

Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 1

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 28/03/25 @ 23:35

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicios para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.

- Ejercicios de Parciales

 [1.](#)

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:

28/03/25 @ 23:35

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:*Espacios Vectoriales: Palabras guías*

En un conjunto $A \neq \emptyset$

✦ **Operación:** $(a * b) = c$. Es una función $*$: $A \times A \rightarrow A$

- i) $*$ es *asociativa* si $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$.
- ii) $*$ *tiene elemento neutro* e si $e * a = a * e = a \quad \forall a \in A$.
- iii) si $*$ *tiene elemento neutro* e todo elemento tiene *inverso* para $*$ si $\forall a \in A \quad a * a' = a' * a = e$.
- iv) $*$ es *conmutativa* si $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$.

✦ **Grupo:** $(A, *)$ es un grupo si se satisfacen i), ii) y iii). Si además se satisface iv) se tiene un *grupo abeliano* o *conmutativo*.

✦ **Anillo:** $(A, +, \cdot)$. Para ser anillo se debe cumplir:

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo.
- ii) \cdot es una operación asociativa y tiene elemento neutro.
- iii) Vale distribuir:
$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$$

Si además de cumplir eso, \cdot es conmutativa $(A, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo*.

✦ **Cuerpo** $(K, +, \cdot)$: Un conjunto K , $+$ y \cdot operaciones de K , es un cuerpo si $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso.

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo,
- ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y
- iii) vale la propiedad distributiva de \cdot con respecto a $+$.

✦ **Acción** \cdot : es una función \cdot : $A \times B \rightarrow B$.

✦ **K -espacio vectorial:** Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en V y sea \cdot una acción de K en V . Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un K -espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.
- ii) La acción \cdot : $K \times V \rightarrow V$ satisface:
 - a) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall a \in K; \quad \forall v, w \in V$.
 - b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
 - c) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$.
 - d) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad \forall a, b \in K; \quad \forall v \in V$.

Los elementos de V son *vectores* y los elementos de K se llaman *escalares*. La acción \cdot se llama *producto por escalares*.

⚠ Dejo de escribir a " \cdot " en rojo, porque no hay problema cuando el punto " \cdot " actúa sobre un elemento de K y uno de V o entre 2 de K .

✦ **Subespacios:** Subconjunto de un K -espacio vectorial. Sea V un K -espacio vectorial y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y solo si valen las siguientes condiciones:

- i) $0 \in S$
- ii) $v, w \in S \implies v + w \in S$
- iii) $\lambda \in K, v \in S \implies \lambda \cdot v \in S$.

✚ Combinación lineal:

Sea V un K -espacio vectorial, y sea $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$. Una *combinación lineal* de G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

✚ Independencia lineal:

Sea V un K -espacio vectorial y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V . Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *linealmente independiente* (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \cdot v_\alpha = 0 \implies a_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in I$$

✚ Bases y dimensión:

- *Escritura única:* Sea V un K -e.v. y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto l.i. Entonces cualquier $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ si puede escribirse de una manera única como combinación de A .
- *Definición base:* Sea V un K -e.v. . $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto. Se dice que es una *base* de V si:
 - A genera todo V .
 - $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ son l.i.
- *Dimensión:* Sea V un K -e.v. . $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces cualquier otra base B' de V tiene la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es *la dimensión* de V .

✚ Espacio columna:

Si $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)$. El espacio columna de A es $\text{col}(A) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

✚ Espacio fila:

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$. El espacio fila de A es $\text{fil}(A) = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$

✚ Matrices:

- *Definición de matriz:*

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in K \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

- *Igualdad de matrices:*

Dos matrices de la misma dimensión A y A' serán iguales:

$$A = A' \iff a_{ij} = a'_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

- *Operaciones de matrices:*

Suma $A + A'$, producto de un escalar por una matriz αA y producto entre 2 matrices $A \cdot B$.

$$\begin{aligned} (a + a')_{ij} &= a_{ij} + a'_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ (\alpha a)_{ij} &= \alpha a_{ij} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ c_{ij} &= \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

- *Inversa de una matriz:* $A \in K^{n \times n}$ es inversible si $\exists B \in K^{n \times n}$.

🔊 1) Cálculo de determinantes:

♣ Dada $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ matriz cuadrada, definimos el determinante como

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) & n > 1 \end{cases}$$

donde M_{ij} es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j .

♣ Si $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

♣ Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (n \geq 2)$, un ejemplo con $n = 3$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

♣ Y si pinta desarrollar por otra columna o fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

🔗₂) Clasificación de un sistema a partir de su determinante:

♣ Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

♣ Se lo puede llevar a forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

♣ En notación compacta:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\mathbf{b} = 0]{\text{sist. homogéneo}} A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

♣ Dado un sistema:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } |A| \neq 0 \xrightarrow[\text{tengo}]{\text{seguro}} \boxed{\text{S.C.D.}} \rightarrow \boxed{\text{UNA SOLA SOLUCIÓN}} \rightarrow \boxed{\text{A ES INVERSIBLE}} \\ \text{si } |A| = 0 \xrightarrow[\text{casos}]{\text{dos}} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \xrightarrow[\text{entonces}]{\text{tengo}} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{si } A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \xrightarrow[\text{de } \mathbf{b}]{\text{tengo dependiendo}} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{S.C.I.}} \\ \text{o} \\ \boxed{\text{S.I.}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

NO ME GUSTA ESTO ACÁ. Pensar donde verga poner esto del labo

- Seccion a parte? No sé si va a haber coherencia entre número de guías y temas del labo
- PDF a parte? ... No sé si va a valer la pena
- escucho ideas:...

Notas del labo

Escribir 0.25 en base 10:

Base 10 es obviamente nuestra base favorita:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 10 = 2 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 10 = 5 + 0 \\ 0 \cdot 10 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_{10} = (2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0)_{10} = 0.25$$

Escribir 0.25 en base 2:

$$\begin{cases} 0.25 \cdot 2 = 0 + 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 + 0 \\ 0 \cdot 2 = 0 + 0 \end{cases} \rightarrow (0.25)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0)_{2} = 0.01$$

Escribir 0.3 en base 2:

$$\begin{cases} 0.3 \cdot 2 = 0 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ 0.6 \cdot 2 = 1 + 0.2 \\ 0.2 \cdot 2 = 0 + 0.4 \\ 0.4 \cdot 2 = 0 + 0.8 \\ 0.8 \cdot 2 = 1 + 0.6 \\ \vdots = \vdots \end{cases} \rightarrow (0.3)_2 = (0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8} + 1 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 0 \cdot 2^{-11} + 0 \cdot 2^{-12} \dots)_2 = 0.01\overline{0011}$$

Para escribir al 0.3 en base 2 voy a necesitar infinitos números en la *mantisa*, la máquina no puede y ahí aparecen los errores de *redondeo* o *truncamiento*.

Errores:

Tengo que un *número de máquina*, número posta que la máquina representa, con la notación *mantisa*, *exponente*:

En base 10 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 10^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 9 (a_1 \neq 0)$

En base 2 $\rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \cdot 2^{exp}$ con $0 \leq a_i \leq 1 (a_1 \neq 0)$

Por ejemplo si $m = 3 \Rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdot 2^{exp}$. Para cada valor de *exp* voy a tener un total de $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ posibles valores de máquina. La separación entre 2 valores x_1 y x_2 consecutivos es de 2^m , por eso para órdenes grandes la separación entre un número y otro es mayor.

Si el número real, real que quiero es $x = 0.3$, la máquina no puede representarlo de forma exacta. Puedo acotar el error en forma absoluta como:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \cdot 2^{exp}$$

Y en forma relativa como:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 2^{-m}$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en \mathbb{R} o en \mathbb{C} . Si la solución única, puede verificarse el resultado en Python utilizando el comando `np.linalg.solve`.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) Sistema con más incógnitas que ecuaciones, así que lo de la solución única, bien gracias. En forma matricial para hacer la gracia de triangular y coso:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ & -\frac{1}{5} \cdot F_2 \rightarrow F_2 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ & F_3 + 2F_2 \rightarrow F_3 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cosa de lo más espantosa. Empiezo a escribir las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 & \xleftrightarrow{\text{★}^2 \text{ y } \text{★}^1} x_1 = -2x_4 + 1 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = -\frac{9}{5} & \xleftrightarrow{\text{★}^1} x_2 = -x_4 + 1 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5} & \Leftrightarrow x_3 = -x_4 + 2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ -x_4 + 1 \\ -x_4 + 2 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right)$$

paso a sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\text{★}^2 \text{ y } \text{★}^1} x_1 = -x_3 + 2x_3 + x_3 = 2x_3 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\text{★}^1} x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 \text{★}^2 = x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = -x_3 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Como el item anterior, más incógnitas que ecuaciones, así que no tiene solución única.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como en la última ecuación quedó que $0 = -1$, no existe solución. ABS! Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & \xleftrightarrow{\star^1} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ -4x_2 + 3x_4 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = \frac{4}{3}x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_2 - x_3 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{4}{3}x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Hermosos y molestos números complejos. Acá probablemente se use mucho lo de \times y \div por el conjugado mucho para sacar números con parte imaginaria del denominador, quiero decir:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \xrightarrow{z = a + ib} \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} ix_1 - (1 + i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases}$$

Escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 - i & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{i}F_1 \rightarrow F_1 \\ F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 0 & -1 - i & 1 & -i \\ 0 & 1 + i & -1 & i \end{array} \right)$$

$$F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & i \\ 0 & -1 - i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Tuqui. Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1 + i)x_2 = i & \rightarrow x_1 = i + (1 - i)x_2 \\ -(1 + i)x_2 + x_3 = -i & \rightarrow x_3 = -i + (1 + i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + (1 - i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ -i + (1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 - i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 + i & 0 & 0 \\ 0 & -1 - i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} x_1 + (-1 + i)x_2 = 0 & \rightarrow x_1 = (1 - i)x_2 \\ -(1 + i)x_2 + x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = (1 + i)x_2 \end{cases}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - i) \cdot x_2 \\ x_2 \\ (1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

(d) Hay más incógnitas que ecuaciones, no va a tener solución única.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 + i & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array} \right) \quad 2F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 + i & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 + i & -6i & 11 & 4 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1 + i)x_2 + x_4 = 2 & \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} 2 - 2x_1 - (-1 + i)x_2 \\ (5 + i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 4 \end{cases}$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 &= (5 + i)x_2 + 11x_4 - 4 \stackrel{\star^1}{=} (5 + i)x_2 + 11(2 - 2x_1 + (-1 + i)x_2) - 4 = \\ &= (5 + i)x_2 + 22 - 22x_1 + (11 - 11i)x_2 - 4 = (16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(16 - 10i)x_2 - 22x_1 + 18}{6i} = \frac{(8 - 5i)x_2 - 11x_1 + 9}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} \\ x_3 &= -\frac{(-15 - 24i)x_2 + 33ix_1 - 27i}{9} = \frac{-5 - 8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \end{aligned}$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 - 3i \\ 2 - 2x_1 - (-1 + i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1 - i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema homogéneo asociado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{como arriba}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 0 \end{array} \right)$$

Paso a sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 0 \\ (5+i)x_2 - 6ix_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow x_4 \stackrel{\star^1}{=} -2x_1 - (-1+i)x_2$$

utilizo el resultado de x_4 en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 6ix_3 &= (5+i)x_2 + 11x_4 \stackrel{\star^1}{=} (5+i)x_2 + 11(-2x_1 + (1-i)x_2) = \\ &= (5+i)x_2 - 22x_1 + (11-11i)x_2 = (16-10i)x_2 - 22x_1 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{(16-10i)x_2 - 22x_1}{6i} = \frac{(8-5i)x_2 - 11x_1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i}$$

$$x_3 = -\frac{(-15-24i)x_2 + 33ix_1}{9} = \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1$$

Yo estaba buscando algo de la pinta $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{-5-8i}{3}x_2 + \frac{11i}{3}x_1 \\ -2x_1 - (-1+i)x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{11i}{3} \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5-8i}{3} \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

 Tomás A.

Ejercicio 2.

- (a) Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

- (b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k , resolverlo.

- (a) No tengo ganas de triangular. Ejercicios con letras y matrices cuadradas, calculo determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k-2 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix} \\ &= k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto sé que para que el sistema no tenga solución única debe ocurrir que:

$$k = 1 \quad \text{o} \quad k = -1$$

Ahora hay que probar a mano con cada valor de k para ver en cada caso si el sistema queda *indeterminado* o *incompatible*

Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

No hay solución con $k = 1$

Si $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 & -1 \\ 1 & -1 & -1-2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \star^1$$

Habrán infinitas soluciones con $k = -1$

(b) El sistema homogéneo asociado en el caso $k = -1$:

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + (-1)^2x_3 = 0 \\ x_1 + -1x_2 + (-1-2)x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizando la triangulación de antes (\star^1) el sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Tomás A. 

Ejercicio 3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ \rightarrow [una pull request](#) al .

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (1,1), (2,2) y (3,0). Verificar el resultado obtenido usando Python . Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # librería para graficar.

# ...
# Acá , crear la matriz y resolver el sistema para calcularl a , b y c.
# ...

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f = lambda t: a * t**2 + b * t + c # esto genera una función f de t.
plt.plot(xx, yy, "x")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Hay que armar la matriz para luego resolverla:

$$\begin{cases} y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ y(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ y(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

La parábola queda:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

🔔 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🔔

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz del ejercicio

A = [[1, 1, 1], [4, 2, 1], [9, 3, 1]]
b = [1, 2, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100) # genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.

f = lambda t: a * t**2 + b * t + c

plt.plot(xx, yy, "*")
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

👤 ¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0; ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

(a) $\langle 1, 1, 2 \rangle$

(b) Describo a \mathbf{A} y a $-\mathbf{A}^t$ como :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\} \quad \text{y} \quad -\mathbf{A}^t = \{-a_{ji} \in \mathbb{C} : 1 \leq i, j \leq 3\}$$

O escrito en idioma humano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de la diagonal *no se mueven, solo cambian de signo*, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen esa reflexión respecto a la diagonal:

$$a_{ij} \stackrel{?}{=} -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -a_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Estoy buscando algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de generadores buscado:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) ... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(d) ... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

🔗 ¿Errores? [Avisá acá](#) así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 28/03/25 @ 23:35 . Chequeá si hay una [versión nueva](#) → [acá](#).

[Ir a índice](#) ↑

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V , y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$.
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$.
- (d) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \ \forall i, j\}$ y $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.
- (e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 33 - i), (4, 1 - i, 0) \rangle$ y $T = \{(x \in \mathbb{C}^3) : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(b) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(c) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(d) S es un subespacios describiendo matrices *simétricas*, es decir que $A = A^T$ y T el subespacio con matrices de traza 0, es decir, $\sum t_{ii} = 0$. Escrito esto un poco más en extensión:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} -(t_{22} + t_{33}) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \implies S \cap T = \begin{pmatrix} -(x_{22} + x_{33}) & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

En la última matriz tengo algo que cumple ambas condiciones de las descripciones por comprensión de los subespacios S y T . El sistema de generadores buscado para la intersección:

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La suma de estos subespacios tiene pinta de ser todo $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ a ver que onda la dimensión:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 6 + 8 - 5 = 9$$

Tuqui.

(e) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

- (a) $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$.
- (b) $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$.

- (a) Lo primero que quiero hacer es que los generadores sean *linealmente independientes* y porque me gusta determinantes ☺:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{vmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & k^2 + k - 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (k^2 + k - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ = (k^2 + k - 2) \cdot (-1 + k) = 0 \\ \Leftrightarrow k \in \{-2, 1\}$$

Así me saco el tema de las k de encima, pero buéh todavía no se termina:

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle \stackrel{?}{=} \begin{cases} \langle (1, -2, -4), (-1, -1, 2), (1, 1, -2) \rangle = \langle (1, -2, -4), (1, 1, -2) \rangle & \text{si } k = -2 \\ \langle (1, 1, 2), (-1, -1, -1), (1, 1, 1) \rangle = \langle (1, 1, 2), (1, 1, 1) \rangle & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Para que los los subespacios sean iguales, por ejemplo podría ver si se intersectan en todos sus elementos. Voy a buscar la expresión por comprensión de $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 3 & x_1 \\ 6 & -8 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & -8 & x_3 - 6x_2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{F_3 + 8F_2 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \end{array} \right)$$

Dado que ese sistema no puede dar un absurdo, porque el subespacio claramente no es \emptyset se debe cumplir:

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}^{\star^1}$$

Encontrar la intersección ahora es fácil:

Caso con $k = -2$:

$$(a + b, -2a + b, -4a - 2b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a + b) - 2(-2a + b) + 3(-4a - 2b) = 0 \quad \forall a \text{ y } b \in \mathbb{K}$$

Los subespacios son iguales con $k = -2$

Caso con $k = 1$:

$$(a + b, a + b, 2a + b) \xrightarrow[\star^1]{\text{meto en}} 8(a + b) - 2(a + b) + 3(2a + b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$$

Los subespacios tienen intersección pero no son iguales

Concluimos que el único valor de k para el cual los subespacios son iguales es:

$$k = -2$$

- (b) 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al 🗄️.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🗨️

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K -espacio vectorial V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Hay que probar que:

$$S \cup T \text{ es subespacio} \Leftrightarrow S \subseteq T \vee T \subseteq S$$

CONSULTAR, no me cierra el enunciado

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K . Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, 1), (0, 2, 1, -5)\} \in \mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \in \mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

Acá las definiciones de combinación lineal y coso ([← click](#))

(a)

$$a \cdot (1, 4, -1, 3) + b \cdot (2, 1, -3, 1) + c \cdot (0, 2, 1, -5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{triangulando}]{\text{✗}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Los vectores son *linealmente independientes*.

(b) Ahora los coeficientes α y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha \cdot (1 - i, i) + \beta \cdot (2, -1 + i) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 2 \\ i & -1 + i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-i} \cdot F_1 \rightarrow F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_2 - i \cdot F_1 \rightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\alpha = (1+i)\beta}$$

Y estos bichos no serían *linealmente independientes*.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 11. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ \rightarrow [una pull request](#) al .

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

Es un *si solo si* así que sale doble implicación:

(\Leftarrow) Para este lado sale un poco más fácil, por eso arranco por acá.



Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Es inmediato ver que en este caso a pesar de que los coeficientes z_i , valen todos 0, es decir que particularmente son reales también! Puedo tomar $r_i = z_i$ y listo, tengo la combinación lineal igualada a cero y todos los coeficientes son reales y nulos.

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

(\Rightarrow) Este es un poco más picante, porque no es *obvio* que deba ocurrir ¿O no lo es para mí?: Sé que por independencia lineal:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot v_i = 0 \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Quiero probar que:

$$\sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i = 0 \quad \star^1 \quad \text{con } z_i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Laburo un poco \star^1 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_i \cdot v_i &= z_1 \cdot v_1 + \cdots + z_k \cdot v_k = 0 \\ &\xleftrightarrow[!!]{z_j = a_j + ib_j} \\ (a_1 + ib_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_k + ib_k) \cdot v_k &= 0 \\ &\xleftrightarrow[!!]{v_j \in \mathbb{R}^n} \\ \underbrace{(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k)}_{\star^2} + i \underbrace{(b_1 \cdot v_1 + \cdots + b_k \cdot v_k)}_{\star^3} &= 0 \end{aligned}$$

Tuqui. Las combinetas en \star^2 y \star^3 cumplen nuestra hipótesis, porque los a_i y los $b_i \in \mathbb{R}$, es decir que son ambas nulas.

Nota que puede ser de interés:

Mirá que ese último $!!$ es porque los $v_j \in \mathbb{R}$, porque si tuvieses por ejemplo:


$$\{(i, 1), (1, -i)\}$$

Esos $v_j \in$ si laburás con $K = \mathbb{R}$ son MEGA *linealmente independientes*, peeeero si $K = \mathbb{C}$:

$$i \cdot (i, 1) + 1 \cdot (1, -i) = 0$$

todo lo contrario. Solo se llega a las expresiones \star^2 y \star^3 gracias a que $v_j \in \mathbb{R}^n$.

Fin de Nota que puede ser de interés:

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $A \in K^{m \times n}$ satisface que $Ax = 0 \quad \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx \quad \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

(b) Probar que si $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j -ésima de B , entonces $AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$ (es decir, AB_j es la columna j -ésima de AB).

(a) Tengo $A \in K^{n \times n}$ entonces Ax :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

Probando particularmente con la base canónica de K^n $x \in K^n$ con $x \in B$, donde

$$B = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 1)\}$$

muestro así que las columnas de A son siempre nulas.

(b) Usando lo que hice en el anterior:

$$Ax = Bx \iff (A - B)x = 0 \iff Cx = 0$$

Dado que $Cx = 0 \forall x \in K^n$ se muestra que $A = B$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  

Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow [una pull request](#) al .

Ejercicio 15. Dadas las bases de \mathbb{R}^3 , $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 1, 1); (2, 0, 1); (1, -1, 3)\}$



- Calcular $[(1, 1, 0)]_B$ y $[(1, 1, 0)]'_B$.
- Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$.
- Comprobar que $C(B, B')[(1, 1, 0)]_B = [(1, 1, 0)]_{B'}$.

(a) Para calcular las coordenadas en una base B :

$$(1, 1, 0) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) \xrightarrow{\text{a ojímetro}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies [(1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0)$$

En la base B' voy a tener que hacer más cuentas:

$$(1, 1, 0) = a(-1, 1, 1) + b(2, 0, 1) + c(1, -1, 3) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{resolviendo}} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies [(1, 1, 0)]_{B'} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([[-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3]])
b = [1, 1, 0]

# Resuelvo el sistema A x = b, y lo devuelvo en
# las variables con los nombres adecuados
a, b, c = np.linalg.solve(A, b)

print(f"a = {a}\nb = {b}\nc = {c}")
```

(b) Quiero la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los generadores de B en la base B' :

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} (1, 1, 0) = a_1(-1, 1, 1) + b_1(2, 0, 1) + c_1(1, -1, 3) \\ (0, 1, 1) = a_2(-1, 1, 1) + b_2(2, 0, 1) + c_2(1, -1, 3) \\ (1, 0, 1) = a_3(-1, 1, 1) + b_3(2, 0, 1) + c_3(1, -1, 3) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{\text{↔}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \\ (a_2, b_2, c_2) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) \\ (a_3, b_3, c_3) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}) \end{cases}$$

🔒 Si hacés un copy paste de este código debería funcionar lo más bien 🔒

```
import numpy as np

# Matriz del ejercicio
A = np.array([-1, 2, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 3])
b = [1, 1, 0]

a1, b1, c1 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a1 = {a1}\nb1 = {b1}\nc1 = {c1}\n")

b = [0, 1, 1]
a2, b2, c2 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a2 = {a2}\nb2 = {b2}\nc2 = {c2}\n")

b = [1, 0, 1]
a3, b3, c3 = np.linalg.solve(A, b)
print(f"a3 = {a3}\nb3 = {b3}\nc3 = {c3}\n")
```

Finalmente la matriz $C(B, B')$:

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(c) Lo que hay que hacer es :

$$C(B, B') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tuqui. Da eso.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

Ejercicio 16. Sean $A, A' \in K^{m \times n}; B \in K^{n \times r}; D, D' \in K^{n \times n}; \alpha \in K$. Probar:

(a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

(e) $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$

(b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(f) $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$

(c) $(AB)^t = B^t A^t$

(d) AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

(g) $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$

Voy a usar [operaciones de matrices](#) (← click):

🔗 ¿Errores? [Avisá acá](#) así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 28/03/25 @ 23:35 . Chequeá si hay una [versión nueva](#) → [acá](#).

[Ir a índice](#) ↑

(a) Si tengo una suma de matrices $A + A'$ para cada elemento será:

$$(A + A')_{ij} = (a + a')_{ij} \xleftrightarrow{\text{transpongo}} (a + a')_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ji} + a'_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} (A^t + (A')^t)_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

(b) Tengo ahora un producto de un escalar por una matriz:

$$(\alpha \cdot A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{ij} \xleftrightarrow[\alpha^t = \alpha]{\text{transpongo}} \alpha a_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha A)_{ji} = \alpha A^t \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

(c) Tengo ahora un producto matricial AB :

$$(AB)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \star^1 \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$$

Por otro lado, y te voy pidiendo perdón por esos índices:

$$(B^t)_{fg} \stackrel{\text{def}}{=} b_{gf} \quad \text{y} \quad (A^t)_{g'h} \stackrel{\text{def}}{=} a_{hg'} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} 1 \leq g, g' \leq n \\ 1 \leq f \leq r \\ 1 \leq h \leq m \end{cases}$$

$$(B^t A^t)_{fh} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n b_{fk} a_{kh} = b_{f1} a_{1h} + \cdots + b_{fn} a_{nh} \quad \text{para cada } 1 \leq f \leq r, 1 \leq h \leq m$$

Ese último resultado con $f = j$ y $h = i$ queda:

$$(B^t A^t)_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n b_{jk} a_{ki} = \underbrace{b_{j1} a_{1i} + \cdots + b_{jn} a_{ni}}_{=\star^1} = (AB)_{ij} \stackrel{!}{=} ((AB)_{ji})^t$$

Y como los índices son mudos ☺:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

¿Puede ser que haya dado mil vueltas más de las necesarias? Sí ☺. ¡Bienvenida será tu resolución más elegante!

(d) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(e) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(f) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

(g) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

Ejercicio 17. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Ejercicio 18. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

🐙 ¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

Ejercicio 19. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 20. 🤖... hay que hacerlo! 🤖


Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicio 21. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$ → *una pull request* al 🐙.

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → una *pull request* al .
