Apunte único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:
24/03/25 @ 12:58
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

acá sería la teoría

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando `np.lianlg.solve`.

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = & 2i \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{cases}$$

(a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5} \cdot F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 & \overset{\bigstar^2 \text{ y } \bigstar^1}{\Longleftrightarrow} & x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 & = & -\frac{9}{5} & \overset{\bigstar^1}{\Longleftrightarrow} & x_2 \overset{\bigstar^2}{=} -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 & = & \frac{2}{5} & \Leftrightarrow & x_3 \overset{\bigstar^1}{=} -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de × y ÷ por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \xRightarrow{z = a + ib} \quad \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = & 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \quad \frac{1}{i}F_1 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 \to F_1 \\ F_3 \to F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 1+i & -1 & i \end{array}\right)$$

$$F_2 + F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & i \\ 0 & -1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tuqui. Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1+i)x_2 & = & i & \to & x_1 = i + (1-i)x_2 \\ -(1+i)x_2 + x_3 & = & -i & \to & x_3 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1-i)\cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}}$$

(d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 2.

(a) Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

(a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$
$$= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Por lo tanto sé que para que el sistema <u>no tenga solución única</u> debe ocurrir que:

$$\boxed{k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1}$$

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

No hay solución con $k = 1$

Si $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right) \bigstar^1$$

Habrá infinitas soluciones con $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso $k = -1$:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2 x_3 & = 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 & = 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes ($\bigstar^1$) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0;\ x - y = 0\}$

(b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$

(c) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(\mathbf{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

(a) $\langle 1, 1, 2 \rangle$

(b) Describo a $\mathbf{A}$ y a $-\mathbf{A}^t$ como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \leq i,j \leq 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \leq i,j \leq 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientas que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ -a_{ji} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0),\ (5, 7, 3)\rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$ y $T = \langle(1, 1, 0),\ (3, 2, 1)\rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{(x_{ij})/x_{ij} = x_{ji}\ \ \forall i, j\}$ y $T = \{(x_{ij})\,/\,x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle(i, 1, 33 - i), (4, 1 - i, 0)\rangle$ y $T = \big\{(x \in \mathbb{C}^3) : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\big\}$.

(a) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) S es un subespacios describiendo matrices *simétricas*, es decir que $A = A^T$ y T el subespacio con matrices de traza 0, es decir, $\sum t_{ii} = 0$. Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{22}+t_{33}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{22}+x_{33}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T. El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$\boxed{S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo $\mathbb{R}^{3\times3}$ a ver que onda la dimensión:

$$\boxed{\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9}$$

Tuqui.

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

```
Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
  naD GarRaz
```

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \big\langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\big\rangle$.

(b) $S \cap T = \langle(0,1,1)\rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1,k,2),(-1,2,k)\rangle$.

(a) Lo primero que quiero hacer es que los generadores sean *linealmente independientes* y porque me gusta determinantes ☺:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{F_2+F_3 \to F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (k^2+k-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (k^2+k-2)\cdot(-1+k) = 0$$
$$\Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Así me saco el tema de las k de encima, pero bueh todavía no se termina:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle \overset{?}{=} \begin{cases} \langle(1,-2,-4),(-1,-1,2),(1,1,-2)\rangle = \langle(1,-2,-4),(1,1,-2)\rangle & \text{si} \quad k=-2 \\ \langle(1,1,2),(-1,-1,-1),(1,1,1)\rangle = \langle(1,1,2),(1,1,1)\rangle & \text{si} \quad k=1 \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver si se intersectan en todos sus elementos. Voy a buscar la expresión por comprensión de $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 6F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 8F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

Dado que ese sistema no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es $\varnothing$ se debe cumplir:

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\right\} \bigstar^1$$

Encontrar la intersección ahora es fácil:

Caso con $k = -2$:

$$(a+b, -2a+b, -4a-2b) \xrightarrow[\bigstar^1]{\text{meto en}} 8(a+b) - 2(-2a+b) + 3(-4a-2b) = 0 \ \forall a \text{ y } b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con $k = -2$

Caso con $k = 1$:

$$(a+b, a+b, 2a+b) \xrightarrow[\bigstar^1]{\text{meto en}} 8(a+b) - 2(a+b) + 3(2a+b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluímos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$\boxed{k = -2}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Hay que probar que:

$$S \cup T \text{ es subespacio } \Leftrightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$$

CONSULTAR, no me cierra el enunciado

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .