Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 2

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 05/04/25 @ 22:43

Choose your destiny:

(dobleclick en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:
05/04/25 @ 22:43
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

Transformaciones lineales

- Dados V y W dos $K-$espacio vectoriales, una $f : V \to W$ es *transformación lineal* si cumple:
  - $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v, w \in V$
  - $f(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot f(v_1) \qquad \forall \alpha \in K, v \in V$

- $f : K^n \to K^m$ si transformo:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in K^{n\times 1}}\Big) \overset{\text{TL}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{f(e_i)}_{\in K^{m\times 1}} = \underbrace{\left(\, f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n) \, \right)}_{A\in K^{m\times n}} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot x}_{\in K^{m\times 1}}$$

- *Matriz de una transformación lineal:*

  Dados V y W dos $K-$espacios vectoriales y $f : V \to W$ una t.l. Sean $B = \{v_1, \cdots, v_2\}$ base de V y $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface:

$$[f]_{BB'}[v]_B = [f(v)]_{B'} \qquad \forall v \in V$$

- Sea V un $K-$espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i) \in W$ con $i = 1, \ldots n$.

- Sea $A \in K^{m\times n}$, define $f : K^n \to K^m$. El $\text{Nu}(A) = \{x \in K^n / Ax = 0\}$

- Sea $A \in K^{m\times n}$, define $f : K^n \to K^m$. La $\text{Im}(A) = \{Ax \in K^m \text{ con } x \in K^n\} = \langle c_1(A), \ldots, c_n(A)\rangle$. También $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$

- *Propiedades de una transformación lineal:*

  Sea $f : V \to W$ una t.l. y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V. Entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es un conjunto generador para la imagen de f.

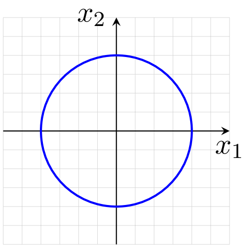
  - f se dice *monomorfismo* si es inyectiva. Si f es *mono*, $\dim(\text{Nu}(f)) = 0$
  - f se dice *epimorfismo* si es suryectiva. Si f es *epi*, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$
  - f se dice *isomorfismo* si es *mono* y *epi*. Si f es iso es inversible.

- *Norma* Sea $\|\cdot\| : K^n \to \mathbb{R} \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma si cumpe:

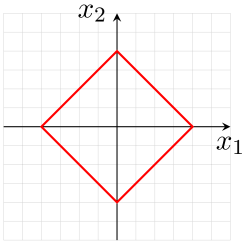
  1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in K^n$
  2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ con $\alpha \in K$ y $x \in K^n$
  3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ con $x, y \in K$

- Ejemplos:

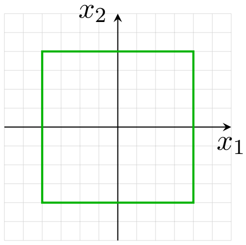
  - Norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2} \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_2 = 1$



- Norma p: $\|x\|_p = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p} \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_p = 1$



- Norma ∞: $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \|x\|_\infty = 1$



Aritmética de punto flotante:

- *Escribir* 0.25 *en base* 10:

  Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25\cdot 10 &= 2+0.5 \\ 0.5\cdot 10 &= 5+0 \\ 0\cdot 10 &= 0+0 \end{cases} \to (0.25)_{10} = (2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 0\cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.25\cdot 2 &= 0+0.5 \\ 0.5\cdot 2 &= 1+0 \\ 0\cdot 2 &= 0+0 \end{cases} \to (0.25)_{2} = (0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

Escribir 0.3 *en base* 2:

$$\begin{cases} 0.3\cdot 2 &= 0+0.6 \\ 0.6\cdot 2 &= 1+0.2 \\ 0.2\cdot 2 &= 0+0.4 \\ 0.4\cdot 2 &= 0+0.8 \\ 0.8\cdot 2 &= 1+0.6 \\ 0.6\cdot 2 &= 1+0.2 \\ 0.2\cdot 2 &= 0+0.4 \\ 0.4\cdot 2 &= 0+0.8 \\ 0.8\cdot 2 &= 1+0.6 \\ \vdots &= \vdots \end{cases} \to (0.3)_2 = (0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+0\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}+1\cdot 2^{-6}+0\cdot 2^{-7}+0\cdot 2^{-8}+1\cdot 2^{-9}+1\cdot 2^{-10}+0\cdot 2^{-11}+0\cdot 2^{-12}\cdots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

$$\text{En base } 10 \to x = 0, a_1a_2a_3\dots a_m \cdot 10^{exp} \text{ con } 0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$$
$$\text{En base } 2 \to x = 0, a_1a_2a_3\dots a_m \cdot 2^{exp} \text{ con } 0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$$

Por ejemplo si $m = 3 \implies x = 0, a_1a_2a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{2}} \cdot \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{2}} = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m, por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

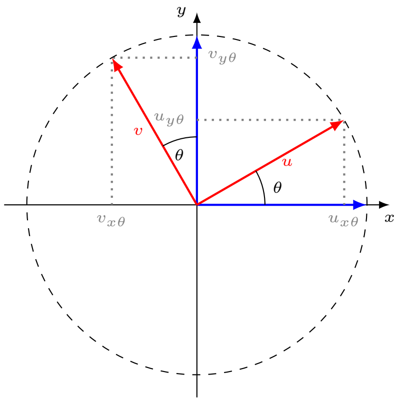
Y en forma relativa como:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Deducción matriz de rotación 2d (ponele):
Quiero que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0}_{\star^1} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0}_{\star^2} = \begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

En el gráfico veo lo que quiero lograr.



Entre el gráfico y $\star^1$:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} u_{x\theta} \\ u_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\overset{!}{=}} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(\theta) \\ u_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Entre el gráfico y $\star^2$:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} v_{x\theta} \\ v_{y\theta} \end{pmatrix} \underset{\text{sohcatoa}}{\overset{!}{=}} \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(\theta) \\ v_0 \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Juntando esos resultados:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$$

(b)
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$$

(c)
$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(d)
$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Primero veamos que la suma es lineal. Tomemos dos vectores cualesquiera:

$$v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Ahora veo:

$$f(v) + f(w) = (y_1 - 3x_1 + \sqrt{2}z_1, x_1 - \frac{1}{2}y_1) + (y_2 - 3x_2 + \sqrt{2}z_2, x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$= (y_1 + y_2 - 3(x_1 + x_2) + \sqrt{2}(z_1 + z_2), x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$$

Son iguales, la suma es lineal

Veamos que el producto es lineal. Tomemos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $v = (x, y, z)$. Entonces,

$$f(\alpha v) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha y - 3\alpha x + \sqrt{2}\alpha z, \alpha x - \frac{1}{2}\alpha y)$$

$$= \alpha(y - 3x + \sqrt{2}z, x - \frac{1}{2}y) = \alpha f(x, y, z)$$

El producto es lineal

f es una transformación lineal.

(b) Tomemos dos vectores cualesquiera y veamos la suma:

$$v = (x_1, y_1), \quad w = (x_2, y_2)$$

Entonces,

$$f(v + w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1 + x_2|)$$

Ahora veamos:

$$f(v) + f(w) = (x_1 + y_1, |x_1|) + (x_2 + y_2, |x_2|)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, |x_1| + |x_2|)$$

$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, la suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(c) Veamos que vale la suma, tomo dos matrices cualesquiera A y B:

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21})$$

Ahora vemos:

$$f(A) + f(B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Se ve que:

$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \neq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

La suma no es lineal.

$$\Rightarrow f \text{ no es una transformación lineal.}$$

(d) Veo que valga la suma:

Sea A, B matrices cualesquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(A + B) = \begin{pmatrix} (a_{22} + b_{22}) & 0 & (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) \\ 0 & (a_{11} + b_{11}) & (a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) \end{pmatrix}$$

Ahora miro,

$$f(A)+f(B)=\begin{pmatrix}a_{22} & 0 & a_{12}+a_{21}\\ 0 & a_{11} & a_{22}-a_{11}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{22} & 0 & b_{12}+b_{21}\\ 0 & b_{11} & b_{22}-b_{11}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{22}+b_{22} & 0 & (a_{12}+a_{21})+(b_{12}+b_{21})\\ 0 & a_{11}+b_{11} & (a_{22}-a_{11})+(b_{22}-b_{11})\end{pmatrix}$$

La suma es lineal.

Ahora veo el producto:

$$f(\alpha A)=f\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_{22} & 0 & \alpha(a_{12}+a_{21})\\ 0 & \alpha a_{11} & \alpha(a_{22}-a_{11})\end{pmatrix}=\alpha f(A)$$

El producto y la suma son lineales, f es transformacion lineal

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Juan D Elia

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3.

(a) Probar que existe una única transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

(b) ¿Existirá una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(2,6)$, $f(-1,1)=(2,1)$ y $f(2,7)=(5,3)$?

(c) Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1)=(1,2,1), f(2,1,0)=(2,1,0), f(-1,0,0)=(1,2,1)$$
$$g(1,1,1)=(1,1,0), g(3,2,0)=(0,0,1), g(2,2,-1)=(3,-1,2)$$

De la teoría se tiene que:

Sea V un $K-$espacio vectorial y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V. Podemos definir en forma única una t.l. de V en W definiendo cada $f(v_i)\in W$ con $i=1,\dots n$.

(a) Sale casi solo usando propiedades de *transformación lineal:*

$$\left\{\begin{array}{rcl}f(1,1)&=&(-5,3)\\ f(-1,1)&=&(5,2)\end{array}\right. \quad F_2+F_1\to F_2 \quad \left\{\begin{array}{rcl}f(1,1)&=&(-5,3)\\ f(0,2)&=&(0,5)\end{array}\right.$$
$$\tfrac{1}{2}F_2\to F_2 \quad \left\{\begin{array}{rcl}f(1,1)&=&(-5,3)\\ f(0,1)&=&(0,\frac{5}{2})\end{array}\right.$$
$$F_1-F_2\to F_1 \quad \left\{\begin{array}{rcl}f(1,0)&=&(-5,\frac{1}{2})\\ f(0,1)&=&(0,\frac{5}{2})\end{array}\right.$$

Si bien no es necesario, puedo escribir a la *transformación lineal* como:

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x\\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y\end{pmatrix}$$

Y ahora calculo lo más pancho:

$$\boxed{f(5,3)=\begin{pmatrix}-25\\ 10\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(-1,2)=\begin{pmatrix}5\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}}$$

(b) Se llega a un absurdo con algunas operaciones.

$$\begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(-1,1) &= (2,1) \\ f(2,7) &= (5,3) \end{cases} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(0,2) &= (4,7) \\ f(0,5) &= (1,-9) \end{cases} \begin{matrix} \frac{1}{2} \cdot F_2 \to F_2 \\ \frac{1}{5} \cdot F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{cases} f(1,1) &= (2,6) \\ f(0,1) &= (2,\frac{7}{2}) \\ f(0,1) &= (\frac{1}{5},\frac{-9}{5}) \end{cases}$$

Las operaciones de triangulación aplicadas en la triangulación son lineales y se usó todo el tiempo la definición de linealidad.

(c) Ataco igual que al anterior, la idea es poder compararlos con la misma *base del espacio de partida* V:

$$\begin{cases} f(1,0,1) &= (1,2,1) \\ f(2,1,0) &= (2,1,0) \\ f(-1,0,0) &= (1,2,1) \end{cases} \to \begin{cases} f(1,0,0) &= (1,2,1) \\ f(0,1,0) &= (0,-3,-2) \\ f(0,0,1) &= (2,4,2) \end{cases}$$

Ahora con g:

$$\begin{cases} g(1,0,1) &= (1,2,1) \\ g(2,1,0) &= (2,1,0) \\ g(-1,0,0) &= (1,2,1) \end{cases} \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \to F_1 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{cases} g(1,1,1) &= (1,1,0) \\ g(0,-1,-2) &= (-3,-3,1) \\ g(0,0,-3) &= (1,-3,2) \end{cases}$$

Podría seguir triangulando y llegar hasta que me queden ambas expresiones en la canónica de $\mathbb{R}^3$, pero pajilla. Resalté en azul dos filas que me *gritan* que si:

$$(0,0,1) \xrightarrow{f} (2,4,2) \implies (0,0,-3) \underset{!}{\xrightarrow{f}} (-6,-12,-6)$$

No obstante:

$$(0,0,-3) \xrightarrow{g} (1,-3,2) \neq (0,0,0)$$

Así se concluye que :

$$\boxed{f \neq g}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

Ejercicio 4.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Aritmética de punto flotante

Ejercicio 7. Algunos experimentos: Realizar las siguientes operaciones en `Python`. En todos los casos, pensar: ¿Cuál es el resultado esperado? ¿Coincide con el obtenido? ¿A qué se debe el problema (si lo hay)? (Notamos ϵ al épsilon de la máquina. Puede obtenerse importando la librería `numpy` como `np` y ejecutando el comando `np.finfo(float).eps`).

a) Tomando $p = 1e34, q = 1$, calcular $p + q - p$.

b) Tomando $p = 100, q = 1e-15$, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.

c) `0.1 + 0.2 == 0.3`

d) `0.1 + 0.3 == 0.4`

e) $1e - 323$

f) $1e - 324$

g) $\frac{\epsilon}{2}$

h) $(1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}$

i) $1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})$

j) $((1 + \frac{\epsilon}{2}) + \frac{\epsilon}{2}) - 1$

k) $(1 + (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})) - 1$

l) $\sin(10^j\pi)$ para $1 \leq j \leq 25$.

m) $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi 10^j)$ para $1 \leq j \leq 25$.

---

a) El epsilon sería el número más chico tal que:

$$1 + \epsilon \neq 1$$

En el ejercicio estamos haciendo una cuenta fuera del rango de precisión de la máquina:

$$\epsilon = 2.220446049250313 \cdot 10^{-16} = 0.\underbrace{2220446049250313}_{m=16} \cdot 10^{-15}$$ → así noto la precisión

Con una mantisa m de 16 números significativos, puedo hacer la cuenta:

$$1 + \epsilon \overset{!}{=} 1.0000000000000002$$
$$\downarrow$$
16$^{\text{to}}$ decimal

Primero $p + 1$:

$$\begin{aligned} p = 1 \cdot 10^{34} &= 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 \\ p + 1 &= 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.001 = 0.\underbrace{1000000000000000}_{m=16}\underbrace{0000000000000000001}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^{-35} \\ p + 1 &= 0.1000000000000000 \cdot 10^{-35} = 1 \cdot 10^{34} \overset{!}{=} p \end{aligned}$$

Segundo $p + 1 - p$:

Bueh:

$$\underbrace{p - 1}_{p} - p \overset{!}{=} p - p = 0$$

Si hacés un `copy paste` de este código debería funcionar lo más bien

```python
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}")    # epsilon = 2.220446049250313e-16
```

```
p = 1e34 # p = 10000000000000000000000000000000000
q = 1

calculo = p + q - p # calculo = 0

print(f"p = {p}\nq = {q}\np + q - p = {calculo}")
```

b) Acá el problema es parecido al anterior:

$$
\begin{aligned}
p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
q = 1 \cdot 10^{-15} &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
p + q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{16^{\text{to}}\,decimal}{\overset{\uparrow}{0}}\,\underbrace{01}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100 \\
(p+q)+q &\overset{!}{=} 100 = p \\
((p+q)+q)+q &\overset{!}{=} 100 = p
\end{aligned}
$$

Comparando:

$$
\begin{aligned}
p = 100 &= 0.1 \cdot 10^3 \\
q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,001 \cdot 10^3 \\
2q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,002 \cdot 10^3 \\
3q = &= 0.000\,000\,000\,000\,000\,003 \cdot 10^3 \\
p + 2q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{16^{\text{to}}\,decimal}{\overset{\uparrow}{0}}\,\underbrace{02}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100 \\
p + 3q &= 0.100\,000\,000\,000\,000\,\overset{16^{\text{to}}\,decimal}{\overset{\uparrow}{0}}\,\underbrace{03}_{\text{fue un placer}} \cdot 10^3 = 0.100\,000\,000\,000\,000\,0 \cdot 10^3 = 100
\end{aligned}
$$

```
import numpy as np

epsilon = np.finfo(float).eps

print(f"epsilon = {epsilon}")    # epsilon = 2.220446049250313e-16

p = 100
q = 1e-15

calculo1 = (p + q) + q
calculo2 = ((p + q) + q) + q
calculo3 = p + 2*q
calculo4 = p + 3*q


print(f"p = {p}\nq = {q}")
print(f"(p + q) + q = {calculo1}")
print(f"((p + q) + q) + q = {calculo2}")
print(f"p + 2q = {calculo3}")
print(f"p + 3q = {calculo4}")
```

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

d) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

e) ¿Qué onda este ejercicio? Creo que está bueno notar que ese número no es igual a 0

```python
a = 1e-323

print(f"r: {a}\na == 0  => {a == 0}")
```

f) ¿Qué onda este ejercicio? Creo que está bueno notar que ese número no justo con ese exponente se llega al límite de qué tan pequeño puede representarse un número.

```python
a = 1e-324

print(f"r: {a}\na == 0  => {a == 0}")
```

g) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

h) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

i) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

j) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

k) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

l) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

m) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 23. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 24. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 25. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales: