

# Apunte Único: Álgebra I - Práctica 7

Por alumnos de Álgebra I  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

última actualización 08/11/25 @ 22:55

*Choose your destiny:*

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas

- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.

- Ejercicios de Parciales

1.	4.	7.	10.	13.	16.
2.	5.	8.	11.	14.	17.
3.	6.	9.	12.	15.	

## Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

## ¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

- 1** Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 2** Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 3** ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 4** Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 5** Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠+. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

*Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda*, no te van a salir los ejercicios más difíciles: [Sentido común](#).

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:  
de [Teresa que son buenísimos](#) .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:  
[Prácticas Pandemia](#) .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre [Just Do IT](#) !

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado...  va a salir todo bien!

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por última vez:

08/11/25 @ 22:55

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 7



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:**

- *Operaciones:*

$$\begin{aligned}
 + : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i \\
 \implies f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 \cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j \\
 \implies f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]
 \end{aligned}$$

- *Algoritmo de división:*

$f, g \in \mathbb{K}[X]$  no nulos, existen únicos  $q$  y  $R \in \mathbb{K}[X]$  tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con  $\text{gr}(R) < \text{gr}(f)$  o  $R = 0$ .

- *Raíz de un Polinomio:*

$$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

- *Máximo común divisor:*

Polinomio,  $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$ , mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en  $\mathbb{K}[X]$  y vale el algoritmo de Euclides.

- $(f : g) \mid f$  y  $(f : g) \mid g$
- $f = (f : g) \cdot k_f$  y  $g = (f : g) \cdot k_g$  con  $k_f$  y  $k_g$  en  $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si  $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:*

Sea  $f \in \mathbb{K}[x]$  no nulo, y sea  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Se dice que:

- Cuando  $f$  tiene una raíz múltiple:

$$\begin{aligned}
 \alpha \text{ es raíz } \textit{múltiple} \text{ de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q \\
 f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) = 0.
 \end{aligned}$$

- Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

$$\begin{aligned}
 \alpha \text{ es raíz } \textit{simple} \text{ de } f \iff (X - \alpha) \mid f \text{ y } (X - \alpha)^2 \nmid f \\
 f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea  $m \in \mathbb{N}_0$ . Se dice que  $\alpha$  es raíz de multiplicidad (exactamente)  $m$  de  $f$ , y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X], \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

• *Raíces y MCD:*

Sean  $f, g \in \mathbb{K}[X]$  no ambos nulos, y  $\alpha \in \mathbb{K}$ : Esta se usa bastante.

$$\implies f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

•  $\alpha$  es raíz múltiple de  $f$  si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad y \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

• La multiplicidad  $m$  de una raíz, será  $m - 1$  en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad y \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

• Relación entre la multiplicidad de una raíz de  $f$  y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \quad \text{la } m\text{-ésima derivada no se anula.}$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz  $\alpha$  de  $f$

triple entonces la **tercera derivada NO PUEDE SER 0**,  $f'''(\alpha) \stackrel{!!}{\neq} 0$ .

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0,  $f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

• *Lema de Gauss:*

Sea  $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$  con  $a_0 \neq 0$ . Si  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$  es una raíz racional de  $f$ , con  $\alpha \mid a_0$  y  $\beta \mid a_n$ .

El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles  $\frac{\alpha}{\beta}$  están **todas** las raíces racionales de  $f$ .

• Polinomios irreducibles:

Sea  $f \in K[X]$

- Se dice que  $f$  es *irreducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y los únicos divisores de  $f$  son de la forma  $g = c$  o  $g = cf$  para algún  $c \in K^\times$ . O sea  $f$  tiene únicamente dos divisores monicos (distintos), que son 1 y  $\frac{f}{\text{cp}(f)}$
- Se dice que  $f$  es *reducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  con  $g \neq c$  y  $g \neq cf$ ,  $\forall c \in K^\times$ , es decir  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  (no nulo por definición) con  $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$ .

**Ejercicios de la guía:**

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$ :

- i)  $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$ ,
- ii)  $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$ ,
- iii)  $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$ ,

i) *coeficiente principal:*  $4^{77}$

*grado:*  $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:*  $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

*grado:* 28

iii) *coeficiente principal:*  $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda:

$$\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0,$$

esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término  $X^{20}$ . Tengo entonces  $\text{gr}(f^4 + g) < 20$

Calculo el  $\text{cp}(f^4 + g)$  con  $\text{gr}(f^4 + g) = 19$ .

Laburo a  $f$ :

$$\begin{aligned} f^4 &= (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + 1X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 &= \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_j \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente} \quad \star^2 \\ &\qquad\qquad\qquad \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \end{aligned}$$

En esa sumatoria fea, solo me interesa el término con  $k = 19$

$$\sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} (a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9) X^{19} \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} X^{19}$$

Hay que resolver esas ecuaciones. Primero a *ojímetro saco*  $b_{10}$ :

$$b_{10} = (-3)^2 = 9$$

$a_9$  no es tan fácil. Hay que volver a usar  $\sum f \cdot g$  en  $k = 9$ :

$$f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left( \sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow[\text{término } k=9]{\text{quiero el}} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} (c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4) X^9 \stackrel{\star^2}{=} (2 \cdot c_4 \cdot d_5) X^9$$

Parecido a antes primero calculo  $d_5$  y  $c_4$  a *ojímetro*:

$$d_5 = -3 \quad \text{y} \quad c_4 = 1$$

Vuelvo el foco a  $a_9$ :

$$a_9 = 2 \cdot 1 \cdot -3 = -6$$

Los coeficientes principales:

$$\begin{cases} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot 9 = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

★<sup>1</sup>: Sabemos que el  $\text{gr}(f^4) = 20 \implies \text{gr}(f^2) = 10$ . Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las  $X$  sumen 19, es decir  $X^i \cdot X^j = X^{19}$  con  $i, j \leq 10$  solo puede ocurrir *cuando los exponentes*  $\begin{cases} i = 10, j = 9 \\ i = 9, j = 10 \end{cases}$

★<sup>2</sup>: Porque estoy multiplicando el mismo polinomio,  $a_i = b_i$ . Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

★<sup>3</sup>: Idem ★<sup>1</sup> para el polinomio  $f$

*grado: 19*

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

2. Calcular el coeficiente de  $X^{20}$  de los siguientes polinomios

- i)  $(X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$  en  $\mathbb{Q}[X]$  y en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$
- ii)  $(X - 3i)^{133}$  en  $\mathbb{C}[X]$
- iii)  $(X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$  en  $\mathbb{Q}[X]$
- iv)  $X^{10}(X^5 + 4)^7$  en  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$

- i) Expandimos el polinomio y nos fijamos:

$$(X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^{23} + X^{22} + 2X^{21} + 2X^{20} + 2X^{19} + 3X^{18} + X^{17} + X^{16} + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Para  $\mathbb{Q}[X]$  el coeficiente es 2 y para  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$  es 0 pues  $2 \equiv 0 \pmod{2}$

