# Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 7


Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA



**última actualización 10/07/25 @ 23:26**


*Choose your destiny:*

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:
10/07/25 @ 23:26
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

**Notas teóricas:**

- *Matriz de iteraciones $M_I$:*

  Busco un sistema equivalente al clásico y querido $Ax = b$, porque invertir $A$ se complica:

$$Ax = b \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \overset{!}{\Leftrightarrow} x = \underbrace{-B^{-1}C}_{M_I}\,x + \underbrace{B^{-1}b}_{\tilde{b}} \Leftrightarrow \boxed{x = M_I x + \tilde{b}}\,\bigstar^1.$$

  Donde $B$ se elige porque es más fácil de invertir que $A$, *sino me estaría pegando un tiro en el pie.* La matriz $M_I$ es la *matriz de iteraciones*, la cual se va a usar así:

$$\begin{array}{ccc} \text{espectativa} & \to & x = M_I x + \tilde{b} \\ - & & - \\ \text{realidad} & \to & x_{k+1} = M_I x_k + \tilde{b} \\ \hline \text{error} & \to & x - x_{k+1} = e_{k+1} = M_I e_k \end{array}$$

  Y ese error, si le mando $M_I$ *reiteradas veces*:

$$e_{k+1} = M_I \cdot e_k = M_I \cdot M_I e_{k-1} = \cdots = M_I^{k+1} e_0 \Leftrightarrow \boxed{e_{k+1} = M_I^{k+1} e_0}$$

  Si el error de iterar $k+1$ veces $e_{k+1} \to 0$, entonces quiere decir que $M_I^{k+1} \to 0$ entonces la espectativa y la realidad no van a diferir más que lo que diferían al principio antes de iterar:

$$\boxed{e_{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \Leftrightarrow M_i^{k+1} \xrightarrow{k \to 0} 0 \overset{!!}{\iff} \rho(M_I) < 1}$$

  Donde $\rho(M_I) = |\lambda_{\text{máx}}|$

  Para el cálculo de los autovalores de $M_I$ esta propiedad es *clave*:

$$\boxed{M_I = -B^{-1}C \text{ tiene autovalor } \lambda \iff \det(\lambda B + C) = 0}$$

- *Jacobi y Gauss-Seidel*: Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{triangular} \\ \text{inferior}}}{L} + \overset{\substack{\text{diagonal} \\ \uparrow}}{D} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{triangular} \\ \text{superior}}}{U}$$

  - *Jacobi*: Tomando en este caso $B = D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\bigstar^1$:

$$\boxed{\begin{cases} M_J &= -D^{-1}(L + U) \\ \tilde{b} &= D^{-1}b \end{cases}}$$

  - Gauss-Seidel: Tomando en este caso $B = L + D$ entonces, me queda la *matriz de iteraciones* para resolver $\bigstar^1$:

$$\boxed{\begin{cases} M_{GS} &= -(L + D)^{-1}U \\ \tilde{b} &= (L + D)^{-1}b \end{cases}}$$

  - Si $A$ es estrictamente diagonal dominante, es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

    entonces *Jacobi* y *Gauss-Seidel* convergen.
  - Si $A$ es tridiagonal entonces $\rho(T_{GS}) = \rho^2(T_J)$
  - Si $A$ es simétrica (hermitiana) y definida positiva entonces *Gauss-Seidel* converge.

## Ejercicios de la guía:

**Ejercicio 1.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

**Ejercicio 2.** ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

**Ejercicio 3.** Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)^t$.

(a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial.

(b) Sea $J$ la matriz de iteración. Hallar las normas 1, $\infty$ y 2 de $J$.
¿Contradice la convergencia del método?

(c) Hallar una norma $\|\cdot\|$ en la cual $\|J\|$ sea $< 1$.
*Sugerencia: Considerar una base de autovectores de $J$.*

---

(a) Busco autovalores de $J$,

Si bien es una matriz chica de $2 \times 2$ quiero practicar el método para calcular los autovalores sin calcular la inversa de $D$. Sea como sea, la *sugerencia del final* dice que voy a terminar calculando $J$.

Escribiendo a la matriz como $A = L + D + U$ (ver acá el genérico click click ), Si quiero los autovalores de la matriz de iteración es $J = -D^{-1}(D + U)$ puedo hacer:

$$J = -D^{-1}(L + U) \text{ tiene autovalor } \lambda \Leftrightarrow \det\big(\lambda D + (L + U)\big) = 0$$

con

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Calculo determinante:

$$\det\big(\lambda D + (L + U)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 64\lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{3}{4} \\ \lambda_2 & = & -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Dado que el radio espectral $\rho(A) = \frac{3}{4} < 1$ el método converge para cualquier valor inicial.

(b) La matriz de iteración de Jacobi:

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_{(L+U)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{32} \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{autovectores}} \begin{cases} E_{\lambda_1 = \frac{3}{4}} & = & \langle(1, 8)\rangle \\ E_{\lambda_2 = -\frac{3}{4}} & = & \langle(-1, 8)\rangle \end{cases}$$

Recordar acá que:

Una matriz de iteración $M_I$ converge si y solo si $\rho(M_I) \overset{\star 1}{<} 1$.

Por otro lado para cualquier norma $\|\cdot\|$, se tiene que $\rho(M_I) < \|M_I\|$. Por lo tanto es *suficiente* que $\|M_I\| < 1$ para garantizar convergencia.
Peeeeero, si $\|M_I\| > 1$ no quiere decir que no converja el método, debido todo depende de $\star^1$.

Las normas pedidas:

- $\|J\|_1 = 6$
- $\|J\|_\infty = 6$
- $\|J\|_2 = \frac{3}{4}$ $\quad \to$ acá está la papa.

(c) Hay que usar:

$$\|A\|_W = \left\|W^{-1}AW\right\|_\infty$$

La matriz generada por los autovectores:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Y puedo hacer:

$$J = CDC^{-1} \Leftrightarrow C^{-1}JC = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto usando la norma $\|\cdot\|_C$

$$\|J\|_C = \left\|C^{-1}JC\right\|_\infty = \|D\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

**Ejercicio 4.** Decidir para cada una de las siguientes matrices si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel converge.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \\ -4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

---

*Matriz A:*

$A$ es una matriz *tridiagonal* es decir que averiguando el radio espectra de algún método ya sé lo que pasa con el otro, debido a que para este tipo de matrices:

$$\rho(T_{GS}) \overset{\star 1}{=} \rho^2(T_J)$$

Calculo $T_J = -D^{-1}(L+U)$:

$$T_J = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo los autovalores:

$$\det(T_J - \lambda I) = -\lambda \cdot (\lambda^2 + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \lambda_3 & = & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \rho(T_J) = \max_i(|\lambda_i|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\star 1}{\implies} \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2}$$

Ambos métodos convergen dado que:

$$\boxed{\rho(T_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{y} \quad \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2} < 1.}$$

En particular el método de Gauss-Seidel converge más rápido dado que el de Jacobi, dado que $\rho_{GS} < \rho J$

*Matriz B:*

## Ejercicio 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 6. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 11. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 12. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 13. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 14. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 15. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicio 16. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al.

## Ejercicios de parciales:

**1.** [recu 5/12/2024] Se desea resolver el sistema $Ax = b$ para un $b \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar los valores de $\alpha$ para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para cualquier vector inicial $x_0$.

(b) Probar que si $\alpha = 0$ el método de Jacobi converge en 3 pasos para cualquier $x_0$.
*Sugerencia:* analizar $B_J^3$, siendo $B_J$ la matriz que gobierna la iteración del método de Jacobi.

---

(a) Busco $\alpha$ tal que $\rho(B_{GS}) < 1$. Interesante en este ejercicio es el *ratoneo*, demostración de como las pocas ganas de invertir una matriz revelan una forma de encontrar lo deseado minimizando el esfuerzo y coso, en fin:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \implies T_{GS} = -(D+L)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto $T_{GS}$ tiene ceros en la primera y segunda columna, mientras que en la tercera tiene a la *primera columna* de $-(D+L)^{-1}$ multiplicada por $\alpha$. Es *fácil* encontrar esa *primera columna* sin invertir toda la matriz:

$$(D+L) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así tengo $T_{GS}$:

$$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Matriz que tiene un *radio espectral*: $\rho(T_{GS}) = 2|\alpha|$. Por lo tanto para que el método de Gauss-Seidel converja para todo vector inicial $x_0$:

$$\boxed{|\alpha| < 1}$$

Fin.

(b) Jacobi:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \implies T_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hago hasta la cuarta iteración, para comparar la tercera y cuarta:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= T_J x^{(0)} + b \\
x^{(2)} &= T_J x^{(1)} + b = T_J(T_J x^{(0)} + b) + b = T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b \\
x^{(3)} &= T_J x^{(2)} + b = T_J(T_J^2 x^{(0)} + T_J b + b) + b = T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b \\
x^{(4)} &= T_J x^{(3)} + b = T_J(T_J^3 x^{(0)} + T_J^2 b + T_J b + b) + b = T_J^4 x^{(0)} + T_J^3 b + T_J^2 b + T_J b + b
\end{aligned}$$

Usando la sugerencia puedo ver que $x^{(3)}$ y $x^{(4)}$ son iguales:

$$T_J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{más}]{\text{una}} T_J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcccl} x^{(4)} & = & T_J^4x^{(0)} + T_J^3b + T_J^2b + T_Jb + b & = & T_J^2b + T_Jb + b \\ - & & & & \\ x^{(3)} & = & T_J^3x^{(0)} + T_J^2b + T_Jb + b & = & T_J^2b + T_Jb + b \\ \hline \end{array} \to \boxed{x^{(4)} = x^{(3)}}$$

Por lo tanto converge en la tercera iteración.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

**2.** [segundo cuatri 2023] Dada una matriz real $A$, notamos $A = D + L + U$, donde $D$ es diagonal, $L$ triangular inferior estricta y $U$ triangular superior estricta.

(a) Probar que $x$ es solución de $Ax = b$ si y solo si $x$ satisface:

$$(I + \tfrac{1}{2}L)x = -(D - I + \tfrac{1}{2}L + U)x + b.$$

(b) Considerar el método iterativo derivado de la formulación anterior:

$$x^{n+1} = Bx^n + c,$$

donde $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$ y $c = (I + \frac{1}{2}L)^{-1}b$. Probar que $\lambda$ es un autovalor de $B$ si y solo si $\lambda$ es raíz de la ecuación:

$$\det\left(D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L)\right) = 0.$$

(c) Para $a \in \mathbb{R}$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método anterior converge para una matriz $A$ si y solo si $|a| < 1$.

(d) Probar que para que el método de Jacobi converja se debe cumplir la misma condición. Deducir de esto que la condición para que Gauss-Seidel converja es la misma ¿Qué método es preferible para la matriz $A$?

---

(a) Para que $x$ sea solución solo hay que hacer un par de cuentas y ver que queda una igualdad:

$$\begin{array}{rcl} (I + \frac{1}{2}L)x = -(D - I + \frac{1}{2}L + U)x + b & \Leftrightarrow & Ix + \frac{1}{2}Lx = -Dx + Ix - \frac{1}{2}Lx - Ux + b \\ & \Leftrightarrow & Dx + Lx + Ux = b \\ & \Leftrightarrow & (D + L + U)x = b \\ & \Leftrightarrow & Ax = b \end{array}$$

(b) $B$ va a tener a $\lambda$ como autovalor si y solo si $|B - \lambda I| = 0$. Hay que acomodar ese determinante feo y llegar a esa expresión:

$$\begin{array}{rcl} \det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0 & \Leftrightarrow & \det\left(\underbrace{(-(I + \frac{1}{2}L)(-(I + \frac{1}{2}L)^{-1})}_{I_n}(D - I + \frac{1}{2}L + U) + \lambda(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left((-(I + \frac{1}{2}L)B + \lambda(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left((-B + \lambda I)(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0 \\ & \overset{!}{\Leftrightarrow} & \det(-B + \lambda I) \cdot \underbrace{\det(I + \frac{1}{2}L)}_{\neq 0} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det(-B + \lambda I) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det(B - \lambda I) = 0 \end{array}$$

(c) De la teórica sabemos que:

$$\text{La sucesión } \left\{B^k\right\} \text{ converge } \iff \rho(B) \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\right\} < 1$$

Por lo tanto quiero calcular los autovalores de la matriz de iteración $B = -(I + \frac{1}{2}L)^{-1}(D - I + \frac{1}{2}L + U)$, lo cual, dado lo visto en el ítem anterior, es lo mismo que calcular:

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda(I + \frac{1}{2}L)\right) = 0$$

Cálculo que *no requiere invertir nada*, lo cual nos saca una sonrisa ☺. Junto los ingredientes para cocinar eso:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$D - I + \tfrac{1}{2}L + U + \lambda(I + \tfrac{1}{2}L) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \frac{a}{2} & a^2 & a \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda\frac{a}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante de eso:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ (\lambda+1)\frac{a}{2} & a^2+\lambda & a \\ 0 & (\lambda+1)\frac{a}{2} & \lambda \end{vmatrix} \overset{!}{=} \lambda^3 - a^2\lambda \overset{!}{=} \lambda \cdot (\lambda - a) \cdot (\lambda + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= a \\ \lambda_3 &= -a \end{cases}$$

Por lo tanto para que la matriz de iteración $B$ converga sin importar el vector inicial:

$$\boxed{|a| < 1}$$

(d) La matriz de iteración, $B_J$, para el método de Jacobi:

$$B_J = -D^{-1}(L + U).$$

Con la propiedad que se usó en el ejercicio anterior, para calcular los autovalores de esta $B_J$:

$$\lambda D + L + U = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante e igualo a cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ a & \lambda(1+a^2) & a \\ 0 & a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} \lambda \cdot \left(\lambda - \sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right) \cdot \left(\lambda + \sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \\ \lambda_3 &= -\sqrt{\frac{2a^2}{1+a^2}} \end{cases}$$

Por lo tanto el radio espectral de $B$, $\rho(B)$ debe cumplir que:

$$\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < \tfrac{2a^2}{1+a^2} < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < 2a^2 < 1 + a^2 \overset{!}{\Leftrightarrow} -a^2 < a^2 < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{|a| < 1}$$

Misma condición que la matriz anterior.

Lo que sigue ahora queda servido para usar la propiedad de la *tridiagonalidad* que relaciona los *radios espectrales* de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Dado que $A$ es tridiagonal para todo valor de $a$, sé que:

$$\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS}) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\tfrac{2a^2}{1+a^2}}\right)^2 = |\tfrac{2a^2}{1+a^2}|$$

Para que el método de Gauss-Seidel converja:

$$|\tfrac{2a^2}{1+a^2}| < 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} |a| < 1$$

Por lo tanto tengo la misma condición que para el método de *Jacobi*.

Con respecto a la velocidad de convergencia, hay que pensar que lo que se está haciendo, *maomeno*, es multiplicar una matriz por sí misma una y otra vez, por lo tanto mientras más rápido se achique más rápido va a converger. Y dado que para cualquier norma subordinada:

$$\rho(B) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\|B^k\|},$$

mientras más chico el $\rho(B)$ más rápido va a converger.

$$\rho(B_J) < 1 \quad \text{y} \quad \rho(B_{GS}) < 1 \quad \text{y} \quad (\rho(B_J))^2 = \rho(B_{GS}) \overset{!}{\iff} \boxed{\rho(B_J) > \rho(B_{GS})}$$

El método de Gauss-Seidel converge más rápido que el de Jacobi para esta matriz $A$. Comparo con $\rho(B) = |a|$:

$$\rho(B_{GS}) = \frac{2a^2}{1+a^2} \quad \text{y} \quad \rho(B) = |a|$$

Abro el módulo de $a$ planteo un caso cuando $a > 0$ y otro cuando $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} \text{si } a > 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \iff \frac{2a^2}{1+a^2} > a \\ & \iff 2a^2 > a + a^3 \\ & \iff 0 > a\cdot(1-2a+a^2) = a\cdot(a-1)^2 \overset{!}{>} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \implies \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \\ \text{si } a < 0 & \begin{cases} \rho(B_{GS}) \overset{?}{>} \rho(B) & \iff \frac{2a^2}{1+a^2} > -a \\ & \overset{!}{\iff} 2a^2 < a + a^3 \\ & \iff 0 < a\cdot(1-2a+a^2) = a\cdot(a-1)^2 \overset{!}{<} 0 \text{ ¡Absurdo!} \\ & \implies \boxed{\rho(B_{GS}) \overset{\checkmark}{<} \rho(B)} \end{cases} \end{cases}$$

Es así que el método de Gauss-Seidel es el más rápido para converger de los tres para la matriz $A$, porque tiene el menor *radio espectral*.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

**3.** [segundo parcial 8/7/23] Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ by + z &= 1 \end{cases}$$

(a) Determinar todos los valores de $a$ y $b$ para que el sistema tenga solución única.

(b) Para la matriz asociada al sistema dado, demostrar que el método de Jacobi converge si y solo si el método de Gauss-Seidel converge.

(c) Determinar todos los valores de $a$ y $b$ para asegurar la convergencia de ambos métodos. ¿Cuál de los dos métodos elegiría?

(a) Calcular determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = (a-1)b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ o \\ b = 0 \end{cases}$$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema tendrá solución única, por lo tanto:

$$\boxed{\forall a \neq 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0}$$

(b) Matriz tridiagonal, comparo los radios espectrales.

(c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .