

Apunte Único: Álgebra I - Práctica 7

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 13/08/25 @ 13:17

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

• Notas teóricas

• Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.

• Ejercicios de Parciales

 1.	 4.	 7.	 10.	 13.	 16.
 2.	 5.	 8.	 11.	 14.	 17.
 3.	 6.	 9.	 12.	 15.	

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:


- 📖⁰₁ Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 📖⁰₂ Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 📖⁰₃ ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 📖⁰₄ Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 📖⁰₅ Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' \nrightarrow +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: [Sentido común](#).

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de [Teresa](#) que son **buenísimos** .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
[Prácticas Pandemia](#) .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

Eh, loco, fatalista, distópico, [relajá un toque](#) te vas a quedar (más) pelado... 🐼🐼🐼 *va a salir todo bien!*

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:

13/08/25 @ 13:17

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



Notas teóricas:• *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i \\ \implies f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j \\ \implies f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• *Algoritmo de división:*

$f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con $\text{gr}(R) < \text{gr}(g)$ o $R = 0$.

• *Raíz de un Polinomio:*

$$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

• *Máximo común divisor:*

Polinomio, $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$, *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

- $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
- $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

• *Raíces múltiples:*

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

- Cuando f tiene una raíz múltiple:

$$\alpha \text{ es raíz múltiple de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q \\ f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) = 0.$$

- Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

$$\alpha \text{ es raíz simple de } f \iff (X - \alpha) \mid f \text{ y } (X - \alpha)^2 \nmid f \\ f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f , y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X], \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

• **Raíces y MCD:**

Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K}$: **Esta se usa bastante.**

$$\implies f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

• α es raíz múltiple de f si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

• La multiplicidad m de una raíz, será $m - 1$ en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

• Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \quad \text{la } m\text{-ésima derivada no se anula.}$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz α de f

triple entonces la **tercera derivada NO PUEDE SER 0**, $f'''(\alpha) \stackrel{!!}{\neq} 0$.

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0, $f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

• **Lema de Gauss:**

Sea $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$ es una raíz racional de f , con α y $\beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_n$.

El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles $\frac{\alpha}{\beta}$ están **todas** las raíces racionales de f .

• Polinomios irreducibles:

Sea $f \in K[X]$

• Se dice que f es *irreducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma $g = c$ o $g = cf$ para algún $c \in K^\times$. O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $\frac{f}{\text{cp}(f)}$

• Se dice que f es *reducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall c \in K^\times$, es decir f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$.

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

- i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
- ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
- iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

i) *coeficiente principal:* 4^{77}

grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda:

$$\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0,$$

esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término X^{20} . Tengo entonces $\text{gr}(f^4 + g) < 20$

Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$f^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2$$

$$f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_j \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente} \quad \star^2$$

$$\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k$$

En esa sumatoria fea, solo me interesa el término con $k = 19$

$$\sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} (a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9) X^{19} \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} X^{19}$$

Hay que resolver esas ecuaciones. Primero a *ojímetro* saco b_{10} :

$$b_{10} = (-3)^2 = 9$$

a_9 no es tan fácil. Hay que volver a usar $\sum f \cdot g$ en $k = 9$:

$$f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow[\text{término } k=9]{\text{quiero el}} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} (c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4) X^9 \stackrel{\star^2}{=} (2 \cdot c_4 \cdot d_5) X^9$$

Parecido a antes primero calculo d_5 y c_4 a *ojímetro*:

$$d_5 = -3 \quad \text{y} \quad c_4 = 1$$

Vuelvo el foco a a_9 :

$$a_9 = 2 \cdot 1 \cdot -3 = -6$$

Los coeficientes principales:

$$\begin{cases} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot 9 = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

★¹: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \implies \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\begin{cases} i = 10, j = 9 \\ i = 9, j = 10 \end{cases}$

★²: Porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

★³: Idem ★¹ para el polinomio f
grado: 19

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

2. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow [una pull request](#) al 🍷.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que:

- i) $f^2 = Xf + X + 1$, iii) $(X + 1)f^2 = X^6 + Xf$,
- ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$, iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.

- i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de X , así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \stackrel{!}{\iff} (f - 1) \cdot (f + 1) = X \cdot (f + 1) \stackrel{!}{\iff} (f + 1) \cdot (f - (X + 1)) = \underset{g}{0}$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es $g = 0$. Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de X , el miembro izquierdo también tiene que ser 0 para todo valor de X . Eso ocurre cuando:

$$f = -1 \quad \text{o} \quad f = X + 1$$

- ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener f :

☒₁) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 0$?

$$f = k \implies k^2 - X \cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

☒₂) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 1$?

$$f = bX + c \implies b^2X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1,$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomios iguales en ambos miembros de la ecuación.

■₃) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 2$?

$$f = aX^2 + bX + c \stackrel{!}{\Rightarrow} (aX^2 + b^2X + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con $\text{gr}(4)$ y el izquierdo con $\text{gr}(2)$, así que no hay f , bla, bla, bla.

■₄) ¿Puede ser $\text{gr}(f) \geq 3$? Diría que no por razones muy interesantes.

iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que f sea algo que cancele el X^6

$$\text{gr}((X+1) \cdot f^2) = \text{gr}(X \cdot (X^5 + f)) \Leftrightarrow \text{gr}(X+1) + \text{gr}(f^2) = \text{gr}(X) + \text{gr}(X^5 + f) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \underbrace{2 \cdot \text{gr}(f)}_{\text{par}} \stackrel{\star^1}{=} \text{gr}(X^5 + f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\begin{aligned} \text{si } \text{gr}(f) < 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) = 5 \quad \star^2 \\ \text{si } \text{gr}(f) = 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) \leq 5 \quad \star^3 \\ \text{si } \text{gr}(f) > 5 &\implies \text{gr}(X^5 + f) = \text{gr}(f) \quad \star^4 \end{aligned}$$

Entonces no tenemos un valor para el grado de f en el que haya un balance en la ecuación \star^1 , porque:

\star^2 El miembro derecho de \star^1 tendría un valor par así que descartado.

\star^3 El miembro derecho de \star^1 tendría un grado igual a 10 así que descartado.

\star^4 El miembro derecho de \star^1 tendría un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

iv) Si $f \neq 0$:

$$f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f \stackrel{!}{\Leftrightarrow} f \cdot (f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado $f \neq 0$, para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:

$$(f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \text{gr}(f^2) = \text{gr}(\text{gr}(f) \cdot X^2) = 2 \Leftrightarrow 2 \text{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \text{gr}(f) = 1$$

Entonces $\text{gr}(f) = 1 \implies f = aX$, evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de a :

$$a^3 \cdot X^3 = 1 \cdot X^2 \cdot aX = aX^3 \Leftrightarrow a \cdot (a^2 - 1)X^3 = 0 \stackrel{\substack{\text{si } f \neq 0 \\ \implies a \neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ \text{y} \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios f que cumplen son:

$$f = -X \quad \text{y} \quad f = X$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Ramiro E. 

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

i)

$$\begin{array}{r}
 5X^4 + 2X^3 \quad -X + 4 \quad \Big| \quad X^2 + 2 \\
 -5X^4 \quad -10X^2 \\
 \hline
 2X^3 - 10X^2 \quad -X \\
 -2X^3 \quad -4X \\
 \hline
 -10X^2 - 5X + 4 \\
 10X^2 \quad +20 \\
 \hline
 -5X + 24
 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)

$$\begin{array}{r}
 4X^4 + X^3 \quad -4 \quad \Big| \quad 2X^2 + 1 \\
 -4X^4 \quad -2X^2 \\
 \hline
 X^3 - 2X^2 \\
 -X^3 \quad -\frac{1}{2}X \\
 \hline
 -2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\
 2X^2 \quad +1 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}X - 3
 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$$\text{En } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

Inducción: Quiero probar que:

$$p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \implies p(1)$$

Entonces, $p(1)$ es Verdadero*Paso inductivo.*

Asumo que:

$$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ es Verdadera.}$$

Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j$$

también lo sea. Arranco las cuentulis:

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j + (X - 1) \cdot X^k \stackrel{\text{HI}}{=} X^k - 1 + X^{k+1} - X^k = X^{k+1} - 1$$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

- i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,
- ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
- iii) El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0.
O sea,

$$\begin{aligned} X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 &\iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es $a = 1$.

ii) ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX \rightarrow [una pull request](#) al .

iii) Haciendo la division de:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 \text{ por } X^2 + aX + 1,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 &= q \cdot (X^2 + aX + 1) + \overset{\text{resto}}{\uparrow} r \\ \text{con } \begin{cases} q &= (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1) \\ \textcolor{red}{r} &= (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora viene la igualación de polinomios para encontrar ese valor de a :

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{r} = -8X + 4 &\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4 \\ &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \textcolor{violet}{\star}^1 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \textcolor{green}{\star}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

$$\star^2 \quad a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$$

Veó que $a = -2$ es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por $a + 2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1).$$

Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$\star^1 \quad a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$. Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si $a = -2 \implies (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si $a = 1 + \sqrt{2} \implies (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si $a = 1 - \sqrt{2} \implies (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{a = -2}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 **Autor original** 

 **naD GarRaz** 

6. Definición: Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

- i) Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.
- ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
- iii) Probar que si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: ¿Es f congruente a f módulo h ?

$$f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0$$

La relación es *reflexiva*, porque todo polinomio divide al 0.

- *simétrica*: Si $f \equiv g(h) \stackrel{?}{\iff} g \equiv f(h)$

$$f \equiv g(h) \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f(h)$$

La relación es *simétrica*.

- *transitiva*: Si

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} f \equiv g(h) \\ g \equiv p(h) \end{array} \right. \stackrel{?}{\iff} f \equiv p(h). \\ & \left\{ \begin{array}{l} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{array} \right. \xrightarrow[\rightarrow F_2]{F_1 + F_2} \left\{ \begin{array}{l} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{array} \right. \rightarrow f \equiv p(h) \end{aligned}$$

También resultó ser *transitiva*.

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $K[X]$

ii) Si

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \equiv g_1(h) \\ f_2 \equiv g_2(h) \end{array} \right. \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h),$$

entonces

$$f_1 \equiv g_1(h) \iff h \mid f_1 - g_1 \stackrel{!}{\implies} h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2(h) \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h).$$

Y así queda demostrado.

iii) *Inducción*: Quiero probar que:

$$p(n) : \text{Si } f \equiv g(h) \implies f^n \equiv g^n(h) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : f^1 \equiv g^1(h) \quad \star^2$$

Por lo tanto $p(1)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$:

$$p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k(h)}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces quiero probar que para $k+1$:

$$p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h)$$

también lo sea.

$$f^k \equiv g^k(h) \iff h \mid f^k - g^k \implies h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k(h) \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h)$$

De esta manera $p(k+1)$ también es verdadera.

Finalmente $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) Quiero probar que:

$$f = d \cdot h + r \iff f \equiv r(h) \wedge (r = 0 \vee \text{gr}(r) < \text{gr}(h))$$

(\Rightarrow)

$$f = d \cdot h + r \stackrel{\text{def}}{\iff} f \equiv r(h)$$

Por hipótesis r es el resto de la división, por condición de resto se va a tener que cumplir que:

$$r = 0 \quad \text{o} \quad \text{gr}(r) < \text{gr}(h)$$

(\Leftarrow) Tenemos dos casos que ver: $f \equiv r(h) \wedge r = 0$ y $f \equiv r(h) \wedge \text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

Notar que el caso en el que el \vee incluya las dos condiciones ya está tomado en cuenta cuando $r = 0$ pues si eso ocurre automáticamente $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

$$f \equiv r(h) \wedge r = 0 \implies f = d \cdot h + r$$


Cuando $r = 0$, la congruencia va a ser $f \equiv 0(h)$, luego por definición de la congruencia se llega a que $f = d \cdot h + 0$

$$f \equiv r(h) \wedge \text{gr}(r) < \text{gr}(h) \implies f = d \cdot h + r$$

Por definición de la congruencia llegamos a que $f = d \cdot h + r$, luego sabemos que $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ es la condición que tiene que tener el resto (por definición), luego r es el resto, como se quería ver.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

 sigfripro 

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver 4. iii)).

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \pmod{g} \iff X^{31} \equiv 2 \pmod{g}$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv 2^{11} \pmod{g}} X^{12} - X - 1 \equiv 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii) $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \pmod{g} \iff X^6 \equiv -1 \pmod{g}$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \equiv X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? $\rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$

iii) $g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \pmod{g} \iff X^{100} \equiv X - 1 \pmod{g}$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \equiv (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2 \rightarrow \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$$

iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4.iii) sale que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

Con $n = 5$:

$$X^5 - 1 = (X - 1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \stackrel{!}{\iff} X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \pmod{g} \star^1$$

Usando ese resultado de congruencia, reescribo f :

$$f = (X^5)^{603}X + 2(X^5)^{366}X^3 - (X^5)^{34}X^4 + (X^5)^{27}X^2 + 2X^4 - X^3 + 1 \xLeftrightarrow{\text{★}^1} f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g} (g)$$

$$\xLeftrightarrow{\quad} \boxed{f \equiv 0 (g)}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐛 naD GarRaz 🐞

8. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{K}$.

- Probar que $X - a \mid X^n - a^n$ en $K[X]$.
- Probar que si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$ en $\mathbb{K}[X]$.
- Probar que si n es par entonces $X + a \mid X^n - a^n$ en $\mathbb{K}[X]$.

Calcular los cocientes en cada caso.

i) Pruebo por inducción:

$$p(n) : X - a \mid X^n - a^n \text{ en } \mathbb{K}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : X - a \mid X^1 - a^1$$

El caso $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X - a \mid X^k - a^k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero. Entonces quiero probar que

$$p(k+1) : X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$$

también lo sea.

Arranco haciendo a mano la división a mano del caso $k+1$ en la primera iteración tengo que:

$$\begin{aligned} X^{k+1} - a^{k+1} &= X^k \cdot (X - a) + aX^k - a^{k+1} \\ &= X^k \cdot (X - a) + a \cdot (X^k - a^k) \xrightarrow[\div \text{MAM } (X-a)]{\text{HI}} \frac{X^{k+1} - a^{k+1}}{X-a} = \frac{X^k \cdot \cancel{(X-a)}}{\cancel{X-a}} + \frac{a \cdot \cancel{(X^k - a^k)}}{\cancel{X-a}} \end{aligned}$$

Ese último paso muestra que $X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$ entonces $p(k+1)$ también es verdadera.

Dado que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por criterio de inducción $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Por induccion nuevamente:

$$p(n) : X + a \mid X^{2k+1} + a^{2k+1} \text{ en } \mathbb{K}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Caso base:

$$p(0) : X + a \mid X^1 + a^1$$

El caso $p(0)$ es verdadero.

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X + a \mid X^{2k+1} + a^{2k+1}}_{\text{hipotesis inductiva}}$$

es verdadero. Luego quiero probar que

$$p(k+1) : X + a \mid X^{2(k+1)+1} + a^{2(k+1)+1} = X^{2k+3} + a^{2k+3}$$

sea verdadero tambien. Acá la idea es similar al ítem anterior, hacemos una division a mano y luego agrupamos y aplicamos la hipotesis inductiva. Vemos que para la hipotesis inductiva necesitamos de exponente $2k+1$ pero tenemos $2k+3$, entonces en vez de dividir por $X+a$, dividimos por $X^2 - a^2$.

$$\begin{aligned} X^{2k+3} + a^{2k+3} &= X^{2k+1} \cdot (X^2 - a^2) + a^{2k+3} + X^{2k+1} \cdot a^2 \\ &= X^{2k+1} \cdot (X + a)(X - a) + a^2 \cdot (X^{2k+1} + a^{2k+1}) \end{aligned}$$

El cociente seria $X^{2k+1} \cdot (x-a) + a^2$ Aplicando la hipotesis inductiva se ve que el caso $p(k+1)$ es verdadero. Luego que $p(k)$ es verdadera $\forall k \in \mathbb{N}_0$, como se queria probar.

iii) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🗨️.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🗨️

👤 sigfripro 🗨️

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, g = X^3 + X,$

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1,$

i) Hacemos la división hermosa de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} X^5 & + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 & + X^3 - X \\ \hline X^4 + 2X^3 - 6X^2 & + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 & - 1 \\ \hline 3X^3 - 5X^2 & + X + 1 \end{array}$$

Todo muy lindo. Según Euclides:

$$(f : g) = \underbrace{(X^4 - X^3 - X^2 + 1)}_g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

Escribo a f en función de g :

$$f = (X + 1) \cdot (X^4 - X^3 - X^2 + 1) + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

Otra vez:

$$\begin{array}{r|l} X^4 & - X^3 - X^2 + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 & - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \\ \hline \frac{2}{3}X^3 & - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 & - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \\ \hline & - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array}$$

y otra vez... ?:

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ -3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\ \hline -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\ -\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\ \hline \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & \end{array}$$

...da fuck is this?

$$\begin{array}{r|l} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ -\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\ \hline -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\ -\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Todo lindo:

$$\begin{aligned} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\ X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\ 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\ -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X - 1$$

ii) Este es más humano:

$$\begin{aligned} X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\ X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X^2 + 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g :

$$X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$$

iii) Euclides nuevamente:

$$\begin{aligned} 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\ X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\ X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico*:

$$(f : g) = 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g :

$$1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

En general $P \in \mathbb{K}[X] \implies$ el resto de dividir a P por $X - a$ es $P(a)$, es decir:

$$P = Q \cdot (X - a) + \underbrace{r}_{P(a)} \quad \text{con } Q \in \mathbb{K}[X]$$

A ver con lo que nos dieron en el enunciado:

$$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X) \quad \text{con } g(X) = \underbrace{(X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)}_{!!!} \quad \text{y } r(X) = a^2 + bX + c,$$

hay que notar que $r(X)$ cumple condición de resto, ya que el $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$. Y ese g nos queda hermoso para los valores del enunciado como habrás (o no) notado.

$$\begin{cases} f(1) = q(1) \cdot \cancel{g(1)}^0 + r(1) = -2 \\ f(2) = q(2) \cdot \cancel{g(2)}^0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \cancel{g(-1)}^0 + r(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Resuelvo con matriz, porque pinta, pero es innecesario:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right)$$

Por lo tanto el resto pedido es:

$$r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

11. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

Es parecido al ejercicio 10? Creo que sí:

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) \stackrel{!!!}{=} X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \implies f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \quad \text{con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \stackrel{!}{\leq} 2$$

Evalúo para armar un sistema:

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 5 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 \stackrel{!}{=} -5 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🍷

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar los resultados para la familias de G_n

$$w \in G_7 \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^6 w^j = 0 & (w \neq 1) \\ w^k = w^{r_7(k)} \end{cases}$$

Es cuestión de evaluar y rezar 🙏. Tengo que $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz de f :

$$f(w + w^2 + w^4) = (w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8 + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2}_{=w} \stackrel{!}{=} 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0$$

Listo efectivamente $w + w^2 + w^4$ es raíz de f .

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 🍷

14.

- Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.
- Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ &= X^2 - \underbrace{(w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + (w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(\underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 = \\ &= X^2 + X - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$


ii) Calculando las raíces a mano de

$$X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

15.

- i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
- ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

i) Hay que probar la doble implicación:

(\Rightarrow)

$$\text{Si } a \text{ es raíz de } f \text{ y } g \Rightarrow \begin{cases} (X-a)|f \\ (X-a)|g \end{cases} \Rightarrow (X-a) \text{ es una raíz común} \Rightarrow (X-a) \mid (f : g)$$

(\Leftarrow) El máximo común divisor tiene los monomios de las factorizaciones comunes elevados al menor exponente. Así que por definición:

$$(f : g) = (X - a)^m$$

entonces $X - a$ está en la factorización de f y g .

No sé siento que la demo esa es muy circular. Salió pedorra.

- ii) Usando lo que se demuestra en el ítem anterior, si dos polinomios f y g tienen raíces en común, entonces esas raíces tienen que ser raíces del $(f : g)$:

Si

$$f = X^4 + 3X - 2 \quad \text{y} \quad g = X^4 + 3X^3 - 3X + 1,$$

busco el $(f : g)$:

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \end{aligned}$$

Obtuve que:

$$(f : g) = X^2 + X - 1$$

Las raíces:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Por lo tanto esas raíces son comunes a f y a g .



Luego puedo escribir

$$X^4 + 3X - 2 = (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2)$$

Y las raíces de $X^2 - X + 2$:

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \alpha_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 📧

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$,

iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$, $a = 2$,

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$, $a = 2$.

i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,

Todos casos de factorización:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$

La multiplicidad de $a = 1$ como raíz es 2.

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$,

Si $a = i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 3X^4 & + 4 \\ - X^6 & - X^4 \\ \hline & - 4X^4 \\ & 4X^4 + 4X^2 \\ \hline & 4X^2 + 4 \\ & - 4X^2 - 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

$$(X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

La multiplicidad de $a = i$ como raíz de f es 1.

iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$, $a = 2$,

$$f = (X - 2)^3((X + 2) + (X + 1)) = (X - 2)^3(2X + 3)$$

La multiplicidad de $a = 2$ como raíz de f es 3.

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$, $a = 2$,

$$f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^2(X - 2)(X + 2) - 4(X - 2)^3 =$$

$$(X - 2)^3(X + 2 - 4) = (X - 2)^4$$

La multiplicidad de $a = 2$ como raíz de f es 4.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👤 naD GarRaz 📧

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

Quiero raíces simples, entonces laburo para que $(f : f') = 1$

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a \quad \text{y} \quad f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(X - 1)$$

Sea α una raíz de f' , es decir:

$$f'(\alpha) = n(n+1)\alpha^{n-1}(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ con } n = 1 \\ \alpha \in \{0, 1\} \text{ con } n > 1 \end{cases}$$

Pido entonces:

$$\begin{cases} f(1) = n - (n + 1) + a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(0) = a \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Caso $a = 0, n = 1$:


$$f = X \cdot (X - 2) \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Caso $a \neq 0, n \in \mathbb{N}_{>1}$:

$$f \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Caso $a \neq 1, n \in \mathbb{N}$:

$$f \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

18. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en \mathbb{C} .

Si r es raíz múltiple de f debe ocurrir que:

$$\begin{cases} f(r) = 0 \\ f'(r) = 0 \end{cases}$$

Derivo f y acomodo:

$$f' = (2n+1) \cdot (X^{2n} - 1) \xrightarrow[r]{\text{evalúo}} f'(r) = (2n+1) \cdot (r^{2n} - 1) = 0 \Leftrightarrow (r^{2n} - 1) = 0 \quad \star^1$$

Volviendo a f , si evalúo en r

$$\begin{aligned} f(r) = 0 \Leftrightarrow r^{2n+1} - (2n+1)r + a = 0 &\Leftrightarrow r \cdot \overbrace{(r^{2n} - 1 - 2n)}^{\star^1=0} + a = 0 \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} a = 2n \cdot r \end{aligned}$$


Por lo tanto $r \in \mathbb{R} \quad \star^2$.

Volviendo a \star^1 y con el resultado de que las raíces $r \in \mathbb{R}$:

$$(r^{2n} - 1) = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (r^n - 1)(r^n + 1) = 0 \stackrel{\star^2}{\Leftrightarrow} r = \pm 1$$

Por lo tanto los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el polinomio tenga por lo menos una raíz múltiple:

$$a = \pm 2n$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.



Ataco como en el ejercicio anterior. La idea no es calcular todas las raíces.

Si f tiene raíces múltiples r_k :

$$r_k \Leftrightarrow f(r_k) = f'(r_k) = 0,$$

por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4)$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Evaluando en r_k :

$$f'(r_k) = 20(r_k)^9 \cdot ((r_k)^{10} + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_k &= 0 \\ (r_k)^{10} &= -4 \end{cases} \star^1$$

Hay de momento 11 raíces de f' . Me interesa saber si son raíces de f ,

Cuando $r_k = 0$:

$$f(0) = 2a \implies f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Acomodo f y después reemplazo por los otros valores que anulan f' :

$$f = X^{20} + 8X^{10} + 2a = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a$$

Cuando $(r_k)^{10} \stackrel{\star^1}{=} -4$:

$$\begin{aligned} f(r_k) = 0 &\Leftrightarrow ((r_k)^{10})^2 + 8(r_k)^{10} + 2a = 0 \\ &\stackrel{\star^1}{\Leftrightarrow} (-4)^2 + 8(-4) + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow -16 + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

Ahora tengo que ver cuántas raíces y sus multiplicidades para $a = 0$ y $a = 8$.

Si $a = 0 \implies f = X^{10}(X^{10} + 8)$

$$f(r_k) = 0 \Leftrightarrow (r_k)^{10}((r_k)^{10} + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} X &= 0 \\ &\text{o} \\ X^{10} &= -8, \end{cases}$$

donde se ve que con $a = 0$ hay 11 raíces distintas en total, las multiplicidades:

$$\text{mult}(0; f) = 10 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}.$$

No había necesidad de calcular las raíces, pero dado que la solución, es casi lo mismo que G_{10} ya fue. Pero alcanzaría con decir que es un polinomio complejo de grado 10, entonces hay 10 soluciones y las multiplicidades se ven en los exponentes de los polinomios irreducibles en la factorización.

Si $a = 8 \implies f = (X^{20} + 8X^{10} + 16) \stackrel{!!}{=} (X^{10} + 4)^2$

$$f(r_k) = 0 \Leftrightarrow ((r_k)^{10} + 4)^2 \Leftrightarrow X^{10} = -4,$$

donde se ve que con $a = 8$ hay un total de 10 raíces distintas, las multiplicidades:

$$\text{mult}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}.$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

20. Sea $f = X^{68} - 17X^4 - 16 \in \mathbb{C}[X]$. Determinar la forma binomial de cada raíz múltiple de f en \mathbb{C} y la multiplicidad de cada una de ellas.

 ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow una pull request al .

21.

- Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
- Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

i) $(X - 1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$ es por lo menos raíz doble de $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$.

$$\begin{aligned} f &= X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' &= 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba lo pedido.

ii)

$$(X - 1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$$

Parecido a antes vuelvo a derivar y evalúo:

$$f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 4 + 2a \implies f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Por lo tanto:

$$(X - 1)^3 \mid f \iff a = -2$$

Observar que si $a \neq -2$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos triple*.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Olivia Portero 

22. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

Si uno es raíz *doble* de $f = X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$ tiene que ocurrir que:

$$f(1) = f'(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'' \neq 0$$

Planteamos eso:

$$f(1) = 1^4 - a1^3 - 31^2 + (2+3a)1 - 2a = 0 \Leftrightarrow 1 - a - 3 + (2+3a) - 2a = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Oka, no nos dio mucha info. Ahora con f' :

$$f'(1) = 41^3 - 3a1^2 - 61 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a - 6 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Bueh, el ejercicio apunta que no nos olvidemos la última condición con la f'' :

$$f''(1) = 121^2 - 6a1 - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 12 - 6a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto si:

$$a \neq 1$$



1 será una raíz *doble* del polinomio $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$. De otra forma sería *por lo menos una raíz triple*

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

23. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{4!}X^4 + \dots + \frac{1}{n!}X^n$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Su derivada primera:

$$P' = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1}$$

Noto que:

$$P' = P - \frac{1}{n!}X^n$$

Entonces si α es una raíz de P :

$$P(\alpha) = 0 \implies P'(\alpha) = \underbrace{P(\alpha)}_0 - \frac{1}{n!}\alpha^n = -\frac{1}{n!}\alpha^n \neq 0$$

Así queda probado que las raíces van a ser *simples*.

Atención que, $\alpha = 0$ no me importa porque $P(0) \neq 0$, boludeces no.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

24. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{C}[X]$ definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sale por inducción. Quiero probar la siguiente proposición:

$$p(n) : i \text{ es una raíz } \textit{doble} \text{ de } f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso Base:

$$p(1) : i \text{ es una raíz } \textit{doble} \text{ de } f_1.$$

Especializo a f_1 , f'_1 y a f''_1 en i :

$$f_1(i) = i^4 + 2i^2 + 1 = 0, \quad f'_1(i) = 4i^3 + 4i = 0 \quad \text{y} \quad f''_1(i) = 12i^2 \neq 0$$

Por lo cual $p(1)$ resulta verdadera.

Paso inductivo: Asumo como verdadero para algún $k \in \mathbb{N}$ que la proposición:

$$p(k) : \underbrace{i \text{ es una raíz } \textit{doble} \text{ de } f_k}_{\text{hipótesis inductiva}},$$

es verdadera. Entonces quiero probar que la proposición:

$$p(k+1) : i \text{ es una raíz } \textit{doble} \text{ de } f_{k+1}$$

también lo sea.

La **hipótesis inductiva** dice que:

$$f_k(i) = 0, \quad f'_k(i) = 0, \quad \text{y} \quad f''_k(i) \neq 0,$$

Usando la definición de la función, especializo, evalúo o como quieras decirle a f_{k+1} , f'_{k+1} y a f''_{k+1} en i :

$$\begin{cases} f_{k+1}(i) &= (i - i)(f_k(i) + f'_k(i)) = 0, \\ f'_{k+1}(i) &= f_k(i) + f'_k(i) + (i - i)(f'_k(i) + f''_k(i)) \stackrel{\text{HI}}{=} 0 \\ f''_{k+1}(i) &= 2 \cdot (f'_k(i) + f''_k(i)) + (i - i)(f''_k(i) + f'''_k(i)) \stackrel{\text{HI}}{\neq} 0 \end{cases}$$

Y así resultó la proposición $p(k+1)$ verdadera.

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron todas verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

25. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $Q[X]$ definida por

$$f_1 = X^3 + 2X \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2f'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

- i) $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$.
- ii) 0 es raíz de multiplicidad n de f_n .

i) Inducción:

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : \text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \text{gr}(f_1) = 2^{1+1} - 1 = 3 = \text{gr}(X^3 + 2X)$$

Por lo tanto $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo para un $k \in \mathbb{N}$ que:

$$p(k) : \underbrace{\text{gr}(f_k) = 2^{k+1} - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : \text{gr}(f_{k+1}) = 2^{k+1+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

también lo sea.

$$f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} Xf_k^2 + X^2f'_k$$

¿Qué grado tiene esa cosa?

$$\text{gr}(Xf_k^2 + X^2 \cdot f'_k) \stackrel{!}{=} 1 + \underbrace{\text{gr}(f_k^2)}_{2 \text{ gr}(f_k)} + \underbrace{\text{gr}(X \cdot f'_k)}_{\text{gr}(f_k)} = 1 + 2 \cdot \text{gr}(f_k) \stackrel{\text{HI}}{=} 1 + 2 \cdot (2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 1$$

Si no viste el $!$, saqué factor común X , así es que aparece el 1 que se suma al grado. También tuve en cuenta que $\text{gr}(f') = \text{gr}(f) - 1 \quad \forall f \in f[X]$

Por lo tanto $p(k+1)$ resultó verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron todas verdaderas por principio de inducción en también lo es $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Lindo ejercicio, [intentá hacerlo antes de mirar la resolución](#).

Sale también por inducción.

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : 0 \text{ es raíz de multiplicidad } n \text{ de } f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O de forma equivalente:

$$p(n) : X^n \mid f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : X^1 \mid f_1$$

Se cumple enseguida que:

$$X \mid X^3 + 2X \Leftrightarrow X \mid X \cdot (X^2 + 2)$$

Por lo tanto $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo para un $k \in \mathbb{N}$ que:

$$p(k) : \underbrace{X^k \mid f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} \mid f_{k+1}$$

también lo sea.

$$X^{k+1} \mid f_{k+1} \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X f_k^2 + X^2 f_k'$$

Exploto la **hipótesis inductiva** para construir el paso $k+1$:

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{HI}} X^k \mid f_k &\xLeftrightarrow{!} X^k \mid f_k \cdot f_k \xLeftrightarrow{!} X \cdot X^k \mid X \cdot f_k^2 \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \quad \star^1 \\ &\text{y parecido con la derivada} \\ \xRightarrow{!!} X^{k-1} \mid f_k' &\xLeftrightarrow{!} X^2 \cdot X^{k-1} \mid X^2 \cdot f_k' \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X^2 \cdot f_k' \quad \star^2 \end{aligned}$$

Donde en **!!** usé la **hipótesis inductiva**, si f_k tiene como raíz al 0 con multiplicidad k entonces la derivada tiene que tener multiplicidad $k-1$ en 0. Con esos hermosos, tiernos y sabrosos resultados de \star^1 y \star^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \\ X^{k+1} \mid X^2 \cdot f_k' \end{array} \right\} \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 + X^2 \cdot f_k'$$

Como $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron todas verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

26. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ raíz de multiplicidad 3 de $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que el resto de dividir a f' por $(X - \alpha)^3$ es $a(X - \alpha)^2$, con $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Sé que cuando derivo el algoritmo de división es:

$$f = D \cdot Q + R$$

En este caso $D = (X - \alpha)^3$

$$(X - \alpha)^3 \mid f \Leftrightarrow f = q \cdot (X - \alpha)^3 + 0 \quad \text{con } q \in \mathbb{C}[X]$$

Derivo esa expresión de f :

$$f' = q' \cdot (X - \alpha)^3 + 3q \cdot (X - \alpha)^2$$

El dato dice que α es una raíz triple de f , por lo tanto si derivó f , $(X - \alpha)^3$:

$$f' = \underbrace{q'}_Q \cdot \underbrace{(X - \alpha)^3}_D + \underbrace{3q \cdot (X - \alpha)^2}_R$$

No me acuerdo si es *teorema del resto* o algo así que dice que especializar a f en algún valor te da lo que vale el resto, lo cual es *razonable cuando hacés Ruffini*, pero ahora que se está dividiendo por una potencia de 3, es más raro. pero esta es la primera vez que aparece en En fin, especializo en α , recordando que es raíz triple de f , por lo tanto me va a dar cero:

$$f'(\alpha) = R(\alpha) = \underbrace{3q(\alpha)}_{\neq 0} \cdot (\alpha - \alpha)^2 = 0$$

Por lo tanto R cumple condición de resto y además es de la forma $a \cdot (X - \alpha)^2$
 \downarrow
 $\neq 0 \in \mathbb{C}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 



27.

i) Hallar todas la raíces racionales de



(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$,

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{3}X - 3$,

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

i) (a) ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

(b) ... hay que hacerlo! 


Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

ii) ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

28. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

29. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

30. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .



31. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución \rightarrow [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en $\text{IAT}_{\text{EX}} \rightarrow$ [una pull request](#) al .

32. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

Sale por inducción:

$$p(n) : \sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X] \text{ tiene todas sus raíces complejas simples } \forall n \in \mathbb{N}.$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) 

Caso base:

$$p(1) : \sum_{k=0}^1 X^k = 1 + X^1 \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

En este caso $f(X) = 1 + X$:

$$f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 1 \neq 0$$

Por lo tanto $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo: Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(h) : \underbrace{\sum_{k=0}^h X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^h}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

es verdadera. Entonces quiero ver que:

$$p(h+1) : \sum_{k=0}^{h+1} X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^h + X^{h+1} \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

también lo sea.

Primero veo que la hipótesis inductiva es algo así:

$$f_h(\alpha_h) \stackrel{\alpha_h \neq 0}{\underset{!!}{=}} 0 \quad \text{y} \quad f'_h(X) = \sum_{k=1}^h kX^{k-1} = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + hX^{h-1} \text{ donde } f'_h(\alpha_h) \neq 0 \quad \forall \alpha_h \text{ raíz de } f.$$

Ahora laburo el polinomio $(h+1)$ -ésimo, con α raíz del mismo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{h+1}(\alpha_{h+1}) \stackrel{\alpha_{h+1} \neq 0}{\underset{!!}{=}} 0 \\ f'_{h+1}(X) = \sum_{k=1}^{h+1} kX^{k-1} = \underbrace{1 + 2X + \cdots + hX^{h-1}}_{f'_h(X)} + (h+1)X^h = f'_h(X) + (h+1)X^h \\ \xrightarrow[\text{en } \alpha_{h+1}]{\text{evalúo}} f'_{h+1}(\alpha_{h+1}) \stackrel{\text{HI}}{=} \underbrace{f'_h(\alpha_{h+1})}_{\neq 0} + (h+1) \underbrace{\alpha_{h+1}^h}_{\neq 0} \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto $p(k+1)$ resultó verdadera.

Como $p(1)$, $p(h)$ y $p(h+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción en n también lo es $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐸 naD GarRaz 🐼

33. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una pull request al 🐼.

34. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una pull request al 🐼.

35. 🐼... hay que hacerlo! 🐼

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🗨️, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → una pull request al 🐼.

🗨️ Errores? Avisá acá así se corrige y ganamos todos.

Compilado: 13/08/25 @ 13:17 . Chequeá si hay una versión nueva → acá.

[Ir a índice ↑](#)

36. 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

37. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$. Determinar

- i) $a + b + c$, ii) $ab + ac + bc$, iii) abc .

38. 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

38.

- i) Hallar todas las raíces en \mathbb{C} del polinomio $f = X^4 - (i + 4)X^3 + (8 + 4i)X^2 - (2i + 24)X + 12$ sabiendo que tiene al menos una raíz real.
- ii) Hallar todas las raíces en \mathbb{C} del polinomio $f = X^6 - 3X^4 - (2 + 8i)X^3 + 24iX + 16i$, sabiendo que tiene al menos una raíz entera.

(a) Separo en parte real e imaginaria para que sea más manejable:

$$f = X^4 - (i + 4)X^3 + (8 + 4i)X^2 - (2i + 24)X + 12 = \underbrace{X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 24X + 12}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(-X^3 + 4X^2 - 2X)}_{\text{Im}(f)}$$

Ataco primero $\text{Im}(f)$ que está más fácil:

$$\text{Im}(f(r)) = -r^3 + 4r^2 - 2r = 0 \Leftrightarrow -r \cdot (r^2 - 4r + 2) = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} r \in \{0, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$$

El 0 claramente no es raíz de la parte real $\text{Re}(f)$, por lo tanto las otras tienen que serlo, debido a que el polinomio no tiene coeficientes irracionales y por enunciado f tiene al menos una raíz real:

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 24X + 12 & X^2 - 4X + 2 \\ -X^4 + 4X^3 - 2X^2 & X^2 + 6 \\ \hline 6X^2 - 24X + 12 & \\ -6X^2 + 24X - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\text{Re}(f) = (X^2 - 4X + 2) \cdot (X^2 + 6) = (X - (2 + \sqrt{2}))(X - (2 - \sqrt{2}))(X - i\sqrt{6})(X + i\sqrt{6})$$

Sé que las raíces complejas no son raíces de la parte imaginaria así que no me sirven. Las únicas raíces que tienen en común $\text{Re}(f)$ y $\text{Im}(f)$, me forman el $(\text{Re}(f) : \text{Im}(g)) = X^2 - 4X + 2$, datazo que nadie pidió!

Ahora le bajo el grado al polinomio original f y queda ahí medio cocinado:

$$\begin{aligned} f &= X^4 - (i + 4)X^3 + (8 + 4i)X^2 - (2i + 24)X + 12 \\ &= (X^2 - iX + 6) \cdot (X^2 - 4X + 2) \\ &= \boxed{(X - 3i)(X + 2i)(X - (2 + \sqrt{2}))(X - (2 - \sqrt{2}))} \end{aligned}$$

(b) 🚫... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → [una pull request](#) al 🐙.

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐙

🐙 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ [al repo](#), críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice](#) ↑

39. 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 🗨.

40.

i) Hallar todos los polinomios de grado 2 irreducibles en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

ii) Decidir cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$:

(a) $f = X^4 + X + 1$,

(b) $f = X^4 + X^2 + 1$,

(c) $f = X^4 + X^3 + 1$.

i) 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 🗨.

ii) (a) 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 🗨.

(b) 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 🗨.

(c) 🗨... hay que hacerlo! 🗨

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 🗨, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 🗨.

🔥 Ejercicios de parciales:

🔥 1.

- a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de \mathbf{c} hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

- a) Si la raíz $\alpha = r \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) = -ir \implies f(-ir) = 0$

Voy a usar que:

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{lcl} (-i)^2 & = & -1 \\ (-i)^3 & = & i \\ (-i)^4 & = & 1 \\ (-i)^5 & = & -i \\ (-i)^6 & = & -1 \end{array} \right.$$

Evalúo $f(-ir)$:

$$\begin{aligned} f(-ir) &= (-ir)^6 - 4(-ir)^5 - (-ir)^4 + 4r^3i + 4(-ir)^2 + 48(-ir) + \mathbf{c} \\ &\stackrel{\star^1}{=} -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} = 0 \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser 0 cuando su parte imaginaria y su parte real sean ambas 0:

$$\begin{aligned} f(-ir) &= -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} \\ &= (-r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c}) + i(4r^5 + 4r^3 - 48r) = 0 \end{aligned}$$

En el siguiente paso no busco exhaustivamente todas las raíces, porque es al pedo. Solo busco lo que me interesa según las condiciones del ejercicio:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{Im}(f(-ir)) = 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0 & \xleftrightarrow[r > 0]{r \in \mathbb{R}} & r \stackrel{!}{=} \sqrt{3}\star^2 \\ \text{Re}(f(-ir)) = -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 & \xleftrightarrow[\mathbf{c} \in \mathbb{R}]{r \stackrel{\star^2}{=} \sqrt{3}} & \boxed{\mathbf{c} = 48} \end{array} \right.$$

Por lo tanto con ese $\mathbf{c} = 48$:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48$$

y las raíces que tiene este polinomio son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{3}i \\ \alpha_2 &= \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Apareció el conjugado de la raíz dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r}
 X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \mid X^2 + 3 \\
 - X^6 - 3X^4 \\
 \hline
 - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \\
 4X^5 + 12X^3 \\
 \hline
 - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\
 4X^4 + 12X^2 \\
 \hline
 16X^3 + 16X^2 + 48X \\
 - 16X^3 - 48X \\
 \hline
 16X^2 + 48 \\
 - 16X^2 - 48 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Hasta el momento f queda:

$$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_g$$

como f tiene al menos una raíz doble la busco en las raíces de la derivada de g :

$$\begin{aligned}
 g' &= (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' \\
 &= 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0
 \end{aligned}$$

Con el lema de Gauss sé que las posibles raíces de g' están en:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Probando encuentro que $g'(1) = 0$, pero $g(1) \neq 0 \implies f(1) \neq 0$. Si $X = 1$ no es raíz de g , continúo bajándole el grado a g' para buscar otras raíces:

$$\begin{array}{r}
 X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \mid X - 1 \\
 - X^3 + X^2 \\
 \hline
 - 2X^2 - 2X \\
 2X^2 - 2X \\
 \hline
 - 4X + 4 \\
 4X - 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Con este resultado se puede escribir a g' como:

$$g' = 4(X - 1)(X^2 - 2X - 4)$$

De la parte cuadrática salen 2 raíces de g' :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \\
 X^2 - 2X - 4 &= (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))
 \end{aligned}$$

(para mostrar que son raíces dobles y no triples, por ejemplo, debería comprobar que $\alpha_{1,2}$ no son raíces de $g'' = 4(3X^2 - 6X - 2)$, pero no tengo ganas, [elijo creer que no lo son](#)).

Compruebo que sean también raíces de g :

$$\begin{array}{r}
 X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \mid X^2 - 2X - 4 \\
 - X^4 + 2X^3 + 4X^2 \\
 \hline
 - 2X^3 + 16X \\
 2X^3 - 4X^2 - 8X \\
 \hline
 - 4X^2 + 8X + 16 \\
 4X^2 - 8X - 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Dado que el resto dio 0 $\alpha_{1,2}$ son raíces de g y como son raíces de g' entonces son raíces dobles de g , y de f .
 Notar que viendo el cociente de esa última división quizás podría haber visto el caso de factorización a ojo, pero bueh, no pasó.

Factorizaciones:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2 \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X - \sqrt{3}i) \cdot (X + \sqrt{3}i) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2 \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐸 naD GarRaz 🐼

🔥2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional* ¹,
 $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 & X^4 - 14X^2 + 49 \\ -X^6 & +14X^4 & -49X^2 & \\ \hline & -X^5 & +X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X & \\ & X^5 & -14X^3 & +49X & \\ \hline & & X^4 & -14X^2 & +49 \\ & & -X^4 & +14X^2 & -49 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Todo hermoso. Nos queda un polinomio de grado 2 para laburar en la factorización:

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1),$$

se fusila con la resolvente:

$$\xrightarrow[\text{no ofender a nadie}]{\text{se escribe así para}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases} \rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

Finalmente las factorizaciones en sus 3 deliciosos sabores:

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 7)^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🐸 naD GarRaz 🐼

¹Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- i) $1 - \sqrt{2}$ es raíz de f ;
- ii) $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$;
- iii) $(f : X^3 - 1) \neq 1$;
- iv) $f(-1) = 27$;

- i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto:

$$X^2 - 2X - 1$$

será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- ii) Para el requerimiento $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$:

$$X(X - 2)^2 \mid (f : f') \stackrel{\text{def}}{\iff} (f : f') = X(X - 2)^2 \cdot q,$$

de donde se deduce que por lo menos (dado que no conoce q y tampoco importa ahora):

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ es por lo menos raíz simple de } f' \implies \text{es por lo menos raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ es por lo menos raíz doble de } f' \implies \text{es por lo menos raíz triple de } f \end{cases}.$$

Por lo tanto como en los ejercicios estos piden *menor grado*:

$$X^2(X - 2)^3$$

también serán factores de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- iii) Si $(f : X^3 - 1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:

$$X^3 - 1 \stackrel{!}{=} (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

tiene que aparecer en la factorización de f .

Parecido al ítem i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo de la raíz, para que no me queden coeficientes de f con componente imaginaria:

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1),$$

a priori me quedaría con el *factor de menor grado* siempre que eso no *rompa* otras condiciones, pero todavía no tomo la decisión ☺.

Por lo tanto:

$$(X - 1) \quad \text{o} \quad (X^2 + X + 1)$$

ya veremos cual, aparecerá en la factorización de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento juntando los resultados tengo 2 candidatos f_1 y f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108, \end{aligned}$$

ninguno es el 27 que quiero, así que hay que hacer algo más.

Para encontrar *un* polinomio **mónico** que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por:

$$f = f_2 \cdot (X - a) \quad \text{con } a \in \mathbb{Q}$$

de manera que pueda elegir el a para cumplir lo que quiero:

$$f(-1) = f_2(-1) \cdot (X - a) = 108 \cdot (-1 - a) = 27 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$


$$f = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \cdot (X + \frac{5}{4})$$

así cumpliendo todas las condiciones.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

 Ale Teran 

 4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$, esto nos da información sobre *raíces comunes* entre f y $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$. Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho **mónico** será el MCD.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1.$$

Las raíces del MCD son $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 3i$.

$$X^2 - X + 1 = \left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que $X^2 - X + 1 \mid f$, haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 & X^2 - X + 1 \\ -X^5 + X^4 - X^3 & X^3 + 3X^2 - 5X - 15 \\ \hline 3X^4 - 8X^3 - 7X^2 & \\ -3X^4 + 3X^3 - 3X^2 & \\ \hline -5X^3 - 10X^2 + 10X & \\ 5X^3 - 5X^2 + 5X & \\ \hline -15X^2 + 15X - 15 & \\ 15X^2 - 15X + 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Obtuvimos que:

$$f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0.$$

Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Gauss ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:


$$f \stackrel{!!!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en **!** te recomiendo que sigas mirando sin *spoiler de calculadora o del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Son puros casos de factorio que deberían verse a ojo.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1, los primos en el mundo de polinomios. Para tener una mejor explicación [clickeá acá!](#) Y vas a la teoría del apunte.

Factorizaciones:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 - 5) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3) \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3) \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X + 3) \cdot (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:



 naD  GarRaz

 Ale  Teran

5. Sea $(f_n)_{(n \geq 1)}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X + 2)^2 f'_n + 3f_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caer en la **trampilla**  de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e. $\text{mult}(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$ debe ocurrir lo "obvio", $f(-2) = f'(-2) = 0$ y también que $f''(-2) \neq 0$. Si olvidamos esto último solo probaríamos que la $\text{mult}(-1; f) \geq 2$ y tendríamos el ejercicio mal .

Por inducción en n :

$$p(n) : -2 \text{ es raíz doble de } f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_1$$

Derivar y evaluar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f_1(-2) = 0 \\ f'_1 = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f'_1(-2) = 0 \\ f''_1 = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f''_1(-2) = -54 \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto $\text{mult}(-2; f_1) = 2 \implies -2$ es raíz doble de $f_1 \implies p(1)$ resultó ser verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$

$$p(k) : \underbrace{-2 \text{ es raíz doble de } f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_{k+1}$$

también lo sea.

Sé que:

$$f_k \xleftrightarrow[\text{que}]{\text{cumple}} \begin{cases} f_k(-2) = 0 \star^1 \\ f'_k(-2) = 0 \star^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \star^3 \end{cases}$$

Laburo con f_{k+1} :

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3 \cdot f_k \\ f'_{k+1} = 2(X+2)f'_k + (X+2)^2 f''_k + 3 \cdot f'_k \\ f''_{k+1} = 2f'_k + (2X+4)f''_k + 2(X+2)f'''_k + (X+2)^2 f''''_k + 3 \cdot f''_k \end{cases}$$

Evaluar en -2 :

$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)^2} f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\star^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f'_{k+1}(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f'_k(-2) + \cancel{(-2+2)^2} f''_k + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\star^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f''_{k+1}(-2) \stackrel{?}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''_{k+1}(-2) = 2f'_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)^2} f'''_k(-2) + f''_k(-2) = 2 \underbrace{f'_k(-2)}_{=0 \star^2} + \underbrace{f''_k(-2)}_{\neq 0 \star^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

Por lo tanto $\text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \implies -2$ es raíz doble de $f_{k+1} \implies p(k+1)$ es verdadera también.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $q(k+1)$ resultaron verdaderas, por principio de inducción $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Dani Tadd 

 autor original

anónimo 

6.

- a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

- a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X \underbrace{(3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3)}_h$$

Por enunciado ignoramos la raíz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3$ y $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Rta: $n = 5$ es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raíz nula de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el ítem (a), que -3 es una de las raíces racionales de f . Busco otras posibles raíces racionales en el polinomio h (con $n = 5$) obtenido en el ítem (a) en el conjunto $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

$$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3} \text{ es una raíz racional de } f.$$

Factorizo el polinomio f dividiendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3) \cdot (X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X & \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto **irreducibles**.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en \mathbb{R} .

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en \mathbb{Q} .

7. Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- f es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
- $f(0) = 33$;

El dato de $\text{gr}(\overbrace{f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}^d_g) = 2$ indica que hay un polinomio, d , con $\text{gr}(d) = 2$ que cumple que $\begin{cases} d \mid f \\ d \mid 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \end{cases}$ entonces, f tiene 2 raíces en común con g . Estas raíces pueden ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de g usando *lema de gauss*:

Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.

$$\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} : \\ \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2} \right\}.$$

Probando esos valores encuentro que $g(\frac{1}{2}) = 0$ y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\ - 2X^3 + X^2 & \hline - 4X^2 - 20X & \\ 4X^2 - 2X & \hline - 22X + 11 & \\ 22X - 11 & \hline 0 & \end{array}$$

Hasta el momento:

$$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (2X^2 - 4X - 22) + 0,$$

buscamos raíces de $2X^2 - 4X - 22$:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$. Dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ voy a seleccionar las raíces que tienen número irracionales por la condición de grado mínimo. Recordar que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ tiene una raíz con números irracionales, también debe estar su conjugado irracional.

Con la condición que dice que f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble, no nos dejan muchas opciones. G_3 tiene tres raíces, solución de $w^3 = 1$, dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(Si no te acordás como encontrar raíces de la familia G_n te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas.

Ok, tengo esas dos raíces: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ¿Cuál elijo? ¡Cualquiera sirve! Porque, *nuevamente* ☹, como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes.

Hasta el momento tenemos:

$$f = \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1} (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1}}_{(X^2 + X + 1)^2} = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

\star^1 Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Nos queda cumplir que $f(0) = 33$, si bien ahora $f(0) = -11$. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es *mónico*, así que no podemos corregir el valor poniendo un coeficiente principal.

Hay que proponer otro factor en $\mathbb{Q}[X]$, que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es $(X - 3)$, dado que en 0 vale -3 y así $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$ como queremos.

El $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🐼

8.

a) Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \mid (f : f')$,
- f tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$,

b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1\star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en \mathbb{R} hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f \\ \text{y} \\ (X + i) \mid f \end{cases} \\ X^2 + 1 \mid f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f' \\ \text{y} \\ (X + i) \mid f' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^2 \mid f \\ \text{y} \\ (X + i)^2 \mid f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate [esto de las notas teóricas](#), para tener contexto. Básicamente si α es una raíz de f y también de f' , entonces es una raíz *por lo menos* doble de f .

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en \mathbb{Z} . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de G_3 ? Dejáme que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12 . Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a $1 \star^1$ para que sea raíz de f !! Y dado que $f \in \mathbb{R}[X]$

tenemos que elegir entonces ambas $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$. Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - a)(X - b) \\ &\stackrel{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - a)(X - b), \end{aligned}$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y $f(1) = -12$.

$$f(1) = -12 \stackrel{\star^2}{\iff} 12 \cdot (1 - a)(1 - b) = -12 \iff (1 - a)(1 - b) = -1 \stackrel{\substack{a \text{ y } b \\ \in \mathbb{Z}}}{\iff} a = 2 \text{ y } b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio


$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible [está acá](#).


$\mathbb{Q}[X]$	\rightarrow	$f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{R}[X]$	\rightarrow	$f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{C}[X]$	\rightarrow	$f = X(X - 2)(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2$

Notar que en \mathbb{Q} y en \mathbb{R} las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 **naD GarRaz** 

 **Dani Tadd** 

 **9.** Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- f comparte una raíz con $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$,
- $1 - 2i$ es raíz de f y $f'(1 - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios, f y $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$, comparten raíz buscamos raíces de g con el [lema de Gauss](#) de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f *mónico y de grado mínimo*: $A = \{\pm 1, \pm 5\}$, con $\alpha = 1 \implies g(1) = 0 \quad \checkmark$.

Como $\alpha = 1$ es raíz, entonces $X - 1 \mid g$:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & X - 1 \\ -X^3 + X^2 & \\ \hline -2X^2 + 7X & \\ 2X^2 - 2X & \\ \hline 5X - 5 & \\ -5X + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$, busco raíces del cociente $X^2 - 2X + 5$, usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \stackrel{\star^1}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$, por lo que $(-3 + \sqrt{2})$ es una raíz de f y dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ también **debe estar** el conjugado irracional $-3 - \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de f , por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Esa raíz es una de las que está en g^{\star^1} .

El dato de f' , también nos indica que la multiplicidad de $1 - 2i$ como raíz es por lo menos 2, ya que $f'(1 - 2i) = 0$, y por lo tanto $\text{mult}(1 + 2i; f)$ también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f :

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$

 **10.** Determinar todos los primos p positivos tales que el polinomio

$$f = pX^3 - X^2 + 13X - 1$$

tenga al menos una raíz racional positiva. Para cada valor de p hallado, factorizar f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

El **lema de Gauss** dice que las raíces racionales que el polinomio puede tener, tienen que estar en el conjunto de los divisores del *coeficiente principal* p y el *termino independiente* -1 :

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{7}, \dots, \pm \frac{1}{p} \right\}$$

Ahora hay que hacer cuentas para todos los primos y ver cuál funciona, *nah, mentira*. Si $\frac{1}{p}$ es raíz entonces hay que dividir ($p^{-1} = \frac{1}{p}$, boludeces, no!):

$$\begin{array}{r} pX^3 - X^2 + 13X \qquad -1 \mid X - p^{-1} \\ -pX^3 + X^2 \qquad \qquad \qquad \mid pX^2 + 13 \\ \hline 13X \qquad -1 \\ -13X \qquad + 13p^{-1} \\ \hline (-1 + 13p^{-1}) \end{array}$$

Y a esto hay que pedirle que el **resto sea 0**, porque $\frac{1}{p}$ es raíz racional:

$$-1 + \frac{13}{p} = 0 \Leftrightarrow p = 13$$

Si p tiene que ser primo y positivo entonces $p = 13$, usando el resultado de la división:


$$\begin{aligned} f = 13X^3 - X^2 + 13X - 1 &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{aligned}$$

Todo lindo las raíces:

$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1}{13} \\ X_2 &= i \\ X_3 &= -i \end{cases}$$

Y factorizado en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ queda.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Q}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{R}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{C}[X]: & f &= 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **11.** Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$ tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de k hallados, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Antes de empezar este ejercicio, estaría bueno que hagas un minuto de silencio por los que rindieron este examen...

1 minuto después

Si f tiene raíces múltiples, busco raíces en su derivada, f' :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow f' = 6r^5 + 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 \cdot (2r^3 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -2r^3$$

Entonces para el valor de una raíz r , tengo lo que tiene que valer k . Como tengo raíces múltiples, meto a r y el valor de k encontrado en f :

$$f(r) = 0 \xLeftrightarrow{k = -2r^3} r^6 - 2r^6 + 25 = 0 \Leftrightarrow r^6 = 25$$

Ese último resultado es G_6 con módulo $\sqrt[3]{5}$:

$$r_q = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi} \quad \text{con } q \in [0, 5]$$

Estos valores son las raíces de f , pero hay que ver para cuál valor de k :

$$k = -2(r_q)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } q \text{ es par} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{\text{par}}\pi})^3 = -10 \\ \text{si } q \text{ es impar} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{\text{impar}}\pi})^3 = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles para k :

$$k \in \{-10, 10\}$$

Hay 2 valores de k que formarán 2 polinomios distintos. Cada uno de esos polinomios tiene 3 raíces tanto de f como de f' por lo tanto las mencionadas raíces son raíces dobles de f .



Notar en el resultado de la derivada metiendo los valores de k :

$$f'_{-10}(r_{q_{\text{par}}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = 5 \quad \text{y} \quad f'_{10}(r_{q_{\text{impar}}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = -5.$$

A esta altura esas ecuaciones se resuelven solas y todas esas soluciones son la r_q de antes, *miti y miti*.

Tengo entonces que factorizar 2 polinomios f :

$$f_{-10} = X^6 - 10X^3 + 25 \quad \text{y} \quad f_{10} = X^6 + 10X^3 + 25$$

 Aportá con correcciones, mandando ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

Factorizo f_{-10} :

El valor $k = -10$ tiene asociadas las raíces con q par:

$$\left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Que cosa horrible esto:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{-10} &= X^6 - 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 - 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left((X - \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)\right)^2 = \left(X - \sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \left(X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2\right)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left(X - \sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Factorizo f_{10} :

El valor $k = 10$ tiene asociadas las raíces con q impar:

$$\left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} = \left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Esto es igual de horrible, pero solo *hay que cambiar un par de signos a lo de antes*:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{10} &= X^6 + 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 + 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left((X + \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)\right)^2 = \left(X + \sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \left(X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2\right)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left(X + \sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **12.** Factorizar como producto de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X]$ el polinomio

$$f(X) = X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X].$$

Busco una raíz:

$$f(i) = i^4 + i^3 + i + 2 = 1 - i + i + 2 = 3 \stackrel{(3)}{\equiv} 0$$

El conjugado de i también, es raíz, por lo tanto bajo el grado del polinomio dividiendo por

$$(X - i) \cdot (X + i) = X^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 X^4 + X^3 + X + 2 \quad | \quad X^2 + 1 \\
 - X^4 \quad - X^2 \quad \quad \quad \\
 \hline
 X^3 - X^2 + X \quad \quad \quad \\
 - X^3 \quad - X \quad \quad \quad \\
 \hline
 - X^2 + 2 \quad \quad \quad \\
 X^2 + 1 \quad \quad \quad \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$X^4 + X^3 + X + 2 = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X - 1) + 3 \stackrel{(3)}{\equiv} (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 2) + 0$$

Al buscar las raíces de $(X^2 + X + 2)$, con la resolvente:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Raíces que no tienen número enteros, así que no van a figurar en la factorización.

Nos piden factorización en $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ por lo que:

$$f(X) = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 2)$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **13.** Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ el polinomio mónico de grado mínimo que satisface simultáneamente

- $X^2 + 2X + 5$ divide a $(f : f')$,
- $X^2 - 4X + 1$ divide a $(f : f'')$,
- $f'(2 - \sqrt{3}) = 0$.

Hallar la factorización de f en $\mathbb{C}[X]$, en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{Q}[X]$.

Acomodo un poco el enunciado:

$$\begin{aligned}
 X^2 + 2X + 5 &\stackrel{!}{=} (X - (-1 + 2i)) \cdot (X - (-1 - 2i)) \\
 X^2 - 4X + 1 &\stackrel{!}{=} (X - (2 + \sqrt{3})) \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))
 \end{aligned}$$

Tengo que $2 - \sqrt{3}$ por lo menos es triple ya que por la segunda y tercera condición:

$$\begin{array}{l}
 (X - (2 - \sqrt{3})) \mid f, \\
 (X - (2 - \sqrt{3})) \mid f' \quad \text{por tercera condición} \\
 \text{y} \\
 (X - (2 - \sqrt{3})) \mid f'' \quad \text{por segunda condición}
 \end{array}$$

Las raíces complejas $-1 + 2i$ y $-1 - 2i$ son por lo menos dobles.

Para que se cumpla la segunda condición las 2 raíces irracionales van a tener que tener la misma multiplicidad.

Factorización en $\mathbb{Q}[X]$:


$$f = (X^2 + 2X + 5)^2 \cdot (X^2 - 4X + 1)^3$$

Factorización en $\mathbb{R}[X]$:

$$f = (X^2 + 2X + 5)^2 \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))^3 \cdot (X - (2 + \sqrt{3}))^3$$


Factorización en $\mathbb{C}[X]$:

$$f = (X - (-1 + 2i))^2 \cdot (X - (-1 - 2i))^2 \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))^3 \cdot (X - (2 + \sqrt{3}))^3$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

 Olivia Portero 

 14. Sea $f = X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

- Probar que $f \mid X^{30} - 1$
- Hallar el polinomio $g \in \mathbb{R}[X]$ mónico de grado mínimo tal que $f \mid g$.

Antes de empezar:

Recordad que los elementos de G_n son de la forma $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ahora sí:

- Las raíces de f :

$$X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0 \Leftrightarrow X^5 = e^{i\frac{\pi}{3}} \stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X \in \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\}$$

Si $X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \mid X^{30} - 1$, entonces las raíces de f también deben ser raíces de $X^{30} - 1$.

Observad que esas raíces son elementos de G_{30} si acomodo esas raíces:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{esos argumentos}]{\times, \div 2} \left\{ e^{i\frac{2}{30}\pi}, e^{i\frac{14}{30}\pi}, e^{i\frac{26}{30}\pi}, e^{i\frac{38}{30}\pi}, e^{i\frac{50}{30}\pi} \right\}$$


Las raíces de :

$$X^{30} - 1 = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X \in G_{30}$$

Todas la raíces de f están en G_{30} , así que $f \mid X^{30} - 1$

Otra forma de mostrarlo:

Versión de galera y bastón:

La versión más elegante, pero que no se me ocurre primero ni a palos (mirá el ejercicio 8 ): Sabemos que:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid x^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 \xrightarrow{x \rightarrow X^5} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid (X^5)^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$$

$$\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid X^{30} - 1$$

Por ende el polinomio f divide a $X^{30} - 1$.

- $f \mid g$ Las raíces de f son todas complejas, así que voy a necesitar los conjugados para tener un $g \in \mathbb{R}[X]$. Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2 \star^1$$

Las raíces son:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{25}{15}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{conjugados}]{\text{agrego los}} \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{1}{3}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{11}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{17}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{23}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi}, e^{i\frac{29}{15}\pi} \right\}$$

Armo el polinomio con esta bosta usando la expresión en \star^1 :

$$g = (X^2 - 2\cos(\frac{1}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{1}{3}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{7}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{11}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2\cos(\frac{13}{15}\pi) + 1)$$

Listo? Esto es la respuesta? *Tengo miedo, estoy cansado, jefe.*

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

🔥15. Factorice en irreducibles de $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32,$$

sabiendo que tiene alguna raíz en común con $g = x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10$.

Como los polinomios comparten una raíz, sé que $(f : g) \neq 1$. Usando al crack, titán de Euclides busco:

$$(f : g) \text{ dado que } (f : g) \mid f \text{ y } (f : g) \mid g$$

y de ahí voy a sacar las raíces hermosas esas que tanto necesito.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 & x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 \\ -x^5 + x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 10x & \hline -3x^4 + 3x^3 + 28x^2 + 50x + 32 & \\ 3x^4 - 3x^3 - 27x^2 - 48x - 30 & \hline x^2 + 2x + 2 & \end{array}$$

$(f : g) = (x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 : x^2 + 2x + 2)$, sigo con Euclides:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 & x^2 + 2x + 2 \\ -x^4 + 2x^3 + 2x^2 & \hline -3x^3 - 11x^2 - 16x & \\ 3x^3 + 6x^2 + 6x & \hline -5x^2 - 10x - 10 & \\ 5x^2 + 10x + 10 & \hline 0 & \end{array}$$

Este último resultado confirma que:

$$(f : g) = x^2 + 2x + 2 \stackrel{!!}{=} (x - (-1 + i)) \cdot (x - (-1 - i))$$

Reduzco a f para buscar más raíces:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 & x^2 + 2x + 2 \\ -x^5 + 2x^4 + 2x^3 & \hline -6x^4 - 8x^3 + 12x^2 & \\ 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 & \hline 4x^3 + 24x^2 + 40x & \\ -4x^3 - 8x^2 - 8x & \hline 16x^2 + 32x + 32 & \\ -16x^2 - 32x - 32 & \hline 0 & \end{array}$$

De esta manera puedo escribir:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^3 - 6x^2 + 4x + 16)$$

☹ con el *lema de Gauss* posibles raíces de:

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 16 \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}.$$

De las cuales funciona el 4 ☹.

🐼 Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

[Ir al índice ↑](#)

Vuelvo a dividir ☹:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 4x + 16 & x - 4 \\ -x^3 + 4x^2 & \\ \hline -2x^2 + 4x & \\ 2x^2 - 8x & \\ \hline -4x + 16 & \\ 4x - 16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Podemos reescribir ☹:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$$

☹ el último factor tiene raíces $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$ y ya escribo f en la factorizaciones pedidas:

f	$= (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$	$\in \mathbb{Q}[X]$
f	$= (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{R}[X]$
f	$= (x - (-1 + i)) \cdot (x - (-1 - i)) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{C}[X]$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 naD GarRaz 📧

👋 Nico Alegre 📧

🔥16. [final 09/04/2024] Hallar todos los números $a \in \mathbb{Q}$ para los cuales $f = X^5 - aX^4 + X^3 - aX^2 + X - a$ y $g = 2x^3 - 4x^2 + 11/2x - 2$ no son coprimos. Factorizar a f como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

☹... hay que hacerlo! ☹

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📧, o mejor aún si querés subirlo en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ → [una pull request](#) al 📧.

🔥17. [final 04/03/24] Hallar $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ de forma tal que el polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ dado por

$$f = x^5 - (4i - 4)x^4 - (16i + 8)x^3 + (16i - 11)x^2 - (20i - 16)x - a$$

tenga una raíz entera. Para el o los valores de a hallados, dar la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$ si además se sabe que $(f : x^6 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ y su grado es mayor que 1.

Para que un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ tenga una raíz $r \in \mathbb{Z}$, debe ocurrir que:

$$f(r) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(f(r)) = 0 \wedge \text{Im}(f(r)) = 0$$



Ojo que ese razonamiento es válido porque $r \in \mathbb{Z}$ si no eso no tiene por qué cumplirse.
Dado podría haber una componente imaginaria dentro de r



Después de hacer las cuentas queda el sistemita:

$$\begin{cases} \text{Re}(f(r)) &= r^5 + 4r^4 - 8r^3 - 11r^2 + 16r - a = 0 & \star^1 \\ \text{Im}(f(r)) &= -4r^4 - 16r^3 + 16r^2 - 20r = 0 & \star^2 \end{cases}$$

Ataco \star^2 porque no tiene la a :

$$\begin{aligned} -4r^4 - 16r^3 + 16r^2 - 20r &= 0 & \Leftrightarrow & -4r \cdot (r^3 + 4r^2 - 4r + 5) = 0 \\ & & \Leftrightarrow & -4r \cdot (r + 5) \cdot \underbrace{(r^2 - r + 1)}_{(r - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (r - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))} \star^3 = 0 \\ & & \xLeftrightarrow[r \in \mathbb{Z}] & r \in \{0, -5\} \end{aligned}$$

Esos valores de r , también deben anular a $\text{Re}(f)$ lo cual sucede para los valores de a :

$$\begin{aligned} r = 0 &\rightarrow \text{Re}(f(0)) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 0} \\ r = -5 &\rightarrow \text{Re}(f(-5)) = 0 \Leftrightarrow 20 - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 20} \end{aligned}$$

Hasta el momento quedarían dos posibles f :

$$\boxed{f_{-5} = x^5 - (4i - 4)x^4 - (16i + 8)x^3 + (16i - 11)x^2 - (20i - 16)x - 20}$$

En la parte del dato del MCD, $d = (f : x^6 - 1)$ que tenga coeficientes \mathbb{Q} y grado mayor que uno, nos da info sobre las raíces comunes que tienen f y $x^6 - 1$. Estudio el polinomio ese, que sé que sus raíces forman G_6 :

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &\stackrel{!}{=} (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1) \\ &\stackrel{!}{=} (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \\ &\stackrel{!}{=}_{G_6} (x - 1) \cdot (x - (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x + 1) \cdot (x - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{aligned}$$

Del resultado para calcular a , sé que ni 1 ni -1 son raíces de f porque son números enteros por lo tanto y dado que $d \in \mathbb{Q}[x]$:

$$d \in \left\{ (x^2 - x + 1), (x^2 + x + 1), \underbrace{(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)}_{x^4 + x^2 + 1} \right\}$$

El $d = x^4 + x^2 + 1$ no puede ser, porque f en \star^4 no daría ni a palos.



No veo escapatoria a tener que hacer cuentas feas



En \star^3 medio de *pedo* apareció $x^2 - x + 1$, lo cual es un candidato a funcionar. Tengo que comprobar que:

$$\underbrace{x^3 + 4x^2 - 4x + 5}_{(x+5) \cdot (x^2 - x + 1)} \mid f$$

Y ahora dividido por eso rezo

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrr} x^5 + (4 + -4i)x^4 + (-8 + -16i)x^3 + (-11 + 16i)x^2 + (16 + -20i)x - 20 \\ - x^5 & - 4x^4 & + 4x^3 & - 5x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \\ x^2 - 4ix - 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} - 4ix^4 + (-4 + -16i)x^3 + (-16 + 16i)x^2 + (16 + -20i)x & & & \\ 4ix^4 & + 16ix^3 & - 16ix^2 & + 20ix \end{array} & \\ \hline \begin{array}{rrrr} - 4x^3 & - 16x^2 & + 16x - 20 & \\ 4x^3 & + 16x^2 & - 16x + 20 & \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

El cociente es un cuadrado de binomio:

$$x^2 - 4ix - 4 = (x - 2i)^2$$

Finalmente:

$$\boxed{f = (x + 5) \cdot (x - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - 2i)^2}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

Tizi S. F.