- ii) Consideramos el binomio de newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Aplicamos el binomio a el ejercicio:

$$(X + (-3i))^{133} = \sum_{k=0}^{133} \binom{133}{k} X^k \cdot (-3i)^{133-k}$$

Ahora queremos ver el coeficiente de  $X^{20}$ , es decir cuando en la sumatoria  $k = 20$ , se ve que el coeficiente que acompaña a la  $X$  es  $\binom{133}{20} \cdot (-3)^{113} \cdot i$

- iii) Consideraremos el binomio de newton para los primeros dos términos:

$$(X - 1)^4(X + 5)^{19} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} X^k \cdot (-1)^{4-k} \cdot \sum_{j=0}^{19} \binom{19}{j} X^j \cdot 5^{19-j}$$

Nos interesa cuando el coeficiente de la  $X$  sea 20, es decir las combinaciones de  $k$  y  $j$  tal que  $k + j = 20$ . Esas posibles combinaciones son  $(j, k) = (19, 1), (18, 2), (17, 3), (16, 4)$ .

$$\begin{aligned} \text{Caso } (19, 1) : & \binom{19}{19} X^{19} \cdot 5^{19-19} \cdot \binom{4}{1} X^1 \cdot (-1)^{4-1} = -4X^{20} \\ \text{Caso } (18, 2) : & \binom{19}{18} X^{18} \cdot 5^{19-18} \cdot \binom{4}{2} X^2 \cdot (-1)^{4-2} = 570X^{20} \\ \text{Caso } (17, 3) : & \binom{19}{17} X^{17} \cdot 5^{19-17} \cdot \binom{4}{3} X^3 \cdot (-1)^{4-3} = -17100X^{20} \\ \text{Caso } (16, 4) : & \binom{19}{16} X^{16} \cdot 5^{19-16} \cdot \binom{4}{4} X^4 \cdot (-1)^{4-4} = 121125X^{20} \end{aligned}$$

Luego comparando el resto de coeficientes de  $X^{20}$  del polinomio tenemos que los coeficientes suman:

$$-4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = \boxed{104586}$$

- iv) Del polinomio nos interesa solo la parte de la derecha cuando el coeficiente de  $X$  sea 10, así al multiplicarse por el  $X^{10}$  el grado se hace 20.

Hacemos la expansión binomial:

$$(X^5 + 4)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (X^5)^k \cdot 4^{7-k}$$

Queremos  $k = 2$ , ahí el coeficiente de  $X^{10}$  sería  $\binom{7}{2} \cdot 4^5 = 21 \cdot 1024 = 21504 \stackrel{(5)}{\equiv} \boxed{4}$

Finalmente ese coeficiente que acompaña a  $X^{10}$  se multiplica por el otro  $X^{10}$ , siendo el coeficiente de  $X^{20}$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ sigfripro 🤝

3. Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que:

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| i) $f^2 = Xf + X + 1,$     | iii) $(X + 1)f^2 = X^6 + Xf,$                                       |
| ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1,$ | iv) $f \neq 0 \quad \text{y} \quad f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f.$ |

- i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de  $X$ , así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f - 1) \cdot (f + 1) = X \cdot (f + 1) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f + 1) \cdot (f - (X + 1)) = \underset{g}{\downarrow} 0$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es  $g = 0$ . Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de  $X$ , el miembro izquierdo también tiene que ser 0 para todo valor de  $X$ . Eso ocurre cuando:

$$f = -1 \quad \text{o} \quad f = X + 1$$

- ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener  $f$ :

■<sub>1</sub>) ¿Puede ser  $\text{gr}(f) = 0$ ?

$$f = k \implies k^2 - X \cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

■<sub>2</sub>) ¿Puede ser  $\text{gr}(f) = 1$ ?

$$f = bX + c \implies b^2 X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1,$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomio igual en ambos miembros de la ecuación.

■<sub>3</sub>) ¿Puede ser  $\text{gr}(f) = 2$ ?

$$f = aX^2 + bX + c \stackrel{!}{\Rightarrow} (aX^2 + b^2X + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con  $\text{gr}(4)$  y el izquierdo con  $\text{gr}(2)$ , así que no hay  $f$ , bla, bla, bla.

■<sub>4</sub>) ¿Puede ser  $\text{gr}(f) \geq 3$ ? Diría que no por razones muy interesantes.

- iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que  $f$  sea algo que cancele el  $X^6$

$$\text{gr}((X+1) \cdot f^2) = \text{gr}(X \cdot (X^5 + f)) \Leftrightarrow \text{gr}(X+1) + \text{gr}(f^2) = \text{gr}(X) \cdot \text{gr}(X^5 + f) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \underbrace{2 \cdot \text{gr}(f)}_{\text{par}} \stackrel{\star^1}{=} \text{gr}(X^5 + f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\begin{array}{lll} \text{si } \text{gr}(f) < 5 & \implies \text{gr}(X^5 + f) = 5 & \star^2 \\ \text{si } \text{gr}(f) = 5 & \implies \text{gr}(X^5 + f) \leq 5 & \star^3 \\ \text{si } \text{gr}(f) > 5 & \implies \text{gr}(X^5 + f) = \text{gr}(f) & \star^4 \end{array}$$

Entonces no tenemos un valor para el grado de  $f$  en el que haya un balance en la ecuación  $\star^1$ , porque:

$\star^2$  El miembro derecho de  $\star^1$  tendría un valor par así que descartado.

$\star^3$  El miembro derecho de  $\star^1$  tendría un grado igual a 10 así que descartado.

$\star^4$  El miembro derecho de  $\star^1$  tendría un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

- iv) Si  $f \neq 0$ :

$$f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f \stackrel{!}{\Leftrightarrow} f \cdot (f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado  $f \neq 0$ , para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:

$$(f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \text{gr}(f^2) = \text{gr}(\text{gr}(f) \cdot X^2) = 2 \Leftrightarrow 2 \text{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \text{gr}(f) = 1$$

Entonces  $\text{gr}(f) = 1 \implies f = aX$ , evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de  $a$ :

$$a^3 \cdot X^3 = 1 \cdot X^2 \cdot aX = aX^3 \Leftrightarrow a \cdot (a^2 - 1)X^3 = 0 \xrightarrow[\stackrel{\implies a \neq 0}{\text{si } f \neq 0}} \begin{cases} a = 1 \\ \text{y} \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios  $f$  que cumplen son:

$$f = -X \quad \text{y} \quad f = X$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

👉 Ramiro E. 🎉

4. Hallar el cociente y el resto de la división de  $f$  por  $g$  en los casos

- i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$  y  $g = X^2 + 2$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- ii)  $f = 4X^4 + X^3 - 4$  y  $g = 2X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ ,
- iii)  $f = X^n - 1$  y  $g = X - 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

i)

$$\begin{array}{r}
 5X^4 + 2X^3 \\
 - 5X^4 \quad - 10X^2 \\
 \hline
 2X^3 - 10X^2 \quad - X \\
 - 2X^3 \quad - 4X \\
 \hline
 - 10X^2 - 5X \quad + 4 \\
 10X^2 \quad + 20 \\
 \hline
 - 5X + 24
 \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ 

ii)

$$\begin{array}{r}
 4X^4 + X^3 \\
 - 4X^4 \quad - 2X^2 \\
 \hline
 X^3 - 2X^2 \\
 - X^3 \quad - \frac{1}{2}X \\
 \hline
 - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\
 2X^2 \quad + 1 \\
 \hline
 - \frac{1}{2}X - 3
 \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ 

En  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

*Inducción:* Quiero probar que:

$$p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

$$p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \implies p(1)$$

Entonce,  $p(1)$  es Verdadero*Paso inductivo.*

Asumo que:

$$p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ es Verdadera.}$$

Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j$$

también lo sea. Arranco las cuentulitis:

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j + (X - 1) \cdot X^k \stackrel{\text{II}}{=} X^k - 1 + X^{k+1} - X^k = X^{k+1} - 1$$

Dado que  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $p(k + 1)$  resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera  $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:  
y **naD GarRaz** 

---

5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que

- $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$ ,
- $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$ ,
- El resto de la división de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$ .

- i) Haciendo la división de  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$  tiene que ocurrir que el resto sea 0.  
O sea,

$$\begin{aligned} X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 &\iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Luego, el valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  es divisible por  $X^2 + aX + 1$  es  $a = 1$ .

- ii) Θ... hay que hacerlo! 

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) , o mejor aún si querés subirlo en LATEX → [una pull request](#) al .

- iii) Haciendo la división de:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 \text{ por } X^2 + aX + 1,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 &= q \cdot (X^2 + aX + 1) + \overset{\text{resto}}{r} \\ \text{con } \begin{cases} q &= (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1) \\ r &= (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora viene la igualación de polinomios para encontrar ese valor de  $a$ :

$$\begin{aligned} r = -8X + 4 &\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4 \\ &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \star^1 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \star^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

$$\star^2 \quad a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$$

Veo que  $a = -2$  es solución, por lo que divido  $a^3 - 5a - 2$  por  $a + 2$  con Ruffini:

		1	0	-5	-2	
-2		-2	4	2		
		1	-2	-1	0	

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1).$$

Busco las raíces de  $a^2 - 2a - 1$  con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$\star^1$   $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$ . Me fijo que valores de  $a$  obtenidos antes verifican:

- Si  $a = -2 \implies (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si  $a = 1 + \sqrt{2} \implies (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si  $a = 1 - \sqrt{2} \implies (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que el resto de dividir a  $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$  es  $a = -2$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Autor original 

naD GarRaz 

**6.** Definición: Sea  $K$  un cuerpo y sea  $h \in K[X]$  un polinomio no nulo. Dados  $f, g \in K[X]$ , se dice que  $f$  es congruente a  $g$  módulo  $h$  si  $h \mid f - g$ . En tal caso se escribe  $f \equiv g \pmod{h}$ .

- Probar que  $\equiv \pmod{h}$  es una relación de equivalencia en  $K[X]$ .
- Probar que si  $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$  y  $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$  entonces  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$   $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$ .
- Probar que si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $f^n \equiv g^n \pmod{h}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Probar que  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y solo si  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  o  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: ¿Es  $f$  congruente a  $f$  módulo  $h$ ?

$$f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0$$

La relación es *reflexiva*, porque todo polinomio divide al 0.

- *simétrica*: Si  $f \equiv g (h) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} g \equiv f (h)$

$$f \equiv g (h) \Leftrightarrow h | f - g \Leftrightarrow h | -(g - f) \Leftrightarrow h | g - f \Leftrightarrow g \equiv f (h)$$

La relación es *simétrica*.

- *transitiva*: Si

$$\begin{cases} f \equiv g (h) \\ g \equiv p (h) \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} f \equiv p (h).$$

$$\begin{cases} h | f - g \\ h | g - p \end{cases} \xrightarrow[\rightarrow F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h | f - g \\ h | f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p (h)$$

También resultó ser *transitiva*.

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en  $K[X]$

- ii) Si

$$\begin{cases} f_1 \equiv g_1 (h) \\ f_2 \equiv g_2 (h) \end{cases} \star^1,$$

entonces

$$f_1 \equiv g_1 (h) \Leftrightarrow h | f_1 - g_1 \stackrel{!}{\Rightarrow} h | f_2 \cdot (f_1 - g_1) \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2 (h) \stackrel{\star^1}{\Leftrightarrow} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 (h).$$

Y así queda demostrado.

- iii) *Inducción*: Quiero probar que:

$$p(n) : \text{Si } f \equiv g (h) \Rightarrow f^n \equiv g^n (h) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Caso base*:

$$p(1) : f^1 \equiv g^1 (h) \quad \star^2$$

Por lo tanto  $p(1)$  resultó verdadera.

*Paso inductivo*:

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$ :

$$p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k (h)}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces quiero probar que para  $k + 1$ :

$$p(k + 1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h)$$

también lo sea.

$$f^k \equiv g^k (h) \Leftrightarrow h | f^k - g^k \Rightarrow h | f \cdot (f^k - g^k) \Leftrightarrow f^{k+1} \equiv f \cdot g^k (h) \stackrel{\star^2}{\Leftrightarrow} f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h)$$

De esta manera  $p(k + 1)$  también es verdadera.

Finalmente  $p(1), p(k)$  y  $p(k + 1)$  resultaron verdaderas y por el principio de inducción  $p(n)$  es verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$

- iv) Quiero probar que:

$$f = d \cdot h + r \Leftrightarrow f \equiv r (h) \wedge (r = 0 \vee \text{gr}(r) < \text{gr}(h))$$

( $\Rightarrow$ )

$$f = d \cdot h + r \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \equiv r (h)$$

Por hipótesis  $r$  es el resto de la división, por condición de resto se va a tener que cumplir que:

$$r = 0 \quad \text{o} \quad \text{gr}(r) < \text{gr}(h)$$

( $\Leftarrow$ ) Tenemos dos casos que ver:  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  y  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

Notar que el caso en el que el  $\vee$  incluya las dos condiciones ya está tomado en cuenta cuando  $r = 0$  pues si eso ocurre automáticamente  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

$$f \equiv r \pmod{h} \wedge r = 0 \implies f = d \cdot h + r$$

Cuando  $r = 0$ , la congruencia va a ser  $f \equiv 0 \pmod{h}$ , luego por definición de la congruencia se llega a que  $f = d \cdot h + 0$

$$f \equiv r \pmod{h} \wedge \text{gr}(r) < \text{gr}(h) \implies f = d \cdot h + r$$

Por definición de la congruencia llegamos a que  $f = d \cdot h + r$ , luego sabemos que  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$  es la condición que tiene que tener el resto (por definición), luego  $r$  es el resto, como se quería ver.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ nad GarRaz ⚡

⭐ sigfipro ⚡

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $g$  para:

- i)  $f = X^{353} - X - 1$  y  $g = X^{31} - 2$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- ii)  $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$  y  $g = X^6 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- iii)  $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$ , y  $g = X^{100} - X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- iv)  $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$ , y  $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$   
(Sugerencia ver 4. iii)).

- i) Busco una expresión para sustituir luego en la definición de división:

$$g \mid g \stackrel{\text{def}}{\iff} X^{31} - 2 \equiv 0 \pmod{(X^{31} - 2)} \Leftrightarrow X^{31} \equiv 2 \pmod{g} \star^1$$

Ese resultado se puede usar así:

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\substack{\equiv^1 \\ \star^1}})^{11} \equiv 2^{11}X^{12} - X - 1 \pmod{g}$$

Finalmente:

$$r_g(f) = 2^{11}X^{12} - X - 1$$

- ii) Al igual que antes:

$$g \mid g \stackrel{\text{def}}{\iff} X^6 + 1 \equiv 0 \pmod{(X^6 + 1)} \Leftrightarrow X^6 \equiv -1 \pmod{g} \star^1$$

Puedo usar eso así:

$$\begin{aligned} f &= X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 \\ &= (X^6)^{166}X^4 + (X^6)^6X^4 + (X^6)^3X^2 + 1 \\ &\stackrel{\text{def}}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1$$

¿Qué onda en  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ ?

$$\begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \frac{X^2 + 1}{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \frac{X^2 + 1}{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$$

iii)

$$g \mid g \stackrel{\text{def}}{\iff} X^{100} - X + 1 \equiv 0 \quad (X^{100} - X + 1) \Leftrightarrow X^{100} \equiv X - 1 \quad (g) \star^1$$

Sopa

$$\begin{aligned} f &= X^{200} - 3X^{101} + 2 \\ &= (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \\ &\stackrel{(g)}{\equiv} (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2 \\ &\stackrel{\star^1}{=} \end{aligned}$$

Tonces:

$$r_g(f) = (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$$

iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4.iii) sale que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

Con  $n = 5$ :

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X - 1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_{g \star^1} \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} (g) \star^2 \end{aligned}$$

Usando ese resultado de congruencia, reescribo  $f$ :

$$\begin{aligned} f &= (X^5)^{603}X + 2(X^5)^{366}X^3 - (X^5)^{34}X^4 + (X^5)^{27}X^2 + 2X^4 - X^3 + 1 \\ &\stackrel{(g)}{\equiv} \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g \star^1} (g) \\ &\stackrel{\star^2}{=} 0 \quad (g) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$f \equiv 0 \quad (g)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤝

👉 M Poncini 🤝

8. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{K}$ .

- i) Probar que  $X - a \mid X^n - a^n$  en  $\mathbb{K}[X]$ .
- ii) Probar que si  $n$  es impar entonces  $X + a \mid X^n + a^n$  en  $\mathbb{K}[X]$ .
- iii) Probar que si  $n$  es par entonces  $X + a \mid X^n - a^n$  en  $\mathbb{K}[X]$ .

Calcular los cocientes en cada caso.

- i) Pruebo por inducción:

$$p(n) : X - a \mid X^n - a^n \quad \text{en } \mathbb{K}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : X - a \mid X^1 - a^1$$

El caso  $p(1)$  es verdadero.

*Paso inductivo:* Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X - a \mid X^k - a^k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero. Entonces quiero probar que

$$p(k+1) : X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$$

también lo sea.

Arranco haciendo a mano la división a mano del caso  $k+1$  en la primera iteración tengo que:

$$\begin{aligned} X^{k+1} - a^{k+1} &= X^k \cdot (X - a) + aX^k - a^{k+1} \\ &= X^k \cdot (X - a) + a \cdot (X^k - a^k) \xrightarrow[\div \text{ MAM } (X - a)]{\text{HI}} \frac{X^{k+1} - a^{k+1}}{X - a} = \frac{X^k \cdot (X - a)}{X - a} + \frac{a \cdot (X^k - a^k)}{X - a} \end{aligned}$$

Ese último paso muestra que  $X - a \mid X^{k+1} - a^{k+1}$  entonces  $p(k+1)$  también es verdadera.

Dado que  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas por criterio de inducción  $p(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

ii) Por inducción nuevamente:

$$p(n) : X + a \mid X^{2k+1} + a^{2k+1} \quad \text{en } \mathbb{K}[X] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

*Caso base:*

$$p(0) : X + a \mid X^1 + a^1$$

El caso  $p(0)$  es verdadero.

*Paso inductivo:* Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X + a \mid X^{2k+1} + a^{2k+1}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero. Luego quiero probar que

$$p(k+1) : X + a \mid X^{2(k+1)+1} + a^{2(k+1)+1} = X^{2k+3} + a^{2k+3}$$

sea verdadero también.

Acá la idea es similar al ítem anterior, hacemos una división a mano y luego agrupamos y aplicamos la **hipótesis inductiva**, para la cual necesitamos de exponente  $2k+1$  pero tenemos  $2k+3$ , entonces en vez de dividir por  $X + a$ , dividimos por  $X^2 - a^2$ .

$$\begin{aligned} X^{2k+3} + a^{2k+3} &= X^{2k+1} \cdot (X^2 - a^2) + a^{2k+3} + X^{2k+1} \cdot a^2 \\ &= X^{2k+1} \cdot (X + a)(X - a) + a^2 \cdot (X^{2k+1} + a^{2k+1}) \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva se ve que el caso  $p(k+1)$  es verdadero. Luego  $p(k)$  es verdadera  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ , como se quería probar.

iii) Procedimiento igual a los anteriores:

$$p(n) : X + a \mid X^{2k} - a^{2k} \quad \text{en } \mathbb{K}[X] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

$$p(1) : X + a \mid X^2 - a^2 = (X - a)(X + a)$$

El caso  $p(1)$  es verdadero. Asumo que

$$p(k) : \underbrace{X + a \mid X^{2k} - a^{2k}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero. Luego quiero probar que

$$p(k+1) : X + a \mid X^{2k+2} - a^{2k+2}$$

$$\begin{aligned} X^{2k} - a^{2k} &= X^{2k} \cdot (X^2 - a^2) - a^{2k+2} + a^2 \cdot X^{2k} \\ &= X^{2k} \cdot (X - a)(X + a) + a^2 \cdot (X^{2k} - a^{2k}) \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva se ve que el caso  $p(k+1)$  es verdadero. Luego  $p(k)$  es verdadera  $\forall k \in \mathbb{N}$ , como se quería probar.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

👉 sigfripro 🎉

**9.** Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{Q}[X]$  y escribirlo como combinación polinomial de  $f$  y  $g$  siendo:

- i)  $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$ ,  $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$ ,
- ii)  $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$ ,  $g = X^3 + X$ ,
- iii)  $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$ ,  $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$ ,

- i) Hacemos la división hermosa de polinomios:

$$\begin{array}{r} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 + X^3 \\ \hline X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 \\ \hline 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ X + 1 \end{array} \right.$$

Todo muy lindo. Según Euclides:

$$(f : g) = (\underbrace{X^4 - X^3 - X^2 + 1}_g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$

Escribo a  $f$  en función de  $g$ :

$$f = (X + 1) \cdot (X^4 - X^3 - X^2 + 1) + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

Otra vez:

$$\begin{array}{r} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \\ \hline \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \\ \hline - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \end{array} \right.$$

y otra vez... ?:

$$\begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ - 3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X \\ \hline - \frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 \\ - \frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} \\ \hline \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ - \frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \end{array} \right.$$

...da fuck is this?

$$\begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \hline -\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X \\ \hline -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} \\ \hline \frac{7}{9}X - \frac{7}{9} \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \end{array} \right.$$

Todo lindo:

$$\begin{aligned} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\ X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\ 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\ -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X - 1$$

ii) Este es más humano:

$$\begin{aligned} X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\ X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico:

$$(f : g) = X^2 + 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g$ :

$$X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$$

iii) Euclides nuevamente:

$$\begin{aligned} 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\ X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\ X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico*:

$$(f : g) = 1$$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g$ :

$$1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

✖ naD GarRaz ✖

- 10.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$ .

En general  $P \in \mathbb{K}[X] \implies$  el resto de dividir a  $P$  por  $X - a$  es  $P(a)$ , es decir:

$$P = Q \cdot (X - a) + \underbrace{r}_{P(a)} \quad \text{con } Q \in \mathbb{K}[X]$$

A ver con lo que nos dieron en el enunciado:

$$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X) \quad \text{con } g(X) = \underbrace{(X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)}_{!!!} \quad \text{y } r(X) = aX^2 + bX + c,$$

hay que notar que  $r(X)$  cumple condición de resto, ya que  $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$ . Y ese  $g$  nos queda hermoso para los valores del enunciado como habrás (o no) notado.

$$\begin{cases} f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_0 + r(1) = -2 \\ f(2) = q(2) \cdot \underbrace{g(2)}_0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_0 + r(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Resuelvo con matriz, porque pinta, pero es innecesario:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right)$$

Por lo tanto el resto pedido es:

$$r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 👋

**11.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$  en  $\mathbb{Q}[X]$ .

Es parecido al ejercicio 10? Creo que sí:

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \implies f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

Evaluó para armar un sistema:

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_0 + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_0 + r(1) = 5 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_0 + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = -5 \end{cases}$$

Habemos sistemus de ecuaciunus para encontrar a  $r(X)$ :

$$\begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 5 \Leftrightarrow a + b = 4 \\ r(-1) = a - b + 1 = -5 \Leftrightarrow a - b = -6 \end{cases}$$

Nuevamente el uso de matrices es totalmente opcional. Entonces resuelvo para  $a$  y  $b$ , porque ya tengo  $c$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -6 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -10 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow r(X) = -X^2 + 5X + 1$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

❖ naD GarRaz 🎉

❖ Olivia Portero 🎉

❖ Ramiro E. 🎉

**12.** Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio  $f(X) = X^6 + X^3 - 2$ .

Primera raíz a ojímetro:

$$f(\alpha_1 = 1) = 0 \iff f(X) = q(X) \cdot (X - 1) \iff (X - 1) \mid f \iff r_{(X-1)}(f) = 0$$

Busco  $q(X)$  con algoritmo de división.

$$\begin{array}{r} X^6 \\ - X^6 + X^5 \\ \hline X^5 \\ - X^5 + X^4 \\ \hline X^4 \\ - X^4 + X^3 \\ \hline 2X^3 \\ - 2X^3 + 2X^2 \\ \hline 2X^2 \\ - 2X^2 + 2X \\ \hline 2X - 2 \\ - 2X + 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} + X^3 \\ - 2 \left| \begin{array}{r} X - 1 \\ X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \end{array} \right. \end{array}$$

El cociente  $q(X)$  se puede factorizar en grupos como:

$$q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \stackrel{!}{=} (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2).$$

Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener  $f \in \mathbb{C}[X]$  salen de esos dos polinomios. Salen fácil las del polinomio de grado 2:

$$X^2 + X + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

Resuelvo la ecuación  $X^3 + 2 = 0$  usando la notación exponencial del número complejo:

$$X = r e^{i\theta}$$

Reemplazo y máquina de hacer chorizos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_4 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \alpha_5 &= \sqrt[3]{2} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

❖ naD GarRaz 🎉

**13.** Sea  $w = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ . Probar que  $w + w^2 + w^4$  es raíz del polinomio  $X^2 + X + 2$

Voy a usar los resultados para la familias de  $G_n$

$$w \in G_7 \implies \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1) \\ w^k = w^{r_7(k)} \end{array} \right.$$

Es cuestión de evaluar y rezar  $\star$ . Tengo que  $f(X) = X^2 + X + 2$  y  $w + w^2 + w^4$  es raíz de  $f$ :

$$f(w + w^2 + w^4) = (w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underset{=w}{\downarrow} w^8 + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0$$

Listo efectivamente  $w + w^2 + w^4$  es raíz de  $f$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

---

#### 14.

- i) Probar que si  $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$ , entonces  $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$ .
- ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .

i) Voy a usar que si  $w \in G_5 \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} &= \\ = X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} &= \\ = X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} &= X^2 - X(-1 + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 = \\ = X^2 + X - 1 &\quad \checkmark \end{aligned}$$

- ii) Calculando las raíces a mano de

$$X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

---

#### 15.

- i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$ .
- ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz en común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ .

i) Hay que probar la doble implicación:

( $\Rightarrow$ )

$$\text{Si } a \text{ es raíz de } f \text{ y } g \implies \begin{cases} (X-a)|f \\ (X-a)|g \end{cases} \implies (X-a) \text{ es una raíz común} \implies (X-a) | (f : g)$$

( $\Leftarrow$ ) El máximo común divisor tiene los monomios de las factorizaciones comunes elevados al menor exponente. Así que por definición:

$$(f : g) = (X - a)^m$$

entonces  $X - a$  está en la factorización de  $f$  y  $g$ .

No sé si esto la demo esa es muy circular. Salió pedorra.

ii) Usando lo que se demuestra en el ítem anterior, si dos polinomios  $f$  y  $g$  tienen raíces en común, entonces esas raíces tienen que ser raíces del  $(f : g)$ :

Si

$$f = X^4 + 3X - 2 \quad y \quad g = X^4 + 3X^3 - 3X + 1,$$

busco el  $(f : g)$ :

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \end{aligned}$$

Obtuve que:

$$(f : g) = X^2 + X - 1$$

Las raíces:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Por lo tanto esas raíces son comunes a  $f$  y a  $g$ .



Luego puedo escribir

$$X^4 + 3X - 2 = (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2)$$

Y las raíces de  $X^2 - X + 2$ :

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \alpha_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz ⚡

**16.** Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos

- i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$ ,
- ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$ ,
- iii)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$ ,
- iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$ ,  $a = 2$ .

En este ejercicio hay que hacer todo tipo de *casos de factoreo*:

i)  $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

$$\begin{aligned} f &= X^5 - 2X^3 + X \\ &= X(X^4 - 2X^2 + 1) \\ &= X(X^2 - 1)^2 \\ &= X(X - 1)^2(X + 1)^2 \end{aligned}$$

La multiplicidad de  $a = 1$  como raíz es 2.

ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i.$

Si  $a = i$  es raíz, entonces  $-i$  también lo es en un polinomio  $\mathbb{R}[X]$ :

$$\begin{array}{r} X^6 - 3X^4 \qquad \qquad + 4 \left| \begin{array}{c} X^2 + 1 \\ X^4 - 4X^2 + 4 \end{array} \right. \\ - X^6 \quad - X^4 \\ \hline - 4X^4 \\ \qquad \qquad \qquad 4X^4 + 4X^2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 4X^2 + 4 \\ \qquad \qquad \qquad - 4X^2 - 4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f &= (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) \\ &\stackrel{!}{=} (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 \\ &\stackrel{!}{=} (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 \\ &= (X - i)^2(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

La multiplicidad de  $a = i$  como raíz de  $f$  es 1.

iii)

$$f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$$

$$f = (X - 2)^3 \cdot ((X + 2) + (X - 1)) = 2 \cdot (X - 2)^3(X + \frac{1}{2})$$

La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 3.

iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2,$

$$\begin{aligned} f &= (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3 \\ &= (X - 2)^2(X - 2)(X + 2) - 4(X - 2)^3 \\ &= (X - 2)^3(X + 2 - 4) \\ &= (X - 2)^4 \end{aligned}$$

La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 4.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌟

👉 M Poncini 🌟

17. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$  tiene solo raíces simples en  $\mathbb{C}$ .

Quiero raíces simples, entonces laburo para que  $(f : f') = 1$

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a \quad y \quad f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

Sea  $\alpha$  una raíz de  $f'$ , es decir:

$$f'(\alpha) = n(n+1)\alpha^{n-1}(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ con } n = 1 & \star^1 \\ \alpha \in \{0, 1\} \text{ con } n > 1 & \end{cases}$$

Pido entonces:

$$\begin{cases} f(1) = n - (n+1) + a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(0) = a \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Caso  $a = 0, n = 1$ :

$$f = X \cdot (X-2) \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Caso  $a \neq 0, n \in \mathbb{N}_{>1}$ :

$$f \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Caso  $a \neq 1, n \in \mathbb{N}$ :

$$f \quad \text{Tiene solo raíces simples.}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🤝

**18.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$  tiene al menos una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ .

Si  $r$  es raíz múltiple de  $f$  debe ocurrir que:

$$\begin{cases} f(r) = 0 \\ f'(r) = 0 \end{cases}$$

Derivo  $f$  y acomodo:

$$f' = (2n+1) \cdot (X^{2n} - 1) \xrightarrow[r]{\text{evalúo}} f'(r) = (2n+1) \cdot (r^{2n} - 1) = 0 \Leftrightarrow (r^{2n} - 1) = 0 \quad \star^1$$

Volviendo a  $f$ , si evalúo en  $r$

$$\begin{aligned} f(r) = 0 &\Leftrightarrow r^{2n+1} - (2n+1)r + a = 0 && \Leftrightarrow r \cdot \overbrace{(r^{2n} - 1)}^{\star^1=0} - 2n + a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 2n \cdot r \end{aligned}$$

Por lo tanto  $r \in \mathbb{R}$   $\star^2$ .

Volviendo a  $\star^1$  y con el resultado de que las raíces  $r \in \mathbb{R}$ :

$$(r^{2n} - 1) = 0 \xrightarrow[!]{} (r^n - 1)(r^n + 1) = 0 \xleftarrow[\star^2]{} r = \pm 1$$

Por lo tanto los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para que el polinomio tenga por lo menos una raíz múltiple:

$$a = \pm 2n$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🤝

**19.** Sea  $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$ . Determinar todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  admite una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene  $f$  y la multiplicidad de cada una de ellas.

Ataco como en el ejercicio anterior. La idea no es calcular todas las raíces.

Si  $f$  tiene raíces múltiples  $r_k$ :

$$r_k \Leftrightarrow f(r_k) = f'(r_k) = 0,$$

por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de  $f'$  para sacarme ese  $a$  de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4)$$

Evaluando en  $r_k$ :

$$f'(r_k) = 20(r_k)^9 \cdot ((r_k)^{10} + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_k &= 0 \\ (r_k)^{10} &= -4 \end{cases} \star^1$$

Hay de momento 11 raíces de  $f'$ . Me interesa saber si son raíces de  $f$ ,

Cuando  $r_k = 0$ :

$$f(0) = 2a \implies f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Acomodo  $f$  y después reemplazo por los otros valores que anulan  $f'$ :

$$f = X^{20} + 8X^{10} + 2a = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a$$

Cuando  $(r_k)^{10} \stackrel{\star^1}{=} -4$ :

$$\begin{aligned} f(r_k) = 0 &\Leftrightarrow ((r_k)^{10})^2 + 8(r_k)^{10} + 2a = 0 \\ &\stackrel{\star^1}{\Leftrightarrow} (-4)^2 + 8(-4) + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow -16 + 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

Ahora tengo que ver cuántas raíces y sus multiplicidades para  $a = 0$  y  $a = 8$ .

Si  $a = 0 \implies f = X^{10}(X^{10} + 8)$

$$f(r_k) = 0 \Leftrightarrow (r_k)^{10}((r_k)^{10} + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} X &= 0 \\ X^{10} &= -8, \end{cases}$$

donde se ve que con  $a = 0$  hay 11 raíces distintas en total, las multiplicidades:

$$\text{mult}(0; f) = 10 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\sqrt[10]{8e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}.$$

No había necesidad de calcular las raíces, pero dado que la solución, es casi lo mismo que  $G_{10}$  ya fue. Pero alcanzaría con decir que es un polinomio complejo de grado 10, entonces hay 10 soluciones y las multiplicidades se ven en los exponentes de los polinomios irreducibles en la factorización.

Si  $a = 8 \implies f = (X^{20} + 8X^{10} + 16) \stackrel{!!}{=} (X^{10} + 4)^2$

$$f(r_k) = 0 \Leftrightarrow ((r_k)^{10} + 4)^2 \Leftrightarrow X^{10} = -4,$$

donde se ve que con  $a = 8$  hay un total de 10 raíces distintas, las multiplicidades:

$$\text{mult}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}.$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤝

**20.** Sea  $f = X^{68} - 17X^4 - 16 \in \mathbb{C}[X]$ . Determinar la forma binomial de cada raíz múltiple de  $f$  en  $\mathbb{C}$  y la multiplicidad de cada una de ellas.

Primero determinamos las raíces múltiples, como no voy a factorizar el polinomio pues tiene un grado muy alto, chequeo las raíces de la derivada y veo si coinciden:

$$f'(X) = 68X^{67} - 68X^3 \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow X^3 \cdot (X^{64} - 1) = 0 \Leftrightarrow X^3 = 0 \quad \vee \quad X^{64} - 1 = 0$$

Vemos que  $X = 0$  no puede ser pues no es raíz en el original, la otra que nos queda son las raíces 64-avas de la unidad.

Agarro una raíz arbitraria  $\omega$  64-ava de la unidad distinta de 1, es decir  $\omega \neq 1$  y la pruebo en el polinomio:

$$f(\omega) = \omega^{68} - 17\omega^4 - 16 = \omega^4 - 17\omega^4 - 16 = -16(\omega^4 + 1) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow \omega^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^4 = -1.$$

Obtenemos que las raíces son:

$$\omega = e^{(\frac{\pi+2k\pi}{4})i} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Notar que estas son las raíces 8-avas de la unidad pero que no son 4-tas.

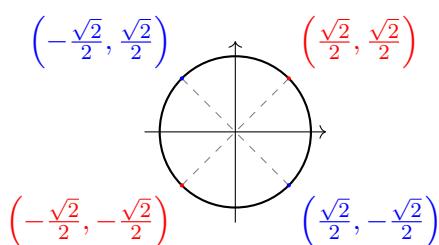
Antes de calcular la forma binomial veamos que no hay más raíces de más multiplicidad. Derivamos la primera derivada:

$$\begin{aligned} f''(X) &= 3X^2 \cdot (X^{64} - 1) + X^3 \cdot (64X^{63}) \\ f''(X) &= 3X^{66} - 3X^2 + 64X^{66} = 67X^{66} - 3X^2 \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow 67X^{66} = 3X^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 67X^{64} \stackrel{\star^1}{=} 3 \Leftrightarrow X^{64} = \frac{3}{67} \end{aligned}$$

En  $\star^1$  se dividió por  $X^2$ , tomando en cuenta que  $X = 0$  es una solución, sin embargo 0 no es raíz del polinomio original. Luego ninguna de las raíces van a coincidir con las de la primera derivada. Quedando demostrado que solo tenemos raíces dobles, procedemos a expresarlas en forma binomial como pide el enunciado.

$$\omega = e^{(\frac{\pi+2k\pi}{4})i} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Estos son los puntos que forman ángulos de 45 grados en el círculo unitario, ver la figura a continuación:



Finalmente, las formas binomiales de las raíces dobles son:

$X_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$X_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$X_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$X_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ sigfripro ⚡

21.

- i) Probar que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , el polinomio  $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X-1)^2$ .
- ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  es divisible por  $(X-1)^3$ .

i)  $(X-1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$  es por lo menos raíz doble de  $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$ .

$$\begin{aligned} f &= X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 && \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' &= 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 && \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Calculando  $f(1)$  y  $f'(1)$  se comprueba lo pedido.

ii)

$$(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$$

Parecido a antes vuelvo a derivar y evalúo:

$$f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 4 + 2a \implies f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Por lo tanto:

$$(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow a = -2$$

Observar que si  $a \neq -2$ , 1 es una raíz doble de  $f$  de otra forma es una raíz por lo menos triple.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🙏

👉 Olivia Portero 🙏

22. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 1 sea raíz doble  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$ .

Si uno es raíz doble de  $f = X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$  tiene que ocurrir que:

$$f(1) = f'(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'' \neq 0$$

Planteamos eso:

$$f(1) = 1^4 - a1^3 - 31^2 + (2+3a)1 - 2a = 0 \Leftrightarrow 1 - a - 3 + (2+3a) - 2a = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Oka, no nos dio mucha info. Ahora con  $f'$ :

$$f'(1) = 41^3 - 3a1^2 - 61 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a - 6 + (2+3a) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Bueh, el ejercicio apunta que no nos olvidemos la última condición con la  $f''$ :

$$f''(1) = 121^2 - 6a1 - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 12 - 6a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto si:

$$a \neq 1$$

1 será una raíz doble del polinomio  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$ . De otra forma sería por lo menos una raíz triple

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

**23.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{4!}X^4 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$$

Su derivada primera:

$$P' = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1}$$

Noto que:

$$P' = P - \frac{1}{n!}X^n$$

Entonces si  $\alpha$  es una raíz de  $P$ :

$$P(\alpha) = 0 \implies P'(\alpha) = \underbrace{P(\alpha)}_0 - \frac{1}{n!}\alpha^n = -\frac{1}{n!}\alpha^n \neq 0$$

Así queda probado que las raíces van a ser *simples*.

Atención que,  $\alpha = 0$  no me importa porque  $P(0) \neq 0$ , boludeces no.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

**24.** Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{C}[X]$  definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad y \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $i$  es raíz *doble* de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sale por inducción. Quiero probar la siguiente proposición:

$$p(n) : i \text{ es una raíz doble de } f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso Base:

$$p(1) : i \text{ es una raíz doble de } f_1.$$

Especializo a  $f_1$ ,  $f'_1$  y a  $f''_1$  ! en  $i$ :

$$f_1(i) = i^4 + 2i^2 + 1 = 0, \quad f'_1(i) = 4i^3 + 4i = 0 \quad y \quad f''_1(i) = 12i^2 \neq 0$$

Por lo cual  $p(1)$  resulta verdadera.

Paso inductivo: Asumo como verdadero para algún  $k \in \mathbb{N}$  que la proposición:

$$p(k) : i \text{ es una raíz doble de } f_k, \quad \underbrace{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero probar que la proposición:

$$p(k+1) : i \text{ es una raíz doble de } f_{k+1}$$

también lo sea.

La **hipótesis inductiva** dice que:

$$f_k(i) = 0, \quad f'_k(i) = 0, \quad \text{y} \quad f''_k(i) \stackrel{!}{\neq} 0,$$

Usando la definición de la función, especializo, evalúo o como quieras decirle a  $f_{k+1}$ ,  $f'_{k+1}$  y a  $f''_{k+1}$  ! en  $i$ :

$$\begin{cases} f_{k+1}(i) &= (i - i)(f_k(i) + f'_k(i)) = 0, \\ f'_{k+1}(i) &= f_k(i) + f'_k(i) + (i - i)(f'_k(i) + f''_k(i)) \stackrel{\text{HI}}{=} 0 \\ f''_{k+1}(i) &= 2 \cdot (f'_k(i) + f''_k(i)) + (i - i)(f''_k(i) + f'''_k(i)) \stackrel{\text{HI}}{\neq} 0 \end{cases}$$

Y así resultó la proposición  $p(k+1)$  verdadera.

