Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 22/06/25 @ 22:40

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:
22/06/25 @ 22:40

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

- *Descomposición en valores singulares*:

  Tengo una matriz $A \in K^{m\times n}$
  $$A = U\Sigma V^*$$
  Con U y V matrices unitarias, por lo tanto cuadradas, simétricas $\left\{ \begin{array}{l} U^*U = I \\ V^*V = I \end{array} \right\}$, y $\Sigma \in K^{m\times n}$ el mismo tamaño que A.

  - Para obtener Σ calulo los valores $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde:
    $$A^*Av_i = \lambda_i v_i$$
    y luego ordeno los elementos diagonales $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$ de mayor a menor. Completo con *fila o columas de ceros*, hasta llegar a la dimesión correcta.
  - Para obtener la matriz V pongo a los v_i calculados previamente como columnas en orden correspondiente a su σ_i.
  - Para calcular U:
    $$Av_i = U\Sigma V^* v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \Leftrightarrow \boxed{Av_i = \sigma_i u_i}$$

  De ese último resultado se desprende info de la matriz A. Como $A \in K^{m\times n}$ con $(m > n)$ tiene rango $r < n$:
  $$\text{Nu}(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \quad \text{y} \quad \text{Im}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

- *Pseudo-inversa:*

  Si se tiene una $A \in K^{m\times n}$
  $$A = U\Sigma V^* \xRightarrow[\text{inversa}]{\text{pseudo}} A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$
  con la $\Sigma^\dagger$ que sería como Σ^t invirtiendo los elementos diagonales $[\Sigma^\dagger]_{ii} = \frac{1}{\sigma_{ii}}$. Propiedades de esta cosa dignas de ser mencionadas:

  - Si bien en general, $AA^\dagger \neq I_m$ y los mismo con $A^\dagger A \neq I_n$, tenemos este simpático resultado:
    $$AA^\dagger A = A \quad \text{y} \quad A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una descomposición de Schur $A = UTU^*$, con U unitaria y T triangular superior con los autovalores de la matriz A en la diagonal.

(b) Descomponer a la matriz T hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal D y una matriz triangular superior S con ceros en la diagonal. Probar que $S^j = 0$ para todo $j \geq 2$.

(c) Usar los ítems anteriores para calcular A^{10}

(a) Busco *autovalores* y *autovectores* de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \quad \text{con} \quad E_{\lambda=9} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1) \right\rangle$$

Solo salieron 2 autovectores del único autovalor $\lambda = 9$. Esto nos dice que la matriz no es diagonalizable. Pero nadie nos pidió que diagonalicemos, así que ahora para encontrar la *descomposición de Schur* expando a una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{BON} = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \tfrac{1}{5}(-2,-4,5), \tfrac{1}{3}(1,2,2) \right\}$$

Donde usé Gram Schmidt para calcular el autovector $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$ y también para calcular un vector extra para formar todo $\mathbb{R}^3$.

Entonces tengo ya la base para encontrar la matriz unitaria U_1:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora calculo:

$$\begin{aligned} U_1^t A U_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{T} \end{aligned}$$

La matriz resultante quedó triangular superior.

Las dos primeras columnas de la matriz T están regaladas, porque son autovectores, entonces $U^t A v_i = \lambda_i e_i$. La tercera columna es parte de la arquitectura que sostiene al infierno.

Por lo tanto se tiene que:

$$U_1^t A U_1 = T \Leftrightarrow A = U_1 T U_1^t$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

(b) Descompongo:

$$T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S}$$

Ahora tengo que ver que $S^j = 0 \ \forall j \geq 2$:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hay que calcular A^{10}:

$$A = UTU^t = U(D+S)U^t \overset{!}{\Leftrightarrow} A^{10} = U(D+S)^{10}U^t$$

Y ahora esa horrible expresión:

$$(D+S)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}(D^k S^{10-k}) \overset{!}{=} \binom{10}{10}D^{10} + \binom{10}{9}D^9 S + \underbrace{\binom{10}{8}D^8 S^2 + \cdots \binom{10}{1}DS^9 \binom{10}{0}S^{10}}_{0} \overset{!}{=} 9 \cdot (D + 10S)$$

Donde usé que justo en este ejercicio D es una *matriz escalar*, es decir: kI entonces conmuta en el producto, porque sino *esto no funciona ni en pedo.*

Por lo tanto:

$$\boxed{A^{10} = U\big(9 \cdot (D+10S)\big)U^t = 9U(D+10S)U^t}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a $\mathbb{R}$ se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n\times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \overset{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A apartir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$B + iC = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \overset{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \overset{!}{=} A$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A, es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que $S^\perp$ es invariante por A.

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\underset{\underset{\in S^\perp}{\downarrow}}{w^*} \cdot \overset{\overset{\in S}{\uparrow}}{v} = 0$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A:

$$Av = \lambda v \overset{\times A^*}{\iff} A^*Av \overset{!}{=} A^2\lambda Av = \lambda^2 v \overset{\star^1}{=} kv \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\overset{\in S}{\uparrow}}{Av} = w^*A^* \cdot Av \overset{\star^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \ \forall w \in S^\perp$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

($\Rightarrow$)

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v^*}{\iff}} v^*Av = \lambda v * v \Leftrightarrow v^*Av \overset{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2$$
$$Av = \lambda v \overset{*}{\iff} v^*A^* = \overline{\lambda}v^* \underset{\leftarrow}{\overset{\times v}{\iff}} v^*A^*v = \overline{\lambda}v^*v \Leftrightarrow v^*A^*v \overset{\star^2}{=} \overline{\lambda}\|v\|_2^2$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en $\star^1$ y $\star^2$ es igual. Por lo tanto $\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v}{\iff}} \underbrace{v^*Av}_{>0 \text{ si } v\neq 0} = \lambda v^*v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \ \ \forall v \neq 0 \implies \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^*Av_1 \overset{!}{=} (Av_2)^*v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 \overset{\star^3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^*Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \overset{\star^4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando $\star^3$ y $\star^4$:

$$0 \overset{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Medio que con eso alcanzaría, porque en el caso de tener

($\Leftarrow$) CONSULTAR, probar por absurdo?

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

(a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$. Podría triangular la matriz con $\alpha = -1$, para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

(b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimientos puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* 💣 el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1,-1,0),(0,1,-2)\}$$
$$\xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}) \right\}$$

Como estoy en $\mathbb{R}^3$ no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector (2,2,1) funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1,-1,0)\cdot(x,y,z) &= 0 \\ (0,1,-2)\cdot(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

Resolvelo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \{ \underbrace{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}})}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})}_{E_{(\lambda=9)}} \}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t, dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.

(d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

(a) Quieron encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U\Sigma V^*$$

Voy a calcular $A^* \cdot A$ para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer $A \cdot A^*$ o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calculo}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xRightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \left\{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\right\} \xRightarrow{\text{matriz}} \boxed{\Sigma = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$Hv_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\} \\ & \text{y} & \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\} \end{cases} \Longrightarrow \text{BON} = \left\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V, matriz que tiene a los v_i autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U, que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}\right\} \overset{!}{=} \left\{\tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)\right\}$$

Entonces tengo:

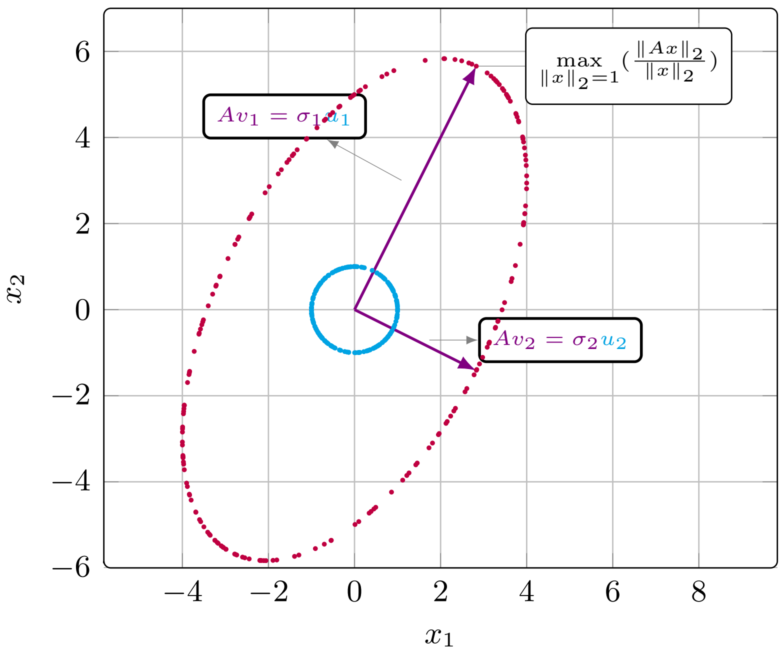
$$\boxed{U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

(b)

Scatter para 200 $\boldsymbol{x}/\left\|\boldsymbol{x}\right\|_2 = 1$ y para 200 Ax



$\cdot \left\{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\right\} \cdot \left\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\right\}$

(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \star^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2$$

Ya tengo $\|A\|_2$, ahora quiero encontrar $\left\|A^{-1}\right\|$:

$$A = U\Sigma V^* \underset{\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}}{\overset{\text{invierto}}{\Longleftrightarrow}} A^{-1} = (V^*)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = V\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{\sigma_2} \quad \star^2 \quad \underset{\star^1\star^2}{\overset{\text{finalmente}}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Si bien esto es <u>una descomposición</u> de A^{-1}
¡No es una *descomposición en valores sigulares*!
Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de Σ no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.

Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

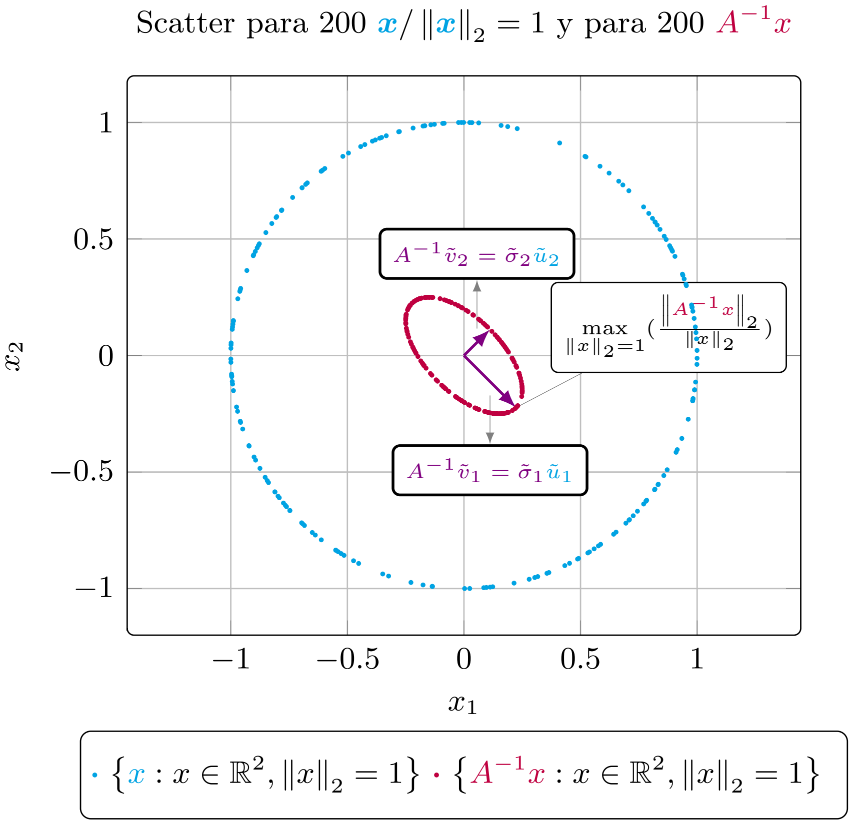
$$A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* \overset{!!!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto columnas}} \frac{1}{\sqrt{10}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas y columnas}} \frac{1}{\sqrt{5}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{permuto filas}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Notar que esa matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de A^{-1} que nadie pidió pero todos queremos:

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para A^{-1}:



Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Si

$$A \overset{\star 1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

llamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa la tonta A^t de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horrendos estereotipos de antes, *¡Pero el sombrero es nuevo!*

Voy a calcular la *descompsición en valores singulares* de $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$ porque así me quedo con la versión de 2×2 para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la *convierto* la descomposición a la de A.

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} & = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} & = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar $\hat{U}$, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo un $\sigma \neq 0$ voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x, y, z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la *descomposición en valores singulares* de A transpongo:

★[1]
$$A = \hat{A}^t = \hat{V}\hat{\Sigma}^t\hat{U}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Quedó entonces sin el *sombrero*, la SVD de A:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=90} & = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda=10} & = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesito ahora encontrar U, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo dos σ_i voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con}]{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\,\|v\|_2$.

Let's calculate los singular values:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

¿Por qué esos números feos?

Calculo *autovalores* de H:

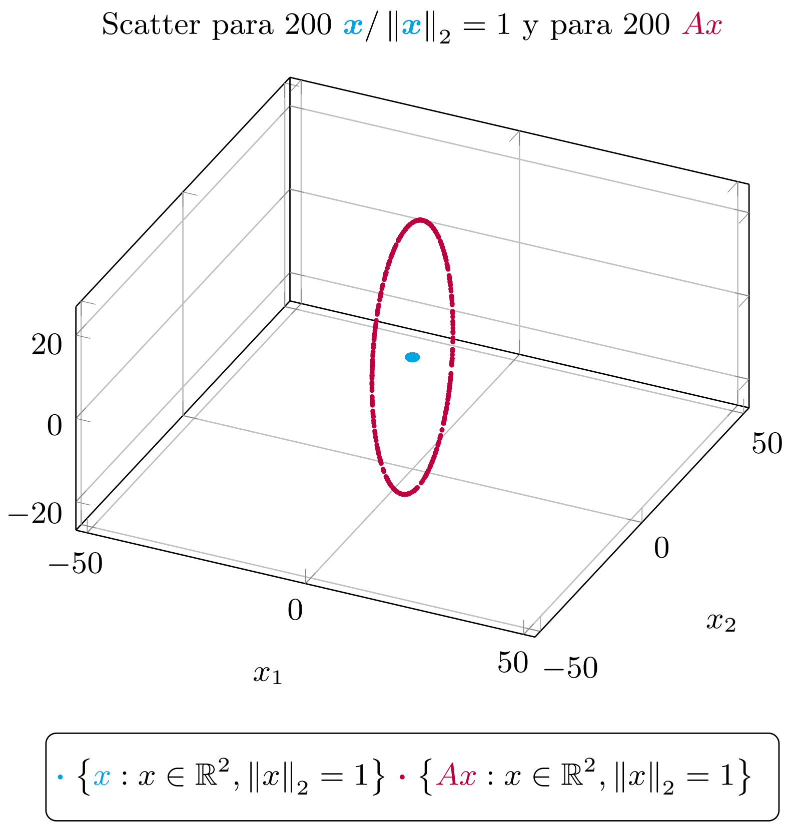
$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\|_2 = 1$ se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \leq \|Av\|_2 \leq \sigma_1 \rightsquigarrow 16.11 \leq \|Av\|_2 \leq 29.62 \Leftrightarrow \boxed{15 \leq \|Av\|_2 \leq 30} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2,\ \|v\|_2 = 1$$



Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 10. Mostrar que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un valor singular nulo si y solo si tiene un autovalor nulo.

($\Leftarrow$) Si A tiene un autovalor $\lambda_i = 0$ tiene $\text{Nu}(A) \neq 0$ y existe $Av = 0$ para algún v. Entonces A^*A:

$$A^*Av = 0$$

Por lo tanto A^*A tiene un autovalor nulo y como $\sigma_i^2 = \lambda_i$ hay un valor singular nulo.

($\Rightarrow$) Si A es cuadrada, su descomposición *en valores singulares* es el producto de matrices cuadradas:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{calculo}} |A| = |U\Sigma V^*| = \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{|U|}} \cdot \underset{=0}{\underset{\downarrow}{|\Sigma|}} \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{|V^*|}} = 0$$

Porque sigma tiene la forma:

$$[\Sigma]_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Y si uno de los $\sigma_i = 0$, bueh, $\det(A) = 0$. Por lo tanto

$$\text{Nu}(A) \neq \{0\}$$

Entonces existe un v tal que:

$$Av = 0 \Leftrightarrow Av = \underset{\lambda_i}{\underset{\downarrow}{0}} \cdot v$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$ donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de A.

Apunto a obtener los *valores singulares*, ς_i de la matriz:

$$G = \underbrace{(I_n \ A^*)}_{\in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{C}^{(n+m)\times n}} = I_n + \underbrace{A^*A}_{\in \mathbb{C}^{n\times n}} = I_n + H$$

Donde bauticé a A^*A como H. Calculo los autovalores de $G = I_n + H$:

$$|I_n + H - \lambda \cdot I_n| = |H - \underbrace{(\lambda - 1)}_{\mu} \cdot I_n| = |H - \mu \cdot I_n| = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \mu \text{ autovalores de } H$$

Ahora identificando bien cada cosa:
Si μ_i es un autovalor de H, entonces los valores singulares de A:

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\lambda_i - 1} \ \bigstar^1$$

es un valor singular de A.
Y si tengo que λ_i es un autovalor de G, entonces los valores singulares de $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\varsigma_i = \sqrt{\lambda_i} \overset{\bigstar^1}{=} \sqrt{1+\sigma_i^2}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de A si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$ es singular, donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

($\Rightarrow$) Sé que σ es un *valor singular* de A. Calculo el determinante:

$$\det \begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(A^*A - \sigma^2 I_n).$$

Y si $\sigma > 0$ es un valor singular de A, entonces $\sigma^2 = \lambda$ con λ autovalor de A^*A

$$\det(A^*A - \underset{\sigma^2}{\underset{\downarrow}{\lambda}} I_n) = 0$$

Entonces la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo, es decir que es singular si σ es un valor singular de A.

($\Leftarrow$) ¿Es lo mismo que el otro pero en reversa? Sé que $\det \begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(\underbrace{A^*A - \sigma^2 I_n}_{\text{ecuación característica}}) = 0$ La ecuación característica da 0 para los autovalores de A^*A, por lo tanto $\sqrt{\sigma^2} \overset{\overset{\sigma>0}{\uparrow}}{=} \sigma$ tiene que ser un *valor singular* de A.

CONSULTAR, esta demo con gusto a mal

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de A^t, $\bar{A}$ y A^* son iguales a los de A.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz A_s que satisface:

$$\|A - A_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: A_s resulta ser la mejor aproximación a A (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

(a) Para el caso en que la matriz A tiene más filas que columnas, es decir que $m > n$

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ m\times m}}{U} \ \overset{\substack{m\times n \\ \uparrow}}{\Sigma} \ \underset{\substack{\downarrow \\ n\times n}}{V^t}$$

Donde la Σ tiene a los r *valores sigulares* no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \hat{\Sigma}_i,$$

donde las $\hat{\Sigma}_i$ son las matrices de $m \times n$ que tienen solo al *valor singular* σ_i en la posición ii y ceros en los demás lugares. La suma es hasta r dado que el resto de los $n - r$ *demás valores sigulares son nulos* son nulos, por lo tanto las $\hat{\Sigma}_i$ con $i > r$ son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que A se puede expresar como una suma de r matrices singulares de $\operatorname{rg}(\Sigma_i) = 1$, dado que solo tienen una columna no nula.

(b) Dado $s < r$ puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} U\hat{\Sigma}_i V^t}_{A_s} + \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \Leftrightarrow A - A_s = \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t$$

Ahora tomo norma a $A - A_s$:

$$\|A - A_s\|_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los *valores singulares*.

Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz A funciona como una transformación que *escala* a un vector v al hacer Av. Esa escala es proporcional a los *valores sigulares*. La matriz A_s, es entonces similar o cercana a A, ya que tiene las *mismas* s mayores componentes de mayor escalamiento.

Ejercicio 15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a A en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.

(a) Tengo que calcular la *descomposición en valores singulares*:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco autovalores de H:

$$|H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, 9, 25\} \text{ y autovectores } Hv_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=25} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \right\rangle \\ E_{\lambda=9} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\rangle \\ E_{\lambda=4} = \langle (0,0,1) \rangle \end{cases}$$

Los autovalores de una matriz simétrica resultaron todos distintos, por lo tanto los autovectores resultaron ortogonales. Por lo tanto tengo a la matriz V y Σ:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora necesito la U, que la consigo con una BON:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}, \frac{Av_3}{\sigma_3} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0), (0,0,1) \right\} \implies U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

La matriz de rango 2 que mejor aproxima a A:

$$\boxed{B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) La de rango 1:

$$\boxed{B = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22.
... hay que hacerlo!
Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. [segundo recu 5/12/2024] Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Probar que $A^tA = B^tB$ si y solo si existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $B = UA$.

(b) Sea $A = QR$ la factorización QR de A. Probar que A y R tienen los mismos valores singulares.

(c) Sea $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(a) ($\Rightarrow$) Multiplico por una $I_n = U^*U$ con U una matriz ortogonal. Luego acomodo y nombro a la matriz adecuada como B:

$$A^tA = A^tU^tUA = (UA)^t(UA) = B^tB$$

($\Leftarrow$) Parto de $B = UA$, con U una matriz ortogonal:

$$B = UA \Leftrightarrow B^t = (UA)^t \implies B^tB = (UA)^tUA = A^tU^tUA = A^tA$$

(b) Los valores singulares de una matriz A:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{con } \lambda_i \text{ tal que} \quad |A^tA - \lambda_i I| = 0$$

Usando el resultado del punto anterior y recordando que la Q en la descomposición QR tiene como columnas una base ortonormal, es decir que Q es una matriz ortogonal, de forma tal que:

$$Q^tQ = I_n \implies A^tA = (QR)^t(QR) \overset{!}{=} R^tR$$

. Por lo tanto los valores singulares de A y R seran los mismos.

(c) Esto de la *descomposición en valores sigulares* es mucho más sencillo cuando la matriz es cuadrada, porque hay menos cosas que contemplar. Ya sé los tamaños de la matrices y no tengo que pensar que conviene hacer:

$$C = \underset{\underset{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}{\downarrow}}{U}\ \overset{\overset{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}{\uparrow}}{\Sigma}\ \underset{\underset{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}{\downarrow}}{V^t}$$

Nos dan una A que está casi en SVD. ¿Se ve?, voy a empezar a permutar para dejar bien ordenados los valores singulares:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora permuto para mover ese 7 para la izquierda:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

!Magia! ¿Y para qué me sirve eso? No sé, pero tenía ganas de hacerlo. ¡Nah, mentira! Se terminó el ejercicio. Esa última matriz es la C que cumple lo pedido.

Lo que viene a continuación es la forma menos *hacker* de hacerlo, básicamente como lo encaré yo antes de darme cuenta 😱 que esa SVD cumplía todo lo pedido.

Entendiendo como funciona la *descomposición en valores singulares* (mirá acá estos resultados click click) sé que:

$$\begin{cases} \text{Nu}(A) &= \langle(0,1)\rangle \\ \text{Im}(A) &= \langle(-1,1)\rangle \\ \|A\|_2 &= 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad C^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\star 1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $\|C\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1 = 7$
- $\dim(\text{Nu}(C)) = 1 \implies \sigma_2 = 0$
- V tiene como columnas a una *base ortonormal* $B_V = \{v_1, v_2\}$ donde $v_2 \in \text{Nu}(C)$ Quizás te estés preguntando: ¿Y v_1? Me importa poco.
- U tiene como columnas a una *base ortonormal* $B_U = \{u_1, u_2\}$ donde $u_1 \in \text{Im}(C)$ Quizás te estés preguntando: ¿Y u_2? Me importa otro poco.

El dato de ★[1] me dice que $(0, 7\sqrt{2})$ es una combinación de las columnas de V. No sé si es la mejor forma de encararlo, pero me lo imagino así:

$$C = U\Sigma V^t \overset{!}{\Leftrightarrow} C^t = V\Sigma U^t$$

Por lo tanto los generadores de la $\text{Im}(C^t)$ son las columnas de V ahora. Como $\dim(\text{Im}(C^t)) = 1$ están diciendo que $(0, 7\sqrt{2}) \in \langle (0, 1) \rangle$ lo cual es cierto!

Con toda esa data se puede encontrar una matriz C sin mucha rosca dado que al matriz es cuadrada y estamos en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a tener en cuenta:

$$C_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Otra que cumpliría:

$$C_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

2. [segundo parcial 8/7/2023] Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la descomposición SVD de la matriz A.

(b) Construir una matriz B de dimensión apropiada que satisfaga a la vez: $B^tB = A^tA$ y $\text{Im}(B) = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$.

(a) La descomposiciónserá algo como:

$$A = \underset{\in \mathbb{R}^{3\times 3}}{\underset{\downarrow}{U}} \overset{\in \mathbb{R}^{3\times 2}}{\overset{\uparrow}{\Sigma}} \underset{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}{\underset{\downarrow}{V^t}}$$

Primero busco los valores singulares σ_i para formarme Σ:

$$|A^tA - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 6 \implies \sigma_1 = \sqrt{6} \\ \lambda_2 & = & 1 \implies \sigma_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$E_{\lambda=6} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \right\rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=1} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \right\rangle$$

Listo ya tengo Σ y V los autovectores ortonormalizados de A^tA me forman las columnas de V:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora falta encontrar U solo voy a poder encontrar 2, luego completo con un vector perpendicular a ambos:

$$Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \implies BON_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \right\}$$

La descomposición queda como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

(b) Tiro data para pensar y armar la matriz:

- $\text{Im}(B) = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$ lo voy a usar para las dos primeras columnas de U.
- B manda cosas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, como la $\dim(\text{Im}(B)) = 2$ entonces $\dim(\text{Nu}(B)) = 0$, esto implica que ninguna columna de V, $v_i \in \text{Nu}(B)$
- $B^tB = A^tA$ la matriz $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y además tienen los mismos valores singulares que A.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con eso estoy cumpliendo los requerimientos del enunciado. Falta expandir las columnas de U a una base ortonormal. Sale a ojo, si no se ve, entonces Gram-Schmidt:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y la versión reducida o algo así que da el mismo resultado:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz