Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 6

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 28/07/25 @ 13:11

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 6 que tenés se actualizó por última vez:

28/07/25 @ 13:11

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 6

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

- *Ecuaciones normales:*

$$A^t(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow A^tAx = A^tb$$

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. Para cada uno de los conjuntos de datos, plantear las ecuaciones normales y calcular los polinomios de grado 1, 2 y 3 que mejor aproximan la tabla en el sentido de cuadrados mínimos. Graficar los datos juntos con los tres polinomios. ¿Qué se observa? ¿Qué se puede decir del polinomio de grado 3?

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

Quiero hacer cuadrados mínimos en los conjuntos dados para los polinomios:

$$\begin{cases} y &= ax + b \\ y &= ax^2 + bx + c \\ y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}$$

$$Ax = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t A x = A^t y \Leftrightarrow$$

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 11.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. [recu 5/12/2024] Sean $p_1 = (1, 0)$ y $p_2 = (1, 1)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$.

(a) Hallar la recta que pasa por el origen (es decir, $y = \alpha x$) que mejor aproxima a los puntos p_1 y p_2 en el sentido de cuadrados mínimos. Calcular el error cometido en la aproximación.

(b) Sea $y = \tilde{\alpha} x$ la recta hallada en el ítem anterior. Probar que $y = \tilde{\alpha} x$ es la recta que pasa por el origen que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los puntos $p_1 = (1, -\beta/2)$ y $p_2 = (1, 1 + \beta/2)$ para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$. ¿El error cometido es el mismo que en el ítem anterior? Justificar.

(a) Minimizar en el sentido de cuadrado mínimos:

$$\sum_{i=1}^{2} (y_i - \alpha x_i)^2 = \underbrace{(y_1 - \alpha x_1)^2 + (y_2 - \alpha x_2)^2}_{\|\boldsymbol{y} - \alpha \boldsymbol{x}\|_2^2} \xrightarrow[\text{el sistema}]{\text{minimizar}} \text{mín}(\|\boldsymbol{y} - \alpha \boldsymbol{x}\|_2^2)$$

Ecuaciones normales:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} \alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y} \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

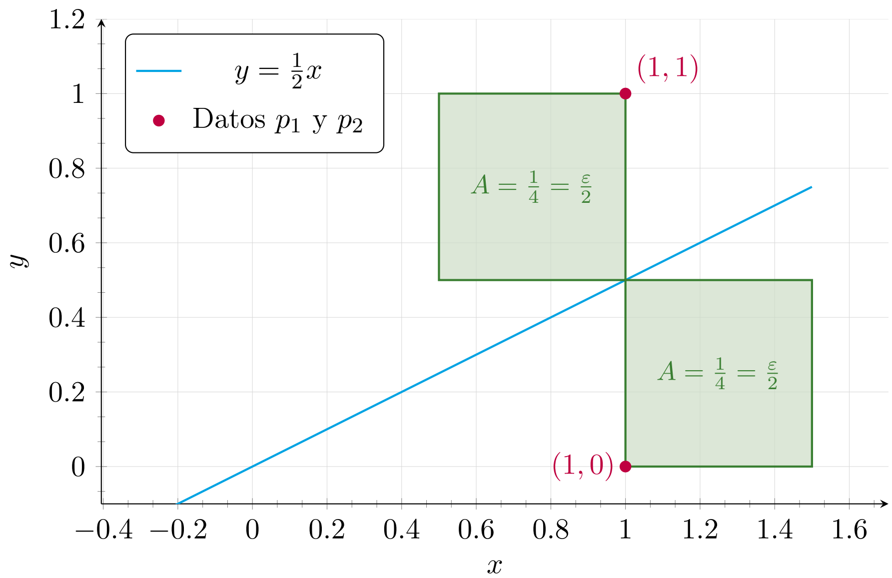
La recta que pasa por el origen y que mejor aproxima es:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

El error cometido al usar la recta $y = \frac{1}{2} x$ para aproximar los puntos p_1 y p_2:

$$\varepsilon = \left\| \sum_{i=1}^{2} (y_i - \tfrac{1}{2} x_i)^2 \right\|_2^2 = \left\| \boldsymbol{y} - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{x} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$$

El error se puede apreciar en el gráfico como el área de esos dos cuadrados que tienen de lado $\frac{1}{2}$, al sumarlas se obtiene el ε.



(b) Con los puntos $p_1 = (1, -\frac{\beta}{2})$, $p_2 = (1, 1+\frac{\beta}{2})$ la simetría del ejercicio sigue siendo la misma.

Ecuaciones normales:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} \alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2} \\ 1+\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}}_{y} \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

La recta que pasa por el origen y que mejor aproxima es nuevamente:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

El error cometido al usar la recta $y = \frac{1}{2}x$ para aproximar los puntos p_1 y p_2:

$$\varepsilon = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2} \\ 1+\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1+\beta}{2} \\ \frac{1+\beta}{2} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \frac{(1+\beta)^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{(1+\beta)^2}{2}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

2. [parcial 8/7/23] Se sabe que cierto sistema físico que evoluciona con el tiempo cumple con el modelo $f(t) = a2^{-2t} + b2^{-t}$ y se cuenta con la siguiente tabla con mediciones en el tiempo

t	0	1	2
$f(t)$	10	3	3/4

Encontrar los valores a y b para que el modelo aproxime a los datos de la mejor forma en el sentido de cuadrados mínimos. ¿Los valores encontrados son únicos?

Armar sistema matricial con los datos:

$$\begin{cases} f(0) &= 10 &= a2^{-2\cdot 0} + b2^{-0} &= a + b \\ f(1) &= 3 &= a2^{-2\cdot 1} + b2^{-1} &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \\ f(2) &= \frac{3}{4} &= a2^{-2\cdot 2} + b2^{-2} &= \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b \end{cases} \xrightarrow[\text{matricial}]{\text{forma}} A\vec{t} = \vec{f}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

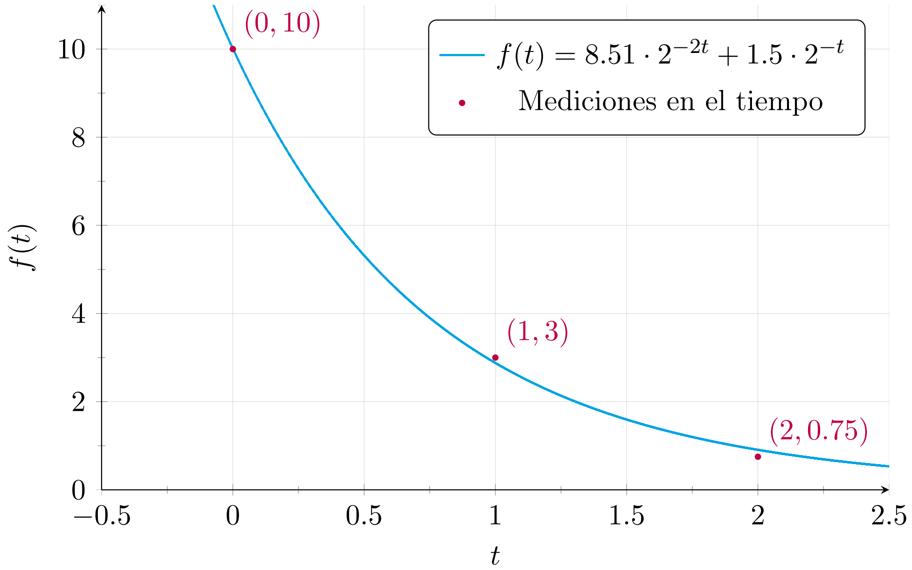
Las ecuaciones normales:

$$A^t A \vec{f}(t) = A^t \vec{f}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{273}{256} & \frac{73}{64} \\ \frac{73}{64} & \frac{21}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{691}{64} \\ \frac{187}{16} \end{pmatrix} \overset{!!}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 273 & 292 \\ 292 & 336 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} \frac{691}{4} \\ 187 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 8.51 \\ b \approx 1.50 \end{cases}$$

El modelo tiene solución única. La matriz del sistema A tiene rango 2 y el sistema lineal a resolver tiene 2 parámetros a y b.

$$\boxed{f(t) = 8.51 \cdot 2^{-2t} + 1.5 \cdot 2^{-t}}$$

Algo así, nada mal la verdad!



Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

3. En cierta especie animal se estudia la relación entre el peso X (en kg) y el volumen pulmonar Y (en litros), obteniéndose los datos:

peso (kg)	60	85	100	150	250
vol. pulmonar (l)	2.3	4	5	9	19.5

(a) Ajustar los datos a una función $Y = aX^b$ en el sentido de cuadrados mínimos.

(b) En el procedimiento de mínimos cuadrados, hay una función que se minimiza, ¿Cuál es esa función y el valor del mínimo en este caso?

(a) Primero hay que linealizar los parámetros del modelo, porque las ecuaciones normales que usamos para minimizar tienen que ser lineales:

$$Y = aX^b \Leftrightarrow \ln(Y) = \ln(aX^b) = \ln(a) + \ln(X^b) = \ln(a) + b \cdot \ln(X)$$

$$Y = aX^b \overset{!}{\leftrightsquigarrow} \tilde{Y} = \tilde{a} + b \cdot \tilde{X}$$

Armo sistema con los datos modificados después de la linealización:

$$\begin{cases} 0.83 &= \tilde{a} + b \cdot 1.38 \\ 1.39 &= \tilde{a} + b \cdot 4.44 \\ 1.61 &= \tilde{a} + b \cdot 4.60 \\ 2.2 &= \tilde{a} + b \cdot 5.01 \\ 2.97 &= \tilde{a} + b \cdot 5.52 \end{cases} \xrightarrow[\text{matricial}]{\text{forma}} A = \begin{pmatrix} 1 & 1.38 \\ 1 & 4.44 \\ 1 & 4.60 \\ 1 & 5.01 \\ 1 & 5.52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.39 \\ 1.61 \\ 2.2 \\ 2.97 \end{pmatrix}$$

Armo ecuaciones normales y luego a resolver, rezando desde acá para que las cuentas no sean un infierno:

$$A^t A \tilde{X} = A^t \tilde{Y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.38 & 4.44 & 4.60 & 5.01 & 5.52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1.38 \\ 1 & 4.44 \\ 1 & 4.60 \\ 1 & 5.01 \\ 1 & 5.52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.38 & 4.44 & 4.60 & 5.01 & 5.52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.39 \\ 1.61 \\ 2.2 \\ 2.97 \end{pmatrix}$$

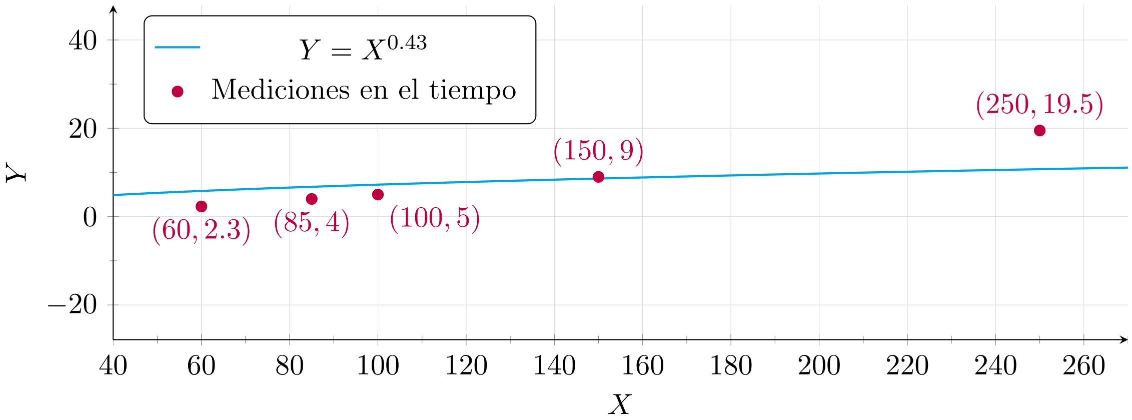
$$\overset{\approx}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 21 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a} &= 0 \\ b &= 0.43 \end{cases}$$

Queda demostrado que rezando las cuentas no son menos *verga*. Tengo que volver a los parámetros del problema:

$$a = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad b = 0.43 \xrightarrow[\text{queda}]{\text{el modelo}} \boxed{Y = 1 \cdot X^{0.43}}$$

Esto queda algo así



(b) La función a minimizar es la distancia de los valores de las mediciones a la función modelo:

$$f(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{5} (Y_i - aX_i^b)^2 = \left\| \boldsymbol{Y} - a\boldsymbol{X}^b \right\|_2^2 \xrightarrow[\text{el sistema}]{\text{minimizar}} \text{mín}\left(\left\| \boldsymbol{Y} - a\boldsymbol{X}^b \right\|_2^2 \right) \leftrightsquigarrow \text{mín}\left(\left\| \tilde{\boldsymbol{Y}} - (\tilde{a} + b\tilde{\boldsymbol{X}}) \right\|_2^2 \right)$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

4. Sea $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^5$, A una matriz de 5×3 con columnas q_1, q_2, q_3 y el vector $b = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5$.

(a) Mostrar que el sistema $Ax = b$ no tiene solución. Plantear las ecuaciones normales y hallar la solución $\hat{x}$ de cuadrados mínimos para dicho sistema.

(b) Calcular el error cometido en la aproximación.

(c) Mostrar que $A^\dagger = A^t$, siendo $A^\dagger$ la pseudoinversa de A.

(a) En la cuentilla uso notación $(q_i)_j$ con $j \in [1, 5]$ como la coordenada j-ésima del vector q_i:

$$\begin{array}{rcl}
Ax = b & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ & & \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1(q_1)_1 + x_2(q_2)_1 + x_3(q_3)_1 \\ x_1(q_1)_2 + x_2(q_2)_2 + x_3(q_3)_2 \\ x_1(q_1)_3 + x_2(q_2)_3 + x_3(q_3)_3 \\ x_1(q_1)_4 + x_2(q_2)_4 + x_3(q_3)_4 \\ x_1(q_1)_5 + x_2(q_2)_5 + x_3(q_3)_5 \end{pmatrix} = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5 \\
& \Leftrightarrow & x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5 \\
& \overset{!}{\Leftrightarrow} & q_4^t \cdot (x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3) = q_4^t \cdot (q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5) \\
& \xRightarrow[\text{BON}]{!} & 0 = 4 \text{ ☠}
\end{array}$$

Por lo tanto ese sistema no tiene una solución.

Planteo las ecuaciones normales para encontrar la solución $\hat{x}$ que mejor aproxima por cuadrados mínimos:

$$\begin{aligned} A^tA\hat{x} = A^tb \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} q_1^t \\ \hline q_2^t \\ \hline q_3^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} q_1 & q_2 & q_2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} q_1^t \\ \hline q_2^t \\ \hline q_3^t \end{array}\right) (q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5) \\ &\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad I_3 \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{x}_1 &= 1 \\ \hat{x}_2 &= 2 \\ \hat{x}_3 &= 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Si venís haciendo los ejercicio donde te dan los datos para aproximar (x_i, y_i) este punto puede ser *confuso*, pero tenés que pensar que los x_i están en la matriz A y los y_i son los elementos de b.

El error viene dado por:

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - x_i\tilde{x})^2 = \|b - A\tilde{x}\|_2^2 \overset{!}{=} \|q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5 - (1q_1 + 2q_2 + 3q_3)\|_2^2 = \|4q_4 + 5q_5\|_2^2$$

(c) Recordando que la pseudoinversa es como la transpuesta, pero invirtiendo los valores singulares:

$$A = U\Sigma V^* \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{pseudo}} A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$

con la $\Sigma^\dagger$ que sería como Σ^t invirtiendo los elementos diagonales $[\Sigma^\dagger]_{ii} = \frac{1}{\sigma_{ii}}$.

En los calculos de los ítems anteriores se vio que:

$$A^t \cdot A = I_3 \overset{!}{\Longrightarrow} \sigma_i = 1 \overset{\star 1}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\sigma_i} = 1$$

por lo tanto:

$$A = U\underset{\left(\begin{array}{c} I_3 \\ \hline 0 \end{array}\right)}{\underset{\downarrow}{\Sigma}}V^t \Leftrightarrow A^t = V\underset{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \end{array}\right)}{\underset{\downarrow}{\Sigma^t}}U^t \quad \text{y} \quad A^\dagger = V\underset{\left(\begin{array}{c|c} (I_3)^{-1} & 0 \end{array}\right)}{\underset{\downarrow}{\Sigma^\dagger}}U^t \overset{\star 1}{=} V\Sigma^t U^t = A^t$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz