 &= 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 &= 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 &= 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 &= 1 + 0.6 \\ \vdots &= \vdots \end{cases} \to (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \cdots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

  Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

  Errores:

  Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

  En base 10 $\to x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$ con $0 \le a_i \le 9 (a_1 \ne 0)$
  En base 2 $\to x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$ con $0 \le a_i \le 1 (a_1 \ne 0)$

Por ejemplo si $m = 3 \implies x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de exp voy a tener un total de $\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{2}} \cdot \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{2}} = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m, por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

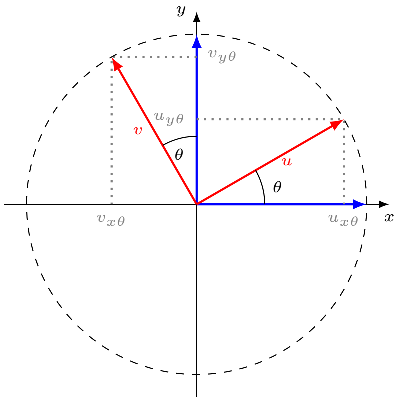
Y en forma relativa como:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (ponele):
Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0}_{\bigstar^1} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0}_{\bigstar^2} = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y $\bigstar^1$:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\underset{\downarrow}{\overset{!}{=}}} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y $\bigstar^2$:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\underset{\downarrow}{\overset{!}{=}}} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d)

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Ahora veo:

$$f(v) + f(w) = (y_1 - 3x_1 + \sqrt{2}z_1, x_1 - \frac{1}{2}y_1) + (y_2 - 3x_2 + \sqrt{2}z_2, x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $v = (x, y, z)$. Entonces,

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y)$$

$$= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z)$$

El producto es lineal

f es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, la suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera A y B:

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(d) Veo que valga la suma:

Sea A, B matrices cualesquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A + B) = \begin{pmatrix} (a_{22} + b_{22}) & 0 & (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) \\ 0 & (a_{11} + b_{11}) & (a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) \end{pmatrix}$$

Ahora miro,

$$f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & b_{12} + b_{21} \\ 0 & b_{11} & b_{22} - b_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22} + b_{22} & 0 & (a_{12} + a_{21}) + (b_{12} + b_{21}) \\ 0 & a_{11} + b_{11} & (a_{22} - a_{11}) + (b_{22} - b_{11}) \end{pmatrix}$$

La suma es lineal.

Ahora veo el producto:

$$f(\alpha A) = f \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{22} & 0 & \alpha(a_{12} + a_{21}) \\ 0 & \alpha a_{11} & \alpha(a_{22} - a_{11}) \end{pmatrix} = \alpha f(A)$$

El producto y la suma son lineales, f es transformacion lineal

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Juan D Elia

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al.

Ejercicio 22.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 23.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 24.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 25.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales: