Apunte Único: Álgebra Lineal Computacional - Práctica 5

Por alumnos de ALC
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 02/06/25 @ 13:26

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 5 que tenés se actualizó por última vez:
02/06/25 @ 13:26
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 5

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 2. Probar que si $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si A es hermitiana, entonces:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Para probar que los elementos diagonales pertenecen a $\mathbb{R}$ se puede usar la definición:

$$A \cdot A^* \in K^{n\times n}$$

la matriz transpuesta y conjugada va a tener la misma diagonal:

$$a_{ii} \xrightarrow[\text{conjugar}]{\text{trasponer y}} \overline{(a_{ii})^t} = \overline{a_{ii}} \overset{!}{=} a_{ii}$$

Por lo tanto si a_{ii} es igual a su conjugado debe ser un número real.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 3. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con B simétrica y C antisimétrica ($C^t = -C$) tales que $A = B + iC$.

A apartir de una matriz *hermitiana* me puedo construir las matrices B y C como:

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{y} \quad C = \frac{A - A^*}{2},$$

Donde las matrices B y $C \in \mathbb{R}$ y además son simétrica y antisimétrica respectivamente.
Ahora quiero ver la cuenta:

$$\begin{array}{rcl} B + iC = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2} & = & \frac{A+iA}{2} + \frac{A^*-iA^*}{2} \\ & \overset{!}{=} & \frac{A+iA}{2} + \frac{A-iA}{2} \\ & \overset{!}{=} & A \end{array}$$

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 4. Dada $A \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por A, es decir $Av \in S$ para todo $v \in S$. Probar que $S^\perp$ es invariante por A.

Si tomo un $v \in S$ y un $w \in S^\perp$:

$$\underset{\in S^\perp}{\underset{\downarrow}{w^*}} \cdot \overset{\in S}{\overset{\uparrow}{v}} = 0$$

Ahora que sé que S es un subespacio invariante por A:

$$Av = \lambda v \overset{\times A^*}{\Longleftrightarrow} A^*Av \overset{!}{=} A^2\lambda Av = \lambda^2 v \overset{\star 1}{=} kv \in S$$

Con esos ingredientes:

$$(Aw)^* \cdot \overset{\overset{\in S}{\uparrow}}{A}v = w^* A^* \cdot Av \overset{\star^1}{=} k(w^* \cdot v) = 0$$

Por lo tanto $Aw \in S^\perp \ \forall w \in S^\perp$.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 5. Probar que $A \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real con elementos de la diagonal positivos.

Hay que probar una doble implicación:

($\Rightarrow$)

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v^*}{\Longleftrightarrow}} v^* Av = \lambda v * v \Leftrightarrow v^* Av \overset{\star^1}{=} \lambda \|v\|_2^2$$
$$Av = \lambda v \overset{*}{\Leftrightarrow} v^* A^* = \overline{\lambda} v^* \underset{\leftarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} v^* A^* v = \overline{\lambda} v^* v \Leftrightarrow v^* A^* v \overset{\star^2}{=} \overline{\lambda} \|v\|_2^2$$

Como $A = A^*$ el miembro izquierdo en $\star^1$ y $\star^2$ es igual. Por lo tanto $\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora si A es una matriz definida positiva:

$$Av = \lambda v \underset{\rightarrow}{\overset{\times v}{\Longleftrightarrow}} \underbrace{v^* Av}_{>0 \text{ si } v\neq 0} = \lambda v^* v = \lambda \cdot \|v\|_2^2 > 0 \ \forall v \neq 0 \implies \lambda > 0$$

Hasta acá, con las hipótesis tengo *autovalores reales y positivos*, ahora voy a ver que los autovectores tienen que ser ortogonales. Dado 2 autovectores v_1 y v_2 asociados a distintos autovalores:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{y} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2^* A v_1 \overset{!}{=} (Av_2)^* v_1 = \lambda_2 v_2^* \cdot v_1 & \overset{\star^3}{=} \quad \lambda_1 v_2^* \cdot v_1 \\ \qquad\qquad\quad v_1^* A v_2 = \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 & \overset{\star^4}{=} \quad \lambda_2 v_1^* \cdot v_2 \end{cases}$$

Restando $\star^3$ y $\star^4$:

$$0 \overset{!!}{=} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(v_1^* \cdot v_2) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

($\Leftarrow$) CONSULTAR, probar por absurdo?

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

(a) Quiero que A sea simétrica:

$$A = A^t \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 2\}$$

Noto que si $\alpha = 2$ la matriz queda con filas *linealmente independientes:*

$$A_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto cuando $\alpha = 2$ tengo autovalor $\lambda = 0$.

(b) Dado que A es una matriz simétrica, es *ortonormalmente diagonalizable*. Hay que diagonalizar asegurando que la base de *autovectores* sea una BON. El procedimientos puede hacerse como cualquier diagonalización, pero acá voy a *explotar* 💣 el hecho de que la *base de autovectores* va a ser ortogonal.

Busco autovectores de $\lambda = 0$, que equivale a buscar elementos del núcleo de la matriz A a ojo:

$$(A-\lambda I)v_{(\lambda=0)} = 0 \Leftrightarrow v_{(\lambda=0)} \in \{(1,-1,0),(0,1,-2)\} \xrightarrow{\text{normalizando}} v_{(\lambda=0)} \in E_{(\lambda=0)} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) \right\}$$

Como estoy en $\mathbb{R}^3$ no hay muchas opciones para el vector restante, tiene que ser ortogonal a esos dos. Si no ves a ojo que por ejemplo el vector (2,2,1) funciona podés plantear:

$$\begin{cases} (1,-1,0)\cdot(x,y,z) & = & 0 \\ (0,1,-2)\cdot(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$$

Resolvelo y obtenés así un vector ortogonal.

Ahora quiero ver a que autovalor corresponde:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo así la siguiente *base ortonormal* para diagonalizar la matriz:

$$\text{BON} = \{ \underbrace{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}})}_{E_{(\lambda=0)}}, \underbrace{(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})}_{E_{(\lambda=9)}} \}$$

Y ahora queda fácil, porque la inversa de la matriz de autovectores C es C^t, dado que es una *matriz ortogonal* o *matriz unitaria*:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

Ejercicio 7. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 9. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 10. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ⭐ al repo, críticas, todo sirve.
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

Ejercicio 11.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 12.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 13.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 14.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 15.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 16.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 17.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 18.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 19.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 20.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 21.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicio 22.
... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de parciales:

1. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .