Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 29/07/25 @ 19:51

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**4.**	**7.**	**10.**	**13.**	**16.**	**19.**	**22.**
2.	**5.**	**8.**	**11.**	**14.**	**17.**	**20.**	??.
3.	**6.**	**9.**	**12.**	**15.**	**18.**	**21.**	

- Ejercicios de Parciales

1. **2.** **3.** **4.** **5.**

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:
29/07/25 @ 19:51
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Recuerdo nomenclatura de matrices*

Nombres usados en matrices en $\mathbb{R}$:

- Ortogonal: $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $Q^tQ = I$
  - Las columnas de Q forman una BON de $\mathbb{R}^n$
  - Es ortogonalmente diagonalizable.
  - Preserva la norma en la multiplicación.
  - $\det(Q) = 1$
- Simétrica: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $A^t = A$
  - A tiene autovalores reales.
  - Es ortogonalmente diagonalizable.

Nombres usados en matrices en $\mathbb{C}$:

- Unitaria: $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $U^*U = I$
  - Las columnas de U forman una BON de $\mathbb{C}^n$
  - Es ortogonalmente diagonalizable.
  - Preserva la norma en la multiplicación.
  - $\det(U) = 1$
- Hermitiana: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $A^* = A$
  - A tiene autovalores reales.
  - Es ortogonalmente diagonalizable.

- *Descomposición en valores singulares*:

Tengo una matriz $A \in K^{m\times n}$

$$A = U\Sigma V^*$$

Con U y V matrices unitarias, por lo tanto cuadradas, simétricas $\left\{ \begin{array}{c} U^*U = I \\ V^*V = I \end{array} \right\}$, y $\Sigma \in K^{m\times n}$ el mismo tamaño que A.

- Para obtener Σ calulo los valores $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde:

$$A^*Av_i = \lambda_i v_i$$

y luego ordeno los elementos diagonales $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$ de mayor a menor. Completo con *fila o columas de ceros*, hasta llegar a la dimesión correcta.

- Para obtener la matriz V pongo a los v_i calculados previamente como columnas en orden correspondiente a su σ_i.
- Para calcular U:

$$Av_i = U\Sigma V^* v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \Leftrightarrow \boxed{Av_i = \sigma_i u_i}$$

De ese último resultado se desprende info de la matriz A. Como $A \in K^{m\times n}$ con $(m > n)$ tiene rango $r < n$:

$$\text{Nu}(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \quad \text{y} \quad \text{Im}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

- *Pseudo-inversa:*

Si se tiene una $A \in K^{m\times n}$

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{pseudo}} A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$

con la $\Sigma^\dagger$ que sería como Σ^t invirtiendo los elementos diagonales $[\Sigma^\dagger]_{ii} = \frac{1}{\sigma_{ii}}$. Propiedades de esta cosa dignas de ser mencionadas:

- Si bien en general, $AA^\dagger \neq I_m$ y los mismo con $A^\dagger A \neq I_n$, tenemos este simpático resultado:

$$AA^\dagger A = A \quad \text{y} \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una descomposición de Schur $A = UTU^*$, con U unitaria y T triangular superior con los autovalores de la matriz A en la diagonal.

(b) Descomponer a la matriz T hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal D y una matriz triangular superior S con ceros en la diagonal. Probar que $S^j = 0$ para todo $j \geq 2$.

(c) Usar los ítems anteriores para calcular A^{10}

(a) Busco *autovalores* y *autovectores* de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \quad \text{con} \quad E_{\lambda=9} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1) \right\rangle$$

Solo salieron 2 autovectores del único autovalor $\lambda = 9$. Esto nos dice que la matriz no es diagonalizable. Pero nadie nos pidió que diagonalicemos, así que ahora para encontrar la *descomposición de Schur* expando a una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{BON} = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \tfrac{1}{5}(-2,-4,5), \tfrac{1}{3}(1,2,2) \right\}$$

Donde usé Gram Schmidt para calcular el autovector $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$ y también para calcular un vector extra para formar todo $\mathbb{R}^3$.

Entonces tengo ya la base para encontrar la matriz unitaria U_1:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora calculo:

$$\begin{aligned} U_1^t A U_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{T} \end{aligned}$$

La matriz resultante quedó triangular superior.

Las dos primeras columnas de la matriz T están regaladas, porque son autovectores, entonces $U^t A v_i = \lambda_i e_i$. La tercera columna es parte de la arquitectura que sostiene al infierno.

Por lo tanto se tiene que:

$$U_1^t A U_1 = T \Leftrightarrow A = U_1 T U_1^t$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

(b) Descompongo:

$$T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 9 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S}$$

Ahora tengo que ver que $S^j = 0 \ \forall j \geq 2$:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hay que calcular A^{10}:

$$A = UTU^t = U(D+S)U^t \overset{!}{\Leftrightarrow} A^{10} = U(D+S)^{10}U^t$$

Y ahora esa horrible expresión:

$$(D+S)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}(D^k S^{10-k}) \overset{!}{=} \binom{10}{10}D^{10} + \binom{10}{9}D^9 S + \underbrace{\binom{10}{8}D^8 S^2 + \cdots \binom{10}{1}DS^9 \binom{10}{0}S^{10}}_{0} \overset{!}{=} 9 \cdot (D + 10S)$$

Donde usé que justo en este ejercicio D es una *matriz escalar*, es decir: kI entonces conmuta en el producto, porque sino *esto no funciona ni en pedo.*

Por lo tanto:

$$\boxed{A^{10} = U\big(9 \cdot (D + 10S)\big)U^t = 9U(D + 10S)U^t}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a $\mathbb{R}$ se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n\times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \overset{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A apartir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ahora quiero ver la cuenta:

$$B + iC = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \overset{!}{=} \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \overset{!}{=} A$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A, es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que $S^\perp$ es invariante por A.

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\underbrace{w^*}_{\in S^\perp} \cdot \overbrace{v}^{\in S} = 0$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A:

$$Av = \lambda v \overset{\times A^*}{\Longleftrightarrow} A^*Av \overset{!}{=} A^2\lambda Av = \lambda^2 v \overset{\star_1}{=} kv \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overbrace{Av}^{\in S} = w^*A^* \cdot Av \overset{\star_1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \ \ \forall w \in S^\perp$.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación.
Para una matriz $A \in K^{n\times n}$ con autovector v asociado a un autovalor λ:

$(\Rightarrow)$

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v^*}{\Longleftrightarrow}} v^*Av = \lambda v^*v \Leftrightarrow v^*Av \overset{\star_1}{=} \lambda \|v\|_2^2$$
$$Av = \lambda v \overset{*}{\Leftrightarrow} v^*A^* = \overline{\lambda}v^* \underset{\leftarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} v^*A^*v = \overline{\lambda}v^*v \Leftrightarrow v^*A^*v \overset{\star_2}{=} \overline{\lambda}\|v\|_2^2$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en $\star_1$ y $\star_2$ es igual. Por lo tanto $\lambda = \overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} \underbrace{v^*Av}_{>0 \text{ si } v\neq 0} = \lambda v^*v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0, \quad \forall v \neq 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$$

Hasta acá, tengo *autovalores reales y positivos*, tengo que ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a <u>distintos</u> autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^*Av_1 \overset{!}{=} (Av_2)^*v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 & \overset{\star_3}{=} \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ v_1^*Av_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 & \overset{\star_4}{=} \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando $\star_3$ y $\star_4$ y teniendo en cuenta que le producto interno entre 2 vectores es conmutativo:

$$0 \overset{!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Para el caso en que tenga autovalores de multiplicidad mayor a 1, puedo hacer Gram-Schmidt para conseguir los vectores ortogonales.

($\Leftarrow$) En este caso:

$$A = UDU^* \quad \text{y} \quad A^* = (UDU^*)^* \overset{!}{=} UDU^* \iff A = A^*$$

En el ! use que los elementos diagonales de D son reales. La matriz A es hermiticana dado que es igual a su autoadjunta o a su transpuesta conjugada, como más te guste decirle.

Por otro lado la matriz diagonal D tiene todos sus elementos positivos, es una matriz definida positiva:

$$w^*Aw = w^*UDU^*w \iff w^*Aw = \underbrace{(U^*w)^*}_{\omega^*} D \underbrace{U^*w}_{\omega} = \omega^* D\omega > 0 \;\; \forall \omega \neq 0$$

Eso último es:

$$(\omega_1^* \;\cdots\; \omega_n^*) \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = d_{11}w_1^2 + \cdots + d_{nn}w_n^2 > 0$$

Ya que $d_{ii} > 0$ por hipótesis.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

(a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente dependientes*, por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$. Podría triangular la matriz con $\alpha = -1$, para ver si hay alguna fila *linealmente dependiente*, pero no hay ganas.

(b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimientos puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal para distintos autovalores.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A - \lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \qquad \iff \qquad v_{(\lambda=0)} \in \{(1,-1,0), (0,1,-2)\}$$
$$\underset{\text{Gram-Schmidt}}{\overset{\text{ortonormalizo}}{\Longleftrightarrow}} \qquad v_{(\lambda=0)} \in \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}) \right\}$$

Como estoy en $\mathbb{R}^3$ no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{4}{3})\cdot(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right. \overset{!}{\Leftrightarrow} (x,y,z) = \frac{1}{3}(2,2,1)$$

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} \;=\Big\{\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{4}{3})}_{E_{(\lambda=0)}},\underbrace{\tfrac{1}{3}(2,2,1)}_{E_{(\lambda=9)}}\Big\}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t, dado que es una *matriz ortogonal* (o *matriz unitaria* si $\in \mathbb{C}$):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`naD GarRaz`

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.

(d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

(a) Quieron encontrar la *descomposición en valores singulares*:

$$A = U\Sigma V^*$$

Voy a calcular $A^* \cdot A$ para calcular sus *jugosos autovalores*. Como la matriz es cuadrada, no me preocupo por pensar si es mejor hacer $A \cdot A^*$ o al revés, porque van a tener el mismo tamaño:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autovalores}]{\text{calculo}} \det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 40\}$$

Ahora puedo decir que los *valores singulares* son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \xRightarrow[\text{a menor}]{\text{de mayor}} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \left\{2\sqrt{10}, \sqrt{10}\right\} \xRightarrow{\text{matriz}} \boxed{\Sigma = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Calculo autovectores de H y los normalizo para obtener una *base ortonormal* una BON:

$$Hv_\lambda = \lambda v_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\lambda=40} & = & \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\} \\ & \text{y} & \\ E_{\lambda=10} & = & \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\} \end{cases} \Longrightarrow \text{BON} = \left\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\}$$

Siempre en una matriz unitaria como H los autovectores asociados a autovalores de distinto valor son perpendiculares.

Estoy en condiciones de armar la matriz V, matriz que tiene a los v_i autovectores de H normalizados como columnas, es decir la BON recién calculada:

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Falta menos. Ahora voy a buscar la U, que tiene como columnas a los:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma i} \quad \text{con} \quad \sigma_i \neq 0 \xrightarrow[\text{BON}]{\text{armo}} \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2} \right\} \overset{!}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) \right\}$$

Entonces tengo:

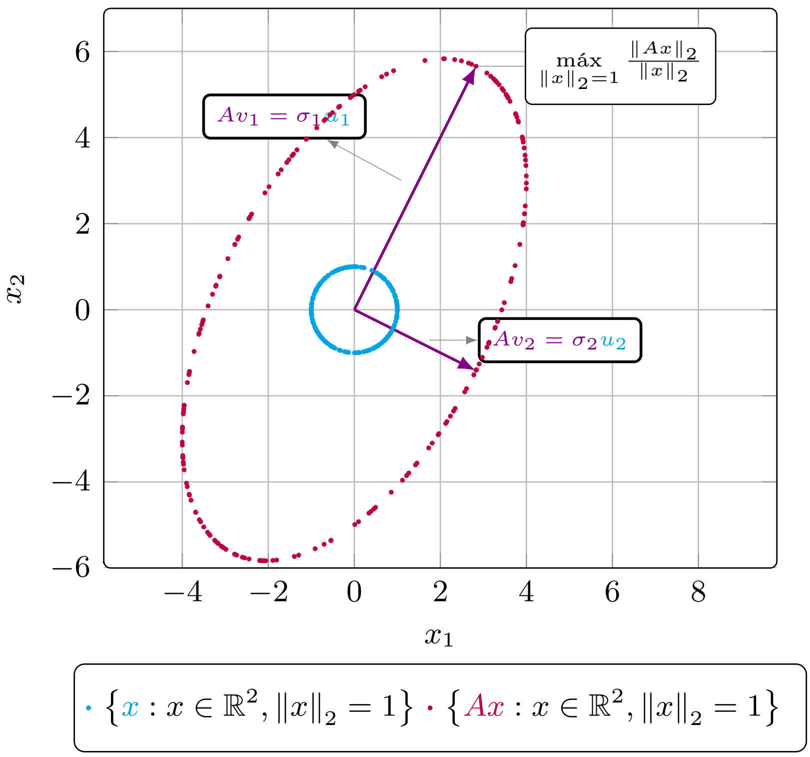
$$\boxed{U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

(b)

Scatter para 200 $\boldsymbol{x} / \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ y para 200 Ax



(c) La definición de norma subordinada:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

Y viendo el gráfico:

$$\|A\|_2 = \|\sigma_1 u_1\|_2 = |\sigma_1| \cdot \underbrace{\|u_1\|_2}_{=1} = \sigma_1 \quad \bigstar^1$$

Por otro lado la definición de condición:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Ya tengo $\|A\|_2$, ahora quiero encontrar $\|A^{-1}\|$:

$$A = U\Sigma V^* \underset{\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}}{\overset{\text{invierto}}{\Longleftrightarrow}} A^{-1} = (V^*)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} U^*$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_2} \quad \star^2 \underset{\star^1\star^2}{\xrightarrow{\text{finalmente}}} \boxed{\operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

(d) Usando el cálculo del ítem (c):

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Si bien esto es una descomposición de A^{-1}
¡No es una *descomposición en valores sigulares*!
Se puede sacar info de esa expresión, pero ya que la diagonal de Σ no esté ordenada en orden decreciente es suficiente para justificar que no es una SVD.

Pero moviendo las columnas se encuentra la *descomposición en valores singulares*, mirá:

$$A^{-1} \overset{!}{=} V\Sigma^{-1}U^* \overset{!!!}{=} \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{permuto columnas}} \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{permuto filas y columnas}} \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{permuto filas}}$$

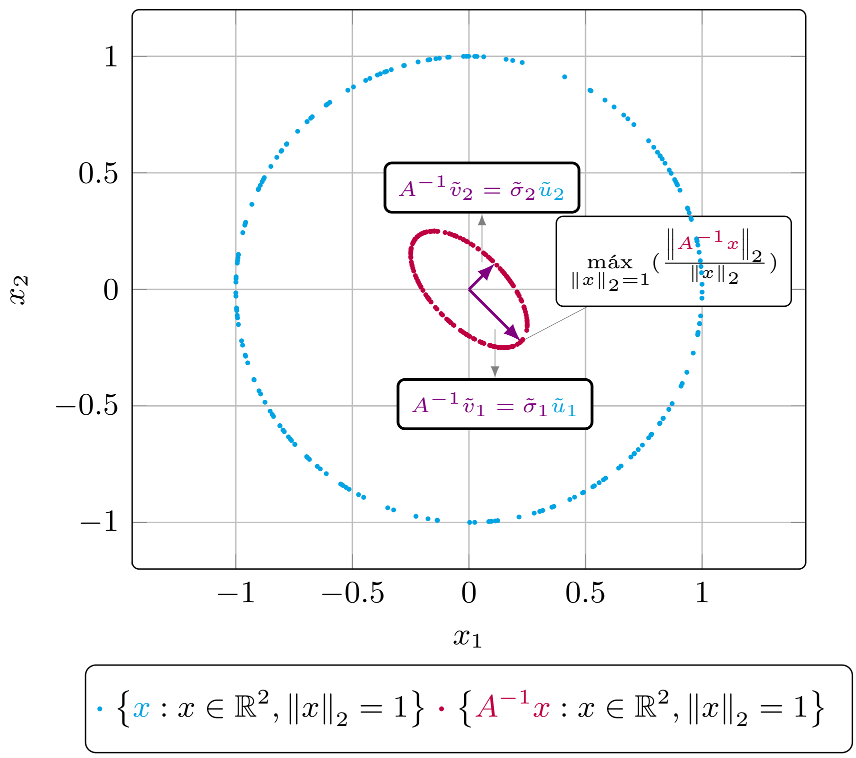
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Notar que esa matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es involutiva, es su propia inversa. Es así que la *descomposición en valores singulares* de A^{-1} que nadie pidió pero todos queremos:

$$\boxed{A^{-1} \overset{!}{=} \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Acá te hago el gráfico del ítem (b) pero para A^{-1}:

Scatter para 200 $\boldsymbol{x}/\,\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ y para 200 $A^{-1}x$



Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Si

$$A \stackrel{\star 1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

llamo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa la tonta A^t de antes con un sombrero distinto, sigue teniendo todos los horrendos estereotipos de antes, *¡Pero el sombrero es nuevo!*

Voy a calcular la *descompsición en valores singulares* de $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$ porque así me quedo con la versión de 2×2 para hacer menos cuentas. Una vez calculada esa la *convierto* la descomposición a la de A.

Calculo autovectores de

$$\hat{H} = \hat{A}^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |\hat{H} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 18\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=18} & = & \left\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\rangle \\ E_{\lambda=0} & = & \left\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Necesito ahora encontrar $\hat{U}$, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo un $\sigma \neq 0$ voy a poder encontrar 1 de los 3 con la fórmula:

$$\hat{u}_1 = \frac{\hat{A}\hat{v}_1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el resto de los vectores puedo hacer *Gram Schmidt* o lo que sea para encontrar 2 vectores más:

$$(x, y, z) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Listo tengo:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Listo:

$$\hat{A} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$$

Pero yo estoy buscando la *descomposición en valores singulares* de A transpongo:

$$\star^1 A = \hat{A}^t = \hat{V}\hat{\Sigma}^t\hat{U}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Quedó entonces sin el *sombrero*, la SVD de A:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

(b) Acá uso la matriz así como está:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{calculo autovalores}} |H - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{10, 90\} \text{ con } \begin{cases} E_{\lambda=90} &= \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \\ E_{\lambda=10} &= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \end{cases}$$

Ya tengo:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesito ahora encontrar U, necesito una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como solo tengo dos σ_i voy a poder encontrar 2 de los 3 con la fórmula:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \implies u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con}]{\text{completo}} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Listo tengo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{10}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\,\|v\|_2$.

Let's calculate los singular values:

$$H = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 14 & -19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & -296 \\ -296 & 657 \end{pmatrix}$$

¿Por qué esos números feos?

Calculo *autovalores* de H:

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \approx 259.55 \\ \lambda_2 \approx 877.45 \end{cases}$$

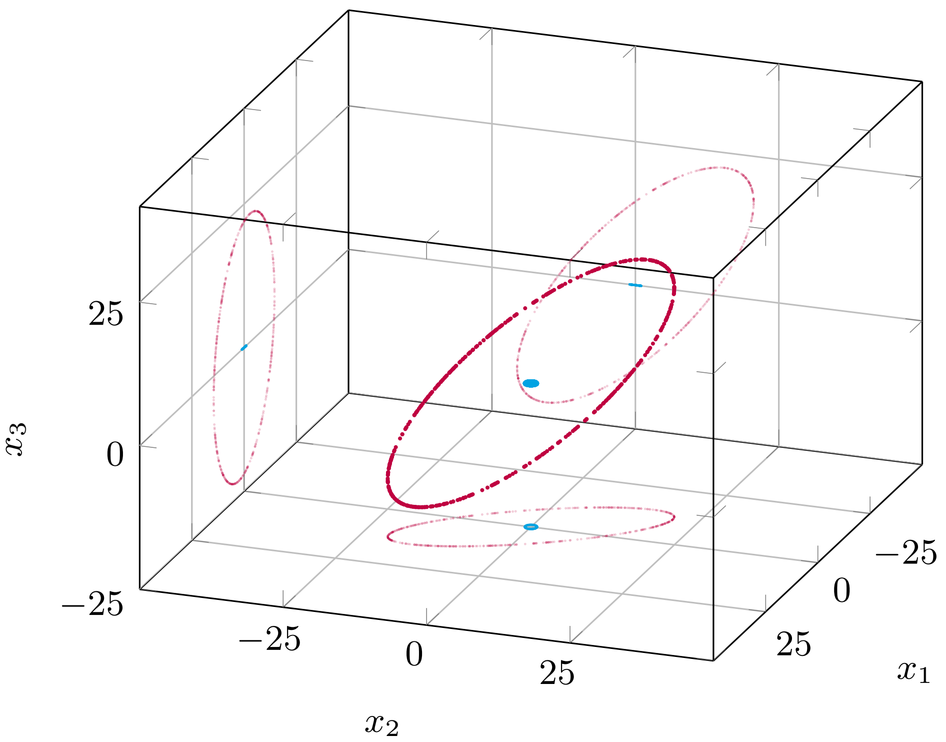
Los valores singulares sería:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 29.62 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 16.11 \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\|_2 = 1$ se va a cumplir que:

$$\sigma_2 \leq \|Av\|_2 \leq \sigma_1 \rightsquigarrow 16.11 \leq \|Av\|_2 \leq 29.62 \Leftrightarrow \boxed{15 \leq \|Av\|_2 \leq 30} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2,\ \|v\|_2 = 1$$

Scatter para 200 $x / \|x\|_2 = 1$ y para 200 Ax



$\{x : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 10. Mostrar que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un valor singular nulo si y solo si tiene un autovalor nulo.

($\Leftarrow$) Si A tiene un autovalor $\lambda_i = 0$ tiene $\text{Nu}(A) \neq 0$ y existe $Av = 0$ para algún v. Entonces A^*A:

$$A^*Av = 0$$

Por lo tanto A^*A tiene un autovalor nulo y como $\sigma_i^2 = \lambda_i$ hay un valor singular nulo.

($\Rightarrow$) Si A es cuadrada, su descomposición *en valores singulares* es el producto de matrices cuadradas:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{calculo}} |A| = |U\Sigma V^*| = \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{|U|}} \cdot \underset{=0}{\underset{\downarrow}{|\Sigma|}} \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{|V^*|}} = 0$$

Porque sigma tiene la forma:

$$[\Sigma]_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Y si uno de los $\sigma_i = 0$, bueh, $\det(A) = 0$. Por lo tanto

$$\mathrm{Nu}(A) \neq \{0\}$$

Entonces existe un v tal que:

$$Av = 0 \Leftrightarrow Av = \underset{\lambda_i}{\underset{\downarrow}{0}} \cdot v$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$ donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de A.

Apunto a obtener los *valores singulares*, ς_i de la matriz:

$$G = \underbrace{(I_n \; A^*)}_{\in\mathbb{C}^{n\times(n+m)}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}}^{\in\mathbb{C}^{(n+m)\times n}} = I_n + \underbrace{A^*A}_{\in\mathbb{C}^{n\times n}} = I_n + H$$

Donde bauticé a A^*A como H. Calculo los autovalores de $G = I_n + H$:

$$|I_n + H - \lambda \cdot I_n| = |H - \underbrace{(\lambda - 1)}_{\mu} \cdot I_n| = |H - \mu \cdot I_n| = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \mu \text{ autovalores de } H$$

Ahora identificando bien cada cosa:
Si μ_i es un autovalor de H, entonces los valores singulares de A:

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\lambda_i - 1} \;\bigstar^1$$

es un valor singular de A.
Y si tengo que λ_i es un autovalor de G, entonces los valores singulares de $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\varsigma_i = \sqrt{\lambda_i} \overset{\bigstar^1}{=} \sqrt{1+\sigma_i^2}}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de A si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$ es singular, donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

($\Rightarrow$) Sé que σ es un *valor singular* de A. Entonces sé que una matriz A tiene su descomposición SVD:

$$A^*Av = \lambda v \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A^*Av = \sigma^2 v \Leftrightarrow (A^*A - \sigma^2 I_n)v \overset{v\neq 0}{\Longleftrightarrow} |A^*A - \sigma^2 I_n| = 0 \Leftrightarrow \sigma \text{ es valor singular de } A$$

La expresión $|A^*A - \sigma^2 I_n|$ es igual al determinante de la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$

($\Leftarrow$) La matriz es singular, lo que quiere decir que su determinante es cero:

$$\det\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix} = \det(A^*A - \sigma^2 I_n) = 0.$$

Esta última expresión es la ecuación del polinomio característico de la matriz A^*A en la variable σ^2, las raíces del polinomio son los autovalores de A^*A y por definición la raíz de esos autovalores $\sqrt{\sigma^2} \overset{\sigma\geq 0}{\overset{\uparrow}{=}} \sigma$ son los valores singulares de A.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de A^t, $\bar{A}$ y A^* son iguales a los de A.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene una *descomposición en valores singulares*:

$$A = U\Sigma V^*$$

Donde Σ tiene en sus elementos diagonales, $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ donde esos λ_i son los autovalores de A^*A. La matriz V tiene como columnas a los autovectores de A^*A y la matriz U tiene como columnas a una base ortonormal con los vectores $u_i = \frac{Av}{\sigma_i}$ con $\sigma_i \neq 0$

Para A^t:

$$A = U\Sigma V^* \overset{\text{transpongo}}{\Longleftrightarrow} A^t = \bar{V}\Sigma^t U^t$$

Como A es una matriz cuadrada entonces Σ también lo es, por lo tanto $\Sigma = \Sigma^t$, por lo que A y A^t tienen los mismos valores singulares.

Para $\bar{A}$:

$$A = U\Sigma V^* \overset{\text{conjugo}}{\Longleftrightarrow} \bar{A} = \bar{U}\bar{\Sigma}V^t$$

Σ tiene a todos sus elementos no negativos y reales, por lo tanto $\Sigma = \bar{\Sigma}$. Es así que A y $\bar{A}$ tienen los mismos valores singulares.

Para A^*:

$$A = U\Sigma V^* \overset{\text{autoadjunto}}{\Longleftrightarrow} A^* = V\Sigma^* U^*$$

Un mix de los resultados anteriores muestran que A y A^* tienen los mismos valores singulares.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1, matrices adecuadamente elegidas, de manera de obtener una matriz A_s que satisface:

$$\|A - A_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: A_s resulta ser la mejor aproximación a A (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

(a) Para el caso en que la matriz A tiene más filas que columnas, es decir que $m > n$

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ m\times m}}{U} \overset{\substack{m\times n \\ \uparrow}}{\Sigma} \underset{\substack{\downarrow \\ n\times n}}{V^t}$$

Donde la Σ tiene a los r *valores sigulares* no nulos ordenados de menor a mayor. Esa matriz puede escribirse como una suma:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \hat{\Sigma}_i,$$

donde las $\hat{\Sigma}_i$ son las matrices de $m \times n$ que tienen solo al *valor singular* σ_i en la posición ii y ceros en los demás lugares. La suma es hasta r dado que el resto de los $n - r$ *demás valores sigulares son nulos* son nulos, por lo tanto las $\hat{\Sigma}_i$ con $i > r$ son matrices de todos elementos cero.

$$A = \sum_{i=1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t,$$

donde queda que A se puede expresar como una suma de r matrices singulares de $\text{rg}(\Sigma_i) = 1$, dado que solo tienen una columna no nula.

(b) Dado $s < r$ puedo escribir así la suma del ítem anterior:

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} U\hat{\Sigma}_i V^t}_{A_s} + \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \Leftrightarrow A - A_s = \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t$$

Ahora tomo norma a $A - A_s$:

$$\|A - A_s\|_2 = \left\| \sum_{i=s+1}^{r} U\hat{\Sigma}_i V^t \right\|_2 = \sigma_{s+1}.$$

Dado que la norma 2 de una matriz, es el mayor de los *valores singulares*.

Como ya se vio en ejercicios pasados, una matriz A funciona como una transformación que *escala* a un vector v al hacer Av. Esa escala es proporcional a los *valores singulares*. La matriz A_s, es entonces similar o cercana a A, ya que tiene las *mismas* s mayores componentes de mayor escalamiento.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a A en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.

(a) Tengo que calcular la *descomposición en valores singulares*:

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco autovalores de H:

$$|H-\lambda I|=0\Leftrightarrow\lambda\in\{4,9,25\}\ \text{ y autovectores } Hv_\lambda=\lambda v_\lambda\Leftrightarrow\begin{cases}E_{\lambda=25}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\rangle\\ E_{\lambda=9}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right\rangle\\ E_{\lambda=4}=\langle(0,0,1)\rangle\end{cases}$$

Los autovalores de una matriz simétrica resultaron todos distintos, por lo tanto los autovectores resultaron ortogonales. Por lo tanto tengo a la matriz V y Σ:

$$V=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad\Sigma=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Ahora necesito la U, que la consigo con una BON:

$$\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\frac{Av_1}{\sigma_1},\frac{Av_2}{\sigma_2},\frac{Av_3}{\sigma_3}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0),(0,0,1)\right\}\implies U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

$$\boxed{A=U\Sigma V^t=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

La matriz de rango 2 que mejor aproxima a A:

$$\boxed{B=U\Sigma V^t=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&0\\-4&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

(b) La de rango 1:

$$\boxed{B=U\Sigma V^t=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&0\\-5&-5&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 16. Dada una matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geq$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $A=\hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$. Se define la pseudo-inversa de A como $A^\dagger=\hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t$.

(a) Verificar que $A^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i. $AA^\dagger A=A$

ii. $A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger$

iii. $(AA^\dagger)^t=AA^\dagger$

iv. $(A^\dagger A)^t=A^\dagger A$

(b) Probar que si dos matrices B_1 y B_2 satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces veerifican $AB_1=AB_2$ y $B_1A=B_2A$.

(c) Probar que la pseudo-inversa de A es única.

(a) Verificar que $A^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i.

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger A = A \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{U}\hat{\Sigma}\underbrace{\hat{V}^t \cdot \hat{V}}_{I_n}\hat{\Sigma}^{-1}\underbrace{\hat{U}^t \cdot \hat{U}}_{I_n}\hat{\Sigma}\hat{V}^t = A \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{U}\underbrace{\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1}}_{I_n}\hat{\Sigma}\hat{V}^t = A \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t = A
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\underbrace{\hat{U}^t \cdot \hat{U}}_{I_n}\hat{\Sigma}\underbrace{\hat{V}^t \cdot \hat{V}}_{I_n}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t = A^\dagger \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{V}\underbrace{\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma}}_{I_n}\hat{U}^t = A^\dagger
\end{aligned}
$$

iii. Sale enseguida, igual que los anteriores. Supongo que de mil maneras distintas, me quedo con esta porque pintó.

$$
\begin{aligned}
(AA^\dagger)^t = AA^\dagger \quad &\Leftrightarrow \quad (A^\dagger)^t A^t = AA^\dagger \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \hat{U}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{V}^t \cdot \hat{V}\hat{\Sigma}\hat{U}^t = AA^\dagger \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \hat{U}\underbrace{\hat{\Sigma}^{-1}\hat{V}^t \cdot \hat{V}\hat{\Sigma}}_{I_n}\hat{U}^t = AA^\dagger \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{U}\hat{U}^t = AA^\dagger \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t \cdot \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t = AA^\dagger
\end{aligned}
$$

iv.

$$
\begin{aligned}
(A^\dagger A)^t = A^\dagger A \quad &\Leftrightarrow \quad A^t(A^\dagger)^t = A^\dagger A \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \hat{V}\hat{\Sigma}\hat{U}^t \cdot \hat{U}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{V}^t = A^\dagger A \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \hat{V}\hat{\Sigma}\underbrace{\hat{U}^t \cdot \hat{U}}_{I_n}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{V}^t = A^\dagger A \\
&\underset{\text{diagonal}}{\overset{\text{conmuta}}{\Longleftrightarrow}} \quad \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma}\hat{V}^t = A^\dagger A \\
&\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t \cdot \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t = A^\dagger A
\end{aligned}
$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

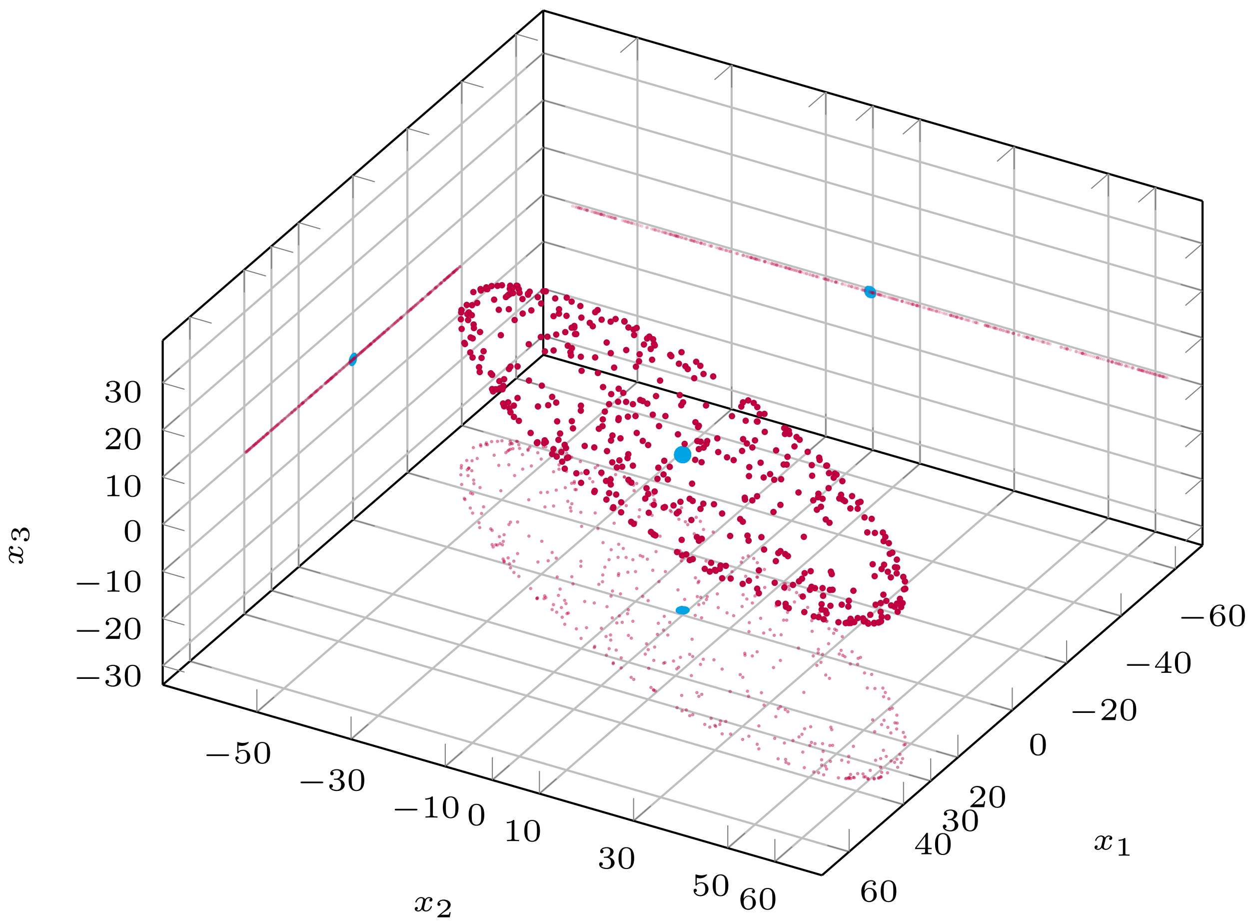
Acomodo la expresión de A, para que sea una *descomposición en valores singulares*:

$$A = U\Sigma V^t \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Y la expresión reducida:

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20-4\sqrt{5} & 20+4\sqrt{5} & 20+2\sqrt{5} \\ 40+2\sqrt{5} & 20-2\sqrt{5} & 40+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Scatter para 500 $x \in \mathbb{R}^3$ / $\|x\|_2 = 1$ y para 500 $Ax \in \mathbb{R}^2$



$$\left\{ x : x \in \mathbb{R}^3, \|x\|_2 = 1 \right\} \quad \left\{ Ax \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^3, \|x\|_2 = 1 \right\}$$

Si bien la perspectiva puede ser engañoza, la transformación de la esfera unitaria da como resultado una superficie elíptica en dos dimensiones que está ubicada en el plano $x_3 = 0$, como se puede ver en las proyecciones a los planos catesianos.

$$A =$$

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. [segundo recu 5/12/2024] Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Probar que $A^tA = B^tB$ si y solo si existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $B = UA$.

(b) Sea $A = QR$ la factorización QR de A. Probar que A y R tienen los mismos valores singulares.

(c) Sea $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$ QR una factorización QR de A. Hallar una matriz C tal que $\|C\|_2 = \|A\|_2$, $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Im}(A)$ y $C^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Expresar C en función de su descomposición en valores singulares.

(a) $(\Rightarrow)$ A partir de las descompsiciones de las matrices A y B:

$$\begin{cases} A &= U_A\Sigma_A V_A^t \\ B &= U_B\Sigma_B V_B^t \end{cases}$$

Por hipótesis, $A^tA = B^tB$, entonces, los *autovalores* y *autovectores* de A^tA y B^tB son los mismos, por lo tanto también sus matrices Σ y V

$$\begin{cases} A = U_A\Sigma V^t \\ B = U_B\Sigma V^t \end{cases} \implies A = U_A\Sigma V^t \Leftrightarrow \underbrace{U_A^t A}_{\Sigma V^t} = U_A^t\underbrace{U_A\Sigma V^t}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{U_B^t\Sigma V^t}_{B} = \underbrace{U_B^t U_A^t}_{\substack{U \\ \downarrow \\ \text{ortogonal}}} A \Leftrightarrow \boxed{B = UA}$$

La matriz U del final es ortogonal, porque el producto de dos matrices ortogonales lo es:

$$U_1^TU_1 = I \quad \text{y} \quad U_2^TU_2 = I \implies (U_1U_2)^t \cdot U_1U_2 = I \Leftrightarrow U_2^t\underbrace{U_1^tU_1}_{I}U_2 = I \Leftrightarrow U_2^tU_2 = I$$

$(\Leftarrow)$ Parto de $B = UA$, con U una matriz ortogonal:

$$B = UA \Leftrightarrow B^t = (UA)^t \implies B^tB = (UA)^tUA = A^tU^tUA = A^tA \Leftrightarrow \boxed{A^tA = B^tB}$$

(b) Los valores singulares de una matriz A:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{con } \lambda_i \text{ tal que} \quad |A^tA - \lambda_i I| = 0$$

Usando el resultado del punto anterior y recordando que la Q en la descomposición QR tiene como columnas una base ortonormal, es decir que Q es una matriz ortogonal, de forma tal que:

$$Q^tQ = I_n \implies A^tA = (QR)^t(QR) \overset{!}{=} R^tR.$$

Por lo tanto los *valores singulares* de A y R serán los mismos, más aún el cálculo de las *columnas* de V también va a dar lo mismo.

(c) Esto de la *descomposición en valores sigulares* es mucho más sencillo cuando la matriz es cuadrada, porque hay menos cosas que contemplar. Ya sé los tamaños de la matrices y no tengo que pensar que conviene hacer:

$$C = \underset{\substack{\downarrow \\ \in\mathbb{R}^{2\times 2}}}{U}\ \overset{\substack{\in\mathbb{R}^{2\times 2} \\ \uparrow}}{\Sigma}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \in\mathbb{R}^{2\times 2}}}{V^t}$$

Nos dan una A que está casi en SVD. ¿Se ve?, voy a empezar a permutar para dejar bien ordenados los valores singulares:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora permuto para mover ese 7 para la izquierda:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2} = \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

!Magia! ¿Y para qué me sirve eso? No sé, pero tenía ganas de hacerlo. ¡Nah, mentira! Se terminó el ejercicio. Esa última matriz es la C que cumple lo pedido.

Lo que viene a continuación es la forma menos *hacker* de hacerlo, básicamente como lo encaré yo antes de darme cuenta que esa SVD cumplía todo lo pedido.

Entendiendo como funciona la *descomposición en valores singulares* (mirá acá estos resultados click click) sé que:

$$\begin{cases} \mathrm{Nu}(A) & = & \langle(0,1)\rangle \\ \mathrm{Im}(A) & = & \langle(-1,1)\rangle \\ \|A\|_2 & = & 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad C^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\star 1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $\|C\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1 = 7$
- $\dim(\mathrm{Nu}(C)) = 1 \implies \sigma_2 = 0$
- V tiene como columnas a una *base ortonormal* $B_V = \{v_1, v_2\}$ donde $v_2 \in \mathrm{Nu}(C)$ Quizás te estés preguntando: ¿Y v_1? Me importa poco.
- U tiene como columnas a una *base ortonormal* $B_U = \{u_1, u_2\}$ donde $u_1 \in \mathrm{Im}(C)$ Quizás te estés preguntando: ¿Y u_2? Me importa otro poco.

El dato de $\star 1$ me dice que $(0, 7\sqrt{2})$ es una combinación de las columnas de V. No sé si es la mejor forma de encararlo, pero me lo imagino así:

$$C = U\Sigma V^t \overset{!}{\Leftrightarrow} C^t = V\Sigma U^t$$

Por lo tanto los generadores de la $\mathrm{Im}(C^t)$ son las columnas de V ahora. Como $\dim(\mathrm{Im}(C^t)) = 1$ están diciendo que $(0, 7\sqrt{2}) \in \langle(0,1)\rangle$ lo cual es cierto!

Con toda esa data se puede encontrar una matriz C sin mucha rosca dado que al matriz es cuadrada y estamos en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a tener en cuenta:

$$C_1 = \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Otra que cumpliría:

$$C_2 = \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

2. [segundo parcial 8/7/2023] Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la descomposición SVD de la matriz A.

(b) Construir una matriz B de dimensión apropiada que satisfaga a la vez: $B^t B = A^t A$ y $\text{Im}(B) = \langle (1,1,0,0),(1,1,1,1)\rangle$.

(a) La descomposiciónserá algo como:

$$A = \underset{\in\mathbb{R}^{3\times 3}}{\underset{\downarrow}{U}}\ \overset{\in\mathbb{R}^{3\times 2}}{\overset{\uparrow}{\Sigma}}\ \underset{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}{\underset{\downarrow}{V^t}}$$

Primero busco los valores singulares σ_i para formarme Σ:

$$|A^tA - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \implies \sigma_1 = \sqrt{6} \\ \lambda_2 = 1 \implies \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

$$E_{\lambda=6} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) \right\rangle \quad \text{y} \quad E_{\lambda=1} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \right\rangle$$

Listo ya tengo Σ y V los autovectores ortonormalizados de A^tA me forman las columnas de V:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora falta encontrar U solo voy a poder encontrar 2, luego completo con un vector perpendicular a ambos:

$$Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i u_i \implies BON_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \right\}$$

La descomposición queda como:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

(b) Tiro data para pensar y armar la matriz:

- $\text{Im}(B) = \langle (1,1,0,0),(1,1,1,1)\rangle$ lo voy a usar para las dos primeras columnas de U.
- B manda cosas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, dado que $B^tB = A^tA$, ambas $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y la $\text{Im}(B) \in \mathbb{R}^4$
- Como la $\dim(\text{Im}(B)) = 2$ entonces $\dim(\text{Nu}(B)) = 0$, resultado que se cae de *transformaciones lineales*:

$$\dim(\text{Nu}(B)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(B))}_{=2} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{\substack{\text{espacio de} \\ \text{partida}}},$$

  esto implica que ninguna columna de V, $v_i \in \text{Nu}(B)$
- $B^tB = A^tA$ la matriz $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ por lo tanto tienen mismos autovalores y autovectores. Por lo tanto los *valores singulares* de A y B son igules.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con eso estoy cumpliendo los requerimientos del enunciado. Falta expandir las columnas de U a una base ortonormal. Sale a ojo, si no se ve, entonces Gram-Schmidt:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y la versión reducida o algo así que da el mismo resultado:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

3.

(a) Hallar, si existe, una matriz A de coeficientes reales y del tamaño adecuado tal que

$$A^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_2 = 5, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \in \text{Nu}(A^t)$$

(b) Graficar la imagen de la esfera unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2\}$ por la transformación lineal $T(x) = Ax$.

---

a)
- Todo indicaría que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, ya que A come $\in \mathbb{R}^2$ y A^t come $\in \mathbb{R}^3$.
- Si $\|A\|_2 = 5 = \sigma_1$.
- Con el dato del autovector de $A^t A$, si $A = U\Sigma V^t$:

$$A^t A = (U\Sigma V^t)^t (U\Sigma V^t) = V\Sigma^t \underbrace{U^t U}_{I} \Sigma V^t = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} V^t$$

$$A^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\sigma_2^2}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo que se ve que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es un autovector de $A^t A$ de $\lambda = \frac{1}{4}$, por lo tanto $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \sigma_2$ conseguí un *valor singular*de A. Ese autovector será una de la filas de la matriz V.
- Si $(4, 1, 8) \in \text{Nu}(A^t)$:
Es un vector de la matriz U que siempre se multiplica donde hay ceros en Σ

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{65}}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{\sqrt{65}} & -\frac{4}{9\sqrt{65}} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{\sqrt{65}} & -\frac{32}{9\sqrt{65}} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

---

4. [segundo parcial 8/7/2023]

(a) Probar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

(b) Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P y Q matrices ortogonales tales que $A = PBQ$.

(c) Sea $\{c_1, c_2, c_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz singular (en términos de c_1, c_2, c_3) que mejor aproxima a la matriz C en norma 2, siendo

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c} 2c_1 & -5c_2 & 3c_3 \end{array}\right)$$

Acá algunas cosas de matrices ortogonales y otras click click

(a) Si Q y P son dos matrices ortogonales:

$$Q^tQ = I \quad \text{y} \quad P^tP = I \overset{\star 1}{\Longrightarrow} (QP)^t(QP) = P^t \underbrace{Q^tQ}_{I} P = P^tP = I$$

por lo tanto el producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

(b) Hay que demostrar la doble implicación:

$(\Rightarrow)$

$$\begin{cases} A = U_A\Sigma V_A^t \\ B = U_B\Sigma V_B^t \Leftrightarrow U_B^tBV_B = \Sigma \end{cases} \Longrightarrow A = \underbrace{U_AU_B^t}_{P} B \underbrace{V_BV_A^t}_{Q} \overset{\star 1}{=} PBQ$$

$(\Leftarrow)$ La matriz B como cualquier hija de vecino, tiene una *descomposición en valores singulares*:

$$B = U\Sigma V^t$$

Mientras que

$$A^tA = (PBQ)^t(PBQ) = Q^tB^tP^tPBQ = Q^tB^tBQ$$

Dado que $Q^t = Q^{-1}$ queda que la matrices A^tA y B^tB son semejantes, es decir que tienen los mismos autovalores. Dado que los valores singulares A y B son los $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, se concluye que A y B tienen mismos valores singulares.

(c)

5.

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A tiene todos sus valores singulares iguales si y solo si es múltiplo de una matriz ortogonal. (*Sugerencia: Recordar que el producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal y que el 'si y solo si' son dos implicaciones*).

b) Sea $B = (-2)Q$, con $Q = \left(\begin{array}{c|c|c} q_1 & q_2 & q_3 \end{array}\right)$ una matriz ortogonal. Hallar dos descomposiciones en valores sigulares distintas de B. (Observación: dos descomposiciones $C = U_1\Sigma_1V_1^t = U_2\Sigma_2V_2^t$ son iguales si y solo si $U_1 = U_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ y $V_1 = V_2$).

c) Calcular una matriz singular que sea más cercana a B en norma 2.

---

a) ($\Rightarrow$)

$$A = U\cdot\Sigma\cdot V^t \overset{\text{HIP}}{=} U\cdot\sigma I_n\cdot V^t = \sigma\underbrace{U\cdot V^t}_{Q} \overset{\text{sug.}}{=} \sigma Q \implies \boxed{A = \sigma Q}$$

Donde Q es una matriz ortogonal ya que $(UV^t)\cdot(UV^t)^t = I_n$.

($\Leftarrow$) Como $A = kQ$ y la matriz ortogonal tiene determinante no nulo, entonces no hay ningún valor singular nulo. Los valores singulares los saco de los autovalores de A^tA:

$$A^tA = k^2Q^tQ = k^2I_n \xrightarrow{\text{autovalores}} |k^2I_n - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow \lambda = k^2 \text{ con multiplicidad } n$$

Por lo tanto todos los n valores singulares de A son:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{k^2} = |k|}$$

b) Del ítem anterior tengo que los valores singulares de B son todos 2, luego para calcular V busco los autovectores de B^tB los v_i, y por último U tiene como columnas a $Bv_i = \sigma u_i$

$$B_1 = U_1\Sigma_1V_1^t = \left(\begin{array}{c|c|c} -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la otra sale como:

$$B_2 = U_2\Sigma_2V_2^t = \left(\begin{array}{c|c|c} q_1 & q_2 & q_3 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) La matriz singular más cercana a B, $\tilde{B}$ va a ser aquella que *transforme* un vector x y cuya diferencia sea mínima entre

$$\left\|Bx - \tilde{B}x\right\|_2$$

Esa matriz se consigue eliminando el menor de los valores singulares, ya que ese valor es el que menos perturba en la transformación, pero como acá son todos iguales, saco solo el último, así generando una fila de ceros que me dé la singularidad.

$$B = U\Sigma V^t = \left(\begin{array}{c|c|c} -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\left(\begin{array}{c|c|c} q_1 & q_2 & 0 \end{array}\right)$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