Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 3

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 14/05/25 @ 01:51

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:
14/05/25 @ 01:51

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 3

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Matriz definida positiva:*

  Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva:

  $$\forall x \neq 0 \quad x^t A x > 0 \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

  Algunas propiedades de las matrices definidas positivas:

  - $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \implies \exists\, A^{-1}$.
  - Los elementos diagonales son positivos.
  - Las submatrices principales también son matrices definidas positivas

- *Descomposición de Cholesky:*

  La descomposición de Cholesky para una matriz A simétrica y definida positiva:

  $$A = LL^t$$

  con L triangular inferior. A partir de la descomposición:

  $$A = \overbrace{\tilde{L}U}^{\text{la misma LU de siempre}} \longrightarrow A = \tilde{L}\underbrace{D}_{\substack{\downarrow \\ \text{matriz diagonal} \\ \text{con los elementos} \\ \text{diagonales de } U}}\tilde{L}^t.$$

  $A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$, es definida positiva si y solo si D lo es. Como D es diagonal, solo es cuestión de ver que $[D]_{ii} > 0$.

  Finalmente:

  $$A = \tilde{L}D\tilde{L} \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t$$

- *Proyectores:*

  Se llama *Proyector* a una transformación lineal P que cumple que:

  - $P(v) = v$
  - $P \circ P = P$

  Si $P : V \to V$ es proyector, están las siguientes propiedades:

  - $v - P(v) \in \text{Nu}(P) \ \forall v \in V$
  - $\text{Nu}(P) \oplus \text{Im}(P) = V$ lo mismo que decir que $\text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{\mathbf{0}\}$
  - P un *proyector ortogonal* $\Leftrightarrow \text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$
  - P es un *proyector ortogonal* expresado en una base *ortonormal* $\implies P = P^t \quad (P = P^* \in \mathbb{C})$

- *Gram-Schimidt:*

  1) Proceso para construir una base que generá el mismo espacio, pero con elementos perpediculares entre sí.

  $$\underbrace{\{v_1, \dots, v_r\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{\{u_1, \dots, u_r\}}_{\text{Base final}} \quad \text{con } u_i \cdot u_j = 0 \ \forall i \neq j$$

  2) La mecánica es cuentosa pero razonable:

     1) Agarro el <u>primer vector de la base inicial</u> v_1 como primer vector de la base final:

     $$\{\underbrace{u_1}_{\substack{\downarrow \\ = v_1}}\}$$

2) Agarro el <u>segundo vector de la base inicial</u> v_2 y calculo el segundo vector de la base final:

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1^* \cdot v_2}{\|u_1\|^2} u_1 \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, u_2\}$$

3) Y voy así hasta usar todos los vectores el <u>segundo vector de la base inicial</u> v_2 y calculo el segundo vector de la base final:

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1^* \cdot v_3}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{u_2^* \cdot v_3}{\|u_2\|^2} u_2 \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, u_2, u_3\}$$

4) En general cuando agarre el <u>$i-$ésimo vector de la base inicial</u> y calcule el $i-$ésimo vector de la base final:

$$u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|^2} u_k \xrightarrow[\text{base final}]{\text{actualizo la}} \{u_1, \dots, u_i\}$$

5) Así hasta haber usado todos los vectores de la base inicial, para obtener la base con los vectores ortogonalizados:

$$\{u_1, \dots, u_r\}$$

es una base ortogonal, para los amigos una BOG, si quiero que sea una *base ortonormal*, BON:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\}$$

- *Matriz Ortogonal:*

Una matriz ortogonal tiene sus columnas <u>ortonormales</u>.

- *Factorización QR:* $A = QR$

La factorización QR no tiene un pedo que ver las LU, Chole y amigos. QR es un fantasma que sale de *Gram-Schmidt*.

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_r\}}_{\text{Columnas de } A} \xrightarrow[\text{más normalizar}]{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\}}_{\text{Columnas de } Q} \quad \text{con } u_i \cdot u_j = 0 \ \forall i \neq j$$

⊥ 1) Q es una *Matriz Ortogonal* que va a tener en sus columnas el resultado de ortonormalizar las columnas de A.

⊥ 2) R es una *Matriz triangular superior* con las normas de las columnas de Q en la diagonal

⊥ 3) Mini derivación:

$$\overbrace{u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|_2^2} u_k}^{\text{Gram-Schmidt, duro y puro}} \xrightarrow[\text{y acomodo}]{\text{despejo el } v_i} \overbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{col-i} \\ \text{de} A}}{v_i} = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^* \cdot v_i}{\|u_k\|} \frac{u_k}{\|u_k\|}}^{\star^1}$$

Eso ahora lo uso para armar $A = QR$:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right)}_{A} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} & \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{array} \right)}_{Q} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \|u_1\| & \frac{u_1^* \cdot v_2}{\|u_2\|} & \frac{u_1^* \cdot v_3}{\|u_1\|} \\ 0 & \|u_2\| & \frac{u_2^* \cdot v_3}{\|u_2\|} \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{array} \right)}_{R}$$

Ya sé que hice el ejemplo matricial en $\mathbb{R}^3$, pero con el poder de tu imaginación fijate que la columna $j-$ésima para una matriz imaginaria de $n \times n$ sería algo así:

$$\text{Col}(A)_j = v_j \overset{\star^1}{=} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{u_k^* \cdot v_j}{\|u_k\|} \frac{u_k}{\|u_k\|} + u_j$$

$\perp$ 4) No sé si ayuda a la notación o no, pero quiero cambiar la notación así:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_r}{\|u_r\|} \right\} \xrightarrow{\text{le pongo la gorra}} \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r\} \text{ donde los } \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \underset{i \neq j}{\overset{\downarrow}{=}} 0 \quad \text{y} \quad \|\hat{u}_i\| = 1 \ \forall i$$

Dejando así la expresión de la descomposición:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right)}_{A} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \end{array} \right)}_{Q \text{ con cols ortonormales}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \|u_1\| & \hat{u}_1^* \cdot v_2 & \hat{u}_1^* \cdot v_3 \\ 0 & \|u_2\| & \hat{u}_2^* \cdot v_3 \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{array} \right)}_{R \text{ triangular superior}}$$

- *Matriz de HouseHolder:* ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → una *pull request* al.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Sean A y $B \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si A y B son triangulares superiores, AB es triangular superior.

(b) Si A y B son diagonales, AB es diagonal.

(c) Si A es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

(a) Una matriz A va a ser triangular superior si todos los número debajo de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \overset{\star 1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ a_{ij} & \text{si} \quad i \leq j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} & a_{ij} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Los a_{ij} no tienen que ser necesariamente distinto a cero. Ahora multiplico dos matrices triangulares superiores:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} \overset{\star 1}{=} \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} \cdot b_{kj} & \star 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple $\star 2$ son los que tiene las *filas menores o iguales columnas* y *filas menores o iguales columnas*, si no son cero. Básicamente la definición de matriz triangular superior.

(b) Esta es un poco más fácil. Una matriz es diagonal si:

$$A_{ij} \overset{\star 1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ a_{ij} & \text{si} \quad i = j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Nuevamente, los elementos diagnonales no tienen que ser necesariamente distintos de cero. Ahora multiplico dos matrices diagonales:

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} \overset{\star 1}{=} \begin{cases} a_{ii} \cdot b_{ii} & \star 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la sumatoria las columnas de los elementos de A coinciden con las filas de los elementos de B, pero solo cuando estemos multiplicando la fila i con la columna i es que ambos elementos podrían ser no nulos.

(c) Una matriz A va a ser triangular superior estricta si todos los número debajo y de la diagonal son cero:

$$A_{ij} \overset{\star 1}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ a_{ij} & \text{si} \quad i < j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Meto inducción porque es un viaje. Quiero probar que:

$$p(n) : A \in K^{n\times n} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^n = 0.$$

Caso base:

$$p(2) : A \in K^{2\times 2} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^2 = 0$$

Cálculo directo

$$A \cdot A \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $p(2)$ es verdadera.

Paso inductivo: Voy a asumir que para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$p(k) : \underbrace{A \in K^{k\times k} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^k = 0}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

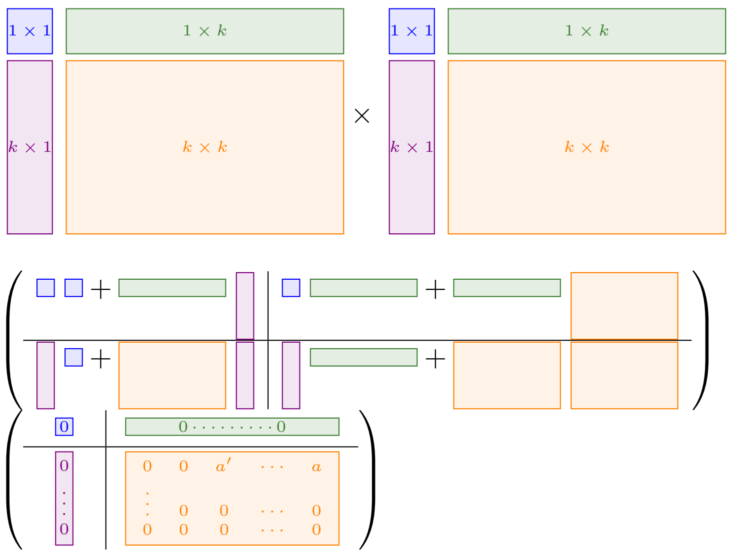
es verdadera. Por lo tanto ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : A \in K^{(k+1)\times(k+1)} \text{ estrictamente triangular superior} \implies A^{k+1} = 0$$

Para probar esta tremenda garompa, voy a usar el producto en bloques. Tengo una matriz $A \in K^{(k+1)\times(k+1)}$ estrictamente triangular superior y la parto en bloques así:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{0} & a_{12} & \cdots & a_{1k+1} \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{kk+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$A^2 = A \cdot A \quad =$



Oka, esto se fue al carajo. Pero está demostrado. La última matriz, es el resultado de A^2. Tiene todos ceros excepto en el bloque naranja, que está en $K^{k\times k}$ y es el producto de hacer el bloque naranja por el bloque naranja dado que el bloque violeta por el bloque verde dio 0. Por lo tanto el bloque naranja es la hipótesis inductiva!!! Multiplicar $k+1$ veces A por si misma dará 0, porque el producto, será el (bloque naranja)^2 con cada vez más ceros.

Dado que $p(2), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción en $p(n)$ también será verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

El caso con $n = 1$ es trivial, dejame en paz.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

Ejercicio 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

(a) Escalonar la matriz A multiplicándola a izquierda por matrices elementales $T^{ij}(a), a \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ se define como:

$$T^{ij}(a) = I_n + aE^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, a \in K,$$

siendo E^{ij} las matrices canónicas de $K^{n\times n}$

(b) Hallar la descomposición LU de A.

(c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $Ax = b$, para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hacer una operación entre *filas* es multiplicar por esas matrices T^{ij}, pero dado que el *me da tremenda pajómetro* explota, escribo las T^{ij} para la primera *columna* de ceros no más.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{31}(-\frac{2}{1})=I_4+(-\frac{2}{1})E^{31}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{41}(\frac{3}{1})=I_4+(\frac{3}{1})E^{41}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bigstar^{1}$$

Ahí entonces están las T^{ij} para hacer ceros en la primera *columna*. Y como la *matemagia* en esta materia parece no tener parangón, cuando multiplicás esas matrices T^{ij} da lo mismo que sumar los elementos fuera de la diagonal componente a componente:

$$T^{31} \cdot T^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gracias a ese resultado que en el próximo paso podría armar solo una matriz con la info para triangular toda la *segunda columna*. solo un producto matricial. Continúo la triangulación de $\bigstar^{1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32}(-1)=I_4+(-\frac{1}{1})E^{32}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto para que la matriz A quede triangulada superiormente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$T^{32} \cdot T^{41} \cdot T^{31} \cdot A = U$$

(b) La U está una vez triangulada la matriz A. Encontrar la L sale con las matrices que multiplicamos para obtener la matriz triangulada:

$$L^{-1} \cdot A = U \xrightarrow[L]{\times \text{ izquierda}} L \cdot L^{-1} \cdot A = L \cdot U \Leftrightarrow A = L \cdot U$$

El producto de las matrices elementales me forma la inversa de $L : L^{-1}$. Por suerte encontrar la inversa de $(L^{-1})^{-1}$ es sencillo:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +2 & +1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo hay que cambiarle los signos a los elementos que estás por debajo de la diagonal.

$$A = LU \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A \cdot x = b \overset{A = LU}{\Longleftrightarrow} LU \cdot x = b \Leftrightarrow L \underbrace{(U \cdot x)}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b & \xrightarrow{\star^1} \text{Arranco por acá.} \\ U \cdot x = y & \xrightarrow{\star^2} \text{Sigo por acá una vez encontrado } y. \end{cases}$$

Entonces resuelvo primero $\star^1$:

$$Ly = b \xrightarrow{\text{armo sistema}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow y \overset{\star^3}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con la $\star^3$ resuelvo $\star^2$:

$$Ux = y \xrightarrow[\text{con } \star^3]{\text{armo sistema}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Y porque soy un tipazo (y le pifié 1000 veces a las cuentas) acá tenés el código para corroborar:

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
import numpy as np
import scipy

# Matriz A
A = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [2, -1, 0, -2], [-3, 3, 0, -1]])
L = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [2, 1, 1, 0], [-3, 0, 0, 1]])
U = np.array([[1, -1, 0, 1], [0, 1, 4, 0], [0, 0, -4, -4], [0, 0, 0, 2]])
b = np.array([[1],[-7],[-5],[1]])

print(f"A =\n {A}")
print(f"L =\n {L}")
print(f"U =\n {U}")

print(f"\nA == LU --> {np.array_equal(A,L @ U)}")
print(f"Ax = b  -->  x = {np.transpose(np.linalg.solve(A,b))}")
```

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Ale S.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $Ly = b$, siendo L triangular inferior.

(b) $Ux = y$, siendo U triangular inferior.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

(a) Calcular la descomposición LU de una matriz dada A, asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.

(b) Resolver un sistema $Ax = b$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem (c) del ejercicio 2.

(a) El siguiente *snippet* es en gran parte código para generar la matriz y después del cálculo de la triangulación formar las matrices L y U.

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
"""
Eliminacion Gausianna
"""

import numpy as np


def elim_gaussiana(A):
    m = A.shape[0]
    n = A.shape[1]
```

```
    Ac = A.copy()

    if m != n:
        print("Matriz no cuadrada")
        return


    for i in range(0, n - 1):
        divisor = Ac[i][i]
        for j in range(i, n - 1):
            coef = Ac[j + 1][i] / divisor
            Ac[j + 1][i:] = np.subtract(Ac[j + 1][i:], coef * Ac[i][i:])
            Ac[j + 1][i] = coef


    L = np.tril(Ac, -1) + np.eye(A.shape[0])
    U = np.triu(Ac)

    return L, U

def main():
    n = 7
    B = np.eye(n) - np.tril(np.ones((n, n)), -1)
    B[:n, n - 1] = 1
    print(f"Matriz B = \n{B}\n")

    L, U = elim_gaussiana(B)

    print(f"Matriz L = \n{L}\n")
    print(f"Matriz U = \n{U}\n")
    print("B = LU? ", "Sí!" if np.allclose(np.linalg.norm(B - L @ U, 1), 0)
   else "No!")
    print("Norma infinito de U: ", np.max(np.sum(np.abs(U), axis=1)))


if __name__ == "__main__":
    main()
```

Ejercicio 5.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

---

según la definición de matriz definida positiva:

$$\boldsymbol{x}^t \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 4x^2 - 4xz + 5y^2 + 10yz + 11z^2 \overset{!!}{=} (4x^2 - 4xz + z^2) + 5(y^2 + 2yz + z^2) + 5z^2$$

$$= 5z^2 + 5(y+z)^2 + (2x - z)^2 > 0$$

La matriz cumple la defición de *matriz definida positiva* $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$. Sí, oka, hacer eso es una locura, más fácil es hacer lo que sigue y mirar los elementos de la matriz D:
Hay un teorema que dice algo así:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva si y solo sí existe $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior con diagonal positiva tal que $A = LL^t$.

Arranco como buscando la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+\frac{1}{2}F_1]{F_2-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{3}{2}F_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

¡Sí! Ver los valores diagonales de U alcanza para ver que la matriz era efectivamente definida positiva. ¿Pero quién puede quitarnos el placer de haberlo comprobado de ambas formas?

Y ahora me formo la $\tilde{L}$ a partir de la *eliminación gaussiana:*

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto ya casi estamos:

$$A = \tilde{L}U = \tilde{L}D\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t = \tilde{L}\sqrt{D}(\tilde{L}\sqrt{D})^t = LL^t \text{ con } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pequeña verificación:

```python
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5,
        1]])
U = np.array([[4,2,-2],[0,4,6],[0, 0, 1]])

print(f"L_tilde U=\n{L_tilde@U}")
#     [ 4 2 -2]
#   = [ 2 5  5]
#     [-2 5 11]
```

```python
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5,
        1]])
D = np.array([[4,0,0],[0,4,0],[0, 0, 1]])

print(f"D L_tilde_traspuesta=\n{D@np.transpose(
        L_tilde)}")
#    [4 2 -2]
# =  [0 4 6]
#    [0 0 1]
```

```python
import numpy as np

L_tilde = np.array([[1,0,0],[0.5,1,0],[-.5, 1.5,
        1]])
D_sqrt = np.array([[2,0,0],[0,2,0],[0, 0, 1]])
L_chole = L_tilde @ D_sqrt

print(f"A=LL_traspuesta=\n{L_chole@np.transpose(
        L_chole)}")
#     [4 2 -2]
# = [2 5  5]
#   [-2 5 11]
```

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

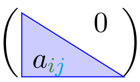
Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que A es definida positiva si y solo si existe un conjunto de vectores linealmente indepedientes $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$

$(\Longrightarrow)$ Si A es una matriz simétrica y definida positiva va a admitir la descomposición de Cholesky (mirá acá).

$$A \underset{A \text{ def. pos.}}{\overset{A=A^t}{\Longleftrightarrow}} A = \underset{\text{la de LU}}{\underset{\downarrow}{\tilde{L}}} \overset{d_{ij}>0}{\overset{\uparrow}{D}} \tilde{L}^t \Leftrightarrow A = \tilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{L}^t \Leftrightarrow A = LL^t \underset{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}{\overset{\times}{\Longleftrightarrow}} \begin{aligned} 0 < \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t L L^t \boldsymbol{x} &= (L^t\cdot\boldsymbol{x})^t (L^t \boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Ahora esos $\boldsymbol{y}$ tienen que ser *linealmente independientes*, más fácil, tengo que encontrar un solo conjunto:

$$\boldsymbol{y} = L^t \boldsymbol{x} \overset{\text{elijo}}{\Longrightarrow} \{x_1, \dots, x_n\} = \{e_1, \dots, e_n\} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = L^t e_1 = \text{Col}(L^t)_1 \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{y}_n = L^t e_n = \text{Col}(L^t)_n \end{cases}$$

La matriz L es triangular inferior  , con unos en la diagonal por lo que sus columnas son mega *linealmente independientes*. Y dado que

$$\boldsymbol{x}_i^t A \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_i^t A \boldsymbol{e}_j \overset{!}{=} a_{ij} = \boldsymbol{y}_i^t \boldsymbol{y}_j$$

tenemos que el conjunto que verifica lo pedido:

$$\boxed{\{\text{Col}(L^T)_1, \dots, \text{Col}(L^T)_n\} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

$(\Longleftarrow)$ La hipótesis ahora me dice que tengo vectores *linealmente independientes* y además que con esos vectores me formo la matriz A. Es decir que $A = X^t X$, con X:

$$X = \left(\boldsymbol{x}_1 \middle| \cdots \middle| \boldsymbol{x}_n\right) \Longrightarrow A = X^t X \quad \begin{aligned} \underset{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}}{\overset{\times}{\Longleftrightarrow}} &\quad \boldsymbol{y}^t A \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t X^t X \boldsymbol{y} \\ \Leftrightarrow &\quad \boldsymbol{y}^t A \boldsymbol{y} = (X\boldsymbol{y})^t X \boldsymbol{y} = \|X\boldsymbol{y}\|_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Queda demostrado ya que:

$$\boxed{\begin{gathered} A = X^t X \overset{\text{transpongo}}{\Longrightarrow} A^t = (X^t X)^t = X^t X = A \\ \text{y} \\ \boldsymbol{y}^t A \boldsymbol{y} > 0 \ \ \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{A es definida positiva} \end{gathered}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|A\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que $I - A^t A$ es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

(a) *Para la simetría:*

Transpongo y cruzo los dedos para que quede igual:

$$(I - A^tA)^{\color{red}t} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{linealidad en la trasposición}}}{=} I^t - (A^tA)^t = I - A^tA$$

Sobre la linealidad de la transposición:

$$[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \xrightarrow{\text{transpongo}} [A+B]^t_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

Es simétrica.

Para ver si es definida positiva:

Intentamos con la definición de *matriz definida positiva* y vemos que sale:

$$I - A^tA \underset{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}{\overset{\times}{\Longleftrightarrow}} \color{cyan}{\boldsymbol{x}^t(I - A^tA)\boldsymbol{x}} \color{black} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - \boldsymbol{x}^tA^tA\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - \boldsymbol{x}^tA^tA\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|A\boldsymbol{x}\|_2^2$$

$$\overset{!!}{=} \|\boldsymbol{x}\|_2^2\left(1 - \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}\right) \quad \bigstar^1$$

Y por la definición de la norma inducida:

$$\|A\|_2 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{enunciado}}}{<} 1 \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

queda entonces $\bigstar^1$ $\overbrace{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}^{>0} \underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}}^{<1}\right)}_{>0} > 0$:

$$\boxed{\color{cyan}{\boldsymbol{x}^t(I - A^tA)\boldsymbol{x}} \color{black} > 0}$$

(b) *Para la simetría:* Creo que esto se ve a simple vista:

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix}$$

Para ver si es definida positiva: Acá debería usar *Cholesky* resumencito acá click click

> ⚠ $A = \tilde{L}D\tilde{L}^t$, es definida positiva si y solo si D lo es. Como D es diagonal, solo es cuestión de ver que $[D]_{ii} > 0$. ⚠

Acá surge naturalemente la pregunta de ¿Cómo 💩 hago la descomposición?.

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & B \end{pmatrix}}^{\color{red}L} \overbrace{\begin{pmatrix} I & M^t \\ 0 & B^t \end{pmatrix}}^{\color{red}L^t} = \begin{pmatrix} I & M^t \\ M & MM^t + BB^t \end{pmatrix}$$

$$\overset{\color{red}!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A & = & M^t \\ A^t & = & M \\ I & = & MM^t + BB^t \Leftrightarrow I - A^tA = BB^t \end{cases}$$

Y en un giro totalmente inesperado, al menos por mí, quedó que esa expresión del ítem (a). BB^t es una matriz simétrica y definida positiva, por lo tanto tiene factorización de Cholesky,

$$C = BB^t = \tilde{B}\sqrt{D}\sqrt{D}\tilde{B}^t$$

sé que existe esa matriz diagonal D que tiene sus elementos positivos.

Por lo tanto esto demuestra que efectivamente las matrices L y L^t son las matrices de la descomposición de Cholesky de la matriz del enunciado:

$$C = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & I \end{pmatrix} = LL^t$$

Como la matriz C admite descomposición de *Chole*, es simétrica definida positiva.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 13. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\boldsymbol{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{v_1^*}{\|v_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{v_2^*}{\|v_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{v_n^*}{\|v_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $C_{EB} = C_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector v en base B son:

$$(v)_B = (v_1^* v, v_2^* v, \dots, v_n^* v).$$

(d) Calcular $(v)_B$ siendo $v = (1, -i, 3)$, $B = \left\{ (\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i) \right\}$.

(a) Si B es una *base ortogonal*, una BOG, entonces sus vectores cumplen que:

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \|\boldsymbol{v}_i\|_2^2 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Para calcular la matriz de cambio de base C_{EB} hay que calcular *las coordenadas de los vectores canónicos en la base B*: Ojo que esa llave son ecuaciones vectoriales, todo lo que está en **negrita**, **bold** es vector:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 &= c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{12}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{v}_n \underset{!\boldsymbol{v}_1^*}{\overset{\times \rightarrow}{\Longleftrightarrow}} \underbrace{v_1^*}_{\in K} = c_{11}\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2 \Leftrightarrow c_{11} = \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \\ \boldsymbol{e}_2 &= c_{21}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{2n}\boldsymbol{v}_n \underset{!\boldsymbol{v}_1^*}{\overset{\times \rightarrow}{\Longleftrightarrow}} v_1^* = c_{21}\|\boldsymbol{v}_2\|_2^2 \Leftrightarrow c_{21} = \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{e}_n &= c_{n1}\boldsymbol{v}_1 + c_{n2}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{v}_n \underset{!\boldsymbol{v}_1^*}{\overset{\times \rightarrow}{\Longleftrightarrow}} v_1^* = c_{n1}\|\boldsymbol{v}_n\|_2^2 \Leftrightarrow c_{n1} = \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \end{cases}$$

Esos coeficientes c_{ij} me forman <u>la primera fila</u>, c_{ij} de la matriz C_{EB}:

$$(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}) = \left(\frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2}, \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2}, \cdots, \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \right) \overset{!}{=} \frac{v_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2}$$

Cuando quiera calcular <u>la fila</u> j-ésima:

$$(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}) = \left(\frac{v_j^*}{\|\boldsymbol{v}_j\|_2^2}, \frac{v_j^*}{\|\boldsymbol{v}_j\|_2^2}, \cdots, \frac{v_j^*}{\|\boldsymbol{v}_j\|_2^2} \right) \overset{!}{=} \frac{v_j^*}{\|\boldsymbol{v}_j\|_2^2}$$

Y así me armo la matriz C_{EB} generando fila por fila con este método.

(b) Ahora B es una BON, así que:

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \|\boldsymbol{v}_i\|_2^2 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Y con esto la matriz del ítem (a) queda más simple como:

$$\boldsymbol{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^* \\ \hline \boldsymbol{v}_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{v}_n^* \end{pmatrix} \star^1$$

La matriz de cambio de base C_{EB} toma *vectores en coordenadas de* E y da el resultado en *coordenadas de la base* B. Construir el cambio de base C_{BE}, es inmediato el cálculo de coordenadas haciendo el sistema como en el ítem (a) ¡Quedan los vectores de la base B conjugados como columnas de la matriz!

$$\boldsymbol{C}_{BE} = \left(\boldsymbol{v}_1 \middle| \boldsymbol{v}_2 \middle| \dots \middle| \boldsymbol{v}_n\right) \xrightarrow[\Longrightarrow \ *]{\text{transpongo y conjugo}} \boxed{\boldsymbol{C}_{BE}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^* \\ \hline \boldsymbol{v}_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{v}_n^* \end{pmatrix} \overset{\star^1}{=} \boldsymbol{C}_{EB}}$$

Eso funciona así porque:

$$C_{BE}^* C_{EB} = I$$

(c) Sale con el sistemita del ítem (a) nuevamente:

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \overset{\times \to}{\underset{!\boldsymbol{v}_j^*}{\Longleftrightarrow}} \boldsymbol{v}_j^* \cdot \boldsymbol{v} = c_j \underbrace{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2}_{=1} \Leftrightarrow \boxed{c_j = \boldsymbol{v}_j^* \cdot \boldsymbol{v}}$$

(d) Pajilla ☺. B es una BON. Usando el ítem (c):

$$(\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_3^*) \overset{!}{=} (0, -\frac{2}{\sqrt{2}}i, 3i)$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

(i) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(ii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(iii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

Acá un poco de cosas de proyectores, click, click

(i) Encuentro un *sistema de generadores* de $\text{Im}(f) = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$, y dado que el subespacio $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$, por ejemplo $\text{Nu}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

Con esa data defino el proyector:

$$\begin{cases} f(-1,1,0) &= (-1,1,0) \\ f(-1,0,1) &= (-1,0,1) \\ f(1,1,1) &= (0,0,0) \end{cases}$$

Si tomo como base $B = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco f, para lo cual multiplico por:

$$[C]_{BE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{calculo la}} [C]_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[f]_{EE} = [f]_{BE} \cdot [C]_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)}$$

(ii) Usando lo mismo de antes pero resuelvo de otra forma: Ahora tengo que una base del $\text{Nu}(f)$:

$$B_{\text{Nu}(f)} = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

Completo esa base teniendo en cuenta que el vector que agrego va a ser un elemento de la $\text{Im}(f)$:

$$B_V = \{\underbrace{(-1,1,0),(-1,0,1)}_{\in \text{Nu}(f)}, \underbrace{(0,0,1)}_{\in \text{Im}(f)}\} = \mathbb{R}^3$$

⚠ Importante que $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = 0$, en $\mathbb{R}^3$ parece obvio, pero ya en $\mathbb{R}^4$ es más engañoso. ⚠

$$\bigstar^1 \begin{cases} f(-1,1,0) &= (0,0,0) \\ f(-1,0,1) &= (0,0,0) \\ f(0,0,1) &= (0,0,1) \end{cases}$$

Voy a encontrar la expresión funcional de este proyector. La idea es escribir a esa base, B_V, en función de (x_1,x_2,x_3) para luego transformarla usando la propiedades de las viejas y queridas *transformaciones lineales*:

$$(x_1,x_2,x_3) \overset{\bigstar^2}{=} a\cdot(-1,1,0) + b(-1,0,1) + c(0,0,1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{sistema en}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

Resolviendo ese sistema obtengo:

$$\begin{cases} a = x_2 \\ b = -x_1 - x_2 \\ c = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases},$$

es decir que $\bigstar^2$ es:

$$(x_1,x_2,x_3) = x_2\cdot(-1,1,0) + (-x_1-x_2)\cdot(-1,0,1) + (x_1+x_2+x_3)\cdot(0,0,1)$$

Aplicando f:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x_1,x_2,x_3) & = & f\big(x_2 \cdot (-1,1,0) + (-x_1 - x_2) \cdot (-1,0,1) + (x_1+x_2+x_3) \cdot (0,0,1)\big) \\
f(x_1,x_2,x_3) & = & x_2 \cdot f(-1,1,0) + (-x_1 - x_2) \cdot f(-1,0,1) + (x_1+x_2+x_3) \cdot f(0,0,1) \\
f(x_1,x_2,x_3) & \overset{\star 1}{=} & x_2 \cdot (0,0,0) + (-x_1 - x_2) \cdot (0,0,0) + (x_1+x_2+x_3) \cdot (0,0,1) \\
f(x_1,x_2,x_3) & = & (0,0,x_1+x_2+x_3)
\end{array}
$$

Si por alguna razón quiero esto en forma matricial, transformo los canónicos y pongo los transformados como columnas:

$$
[f]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(1,0,0) & = & (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\
f(0,1,0) & = & (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\
f(0,0,1) & = & (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})
\end{array}
\right.
$$

$$
\boxed{f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z)}
$$

(iii) Ahora $\mathrm{Nu}(f) = \langle (3,0,1), (0,1,0) \rangle$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(3,0,1) & = & (0,0,0) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(1,1,1) & = & (1,1,1)
\end{array}
\right.
$$

Aprovechando que hay muchos ceros en la matriz, puedo encontrar los transformados de los *vectores canónicos* con un par de cuentas usando nuevamente propiedades de *transformaciones lineales*:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(3,0,1) & = & (0,0,0) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(1,1,1) & = & (1,1,1)
\end{array}
\right.
\xrightarrow{3F_3 - F_1 \to F_3}
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(3,0,1) & = & (0,0,0) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(0,3,2) & = & (3,3,3)
\end{array}
\right.
\xrightarrow{F_3 - 3F_2 \to F_3}
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(3,0,1) & = & (0,0,0) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(0,0,2) & = & (3,3,3)
\end{array}
\right.
$$

$$
\xrightarrow{2F_1 - 3F_3 \to F_1}
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(6,0,0) & = & (-3,-3,-3) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(0,0,2) & = & (3,3,3)
\end{array}
\right.
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{2}F_3 \to F_3]{\frac{1}{6}F_1 \to F_1}
\left\{
\begin{array}{rcl}
f(1,0,0) & = & (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\
f(0,1,0) & = & (0,0,0) \\
f(0,0,1) & = & (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})
\end{array}
\right.
$$

En forma matricial quedaría:

$$
[f]_{EE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}
$$

Multiplicando a $[f]_{EE}$ por (x_1, x_2, x_3) se obtiene la forma funcional:

$$
[f]_{EE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix}
$$

A mí me gusta escrito así:

$$
\boxed{f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2} \cdot (-x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3, -x_1 + 3x_3)}
$$

Ejercicio 16.

(a) Sea $B = \{(1,-1,0), (0,1,-1), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0),\ f(0,1,-1) = (0,1,-1),\ f(0,0,1) = (0,0,0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,/ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Acá te dejo resumencito de proyector, click, click

(a) Para calcular $[f]_B$ o $[f]_{BB}$ que me parece más descriptivo:

$$[f]_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $[f]_{BB}$ hay que calcular las coordenadas en base B de los transformados de la base B.

$$\begin{cases} (f(1,-1,0))_B &= (1,-1,0)_B &\overset{!}{=} (1,0,0) \\ (f(0,1,-1))_B &= (0,1,-1)_B &\overset{!}{=} (0,1,0) \\ (f(0,0,1))_B &= (0,0,0)_B &\overset{!}{=} (0,0,0) \end{cases} .$$

Salen a ojo esas coordenadas, porque son los casi mismos vectores que la base B. Si no lo ves, planteá las combinetas lineales para calcular las coordenadas y vas a llegar a lo mismo.

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si f es un proyector, lo va a ser en cualquier base, voy con la definición: $f \circ f = f$

$$[f]_{BB} \circ [f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [f]_{BB}$$

(b) De ese subespacio saco uno de los muchos sistemas de generadores para $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (-1,1,0), (-3,0,1) \rangle$$

Propongo un proyector f con la condición de que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$:

$$\bigstar^{1} \begin{cases} f(-1,1,0) &= (-1,1,0) \\ f(-3,0,1) &= (-3,0,1) \\ f(1,1,1) &= (0,0,0) \end{cases}$$

Las cuentas estas que voy a hacer no son necesarias para contestar, pero quiero ver que no me quede simétrico.

Ojo que eso definido en $\bigstar^{1}$ sería algo como $[f]_{BE}$ con $B = \{(-1,1,0), (3,0,1), (1,1,1)\}$ para encontrar el proyector es su forma *más mejor*:

$$\begin{cases} f(-1,1,0) &= (-1,1,0) \\ f(3,0,1) &= (3,0,1) \\ f(1,1,1) &= (0,0,0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f(1,0,0) &= (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \\ f(0,1,0) &= (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}) \\ f(0,0,1) &= (-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \end{cases}$$

También se podría haber usado lo de la combinación lineal:

$$(x_1, x_2, x_3) = a(-1,-1,0) + b(3,0,1) + c(1,1,1)$$

para luego transformarlo y llegar a la expresión funcional de f. Mirá el ejercicio **15.**(b)

El proyector en forma matricial en base E queda:

$$[f]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El proyector P no es *un proyector ortogonal.* Por un lado no se cumple que $\mathrm{Nu}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$, dado que $\underbrace{(1,1,1)}_{\in \mathrm{Nu}(P)} \cdot \underbrace{(3,0,1)}_{\in \mathrm{Im}(P)} \neq 0$. Además la expresión matricial tampoco cumple $P = P^t$.

Se puede encontrar una base en la que el proyector sí va a ser simétrico. En este caso particular:

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

igual que en el ítem (a), pero si bien es simétrica la expresión matricial no se puede concluir en esta base que sea un *proyector ortogonal*, debería estar expresado en una *base ortonormal* para ver ese resultado.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 17. Sea $v \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|v\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz vv^* es la proyección ortogonal sobre $\langle v \rangle$.

(b) Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces $A = \sum_{i=1}^{m} v_i v_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si A es como en el ítem anterior, $I - A$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en `Python` que $R = I - 2vv^*$ es la reflexión respecto de $\langle v \rangle^\perp$.

(a) Tenemos que:

$$\|v\|_2 = 1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} v^* \cdot v \overset{\star^1}{=} 1$$

Un *proyector ortogonal sobre* $\langle v \rangle$, P *cumple*:

$$P \cdot v \overset{\text{def}}{=} v, \quad P \cdot v^\perp \overset{\text{def}}{=} 0, \quad P = P^* \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Nu}\, P \perp \mathrm{Im}\, P$$

Entonces si esta *gaver* vv^* cumple eso, ganamos:

$$\overbrace{vv^*}^{P} \cdot v \overset{!}{=} v(v^* \cdot v) \overset{\star^1}{=} v,$$

that was easy. Vamos a por la otra. Agarro algún $w \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} vv^* \cdot \underbrace{(Pw - w)}_{\perp v} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad vv^* \cdot Pw - vv^* \cdot w = 0 \\ &\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad v(P^*v)^*w - vv^*w = 0 \\ &\overset{!!}{\Leftrightarrow} \quad v(Pv)^*w - vv^*w = 0 \\ &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad vv^*w - vv^*w \overset{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Me doy cuenta que podría haber probado que $(vv^*)^* = vv^*$ ¿Pero quien me quita lo bailado?:

(b) Si tengo una base del subespacio, entonces puedo escribir a un vector genérico $w \in S$ como una combineta de los vectores de la base:

$$w = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Transformo teniendo en cuenta que $v_i^*(a_j v_j) = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$, recordando que $\|v_i\|_2 = 1$:

$$Aw = \sum_{i=1}^{m} v_i v_i^* w = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = w \implies Aw = w$$

Me doy cuenta que podría haber probado que $A = A^*$ ¿Pero quien me quita lo bailado?:

$$A^* = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i v_i^*\right)^* \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{m} (v_i v_i^*)^* = \sum_{i=1}^{m} v_i v_i^* = A$$

(c) Medio que usé algo de esto en el ítem (a). Un *proyector ortogonal* sobre S, va a mandar todo elemento del *complemento ortogonal* de S, $S^\perp$ al 0.

Es decir, si $w \in S^\perp$:

$$Aw = 0 \qquad \text{y} \qquad (I - A)w = w \implies A\underbrace{(I - A)w}_{w} = (A - A^2)w \overset{!}{=} (A - A)w = 0.$$

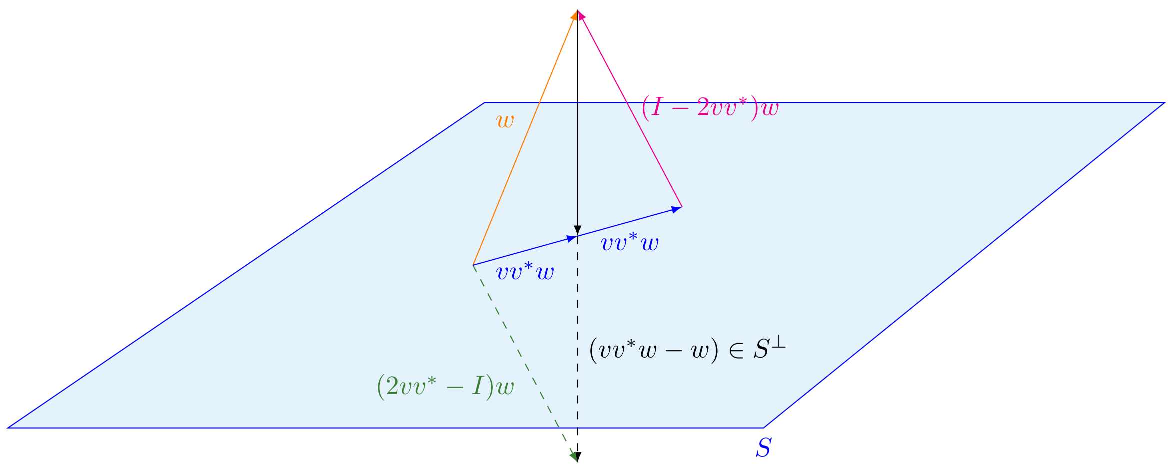
Podemos decir que $A(I - A)$ es el operador nulo.

En general para cualquier elemento v del *espacio vectorial* V: Puedo escribir $v = s + s^\perp$, una combineta única de elementos de S y $S^\perp$, ya que $S \oplus S^\perp$.

$$A(I - A)v = A(I - A)(s + s^\perp) = A(s + s^\perp - As - As^\perp) = As + As^\perp - As - A^2 s^\perp \overset{!}{=} 0$$

Los *proyectores ortogonales* cumplen que $\text{Nu}(P) \perp \text{Im}(P)$, donde la imagen es el S al que se proyecta y el núcleo es el $S^\perp$.

(d) Sí,lo sé, esto no es una implementación en `Python`.



`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(A)$.

Una proyección ortogonal P debe cumplir con que $\text{Im}(P) \perp \text{Nu}(P)$:

$$\text{Im}(P) = \{(1,0,1),(0,1,0)\} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(P) = \{(-1,0,1)\}$$

Por lo tanto mi candidato a *proyector ortogonal*:

$$\begin{cases} P(1,0,1) = (1,0,1) \\ P(0,1,0) = (0,1,0) \\ P(-1,0,1) = (0,0,0) \end{cases}$$

Voy a buscar la expresión funcional del proyector:

$$(x_1,x_2,x_3) \overset{\star^1}{=} a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (-1,0,1) \xrightarrow[\text{forma matricial}]{\text{resolver en}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

Eso queda:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ b = x_2 \\ c = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{y transformando}]{\text{reemplazando en } \star^1} P(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)$$

Transformo los canónicos para hallar P en forma matricial:

$$[P]_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quedó hermosamente simétrico, porque es un *proyector ortogonal* expresado en una *base ortonormal.*

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 19. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $Q^{-1} = Q^t$.

(b) Las columnas de Q forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de Q forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Iterpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: Para demostrar la implicación ((d) $\implies$ (b)) usar que $x^t y = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$.

Ejercicio 20. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Ejercicio 22.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Ejercicio 23.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Ejercicio 24.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Ejercicios de parciales:

1. Sea $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ y las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Probar que no existen matrices L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $C = LU$.

b) Hallar $P, L, U \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $PP = I_3$ y $PC = LU$ con L triangular inferior con unos en la diagonal y U trianfular superior.

c) ¿Cuántas factorizaciones LU (L con unos en la diagonal) existen para la matriz CB? Si no existe ninguna, demostrarlo; si existe solo una, hallarla; si existe más de una, decir cuántas y mostrar dos distintas.

d) Probar que $\text{cond}_1(C + B) \to \infty$ para $c \to -3$.

---

a) planteo existencia de algo genérico y llego a contradicción.

b) row swap y luego voy a encontrar:

$$P_{13}C = LU \quad \text{con} L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

d) Matriz singular a usar:

$$\begin{pmatrix} 1 & c+1 & 0 \\ c & c & 0 \\ c+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$