

# Apunte Único: Álgebra I - Práctica 7

Por alumnos de Álgebra I  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 19/06/25 @ 01:28

*Choose your destiny:*

*(doubleclick en los ejercicio para saltar)*

## • Notas teóricas

## • Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	

## • Ejercicios de Parciales

 1.	 3.	 5.	 7.	 9.	 11.	 13.	 15.
 2.	 4.	 6.	 8.	 10.	 12.	 14.	

### Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

## ¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

- 📖<sup>0</sup><sub>1</sub> Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 📖<sup>0</sup><sub>2</sub> Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 📖<sup>0</sup><sub>3</sub> ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 📖<sup>0</sup><sub>4</sub> Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 📖<sup>0</sup><sub>5</sub> Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

*Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda*, no te van a salir los ejercicios más difíciles: [Sentido común](#).

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:  
de Teresa que son **buenísimos** .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:  
**Prácticas Pandemia** .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque te vas a quedar (más) pelado...** 🐼🐼🐼 *va a salir todo bien!*

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:

19/06/25 @ 01:28

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:**• *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i \\ \implies f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j \\ \implies f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• *Algoritmo de división:*

$f, g \in \mathbb{K}[X]$  no nulos, existen únicos  $q$  y  $R \in \mathbb{K}[X]$  tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con  $\text{gr}(R) < \text{gr}(g)$  o  $R = 0$ .

• *Raíz de un Polinomio:*

$$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

• *Máximo común divisor:*

Polinomio,  $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$ , *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en  $\mathbb{K}[X]$  y vale el algoritmo de Euclides.

- $(f : g) \mid f$  y  $(f : g) \mid g$
- $f = (f : g) \cdot k_f$  y  $g = (f : g) \cdot k_g$  con  $k_f$  y  $k_g$  en  $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si  $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

• *Raíces múltiples:*

Sea  $f \in \mathbb{K}[x]$  no nulo, y sea  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Se dice que:

- Cuando  $f$  tiene una raíz múltiple:

$$\alpha \text{ es raíz múltiple de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q \\ f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) = 0.$$

- Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

$$\alpha \text{ es raíz simple de } f \iff (X - \alpha) \mid f \text{ y } (X - \alpha)^2 \nmid f \\ f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

Prestale atención a los **!** porque sino la vas a cagar.

- Sea  $m \in \mathbb{N}_0$ . Se dice que  $\alpha$  es raíz de multiplicidad (exactamente)  $m$  de  $f$ , y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X], \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

• **Raíces y MCD:**

Sean  $f, g \in \mathbb{K}[X]$  no ambos nulos, y  $\alpha \in \mathbb{K}$ : **Esta se usa bastante.**

$$\implies f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

•  $\alpha$  es raíz múltiple de  $f$  si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

• La multiplicidad  $m$  de una raíz, será  $m - 1$  en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

• Relación entre la multiplicidad de una raíz de  $f$  y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \quad \text{la } m\text{-ésima derivada no se anula.}$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz  $\alpha$  de  $f$

**triple** entonces la **tercera derivada NO PUEDE SER 0**,  $f'''(\alpha) \stackrel{!!}{\neq} 0$ .

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0,  $f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

• **Lema de Gauss:**

Sea  $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$  con  $a_0 \neq 0$ . Si  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$  es una raíz racional de  $f$ , con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{Z}$  coprimos, entonces  $\alpha \mid a_0$  y  $\beta \mid a_n$ .

El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles  $\frac{\alpha}{\beta}$  están **todas** las raíces racionales de  $f$ .

• Polinomios irreducibles:

Sea  $f \in K[X]$

- Se dice que  $f$  es *irreducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y los únicos divisores de  $f$  son de la forma  $g = c$  o  $g = cf$  para algún  $c \in K^\times$ . O sea  $f$  tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son  $1$  y  $\frac{f}{\text{cp}(f)}$ .
- Se dice que  $f$  es *reducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  con  $g \neq c$  y  $g \neq cf$ ,  $\forall c \in K^\times$ , es decir  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  (no nulo por definición) con  $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$ .

## Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$ :

- i)  $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$ ,  
 ii)  $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$ ,  
 iii)  $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$ ,

i) *coeficiente principal:*  $4^{77}$

*grado:*  $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:*  $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

*grado:* 28

iii) *coeficiente principal:*  $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda:  $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0$ , esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término  $X^{20}$ . Tengo entonces  $\text{gr}(f^4 + g) < 20$

Calculo el  $\text{cp}(f^4 + g)$  con  $\text{gr}(f^4 + g) = 19$ .

*Laburo a f:*

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{fórmula de } f \cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 &= \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\ & \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \xrightarrow[\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left( \sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cp } f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp } g = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp } f^4 + g = -89} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{aligned}$$


$\star^1$ : Sabemos que el  $\text{gr}(f^4) = 20 \implies \text{gr}(f^2) = 10$ . Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las  $X$  sumen 19, es decir  $X^i \cdot X^j = X^{19}$  con  $i, j \leq 10$  solo

puede ocurrir *cuando los exponentes*  $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

$\star^2$ : porque estoy multiplicando el mismo polinomio,  $a_i = b_i$ . Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^3$ : Idem  $\star^1$  para el polinomio  $f$

*grado:* 19

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

## 2. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al 🐙.

3. Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que:

i)  $f^2 = Xf + X + 1,$

iii)  $(X + 1)f^2 = X^6 + Xf,$

ii)  $f^2 - Xf = -X^2 + 1,$

iv)  $f \neq 0$  y  $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f.$

- i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de  $X$ , así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f - 1) \cdot (f + 1) = X \cdot (f + 1) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f + 1) \cdot (f - (X + 1)) = 0 \stackrel{\downarrow}{\underset{g}{}}$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es  $g = 0$ . Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de  $X$ , el miembro izquierdo también tiene que ser 0 para todo valor de  $X$ . Eso ocurre cuando:

$$f = -1 \quad \text{o} \quad f = X + 1$$

- ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener  $f$ :

$$\boxed{1)} \quad \text{¿Puede ser } \text{gr}(f) = 0?$$

$$f = k \implies k^2 - X \cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

$$\boxed{2)} \quad \text{¿Puede ser } \text{gr}(f) = 1?$$

$$f = bX + c \implies b^2X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1,$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomios iguales en ambos miembros de la ecuación.

$$\boxed{3)} \quad \text{¿Puede ser } \text{gr}(f) = 2?$$

$$f = aX^2 + bX + c \stackrel{!}{\implies} (aX^2 + bX + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con  $\text{gr}(4)$  y el izquierdo con  $\text{gr}(2)$ , así que no hay  $f$ , bla, bla, bla.

$$\boxed{4)} \quad \text{¿Puede ser } \text{gr}(f) \geq 3? \text{. Diría que no por razones muy interesantes.}$$

- iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que  $f$  sea algo que cancele el  $X^6$

$$\text{gr}((X + 1) \cdot f^2) = \text{gr}(X \cdot (X^5 + f)) \Leftrightarrow \text{gr}(X + 1) + \text{gr}(f^2) = \text{gr}(X) + \text{gr}(X^5 + f) \Leftrightarrow \underbrace{2 \cdot \text{gr}(f)}_{\text{par}} \stackrel{\star^1}{=} \text{gr}(X^5 + f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\begin{aligned} \text{si } \text{gr}(f) < 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) = 5 \quad \star^2 \\ \text{si } \text{gr}(f) = 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) \leq 5 \quad \star^3 \\ \text{si } \text{gr}(f) > 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) = \text{gr}(f) \quad \star^4 \end{aligned}$$

Entonces no tenemos un valor para el grado de  $f$  en el que haya un balance en la ecuación  $\star^1$ , porque:

$\star^2$  El miembro derecho de  $\star^1$  tendría un valor par así que descartado.

$\star^3$  El miembro derecho de  $\star^1$  tendría un grado igual a 10 así que descartado.

★<sup>4</sup> El miembro derecho de ★<sup>1</sup> tendría un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

iv) Si  $f \neq 0$ :

$$f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f \stackrel{!}{\Leftrightarrow} f \cdot (f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado  $f \neq 0$ , para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:

$$(f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \text{gr}(f^2) = \text{gr}(\text{gr}(f) \cdot X^2) = 2 \Leftrightarrow 2\text{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \text{gr}(f) = 1$$

Entonces  $\text{gr}(f) = 1 \implies f = aX$ , evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de  $a$ :

$$a^3 \cdot X^3 = 1 \cdot X^2 \cdot aX = aX^3 \Leftrightarrow a \cdot (a^2 - 1)X^3 = 0 \stackrel{\substack{\text{si } f \neq 0 \\ \implies a \neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ y \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios  $f$  que cumplen son:

$$f = -X \quad y \quad f = X$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

👤 Ramiro E. 🐼

4. Hallar el cociente y el resto de la división de  $f$  por  $g$  en los casos

- i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$  y  $g = X^2 + 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,
- ii)  $f = 4X^4 + X^3 - 4$  y  $g = 2X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ ,
- iii)  $f = X^n - 1$  y  $g = X - 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

i)

$$\begin{array}{r|l} 5X^4 + 2X^3 & -X + 4 \\ - 5X^4 & - 10X^2 \\ \hline 2X^3 - 10X^2 & -X \\ - 2X^3 & - 4X \\ \hline - 10X^2 - 5X & + 4 \\ 10X^2 & + 20 \\ \hline - 5X + 24 \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$

ii)

$$\begin{array}{r|l} 4X^4 + X^3 & -4 \\ - 4X^4 & - 2X^2 \\ \hline X^3 - 2X^2 & \\ - X^3 & - \frac{1}{2}X \\ \hline - 2X^2 - \frac{1}{2}X & - 4 \\ 2X^2 & + 1 \\ \hline - \frac{1}{2}X - 3 \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$

$$\text{En } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$



iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

*Inducción:* Quiero probar que:

$$p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

$$p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \implies p(1)$$

Entonces,  $p(1)$  es Verdadero

*Paso inductivo.*

Asumo que:

$$p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ es Verdadera.}$$

Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j$$

también lo sea. Arranco las cuentulis:

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j + (X - 1) \cdot X^k \stackrel{\text{HI}}{=} X^k - 1 + X^{k+1} - X^k = X^{k+1} - 1$$

Dado que  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que

- $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$ ,
- $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$ ,
- El resto de la división de  $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$ .

i) Haciendo la división de  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$  tiene que ocurrir que el resto sea 0.  
O sea,

$$X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Luego, el valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  es divisible por  $X^2 + aX + 1$  es  $a = 1$ .

ii) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$   $\rightarrow$  [una pull request](#) al 🐙.

iii) Haciendo la division de:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 \text{ por } X^2 + aX + 1,$$

se tiene que:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 = q \cdot (X^2 + aX + 1) + \overset{\text{resto}}{r}$$

$$\text{con } \begin{cases} q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1) \\ r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2. \end{cases}$$

Ahora viene la igualación de polinomios para encontrar ese valor de  $a$ :

$$r = -8X + 4 \iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \text{ } \star^1 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \text{ } \star^2 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

$$\star^2 \quad a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$$

Veo que  $a = -2$  es solución, por lo que divido  $a^3 - 5a - 2$  por  $a + 2$  con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1).$$

Busco las raíces de  $a^2 - 2a - 1$  con la fórmula resolvente:

$$a_{+,-} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

★<sup>1</sup>  $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$ . Me fijo que valores de  $a$  obtenidos antes verifican:

- Si  $a = -2 \implies (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si  $a = 1 + \sqrt{2} \implies (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si  $a = 1 - \sqrt{2} \implies (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que el resto de dividir a  $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$  es  $a = -2$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 Autor original 📺

👤 naD GarRaz 🧠

6. Definición: Sea  $K$  un cuerpo y sea  $h \in K[X]$  un polinomio no nulo. Dados  $f, g \in K[X]$ , se dice que  $f$  es congruente a  $g$  módulo  $h$  si  $h \mid f - g$ . En tal caso se escribe  $f \equiv g \pmod{h}$ .

- i) Probar que  $\equiv \pmod{h}$  es una relación de equivalencia en  $K[X]$ .
- ii) Probar que si  $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$  y  $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$  entonces  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$  y  $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$ .
- iii) Probar que si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $f^n \equiv g^n \pmod{h}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- iv) Probar que  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y solo si  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  o  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: ¿Es  $f$  congruente a  $f$  módulo  $h$ ?

$$f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0$$

La relación es *reflexiva*, porque todo polinomio divide al 0.

- *simétrica*: Si  $f \equiv g \pmod{h} \stackrel{?}{\iff} g \equiv f \pmod{h}$

$$f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f \pmod{h}$$

La relación es *simétrica*.

- *transitiva*: Si

$$\left\{ \begin{array}{l} f \equiv g \pmod{h} \\ g \equiv p \pmod{h} \end{array} \right. \stackrel{?}{\iff} f \equiv p \pmod{h}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{array} \right. \xrightarrow[F_2]{F_1 + F_2} \left\{ \begin{array}{l} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{array} \right. \rightarrow f \equiv p \pmod{h}$$

También resultó ser *transitiva*.

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en  $K[X]$

ii) Si

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \\ f_2 \equiv g_2 \pmod{h} \end{array} \right. \stackrel{★^1}{\implies}$$

entonces

$$f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \iff h \mid f_1 - g_1 \stackrel{!}{\implies} h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2 \pmod{h} \stackrel{★^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}.$$

Y así queda demostrado.

iii) *Inducción:* Quiero probar que:

$$p(n) : \text{Si } f \equiv g(h) \implies f^n \equiv g^n(h) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Caso base:*

$$p(1) : f^1 \equiv g^1(h) \quad \star^2$$

Por lo tanto  $p(1)$  resultó verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$ :

$$p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k(h)}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces quiero probar que para  $k+1$ :

$$p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h)$$

también lo sea.

$$f^k \equiv g^k(h) \iff h \mid f^k - g^k \implies h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k(h) \xrightarrow{\star^2} f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h)$$

De esta manera  $p(k+1)$  también es verdadera.

Finalmente  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas y por el principio de inducción  $p(n)$  es verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) Quiero probar que:

$$f = d \cdot h + r \Leftrightarrow f \equiv r(h) \wedge (r = 0 \vee \text{gr}(r) < \text{gr}(h))$$

( $\Rightarrow$ )

$$f = d \cdot h + r \xrightarrow{\text{def}} f \equiv r(h)$$

Por hipótesis  $r$  es el resto de la división, por condición de resto se va a tener que cumplir que:

$$r = 0 \quad \text{o} \quad \text{gr}(r) < \text{gr}(h)$$

( $\Leftarrow$ ) 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  [una pull request](#) al 🗨.

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🗨

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $g$  para:

- i)  $f = X^{353} - X - 1$  y  $g = X^{31} - 2$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- ii)  $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$  y  $g = X^6 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- iii)  $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$ , y  $g = X^{100} - X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- iv)  $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$ , y  $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  (Sugerencia ver 4. iii)).

$$\text{i) } g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv 2^{(g)}} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

$$\text{ii) } g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \ (g)$$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

$$\text{¿Qué onda en } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}? \rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{iii) } g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \ (g)$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$$

$$\text{iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. iii) sale que } X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \ (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g} \ (g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

8. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{K}$ .

i) Probar que  $X - a \mid X^n - a^n$  en  $K[X]$ .

ii) Probar que si  $n$  es impar entonces  $X + a \mid X^n + a^n$  en  $\mathbb{K}[X]$ .

iii) Probar que si  $n$  es par entonces  $X + a \mid X^n - a^n$  en  $\mathbb{K}[X]$ .

Calcular los cocientes en cada caso.

i) Pruebo por inducción:

$$p(n) : X - a \mid X^n - a^n \quad \text{en } \mathbb{K}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : X - a \mid X^1 - a^1$$

El caso  $p(1)$  es verdadero.

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X - a \mid X^k - a^k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero. Entonces quiero probar que

$$p(k+1) : X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$$

también lo sea.

Arranco haciendo a mano la división a mano del caso  $k+1$  en la primera iteración tengo que:

$$\begin{aligned} X^{k+1} - a^{k+1} &= X^k \cdot (X - a) + aX^k - a^{k+1} \\ &= X^k \cdot (X - a) + a \cdot (X^k - a^k) \xrightarrow[\div \text{MAM } (X-a)]{\text{HI}} \frac{X^{k+1} - a^{k+1}}{X-a} = \frac{X^k \cdot \cancel{(X-a)}}{\cancel{X-a}} + \frac{a \cdot \cancel{(X^k - a^k)}}{\cancel{X-a}} \end{aligned}$$

Ese último paso muestra que  $X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$  entonces  $p(k+1)$  también es verdadera.

Dado que  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas por criterio de inducción  $p(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

ii) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

iii) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{\LaTeX}$  → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

9. Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{Q}[X]$  y escribirlo como combinación polinomial de  $f$  y  $g$  siendo:

i)  $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii)  $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, g = X^3 + X,$

iii)  $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1,$

i) Hacemos la división hermosa de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^5 \quad \quad + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 \quad + X^3 \quad \quad - X \end{array} & \begin{array}{l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \hline X + 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 \quad \quad - 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \end{array} & \end{array}$$

Todo muy lindo. Según Euclides:

$$(f : g) = \underbrace{(X^4 - X^3 - X^2 + 1 : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)}_g$$

Escribo a  $f$  en función de  $g$ :

$$f = (X + 1) \cdot (X^4 - X^3 - X^2 + 1) + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

Otra vez:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^4 \quad - X^3 \quad - X^2 \quad \quad + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 \quad - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \end{array} & \begin{array}{l} 3X^3 - 55X^2 + X + 1 \\ \hline \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \frac{2}{3}X^3 \quad - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array} & \end{array}$$

y otra vez... ?:

$$\begin{array}{r|l}
 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\
 -3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\
 \hline
 -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
 -\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\
 \hline
 \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & 
 \end{array}$$

...da fuck is this?

$$\begin{array}{r|l}
 -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\
 -\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
 \hline
 -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
 -\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Todo lindo:

$$\begin{aligned}
 X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\
 X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\
 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\
 -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0
 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X - 1$$

ii) Este es más humano:

$$\begin{aligned}
 X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\
 X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0
 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X^2 + 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g$ :

$$X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$$

iii) Euclides nuevamente:

$$\begin{aligned}
 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\
 X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\
 X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0
 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico*:

$$(f : g) = 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g$ :

$$1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

10. Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$ .

En general  $P \in \mathbb{K}[X] \implies$  el resto de dividir a  $P$  por  $X - a$  es  $P(a)$ , es decir:

$$P = Q \cdot (X - a) + \underbrace{r}_{P(a)} \quad \text{con } Q \in \mathbb{K}[X]$$

A ver con lo que nos dieron en el enunciado:

$$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X) \quad \text{con } g(X) = \underbrace{(X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)}_{!!!} \quad \text{y } r(X) = a^2 + bX + c,$$

hay que notar que  $r(X)$  cumple condición de resto, ya que el  $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$ . Y ese  $g$  nos queda hermoso para los valores del enunciado como habrás (o no) notado.

$$\begin{cases} f(1) = q(1) \cdot \overbrace{g(1)}^0 + r(1) = -2 \\ f(2) = q(2) \cdot \overbrace{g(2)}^0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \overbrace{g(-1)}^0 + r(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Resuelvo con matriz, porque pinta, pero es innecesario:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right)$$

Por lo tanto el resto pedido es:

$$r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

11. Sea  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$  en  $\mathbb{Q}[X]$ .

Es parecido al ejercicio 10? Creo que sí:

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) \stackrel{!!!}{=} X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \implies f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \quad \text{con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \stackrel{!}{\leq} 2$$

Evalúo para armar un sistema:

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 5 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 \stackrel{!}{=} -5 \end{cases}$$

🐼 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)





Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🍷

13. Sea  $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ . Probar que  $w + w^2 + w^4$  es raíz del polinomio  $X^2 + X + 2$

Voy a usar los resultados para la familias de  $G_n$

$$w \in G_7 \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^6 w^j = 0 & (w \neq 1) \\ w^k = w^{r_7(k)} \end{cases}$$

Es cuestión de evaluar y rezar 🙏. Tengo que  $f(X) = X^2 + X + 2$  y  $w + w^2 + w^4$  es raíz de  $f$ :

$$f(w + w^2 + w^4) = (w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8 + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2}_{=w} \stackrel{!}{=} 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0$$

Listo efectivamente  $w + w^2 + w^4$  es raíz de  $f$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🍷

14.

- Probar que si  $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$ , entonces  $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$ .
- Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .

i) Voy a usar que si  $w \in G_5 \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ &= X^2 - \underbrace{(w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + (w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(\underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 = \\ &= X^2 + X - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$


ii) Calculando las raíces a mano de

$$X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

15.

- i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$ .
- ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz en común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ .

i) Hay que probar la doble implicación:

( $\Rightarrow$ )

$$\text{Si } a \text{ es raíz de } f \text{ y } g \Rightarrow \begin{cases} (X-a)|f \\ (X-a)|g \end{cases} \Rightarrow (X-a) \text{ es una raíz común} \Rightarrow (X-a) \mid (f : g)$$

( $\Leftarrow$ ) El máximo común divisor tiene los monomios de las factorizaciones comunes elevados al menor exponente. Así que por definición:

$$(f : g) = (X - a)^m$$

entonces  $X - a$  está en la factorización de  $f$  y  $g$ .

No sé siento que la demo esa es muy circular. Salió pedorra.

- ii) Usando lo que se demuestra en el ítem anterior, si dos polinomios  $f$  y  $g$  tienen raíces en común, entonces esas raíces tienen que ser raíces del  $(f : g)$ :

Si

$$f = X^4 + 3X - 2 \quad \text{y} \quad g = X^4 + 3X^3 - 3X + 1,$$

busco el  $(f : g)$ :

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \end{aligned}$$

Obtuve que:

$$(f : g) = X^2 + X - 1$$

Las raíces:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Por lo tanto esas raíces son comunes a  $f$  y a  $g$ .




Luego puedo escribir

$$X^4 + 3X - 2 = (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2)$$

Y las raíces de  $X^2 - X + 2$ :

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \alpha_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

16. Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos

i)  $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$

iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2.$

i)  $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

Todos casos de factorización:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$

La multiplicidad de  $a = 1$  como raíz es 2.

ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

Si  $a = i$  es raíz, entonces  $-i$  también lo es en un polinomio  $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 3X^4 & + 4 \\ - X^6 & - X^4 \\ \hline & - 4X^4 \\ & + 4X^4 + 4X^2 \\ \hline & 4X^2 + 4 \\ & - 4X^2 - 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

$$(X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

La multiplicidad de  $a = i$  como raíz de  $f$  es 1.

iii)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$

$$f = (X - 2)^3((X + 2) + (X + 1)) = (X - 2)^3(2X + 3)$$


La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 3.

iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2,$

$$f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^2(X - 2)(X + 2) - 4(X - 2)^3 =$$

$$(X - 2)^3(X + 2 - 4) = (X - 2)^4$$

La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 4.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:



17. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$  tiene solo raíces simples en  $\mathbb{C}$ .

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$$

$$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \xrightarrow{n \geq 0} f' = n(n+1)X^{n-1}(X - 1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \implies f'(\alpha = 1) = 0 & \text{y} & f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \implies f'(\alpha = 1) = 0 \end{cases}$$

Para que las raíces  $\alpha$ , de  $f$  no sean simples, es necesario que  $f'(\alpha) = 0$ . Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si  $f$  ha de tener raíces dobles, éstos deberían ser  $\alpha = 1$  o  $\alpha = 0$ . Entonces:

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \implies f(1) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \implies f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si  $a = 0 \wedge n \stackrel{\star^1}{=} 1 \implies f$  tiene solo una raíz simple en 0.

Si  $a \neq 1 \implies f$  tiene solo raíces simples  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a \neq 0 \wedge n > 1 \implies f$  tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

**18.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$  tiene al menos una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ .

Si  $\alpha$  es raíz múltiple de  $f$  debe ocurrir que:

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Derivo  $f$  y acomodo:

$$f' = (2n+1) \cdot (X^{2n} - 1) \xrightarrow[\alpha]{\text{evalúo}} f'(\alpha) = (2n+1) \cdot (\alpha^{2n} - 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^{2n} - 1) = 0 \quad \star^1$$

Volviendo a  $f$ , si evalúo en  $\alpha$

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^{2n+1} - (2n+1)\alpha + a = 0 &\Leftrightarrow \alpha \cdot \overbrace{(\alpha^{2n} - 1 - 2n)}^{\stackrel{\star^1}{=} 0} + a = 0 \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} a = 2n \cdot \alpha \end{aligned}$$


Por lo tanto  $\alpha \in \mathbb{R} \quad \star^2$ .

Volviendo a  $\star^1$  y con el resultado de que las raíces  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$(\alpha^{2n} - 1) = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (\alpha^n - 1)(\alpha^n + 1) = 0 \stackrel{\star^2}{\Leftrightarrow} \alpha = \pm 1$$

Por lo tanto los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para que el polinomio tenga por lo menos una raíz múltiple:

$$a = \pm 2n$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

**19.** Sea  $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$ . Determinar todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  admite una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene  $f$  y la multiplicidad de cada una de ellas.

Ataco como en el ejercicio anterior. La idea no es calcular todas las raíces.

Si  $f$  tiene raíces múltiples  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0,$$

por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de  $f'$  para sacarme ese  $a$  de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4)$$

Evalando en  $\alpha_k$ :

$$f'(\alpha_k) = 20(\alpha_k)^9 \cdot ((\alpha_k)^{10} + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_k &= 0 \\ (\alpha_k)^{10} &= -4 \quad \star^1 \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de  $f'$ . Me interesa saber si son raíces de  $f$ ,

Cuando  $\alpha_k = 0$ :

$$f(0) = 2a \implies f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Acomodo  $f$  y después reemplazo por los otros valores que anulan  $f'$ :

$$f = X^{20} + 8X^{10} + 2a = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a$$

Cuando  $(\alpha_k)^{10} \stackrel{\star^1}{=} -4$ :

$$\begin{aligned} f(\alpha_k) = 0 &\Leftrightarrow ((\alpha_k)^{10})^2 + 8(\alpha_k)^{10} + 2a = 0 \\ &\stackrel{\star^1}{\Leftrightarrow} (-4)^2 + 8(-4) + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow -16 + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{a = 8} \end{aligned}$$

Ahora tengo que ver cuántas raíces y sus multiplicidades para  $a = 0$  y  $a = 8$ .

Si  $a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$

$$f(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_k)^{10}((\alpha_k)^{10} + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} X &= 0 \\ &\text{o} \\ X^{10} &= -8, \end{cases}$$

donde se ve que con  $a = 0$  hay 11 raíces distintas en total, las multiplicidades:

$$\boxed{\text{mult}(0; f) = 10} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{mult}(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

No había necesidad de calcular las raíces, pero dado que la solución, es casi lo mismo que  $G_{10}$  ya fue. Pero alcanzaría con decir que es un polinomio complejo de grado 10, entonces hay 10 soluciones y las multiplicidades se ven en los exponentes de los polinomios irreducibles en la factorización.

Si  $a = 8 \Rightarrow f = (X^{20} + 8X^{10} + 16) \stackrel{!!}{=} (X^{10} + 4)^2$

$$f(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow ((\alpha_k)^{10} + 4)^2 \Leftrightarrow X^{10} = -4,$$

donde se ve que con  $a = 8$  hay un total de 10 raíces distintas, las multiplicidades:

$$\boxed{\text{mult}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

20. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  una pull request al .

21.

i) Probar que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , el polinomio  $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X-1)^2$ .

ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  es divisible por  $(X-1)^3$ .

i)  $(X-1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1 \text{ es por lo menos raíz doble de } f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0.$

$$\begin{aligned} f &= X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 && \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' &= 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 && \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Calculando  $f(1)$  y  $f'(1)$  se comprueba lo pedido.

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

ii)

$$(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$$


Parecido a antes vuelvo a derivar y evalúo:

$$f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 4 + 2a \implies f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Por lo tanto:

$$(X-1)^3 \mid f \iff a = -2$$

Observar que si  $a \neq -2$ , 1 es una raíz *doble* de  $f$  de otra forma es una raíz *por lo menos triple*.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Olivia Portero 

**22.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 1 sea raíz *doble*  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$ .

Si uno es raíz *doble* de  $f = X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$  tiene que ocurrir que:

$$f(1) = f'(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'' \neq 0$$

Planteamos eso:

$$f(1) = 1^4 - a1^3 - 31^2 + (2+3a)1 - 2a = 0 \Leftrightarrow 1 - a - 3 + (2+3a) - 2a = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Oka, no nos dio mucha info. Ahora con  $f'$ :

$$f'(1) = 41^3 - 3a1^2 - 61 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a - 6 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$


Bueh, el ejercicio apunta que no nos olvidemos la última condición con la  $f''$ :

$$f''(1) = 121^2 - 6a1 - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 12 - 6a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto si:

$$a \neq 1$$

1 será una raíz *doble* del polinomio  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$ . De otra forma sería *por lo menos una raíz triple*

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

**23.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{4!}X^4 + \dots + \frac{1}{n!}X^n$$

Su derivada primera:

$$P' = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1}$$

Noto que:

$$P' = P - \frac{1}{n!}X^n$$

Entonces si  $\alpha$  es una raíz de  $P$ :

$$P(\alpha) = 0 \implies P'(\alpha) = \underbrace{P(\alpha)}_0 - \frac{1}{n!} \alpha^n = -\frac{1}{n!} \alpha^n \neq 0$$

Así queda probado que las raíces van a ser *simples*.

Atención que,  $\alpha = 0$  no me importa porque  $P(0) \neq 0$ , boludeces no.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:



 naD  GarRaz 

**24.** Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{C}[X]$  definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $i$  es raíz *doble* de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

 ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución  $\rightarrow$  [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} \rightarrow$  [una pull request](#) al .

**25.** Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$  definida por

$$f_1 = X^3 + 2X \quad \text{y} \quad f_{n+1} = X f_n^2 + X^2 f'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que:

- i)  $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ .
- ii) 0 es raíz de multiplicidad  $n$  de  $f_n$ .

i) Inducción:

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : \text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

$$p(1) : \text{gr}(f_1) = 2^{1+1} - 1 = 3 = \text{gr}(X^3 + 2X)$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo para un  $k \in \mathbb{N}$  que:

$$p(k) : \underbrace{\text{gr}(f_k) = 2^{k+1} - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : \text{gr}(f_{k+1}) = 2^{k+1+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

también lo sea.

$$f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} X f_k^2 + X^2 f'_k$$

¿Qué grado tiene esa cosa?

$$\text{gr}(X f_k^2 + X^2 \cdot f'_k) \stackrel{!}{=} 1 + \text{gr}\left(\underbrace{f_k^2}_{2 \text{ gr}(f_k)} + \underbrace{X \cdot f'_k}_{\text{gr}(f_k)}\right) = 1 + 2 \cdot \text{gr}(f_k) \stackrel{\text{HI}}{=} 1 + 2 \cdot (2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 1$$



Si no viste el **!**, saqué factor común  $X$ , así es que aparece el 1 que se suma al grado. También tuve en cuenta que  $\text{gr}(f') = \text{gr}(f) - 1 \quad \forall f \in f[X]$

Por lo tanto  $p(k+1)$  resultó verdadera.

Como  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron todas verdaderas por principio de inducción en también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

ii) Lindo ejercicio, [intentá hacerlo antes de mirar la resolución](#).

Sale también por inducción.

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : 0 \text{ es raíz de multiplicidad } n \text{ de } f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O de forma equivalente:

$$p(n) : X^n \mid f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

$$p(1) : X^1 \mid f_1$$

Se cumple enseguida que:

$$X \mid X^3 + 2X \Leftrightarrow X \mid X \cdot (X^2 + 2)$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

*Paso inductivo:*

Asumo para un  $k \in \mathbb{N}$  que:

$$p(k) : \underbrace{X^k \mid f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} \mid f_{k+1}$$

también lo sea.

$$X^{k+1} \mid f_{k+1} \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X f_k^2 + X^2 f_k'$$


Exploto la **hipótesis inductiva** para construir el paso  $k+1$ :

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{HI}}{\Rightarrow} X^k \mid f_k &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^k \mid f_k \cdot f_k \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X \cdot X^k \mid X \cdot f_k^2 \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \quad \star^1 \\ &\text{y parecido con la derivada} \\ \stackrel{!!}{\Rightarrow} X^{k-1} \mid f_k' &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 \cdot X^{k-1} \mid X^2 \cdot f_k' \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X^2 \cdot f_k' \quad \star^2 \end{aligned}$$

Donde en **!!** usé la **hipótesis inductiva**, si  $f_k$  tiene como raíz al 0 con multiplicidad  $k$  entonces la derivada tiene que tener multiplicidad  $k-1$  en 0. Con esos hermosos, tiernos y sabrosos resultados de  $\star^1$  y  $\star^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \\ X^{k+1} \mid X^2 \cdot f_k' \end{array} \right\} \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 + X^2 \cdot f_k'$$

Como  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron todas verdaderas por principio de inducción en también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

26. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

27.

i) Hallar todas la raíces racionales de

(a)  $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$ ,

(b)  $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{3}X - 3$ ,

ii) Probar que  $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$  no tiene raíces racionales.

i) (a) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

(b) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

ii) 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

28. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

29. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

30. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

31. 🐞... hay que hacerlo! 🐞

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗉, o mejor aún si querés subirlo en  $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$  → [una pull request](#) al 🐙.

32. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.

Sale por inducción:

$$p(n) : \sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X] \text{ tiene todas sus raíces complejas simples } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : \sum_{k=0}^1 X^k = 1 + X^1 \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

En este caso  $f(X) = 1 + X$ :

$$f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 1 \neq 0$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

Paso inductivo: Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$  la proposición:

$$p(h) : \underbrace{\sum_{k=0}^h X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^h}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$



## 🔥 Ejercicios de parciales:

### 🔥 1.

- a) Hallar todos los posibles  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} > 0$  tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento  $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de  $\mathbf{c}$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ , sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

- a) Si la raíz  $\alpha = r \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) = -ir \implies f(-ir) = 0$

Voy a usar que:

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{lcl} (-i)^2 & = & -1 \\ (-i)^3 & = & i \\ (-i)^4 & = & 1 \\ (-i)^5 & = & -i \\ (-i)^6 & = & -1 \end{array} \right.$$

Evalúo  $f(-ir)$ :

$$\begin{aligned} f(-ir) &= (-ir)^6 - 4(-ir)^5 - (-ir)^4 + 4r^3i + 4(-ir)^2 + 48(-ir) + \mathbf{c} \\ &\stackrel{\star^1}{=} -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} = 0 \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser 0 cuando su parte imaginaria y su parte real sean ambas 0:

$$\begin{aligned} f(-ir) &= -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} \\ &= (-r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c}) + i(4r^5 + 4r^3 - 48r) = 0 \end{aligned}$$

En el siguiente paso no busco exhaustivamente todas las raíces, porque es al pedo. Solo busco lo que me interesa según las condiciones del ejercicio:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{Im}(f(-ir)) = 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0 & \xleftrightarrow[r > 0]{r \in \mathbb{R}} & r \stackrel{!}{=} \sqrt{3}\star^2 \\ \text{Re}(f(-ir)) = -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 & \xleftrightarrow[\mathbf{c} \in \mathbb{R}]{r \stackrel{\star^2}{=} \sqrt{3}} & \boxed{\mathbf{c} = 48} \end{array} \right.$$

Por lo tanto con ese  $\mathbf{c} = 48$ :

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48$$

y las raíces que tiene este polinomio son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{3}i \\ \alpha_2 &= \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Apareció el conjugado de la raíz dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que  $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r}
 X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \mid X^2 + 3 \\
 - X^6 \phantom{- 4X^5} - 3X^4 \phantom{+ 4X^3} \phantom{+ 4X^2} \phantom{+ 48X} \phantom{+ 48} \\
 \hline
 - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \phantom{+ 4X^2} \phantom{+ 48X} \phantom{+ 48} \\
 \phantom{- 4X^5} 4X^5 \phantom{- 4X^4} + 12X^3 \phantom{+ 4X^2} \phantom{+ 48X} \phantom{+ 48} \\
 \hline
 - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \phantom{+ 48X} \phantom{+ 48} \\
 \phantom{- 4X^4} 4X^4 \phantom{+ 16X^3} + 12X^2 \phantom{+ 48X} \phantom{+ 48} \\
 \hline
 16X^3 + 16X^2 + 48X \phantom{+ 48} \\
 - 16X^3 \phantom{+ 16X^2} - 48X \phantom{+ 48} \\
 \hline
 16X^2 \phantom{+ 16X^2} + 48 \phantom{+ 48} \\
 - 16X^2 \phantom{+ 16X^2} - 48 \phantom{+ 48} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Hasta el momento  $f$  queda:

$$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_g$$

como  $f$  tiene al menos una raíz doble la busco en las raíces de la derivada de  $g$ :

$$\begin{aligned}
 g' &= (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' \\
 &= 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0
 \end{aligned}$$

Con el lema de Gauss sé que las posibles raíces de  $g'$  están en:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Probando encuentro que  $g'(1) = 0$ , pero  $g(1) \neq 0 \implies f(1) \neq 0$ . Si  $X = 1$  no es raíz de  $g$ , continúo bajándole el grado a  $g'$  para buscar otras raíces:

$$\begin{array}{r}
 X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \mid X - 1 \\
 - X^3 + X^2 \phantom{- 2X} \phantom{+ 4} \\
 \hline
 - 2X^2 - 2X \phantom{+ 4} \\
 \phantom{- 2X^2} 2X^2 - 2X \phantom{+ 4} \\
 \hline
 - 4X + 4 \\
 \phantom{- 4X} 4X - 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Con este resultado se puede escribir a  $g'$  como:

$$g' = 4(X - 1)(X^2 - 2X - 4)$$

De la parte cuadrática salen 2 raíces de  $g'$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \\
 X^2 - 2X - 4 &= (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))
 \end{aligned}$$

(para mostrar que son raíces dobles y no triples, por ejemplo, debería comprobar que  $\alpha_{1,2}$  no son raíces de  $g'' = 4(3X^2 - 6X - 2)$ , pero no tengo ganas, **elijo creer que no lo son**).

Compruebo que sean también raíces de  $g$ :

$$\begin{array}{r}
 X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \mid X^2 - 2X - 4 \\
 - X^4 + 2X^3 + 4X^2 \phantom{+ 16X} \phantom{+ 16} \\
 \hline
 - 2X^3 \phantom{+ 4X^2} + 16X \phantom{+ 16} \\
 \phantom{- 2X^3} 2X^3 - 4X^2 - 8X \phantom{+ 16} \\
 \hline
 - 4X^2 + 8X + 16 \\
 \phantom{- 4X^2} 4X^2 - 8X - 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Dado que el resto dio 0  $\alpha_{1,2}$  son raíces de  $g$  y como son raíces de  $g'$  entonces son raíces dobles de  $g$ , y de  $f$ .  
 Notar que viendo el cociente de esa última división quizás podría haber visto el caso de factorización a ojo, pero bueh, no pasó.

*Factorizaciones:*

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[X] &\rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{R}[X] &\rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2 \\ \mathbb{C}[X] &\rightarrow f = (X - \sqrt{3}i) \cdot (X + \sqrt{3}i) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2\end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

🔥2. Factorizar el polinomio  $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$  como producto de irreducibles en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{7}$  es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional  $\alpha = \sqrt{7}$ , tendrá también al *conjugado irracional* <sup>1</sup>,  
 $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que  $\sqrt{7}$  es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 & X^4 - 14X^2 + 49 \\ -X^6 & +14X^4 & -49X^2 & \\ \hline & -X^5 & +X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X & \\ & X^5 & -14X^3 & +49X & \\ \hline & & X^4 & -14X^2 & +49 \\ & & -X^4 & +14X^2 & -49 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Todo hermoso. Nos queda un polinomio de grado 2 para laburar en la factorización:

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1),$$

se fusila con la resolvente:

$$\xrightarrow[\text{no ofender a nadie}]{\text{se escribe así para}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{array} \right. \rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

Finalmente las factorizaciones en sus 3 deliciosos sabores:

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] &\rightarrow f = (X^2 + 7)^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] &\rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] &\rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐼

<sup>1</sup>Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

**3.** Hallar **todos** los polinomios **mónicos**  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- i)  $1 - \sqrt{2}$  es raíz de  $f$ ;
- ii)  $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$ ;
- iii)  $(f : X^3 - 1) \neq 1$ ;
- iv)  $f(-1) = 27$ ;

- i) Como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si  $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$  es raíz entonces  $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$  para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto:

$$X^2 - 2X - 1$$

será un factor de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

- ii) Para el requerimiento  $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$ :

$$X(X - 2)^2 \mid (f : f') \stackrel{\text{def}}{\iff} (f : f') = X(X - 2)^2 \cdot q,$$

de donde se deduce que por lo menos (dado que no conoce  $q$  y tampoco importa ahora):

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ es por lo menos raíz simple de } f' \implies \text{es por lo menos raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ es por lo menos raíz doble de } f' \implies \text{es por lo menos raíz triple de } f \end{cases}$$

Por lo tanto como en los ejercicios estos piden *menor grado*:

$$X^2(X - 2)^3$$

también serán factores de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

- iii) Si  $(f : X^3 - 1) \neq 1$  quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:

$$X^3 - 1 \stackrel{!}{=} (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

tiene que aparecer en la factorización de  $f$ .

Parecido al ítem i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo de la raíz, para que no me queden coeficientes de  $f$  con componente imaginaria:

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1),$$

a priori me quedaría con el *factor de menor grado* siempre que eso no *rompa* otras condiciones, pero todavía no tomo la decisión 😊.

Por lo tanto:

$$(X - 1) \quad \text{o} \quad (X^2 + X + 1)$$

ya veremos cual, aparecerá en la factorización de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

iv)  $f(-1) = 27$ . Hasta el momento juntando los resultados tengo 2 candidatos  $f_1$  y  $f_2$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108, \end{aligned}$$

ninguno es el 27 que quiero, así que hay que hacer algo más.

Para encontrar *un* polinomio **mónico** que cumpla lo pedido tomaría el  $f_2$  que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por:


$$f = f_2 \cdot (X - a) \quad \text{con } a \in \mathbb{Q}$$

de manera que pueda elegir el  $a$  para cumplir lo que quiero:

$$f(-1) = f_2(-1) \cdot (X - a) = 108 \cdot (-1 - a) = 27 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$


$$f = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \cdot (X + \frac{5}{4})$$

así cumpliendo todas las condiciones.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Ale Teran 

 4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$ , esto nos da información sobre *raíces comunes* entre  $f$  y  $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$ . Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho **mónico** será el MCD.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1.$$

Las raíces del MCD son  $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 3i$ .

$$X^2 - X + 1 = \left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que  $X^2 - X + 1 \mid f$ , haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 & X^2 - X + 1 \\ -X^5 + X^4 - X^3 & \hline 3X^4 - 8X^3 - 7X^2 & \\ -3X^4 + 3X^3 - 3X^2 & \hline -5X^3 - 10X^2 + 10X & \\ 5X^3 - 5X^2 + 5X & \hline -15X^2 + 15X - 15 & \\ 15X^2 - 15X + 15 & \hline 0 & \end{array}$$



Obtuvimos que:

$$f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0.$$

Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Gauss ni ninguna cosa extraña podemos expresar a  $f$  como:


$$f \stackrel{!!!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en **!** te recomiendo que sigas mirando sin *spoiler de calculadora o del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Son puros casos de factorización que deberían verse a ojo.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1, los primos en el mundo de polinomios. Para tener una mejor explicación [clickeá acá!](#) Y vas a la teoría del apunte.

Factorizaciones:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[X] &\rightarrow f = (X^2 - 5) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3) \\ \mathbb{R}[X] &\rightarrow f = (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3) \\ \mathbb{C}[X] &\rightarrow f = (X + 3) \cdot (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:



 naD GarRaz 

 Ale Teran 

 5. Sea  $(f_n)_{(n \geq 1)}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{R}[X]$  definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X + 2)^2 f'_n + 3f_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $-2$  es raíz doble de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

No caer en la **trampilla**  de olvidar que para que una raíz de  $f$  sea doble, i.e.  $\text{mult}(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$  debe ocurrir lo "obvio",  $f(-2) = f'(-2) = 0$  y también que  $f''(-2) \neq 0$ . Si olvidamos esto último solo probaríamos que la  $\text{mult}(-1; f) \geq 2$  y tendríamos el ejercicio mal .

Por inducción en  $n$ :

$$p(n) : -2 \text{ es raíz doble de } f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_1$$

Derivar y evaluar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f_1(-2) = 0 \\ f'_1 = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f'_1(-2) = 0 \\ f''_1 = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f''_1(-2) = -54 \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto  $\text{mult}(-2; f_1) = 2 \implies -2$  es raíz doble de  $f_1 \implies p(1)$  resultó ser verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$

$$p(k) : \underbrace{-2 \text{ es raíz doble de } f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_{k+1}$$

también lo sea.

Sé que:

$$f_k \begin{matrix} \xleftarrow{\text{cumple}} \\ \xrightarrow{\text{que}} \end{matrix} \begin{cases} f_k(-2) = 0 \star^1 \\ f'_k(-2) = 0 \star^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \star^3 \end{cases}$$

Laburo con  $f_{k+1}$ :

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3 \cdot f_k \\ f'_{k+1} = 2(X+2)f'_k + (X+2)^2 f''_k + 3 \cdot f'_k \\ f''_{k+1} = 2f'_k + (2X+4)f''_k + 2(X+2)f'''_k + (X+2)^2 f''''_k + 3 \cdot f''_k \end{cases}$$

Evaluar en  $-2$ :


$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)^2} f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\star^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f'_{k+1}(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f'_k(-2) + \cancel{(-2+2)^2} f''_k + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\star^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f''_{k+1}(-2) \stackrel{?}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''_{k+1}(-2) = 2f'_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)^2} f'''_k(-2) + f''_k(-2) = 2 \underbrace{f'_k(-2)}_{=0 \star^2} + \underbrace{f''_k(-2)}_{\neq 0 \star^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

Por lo tanto  $\text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \implies -2$  es raíz doble de  $f_{k+1} \implies p(k+1)$  es verdadera también.

Como  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $q(k+1)$  resultaron verdaderas, por principio de inducción  $p(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Dani Tadd 

 autor original anónimo 

## 6.

- a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

- a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

### Solución:

Limpiando los denominadores de  $f$  se obtiene el polinomio  $g$  con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X \underbrace{(3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3)}_h$$

Por enunciado ignoramos la raíz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí,  $a_0 = -3$  y  $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Rta:**  $n = 5$  es el único valor de  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales el polinomio  $f$  tiene una raíz entera no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

**Solución:**

Primero factorizo la raíz nula de  $f$

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el ítem (a), que  $-3$  es una de las raíces racionales de  $f$ . Busco otras posibles raíces racionales en el polinomio  $h$  (con  $n = 5$ ) obtenido en el ítem (a) en el conjunto  $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

$$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3} \text{ es una raíz racional de } f.$$

Factorizo el polinomio  $f$  diviéndolo por el producto de las dos raíces encontradas  $(X+3) \cdot (X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X & \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático  $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

**Rta:**

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$  con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto **irreducibles**.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{R}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{R}$ .

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{Q}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{Q}$ .

7. Determinar un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- $f$  es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble,
- $f(0) = 33$ ;

El dato de  $\text{gr}(\overbrace{f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}^d_g) = 2$  indica que hay un polinomio,  $d$ , con  $\text{gr}(d) = 2$  que cumple que

$\begin{cases} d \mid f \\ d \mid 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \end{cases}$  entonces,  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g$ . Estas raíces pueden ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de  $g$  usando *lema de gauss*:

Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.

$$\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} :$$

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2} \right\}.$$

Probando esos valores encuentro que  $g(\frac{1}{2}) = 0$  y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a  $g$ .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\ - 2X^3 + X^2 & \hline - 4X^2 - 20X & \\ 4X^2 - 2X & \hline - 22X + 11 & \\ 22X - 11 & \hline 0 & \end{array}$$

Hasta el momento:

$$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (2X^2 - 4X - 22) + 0,$$

buscamos raíces de  $2X^2 - 4X - 22$ :

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces:  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$ . Dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  voy a seleccionar las raíces que tienen número irracionales por la condición de grado mínimo. Recordar que si  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tiene una raíz con números irracionales, también debe estar su conjugado irracional.

Con la condición que dice que  $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble, no nos dejan muchas opciones.  $G_3$  tiene tres raíces, solución de  $w^3 = 1$ , dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(Si no te acordás como encontrar raíces de la familia  $G_n$  te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas.

Ok, tengo esas dos raíces:  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ¿Cuál elijo? ¡Cualquiera sirve! Porque, *nuevamente* ☹, como *fen*  $\mathbb{Q}[X]$  si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes.

Hasta el momento tenemos:

$$f = \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1} (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1}}_{(X^2 + X + 1)^2} = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

$\star^1$  Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Nos queda cumplir que  $f(0) = 33$ , si bien ahora  $f(0) = -11$ . Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición.  $f$  es *mónico*, así que no podemos corregir el valor poniendo un coeficiente principal.

Hay que proponer otro factor en  $\mathbb{Q}[X]$ , que al evaluar de el número que al multiplicarse con  $-11$  nos dé 33. El candidato es  $(X - 3)$ , dado que en 0 vale  $-3$  y así  $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$  como queremos.

El  $f \in \mathbb{Q}[X]$  que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🐼

## 8.

a) Determinar todos los  $f \in \mathbb{R}[X]$  mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- $f$  contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \mid (f : f')$ ,
- $f$  tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$ ,

b) Con el polinomio  $f$  hallado expresar factorización en irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las  $w$  tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1\star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en  $\mathbb{R}$  hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f \\ y \\ (X + i) \mid f \end{cases} \\ X^2 + 1 \mid f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f' \\ y \\ (X + i) \mid f' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^2 \mid f \\ y \\ (X + i)^2 \mid f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate [esto de las notas teóricas](#), para tener contexto. Básicamente si  $\alpha$  es una raíz de  $f$  y también de  $f'$ , entonces es una raíz *por lo menos* doble de  $f$ .

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en  $\mathbb{Z}$ . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de  $G_3$ ? Dejáme que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio  $f$  en 1, eso nos dé  $-12$ . Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a  $1 \star^1$  para que sea raíz de  $f$ !! Y dado que  $f \in \mathbb{R}[X]$

tenemos que elegir entonces ambas  $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ . Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - a)(X - b) \\ &\stackrel{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - a)(X - b), \end{aligned}$$

con  $a$  y  $b$  a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y  $f(1) = -12$ .

$$f(1) = -12 \stackrel{\star^2}{\iff} 12 \cdot (1 - a)(1 - b) = -12 \iff (1 - a)(1 - b) = -1 \stackrel{\substack{a \text{ y } b \\ \in \mathbb{Z}}}{\iff} a = 2 \text{ y } b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio


$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible [está acá](#).


$\mathbb{Q}[X]$	$\rightarrow$	$f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{R}[X]$	$\rightarrow$	$f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{C}[X]$	$\rightarrow$	$f = X(X - 2)(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2$

Notar que en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 [naD](#)  [GarRaz](#)

 [Dani Tadd](#) 

 **9.** Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- $f$  comparte una raíz con  $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$ ,
- $1 - 2i$  es raíz de  $f$  y  $f'(1 - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios,  $f$  y  $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$ , comparten raíz buscamos raíces de  $g$  con el [lema de Gauss](#) de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro  $f$  *mónico y de grado mínimo*:  $A = \{\pm 1, \pm 5\}$ , con  $\alpha = 1 \implies g(1) = 0 \checkmark$ .

Como  $\alpha = 1$  es raíz, entonces  $X - 1 \mid g$ :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & X - 1 \\ -X^3 + X^2 & \\ \hline -2X^2 + 7X & \\ 2X^2 - 2X & \\ \hline 5X - 5 & \\ -5X + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$ , busco raíces del cociente  $X^2 - 2X + 5$ , usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \stackrel{\star^1}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a  $f$   
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$ , por lo que  $(-3 + \sqrt{2})$  es una raíz de  $f$  y dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  también **debe estar** el conjugado irracional  $-3 - \sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de  $f$ , por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Esa raíz es una de las que está en  $g^{\star^1}$ .

El dato de  $f'$ , también nos indica que la multiplicidad de  $1 - 2i$  como raíz es por lo menos 2, ya que  $f'(1 - 2i) = 0$ , y por lo tanto  $\text{mult}(1 + 2i; f)$  también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a  $f$ :

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$

 **10.** Determinar todos los primos  $p$  positivos tales que el polinomio

$$f = pX^3 - X^2 + 13X - 1$$

tenga al menos una raíz racional positiva. Para cada valor de  $p$  hallado, factorizar  $f$  como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

El **lema de Gauss** dice que las raíces racionales que el polinomio puede tener, tienen que estar en el conjunto de los divisores del *coeficiente principal*  $p$  y el *termino independiente*  $-1$ :

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{7}, \dots, \pm \frac{1}{p} \right\}$$

Ahora hay que hacer cuentas para todos los primos y ver cuál funciona, *nah, mentira*. Si  $\frac{1}{p}$  es raíz entonces hay que dividir ( $p^{-1} = \frac{1}{p}$ , boludeces, no!):

$$\begin{array}{r|l} pX^3 - X^2 + 13X & -1 \mid X - p^{-1} \\ -pX^3 + X^2 & \hline 13X & -1 \\ -13X & +13p^{-1} \\ \hline & (-1 + 13p^{-1}) \end{array}$$

Y a esto hay que pedirle que el **resto sea 0**, porque  $\frac{1}{p}$  es raíz racional:

$$-1 + \frac{13}{p} = 0 \Leftrightarrow p = 13$$

Si  $p$  tiene que ser primo y positivo entonces  $p = 13$ , usando el resultado de la división:


$$\begin{aligned} f = 13X^3 - X^2 + 13X - 1 &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{aligned}$$

Todo lindo las raíces:

$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1}{13} \\ X_2 &= i \\ X_3 &= -i \end{cases}$$

Y factorizado en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  queda.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Q}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{R}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{C}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **11.** Hallar todos los  $k \in \mathbb{Q}$  para los cuales el polinomio  $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$  tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de  $k$  hallados, factorizar  $f$  en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$ .

Antes de empezar este ejercicio, estaría bueno que hagas un minuto de silencio por los que rindieron este examen...

*1 minuto después*

Si  $f$  tiene raíces múltiples, busco raíces en su derivada,  $f'$ :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow f' = 6r^5 + 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 \cdot (2r^3 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -2r^3$$

Entonces para el valor de una raíz  $r$ , tengo lo que tiene que valer  $k$ . Como tengo raíces múltiples, meto a  $r$  y el valor de  $k$  encontrado en  $f$ :

$$f(r) = 0 \xLeftrightarrow{k = -2r^3} r^6 - 2r^6 + 25 = 0 \Leftrightarrow \boxed{r^6 = 25}$$

Ese último resultado es  $G_6$  con módulo  $\sqrt[3]{5}$ :

$$r_q = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi} \quad \text{con } q \in [0, 5]$$

Estos valores son las raíces de  $f$ , pero hay que ver para cuál valor de  $k$ :

$$k = -2(r_q)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } q \text{ es par} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{\text{par}}\pi})^3 = -10 \\ \text{si } q \text{ es impar} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{\text{impar}}\pi})^3 = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles para  $k$ :

$$k \in \{-10, 10\}$$

Hay 2 valores de  $k$  que formarán 2 polinomios distintos. Cada uno de esos polinomios tiene 3 raíces tanto de  $f$  como de  $f'$  por lo tanto las mencionadas raíces son raíces dobles de  $f$ .

Notar en el resultado de la derivada metiendo los valores de  $k$ :

$$f'_{-10}(r_{q_{\text{par}}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = 5 \quad \text{y} \quad f'_{10}(r_{q_{\text{impar}}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = -5.$$

A esta altura esas ecuaciones se resuelven solas y todas esas soluciones son la  $r_q$  de antes, *miti y miti*.

Tengo entonces que factorizar 2 polinomios  $f$ :

$$\boxed{f_{-10} = X^6 - 10X^3 + 25 \quad \text{y} \quad f_{10} = X^6 + 10X^3 + 25}$$



Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

Factorizo  $f_{-10}$ :

El valor  $k = -10$  tiene asociadas las raíces con  $q$  par:

$$\left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Que cosa horrible esto:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{-10} &= X^6 - 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 - 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left((X - \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)\right)^2 = (X - \sqrt[3]{5})^2 \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} (X - \sqrt[3]{5})^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Factorizo  $f_{10}$ :


El valor  $k = 10$  tiene asociadas las raíces con  $q$  impar:

$$\left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} = \left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$


Esto es igual de horrible, pero solo hay que cambiar un par de signos a lo de antes:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{10} &= X^6 + 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 + 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left((X + \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)\right)^2 = (X + \sqrt[3]{5})^2 \cdot (X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} (X + \sqrt[3]{5})^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **12.** Factorizar como producto de polinomios mónicos irreducibles en  $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X]$  el polinomio


$$f(X) = X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X].$$

Busco una raíz:

$$f(i) = i^4 + i^3 + i + 2 = 1 - i + i + 2 = 3 \stackrel{(3)}{=} 0$$

El conjugado de  $i$  también, es raíz, por lo tanto bajo el grado del polinomio dividiendo por

$$(X - i) \cdot (X + i) = X^2 + 1$$

 Errores? **Avisá acá** así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 19/06/25 @ 01:28 . Chequeá si hay una **versión nueva**  $\rightarrow$  **acá**.

[Ir a índice !\[\]\(241407ae374027aec4b030ca93d07b05\_img.jpg\)](#)



Factorización en  $\mathbb{C}[X]$ :

$$f = (X - (-1 + 4i))^2 \cdot (X - (-1 - 4i))^2 \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))^3 \cdot (X - (2 + \sqrt{3}))^3$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

🔥14. Sea  $f = X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ .

- Probar que  $f \mid X^{30} - 1$
- Hallar el polinomio  $g \in \mathbb{R}[X]$  mónico de grado mínimo tal que  $f \mid g$ .

Antes de empezar:

Recordad que los elementos de  $G_n$  son de la forma  $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$  con  $k \in \mathbb{Z}$

Ahora sí:

- Las raíces de  $f$ :

$$X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0 \Leftrightarrow X^5 = e^{i\frac{\pi}{3}} \stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X \in \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\}$$

Si  $X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \mid X^{30} - 1$ , entonces las raíces de  $f$  también deben ser raíces de  $X^{30} - 1$ .

Observad que esas raíces son elementos de  $G_{30}$  si acomodo esas raíces:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{esos argumentos}]{\times, \div 2} \left\{ e^{i\frac{2}{30}\pi}, e^{i\frac{14}{30}\pi}, e^{i\frac{26}{30}\pi}, e^{i\frac{38}{30}\pi}, e^{i\frac{50}{30}\pi} \right\}$$

Las raíces de :

$$X^{30} - 1 = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X \in G_{30}$$

Todas la raíces de  $f$  están en  $G_{30}$ , así que  $f \mid X^{30} - 1$

Otra forma de mostrarlo:

Versión de galera y bastón:

La versión más elegante, pero que no se me ocurre primero ni a palos (mirá el ejercicio 8 ← click): Sabemos que:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid x^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 \xrightarrow{x \rightarrow X^5} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid (X^5)^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$$

$$\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid X^{30} - 1$$

Por ende el polinomio  $f$  divide a  $X^{30} - 1$ .

- $f \mid g$  Las raíces de  $f$  son todas complejas, así que voy a necesitar los conjugados para tener un  $g \in \mathbb{R}[X]$ . Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2 \quad \star^1$$

Las raíces son:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{25}{15}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{conjugados}]{\text{agrego los}} \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{1}{3}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{11}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{17}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{23}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi}, e^{i\frac{29}{15}\pi} \right\}$$

Armo el polinomio con esta bosta usando la expresión en  $\star^1$ :

$$g = (X^2 - 2\cos(\frac{1}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{1}{3}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{7}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{11}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{13}{15}\pi) + 1)$$

Listo? Esto es la respuesta? *Tengo miedo, estoy cansado, jefe.*

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🐙

🔥15. Factorice en irreducibles de  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ , y  $\mathbb{C}[X]$  el polinomio

$$f = x^5 - x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32,$$

sabiendo que tiene alguna raíz en común con  $g = x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10$ .

Como los polinomios comparten una raíz, sé que  $(f : g) \neq 1$ . Usando al crack, titán de Euclides busco:

$$(f : g) \text{ dado que } (f : g) \mid f \text{ y } (f : g) \mid g$$

y de ahí voy a sacar las raíces hermosas esas que tanto necesito.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 & x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 \\ -x^5 + x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 10x & \hline -3x^4 + 3x^3 + 28x^2 + 50x + 32 & \\ 3x^4 - 3x^3 - 27x^2 - 48x - 30 & \hline x^2 + 2x + 2 & \end{array}$$

$(f : g) = (x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 : x^2 + 2x + 2)$ , sigo con Euclides:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 & x^2 + 2x + 2 \\ -x^4 + 2x^3 + 2x^2 & \hline -3x^3 - 11x^2 - 16x & \\ 3x^3 + 6x^2 + 6x & \hline -5x^2 - 10x - 10 & \\ 5x^2 + 10x + 10 & \hline 0 & \end{array}$$

Este último resultado confirma que:

$$(f : g) = x^2 + 2x + 2 \stackrel{!!}{=} (-1 + i) \cdot (-1 - i)$$

Reduzco a  $f$  para buscar más raíces:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 & x^2 + 2x + 2 \\ -x^5 + 2x^4 + 2x^3 & \hline -6x^4 - 8x^3 + 12x^2 & \\ 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 & \hline 4x^3 + 24x^2 + 40x & \\ -4x^3 - 8x^2 - 8x & \hline 16x^2 + 32x + 32 & \\ -16x^2 - 32x - 32 & \hline 0 & \end{array}$$

De esta manera puedo escribir:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^3 - 6x^2 + 4x + 16)$$

🧐 con el *lema de Gauss* posibles raíces de:

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 16 \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}.$$

De las cuales funciona el 4 🧐.

👤 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.  
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Vuelvo a dividir 😊:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 6x^2 + 4x + 16 & x - 4 \\
 -x^3 + 4x^2 & \\
 \hline
 -2x^2 + 4x & \\
 2x^2 - 8x & \\
 \hline
 -4x + 16 & \\
 4x - 16 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Podemos reescribir 😊:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$$

😊 el último factor tiene raíces  $1 - \sqrt{5}$  y  $1 + \sqrt{5}$  y ya escribo  $f$  en la factorizaciones pedidas:

$f$	$=$	$(x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$	$\in \mathbb{Q}[X]$
$f$	$=$	$(x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{R}[X]$
$f$	$=$	$(x - (-1 + i)) \cdot (x - (-1 - i)) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{C}[X]$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