Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 7

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 22/06/25 @ 22:24

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:
22/06/25 @ 22:24
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

- *Matriz de iteraciones M_I:*

  Busco un sistema equivalente al clásico y querido $Ax = b$, porque invertir A se complica:

$$Ax = b \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \overset{!}{\Leftrightarrow} x = \underbrace{-B^{-1}C}_{M_I}\,x + \underbrace{B^{-1}b}_{\tilde{b}} \Leftrightarrow \boxed{x = M_I x + \tilde{b}} \star^{1}.$$

  Donde B se elige porque es más fácil que invertir que A *sino me estaría pegando un tiro en el pie.* La matriz M_I es la *matriz de iteraciones*, la cual se va a usar así:

$$\begin{array}{ccl} \text{espectativa} & \to & x = M_I x + \tilde{b} \\ - & & - \\ \text{realidad} & \to & x_{k+1} = M_I x_k + \tilde{b} \\ \hline \text{error} & \to & x - x_{k+1} = e_{k+1} = M_I e_k \end{array}$$

  Y ese error, si le mando M_I *reiteradas veces*:

$$e_{k+1} = M_I \cdot e_k = M_I \cdot M_I e_{k-1} = \cdots = M_I^{k+1} e_0 \Leftrightarrow \boxed{e_{k+1} = M_I^{k+1} e_0}$$

  Si el error de iterar $k+1$ veces $e_{k+1} \to 0$, entonces quiere decir que $M_I^{k+1} \to 0$ entonces la espectativa y la realidad no van a diferir más que lo que diferían al principio antes de iterar:

$$⚠ \qquad \boxed{e_{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \Leftrightarrow M_i^{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \iff \rho(M_I) < 1} \qquad ⚠$$

  Donde $\rho(M_I) = \lambda_{\text{máx}}$

- *Jacobi y Gauss-Seidel*: Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{trianguluar} \\ \text{inferior}}}{L} + \overset{\substack{\text{diagonal} \\ \uparrow}}{D} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{triangular} \\ \text{superior}}}{U}$$

  - *Jacobi*: Tomando en este caso $B = D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\star^{1}$:

$$\boxed{\begin{cases} M_J &= -D^{-1}(L+U) \\ \tilde{b} &= D^{-1}b \end{cases}}$$

  - Gauss-Seidel: Tomando en este caso $B = L + D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\star^{1}$:

$$\boxed{\begin{cases} M_{GS} &= -(L+D)^{-1}U \\ \tilde{b} &= (L+D)^{-1}b \end{cases}}$$

  - Si A es estrictamente diagonal dominante, es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

    entonces *Jacobi* y *Gauss-Seidel* convergen.
  - Si A es tridiagonal entonces $\rho(T_{GS}) = \rho^2(T_J)$
  - Si A es simétrica (hermitiana) y definida positiva entonces *Gauss-Seidel* converge.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 3. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)^t$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.

b) Sea J la matriz de iteración. Hallar la normas 1, ∞ y 2 de J.
¿Contadice la convergencia del método?

c) Hallar una norma $\| \cdot \|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1. *Sugerencia: Considerar una base de autovectores de J.*

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 4. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 11.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. [segundo recu 5/12/2024] Se desea resolver el sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar los valores de α para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para cualquier vector inicial x_0.

(b) Probar que si $\alpha = 0$ el método de Jacobi converge en 3 pasos para cualquier x_0. *Sugerencia:* analizar B_J^3, siendo B_J la matriz que gobierna la iteranción del método de Jacobi.
