# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 4

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 20/05/25 @ 11:15

*Choose your destiny:*

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por última vez:
20/05/25 @ 11:15
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 4

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

**Notas teóricas:**

- 

## Ejercicios de la guía:

---

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $A$ en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

(a) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -ia & \text{con} \quad v_{\lambda=-ia} = (1, -i) \\ \lambda = ia & \text{con} \quad v_{\lambda=ia} = (1, i) \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(d) *Ecuación característica, a polinomio característico:*

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) + 2 = 0$$ ★[1]

Que lindo ejercicio.

Si hago $x = (a - \lambda)$ entonces ★[1]:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \big((a-\lambda) - 1\big)^2\big((a-\lambda) + 2\big) = 0$$

Por lo tanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 1 & \text{con} \quad E_{\lambda=a-1} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle \\ \lambda_2 = a + 2 & \text{con} \quad E_{\lambda=a+2} = \langle (1,1,1) \rangle \end{cases}$$

Quedaría algo así diagonalizada:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

(e) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

(f) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

---

**Ejercicio 2.** Para cada una de la matrices $A$ del ejercicio anterior, sea $f : K^n \to K^n$ la transformación lineal tal que $[f]_{EE} = A$. Decidir si es posible encontrar una base $B$ de $K^n$ tal que $[f]_{EE}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C_{BE}$.

---

Sea $A \in K^{n\times n}$ criterios para saber si una matriz es diagonalizable:

$$A \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow \text{ tiene } n \textit{ autovectores linealmente independientes.}$$

$$A \text{ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.}$$

$$A \text{ es diagonalizable si } \mathrm{mg}(\lambda_i) = \mathrm{ma}(\lambda_i) \text{ para cada } \lambda_i \text{ de } A.$$

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

---

**Ejercicio 3.** Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

(a) Hallar una matriz $A$ tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar $A$.

(c) Dar una fórmula cerrada para $F_n$.

---

(a) Quiero una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aF_{n+1} + bF_n = F_n \\ cF_{n-1} + dF_n = F_{n+1} \overset{!}{=} F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistemita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para mostrar lo que sigue, inducción. Quiero mostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Caso base:*

$$p(1) : A^1 \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + F_1 \\ F_0 + F_1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Es así que la proposición $p(1)$ resultó verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(k) : \underbrace{A^k \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver ahora que la proposición:

$$p(k+1) : A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

también lo sea.

$$A^{k+1}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{k}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \overset{\text{HI}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

Tuqui, también resulta ser verdadera.

Es así que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción la proposición $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) *Ecuación característica a polinomio característico:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{característica}]{\text{ecuación}} (A-\lambda I)v_\lambda = 0 \xrightarrow[\text{característico}]{\text{polinomio}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Esa notación se complementa con:

$$\left\{ \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \right.$$

Diagonalizar esta matriz tiene un montón de *droga*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \overset{!}{=} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \overset{!}{=} -\frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$$

No sé si están bien las cuentas, pero, a veces es mejor ni preguntar. *Beware* ⚠.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}$$

(c) Viene por acá esto? CONSULTAR

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\varphi})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varphi^2} & \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \\ \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} & -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

**Ejercicio 4.** Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial $x(0)c_0$ es $x(t)c_0e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $C$ tal que $C^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Enunciado aterrador, pero es un ejercicio para desacoplar las ecuaciones, cosa que no se mezclen la $x$ con las $y$. Lo primer es escribir la matriz de coeficientes en forma diagonal:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 6x(t)+2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t)+3y(t) \end{array}\right. \xrightarrow[\text{matricial}]{\text{forma}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Diagonalizo la matriz:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{7, 2\} \implies \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El cambio de variables planteado:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \overset{\star 1}{=} C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Multiplico la ecuación diferencial a izquierda por $C^{-1}$:

$$\underbrace{C^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}} = C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{C \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{C^{-1} A C}_{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema queda desacoplado, *no hay mezcla* de las cosas de $u$ con las cosas de $v$ y se puede resolver como dos ecuaciones diferenciales por separación de variables:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & 7u(t) \Leftrightarrow u(t) = c_0 e^{7t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star 1]{\text{condiciones}} u(0) = 1 = c_0 e^{7 \cdot 0} \Leftrightarrow c_0 = 1 \\ v'(t) & = & 2v(t) \Leftrightarrow v(t) = c_1 e^{2t} \xrightarrow[\text{iniciales } \star 1]{\text{condiciones}} v(0) = 1 = c_1 e^{2 \cdot 0} \Leftrightarrow c_1 = 1 \end{array}\right.$$

Ahora hay que volver a las variables originales:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + e^{2t} \\ e^{7t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

**Ejercicio 5.** Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que $A$ y $A^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

---

Demostracion:
Por propiedades del determinante sabemos que:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Sabemos que los autovalores $\lambda$ son los que tienen la siguiente propiedad:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Usando la propiedad del determinante, tenemos que:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t)$$

Y, como sabemos que $\lambda$ es un autovalor de $A$

$$0 = \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\chi_A(\lambda)} = \underbrace{\det((A - \lambda I)^t)}_{\chi_{A^t}(\lambda)} \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_{A^t}(\lambda) = 0$$

Probando así que tienen los mismos autovalores, dado que los *polinomios característicos de ambas expresiones* son iguales

Si tengo la siguiente matriz:

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(1,0)\}} \xrightarrow{\text{transponiendo}} \underbrace{A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\lambda_1=\lambda_2=0}=\{(0,1)\}}$$

Esas matrices no son diagonalizables. Ambas tienen los mismos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pero no generan una base de au
para poder diagonalizar la matriz.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Iñaki Frutos` `naD GarRaz`

---

**Ejercicio 6.** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\lambda$ un autovalor de $A$. Probar que:

(a) Si $A$ es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) $\lambda^k$ es autovalor de $A^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + \mu I$, con el mismo autovector.

(d) Si $p$ es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$.

---

(a) Sea $A$ triangular

Arranca el lema

Voy a usar y demostrar el lema:

*Si $A$ es una matriz triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales.*

¡¡A demostrarlo!!

*Caso base:*

$p(2)$ : una matriz $M \in K^{2\times 2}$ triangular, entonces su determinante es la multiplicación de sus elementos diagonales

Sea $M \in K^{2\times 2}$ triangular inferior (la $1 \times 1$ es trivial, no es divertido), el caso triangular superior es análogo: $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c_{21} & b \end{pmatrix}$, entonces $\det(M) = a \cdot b - 0 \cdot c_{21} = a \cdot b$ cumpliendo así el caso base.

*Paso inductivo*:

Asumo que

$$p(h) : \text{M triangular inferior, } \forall M \in K^{h\times h} \text{ se tiene que } \underbrace{\det(M) = \prod_{i=1}^{h} m_{ii},}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera para algún $h \in \mathbb{N}$, entonces quiero probar que:

$$p(h+1) : \text{M triangular inferior, } \forall M \in K^{(h+1)\times(h+1)} \text{ se tiene que } \underbrace{\det(M) = \prod_{i=1}^{h+1} m_{ii}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

también sea verdadera.

Nuevamente voy a hacerlo en el caso en que sea triangular inferior, el caso superior es enteramente análogo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 \\ a_{(h+1)1} & a_{(h+1)2} & \cdots & a_{(h+1)(h)} & a_{(h+1)(h+1)} \end{pmatrix}$$

Calculo el determinate. Lo voy a hacer desarrollando por la última columna:

$$\det(A) = 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{(h+1)(h+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \overset{\text{HI}}{=} a_{(h+1)(h+1)} \cdot \prod_{i=1}^{h} a_{ii} = \prod_{i=1}^{h+1} a_{ii}$$

El lema queda probado. La demo de cuando es triangular superior que la haga Dios, o vos, pero no yo.

Terminó el lema

Ahora volviendo con la demostración del ejercicio.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Por lema y recordando que $A$ es triangular por lo que la resta de $A$ con una matriz diagonal seguirá siéndolo:

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

*¡Ta rahh!*, los $a_{ii}$ son autovalores de $A \quad \forall i \leq n$.

(b) Supongo que $\lambda$ es autovalor de $A$.

Demostracion por inducción:

*Caso base:*

$$p(1) : A^1 v = \lambda^1 v$$

Es verdadera por simple defínción de autovalor.

*Paso inductivo:* Asumo como verdadera la proposición:

$$p(k) : A^k v = \lambda^k v \text{ con el autovector de } Av = \lambda v$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : A^{k+1} v = A^{k+1} v$$

también lo sea.

$$A^{k+1} v = A \cdot A^k v \overset{\text{HI}}{=} A \cdot \lambda^k v \overset{!}{=} \lambda^{k+1} v$$

Fin

(c) Sea $\lambda$ autovalor de $A$ con su autovector correspondiente $v$ . Sea $\mu$ un número.

Tenemos que por definición:

$$Av = \lambda v$$

Veamos

$$(A+\mu I)v = Av + \mu I v \overset{\text{def}}{=} \lambda v + \mu I v = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu) v$$

Fin.

(d) Sea $p$ un polinomio, $\lambda$ un autovalor con $v$ autovector asociado de $A$

Demostración por inducción en el grado del polinomio $p_n$. Quiero probar que:

$$p(n) : p(\lambda) \text{ es autovalor de } p(A)$$

*Caso base:*

$$p(\text{gr}(p) = 1) : p_1(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_1(A) = a_1 A + a_0 \underset{I_n}{\underset{\downarrow}{A^0}}$$

Y de lo que vio en el ítem (c):

$$p_1(A)v = a_1 A v + a_0 I_n v \Leftrightarrow \underbrace{(a_1 A + a_0 I_n)}_{p(A)} v = \underbrace{(a_1 \lambda + a_0)}_{p(\lambda)} v$$

Por lo cual la proposición $p(\text{gr}(p) = 1)$ resultó verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo como verdadera la proposición:

$$p(\text{gr}(p) = k) : \underbrace{p_k(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_k(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

para algún $k en \mathbb{N}$. Entonces quiero probar que

$$p(\text{gr}(p) = k+1) : p_{k+1}(\lambda) \quad \text{es autovalor de} \quad p_k(A) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i A^i$$

Veamos un polinomio de grado $k+1$:

$$p_{k+1}(X) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot X^i = a_{k+1} X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i$$

Evalúo en $A$ y multiplico por $v$ autovector de $A$:

$$p_{k+1}(A)v = a_{k+1} A^{k+1} v + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot A^i v \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{HI}}{=}} a_{k+1} \lambda^{k+1} v + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot \lambda^i v = \underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot \lambda^i}_{p(k+1)(\lambda)} v$$

Concluyendo así que

$$p_{k+1}(A)v \overset{!!}{=} p_{k+1}(\lambda) v$$

Entonces, probé que es verdadera la proposición.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Iñaki Frutos

**Ejercicio 7.**

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\operatorname{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de $A$ sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son $-1$, $3$ y $8$.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; $1$ y $-2$ son autovalores de $A$ y $-4$ es autovalor de la matriz $A - 3I$. Hallar los restantes autovalores de $A$.

---

(a) Truquini de escribir la cosita y sacar factor común las cositas de los costaditos:

$$A = CDC^{-1} \implies \begin{cases} A^2 = CD^2C^{-1} \\ 2A = C2DC^{-1} \end{cases} \implies A^2 + 2A = CD^2C^{-1} + C2DC^{-1} \overset{!}{=} C \underbrace{\left(D^2 + 2D\right)}_{\lambda_i' = {\lambda_i}^2 + 2\lambda_i} C^{-1}$$

Donde $\lambda_i'$ son los autovalores de $A^2 + 2A$ mientras que los $\lambda_i$ los autovalores de $A$. Por enunciado:

$$\begin{cases} -1 &= {\lambda_1}^2 + 2\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \\ 3 &= {\lambda_2}^2 + 2\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \in \{-3, 1\} \\ 8 &= {\lambda_3}^2 + 2\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 \in \{-4, 2\} \end{cases}$$

Tenemos un millón de *posibles autovalores* para $A$, busquemos la combineta que haga que $\operatorname{tr}(A) = -4$:

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -4 \end{cases}}$$

(b) Sabemos que determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

En este caso:

$$\det(A) = 6 = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\lambda_1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -2}}{\lambda_2} \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -3$$

Luego tenemos por la *definición* de lo que es un autovector:

$$(A - 3I)v = -4v \Leftrightarrow Av = -v$$

Es decir que encontré otro autovalor:

$$\lambda_3 = -1 \implies \underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{\lambda_3} \cdot \lambda_4 = -3 \Leftrightarrow \lambda_4 = 3$$

Los autovalores de $A$:

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_4 &= 3 \end{cases}}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

**Ejercicio 8.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

---

**Ejercicio 9.** Una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in K^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

---

Dejame escribir al proyector como $P$ en vez de $f$, porque me da *cosita* sino. Tenemos un proyector y por definición:

$$P \circ P = P$$

Si el proyector tiene forma diagonal:

$$P = CDC^{-1} \Leftrightarrow P = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$P \circ P = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1} = \underbrace{C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^{-1}}_{P \circ P} = \underbrace{C \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}}_{P}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 = \lambda_1 & \Leftrightarrow & \boxed{\lambda_1 \in \{0, 1\}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n^2 = \lambda_n & \Leftrightarrow & \boxed{\lambda_n \in \{0, 1\}} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

**Ejercicio 10.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que $f$ es un proyector y hallar una base $B$ tal que $[f]_{BB}$ sea diagonal.

---

Por inspección, sino calculalos, ese proyector tiene:

$$\text{Im}(P) = \{(1, 2, 3)\} \ , \quad \text{Nu}(P) = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$$

Se ve que $\underline{Pv = v}$ $\forall v \in \text{Im}(P)$, y ya esa ecuación que escribí te dice que:

$$E_{\lambda=1} = \{v\} = \{(1, 2, 3)\} = \text{Im}(P)$$

Similar sucede con los elementos del núcleo:

$$E_{\lambda=0} = \{(2, 3, 0), (0, 0, 1)\} = \text{Nu}(P)$$

En forma diagonal para una base $B = \{(1,2,3),(2,3,0),(0,0,1)\}$:

$$P = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

## Ejercicio 11.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 12.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 13.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 14.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 15.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 17.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 18.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 19.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicio 20.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

**Ejercicio 21.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

**Ejercicio 22.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

**Ejercicio 23.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

## Ejercicios de parciales:

**1.** Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1,2,0)$, $w = (2,6,0)$ y $u = (-2,-2,-1)$ son autovectores de $A$.

a) Probar que $A$ es diagonalizable.

b) Calcular los autovalores de $A$ y determinar $r, s$ y $t$.

---

a) Es diagonalizable porque estamos en $reales^{3\times 3}$ y hay una base de dimensión 3 de autovectores:

$$B = \{(1,2,0),(2,6,0),(-2,-2,-1)\},$$

son autovectores de $A$.

b) Los *autovectores*, son vectores que cumplen la *ecuación característica*:

$$A \cdot v_\lambda = \lambda \cdot v_\lambda$$

Es solo cuestión de pedirle a los autovectores del enunciado que cumplan esa ecuación y despejar.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} r & \overset{\star 1}{=} & -2s \\ \lambda & = & 0 \end{cases}$$

Siguiente autovector:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} s & = & 1 \implies r \overset{\star 1}{=} -2 \\ \lambda & = & 2 \end{cases}$$

Siguiente y último autovector

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sale que}]{\text{de las cuentas}} \begin{cases} t & = & 6 \\ \lambda & = & 2 \end{cases}$$

Listo hay subespacios para justificar aún más la diagonabilidad de la matriz:

$$E_{\lambda=0} = \langle 1,2,0 \rangle \qquad \text{y} \qquad E_{\lambda=2} = \langle (-2,-2,-1),(2,6,0) \rangle$$

La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética:

$$\text{mg}_A(\lambda = 2) = \text{ma}_A(\lambda = 2) = 2 \qquad \text{y} \qquad \text{mg}_A(\lambda = 0) = \text{ma}_A(\lambda = 0) = 1$$

La matriz en forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

**2.**

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si $A$ es inversible y diagonalizable, entonces $A^{-1}$ y $A^k - kI_n$ son diagonalizables para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

b) Sea $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Probar que $J$ es una matriz diagonalizable.

ii) Calcular $J^5 - 5I_3$.

---

a) Truquito destacable: $I_n = PP^1$ para luego sacar factor común al calcular $A^k - kI_n$ Por otro lado, la inversibilidad de una matriz diagonalizable asegura que los autovalores son distintos de cero:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| \overset{!}{=} |D| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Las matrices inversibles tienen $\det(A) \neq 0$.

b) i) Se calculan los autovectores y autovalores:

$$E_{\lambda=2} = \{(1,0,1),(-1,1,0)\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda=4} = \{(0,1,1)\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Te debo la inversa por *pajilla*.

ii) Sale combinando lo que se usó hasta ahora.

---

**3.** Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$, para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

(a) Si $v$ es un autovector de $A$, y $A$ es inversible, entonces $v$ es un autovector de $A^{-1}$.

(b) Si $A$ y $B$ son diagonalizables, $A + B$ también lo es.

(c) Si $A$ y $B$ son diagonalizables, entonces $AB$ es diagonalizable.

(d) Si $A$ o $B$ es inversible y $AB$ es diagonalizable entonces BA también es diagonalizables.

---

⚠ Ejercicio de demostraciones. Dependiendo las horas que dormiste la noche anterior esto puede salir enseguida o en horas. La matriz que uso en los contraejemplos suele ser un *caballito de batalla* para estos problemas, guardátela. ⚠

(a) Si $v$ es un autovector y además $\exists\, A^{-1}$ entonces:

$$Av = \lambda v \overset{!}{\iff} A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \overset{!}{\iff} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{resultó verdadera}}$

(b) Si las matrices son diagonalizables, ¿La suma también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(c) Si las matrices son diagonalizables, ¿El producto también lo es?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esas matrices son diagonalizables, porque cada una tiene todos sus autovalores distintos.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz que no es diagonalizable, ya que tiene a 0 como un autovalor doble, pero el autoespacio asociado es de dimensión 1:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 = 0, \quad \text{luego } E_{\lambda=0} = \{(1,0)\}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó falsa}}$$

(d) Alguna de las dos matrices es inversible y $AB$ es diagonalizable, entonces ¿$BA$ es diagonalizable también?

Supongo que $\exists\, A^{-1}$:

$$AB = CDC^{-1} \underset{\leftarrow \times A}{\overset{\rightarrow \times A^{-1}}{\Longleftrightarrow}} A^{-1}ABA = A^{-1}CDC^{-1}A \Leftrightarrow BA = A^{-1}CD(A^{-1}C)^{-1} \overset{P = A^{-1}C}{\Longleftrightarrow} BA = PDP^{-1}$$

La expresión de $BA$ resultó diagonalizable. La demostración con $B$ diagonal es análoga. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{resultó verdadera}}$$