Dado que  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron todas verdaderas por principio de inducción también lo es  $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

**25.** Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$  definida por

$$f_1 = X^3 + 2X \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2f'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que:

- i)  $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ .
- ii) 0 es raíz de multiplicidad  $n$  de  $f_n$ .

i) Inducción:

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : \text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \text{gr}(f_1) = 2^{1+1} - 1 = 3 = \text{gr}(X^3 + 2X)$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo para un  $k \in \mathbb{N}$  que:

$$p(k) : \underbrace{\text{gr}(f_k) = 2^{k+1} - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : \text{gr}(f_{k+1}) = 2^{k+1+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

también lo sea.

$$f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} Xf_k^2 + X^2f'_k$$

¿Qué grado tiene esa cosa?

$$\text{gr}(Xf_k^2 + X^2 \cdot f'_k) \stackrel{!}{=} 1 + \text{gr}\left(\underbrace{f_k^2}_{2\text{gr}(f_k)} + \underbrace{X \cdot f'_k}_{\text{gr}(f_k)}\right) = 1 + 2 \cdot \text{gr}(f_k) \stackrel{\text{HI}}{=} 1 + 2 \cdot (2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 1$$

Si no viste el  $!$ , saqué factor común  $X$ , así es que aparece el 1 que se suma al grado. También tuve en cuenta que  $\text{gr}(f') = \text{gr}(f) - 1 \quad \forall f \in f[X]$

Por lo tanto  $p(k+1)$  resultó verdadera.

Como  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron todas verdaderas por principio de inducción en también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

ii) Lindo ejercicio, intentá hacerlo antes de mirar la resolución.

Sale también por inducción.

Quiero probar la proposición:

$$p(n) : 0 \text{ es raíz de multiplicidad } n \text{ de } f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O de forma equivalente:

$$p(n) : X^n \mid f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : X^1 \mid f_1$$

Se cumple enseguida que:

$$X \mid X^3 + 2X \Leftrightarrow X \mid X \cdot (X^2 + 2)$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo para un  $k \in \mathbb{N}$  que:

$$p(k) : \underbrace{X^k \mid f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : X^{k+1} \mid f_{k+1}$$

también lo sea.

$$X^{k+1} \mid f_{k+1} \Leftrightarrow X^{k+1} \mid Xf_k^2 + X^2f'_k$$

Exploto la hipótesis inductiva para construir el paso  $k+1$ :

$$\stackrel{\text{HI}}{\Rightarrow} X^k \mid f_k \Leftrightarrow X^k \mid f_k \cdot f_k \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X \cdot X^k \mid X \cdot f_k^2 \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \quad \star^1$$

y parecido con la derivada

$$\stackrel{!!}{\Rightarrow} X^{k-1} \mid f'_k \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 \cdot X^{k-1} \mid X^2 \cdot f'_k \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X^2 \cdot f'_k \quad \star^2$$

Donde en  $!!$  usé la hipótesis inductiva, si  $f_k$  tiene como raíz al 0 con multiplicidad  $k$  entonces la derivada tiene que tener multiplicidad  $k-1$  en 0. Con esos hermosos, tiernos y sabrosos resultados de  $\star^1$  y  $\star^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 \\ X^{k+1} \mid X^2 \cdot f'_k \end{array} \right. \Leftrightarrow X^{k+1} \mid X \cdot f_k^2 + X^2 \cdot f'_k$$

Como  $p(1), p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron todas verdaderas por principio de inducción también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

**26.** Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  raíz de multiplicidad 3 de  $f \in \mathbb{C}[X]$ . Probar que el resto de dividir a  $f'$  por  $(X-\alpha)^3$  es  $a(X-\alpha)^2$ , con  $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ .

Sé que cuando derivo el algoritmo de división es:

$$f = D \cdot Q + R$$

En este caso  $D = (X - \alpha)^3$

$$(X - \alpha)^3 \mid f \Leftrightarrow f = q \cdot (X - \alpha)^3 + 0 \quad \text{con } q \in \mathbb{C}[X]$$

Derivo esa expresión de  $f$ :

$$f' = q' \cdot (X - \alpha)^3 + 3q \cdot (X - \alpha)^2$$

El dato dice que  $\alpha$  es una raíz triple de  $f$ , por lo tanto si derivo  $f$ ,  $(X - \alpha)^3$ :

$$f' = \underbrace{q'}_Q \cdot \underbrace{(X - \alpha)^3}_D + \underbrace{3q \cdot (X - \alpha)^2}_R$$

No me acuerdo si es *teorema del resto* o algo así que dice que especializar a  $f$  en algún valor te da lo que vale el resto, lo cual es *razonable cuando hacés Ruffini*, pero ahora que se está dividiendo por una potencia de 3, es más raro. pero esta es la primera vez que aparece en En fin, especializo en  $\alpha$ , recordando que es raíz triple de  $f$ , por lo tanto me va a dar cero:

$$f'(\alpha) = R(\alpha) = \underbrace{3q(\alpha)}_{\neq 0} \cdot (\alpha - \alpha)^2 = 0$$

Por lo tanto  $R$  cumple condición de resto y además es de la forma  $a \cdot (X - \alpha)^2$   
 $\downarrow$   
 $\neq 0 \in \mathbb{C}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🎉

## 27.

i) Hallar todas la raíces racionales de

- (a)  $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X,$
- (b)  $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{3}X - 3,$

ii) Probar que  $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$  no tiene raíces racionales.

i) (a) 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

(b) 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

ii) 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

## 28. 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

## 29. 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

## 30. 🙋... hay que hacerlo! 🤷

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 🚲, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐱.

## 31. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

32. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.

Sale por inducción:

$$p(n) : \sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X] \text{ tiene todas sus raíces complejas simples } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : \sum_{k=0}^1 X^k = 1 + X^1 \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

En este caso  $f(X) = 1 + X$ :

$$f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 1 \neq 0$$

Por lo tanto  $p(1)$  es verdadera.

Paso inductivo: Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$  la proposición:

$$p(h) : \underbrace{\sum_{k=0}^h X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^h}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

es verdadera. Entonces quiero ver que:

$$p(h+1) : \sum_{k=0}^{h+1} X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^h + X^{h+1} \text{ tiene todas sus raíces complejas simples.}$$

también lo sea.

Primero veo que la **hipótesis inductiva** es algo así:

$$f_h(\alpha_h) \stackrel{\alpha_h \neq 0}{=} 0 \quad \text{y} \quad f'_h(X) = \sum_{k=1}^h kX^{k-1} = \underbrace{1 + 2X + \cdots + hX^{h-1}}_{f'_h(X)} + (h+1)X^h \text{ donde } f'_h(\alpha_h) \neq 0 \quad \forall \alpha_h \text{ raíz de } f.$$

Ahora laburo el polinomio  $(h+1)$ -ésimo, con  $\alpha$  raíz del mismo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{h+1}(\alpha_{h+1}) \stackrel{\alpha_{h+1} \neq 0}{=} 0 \\ f'_{h+1}(X) = \sum_{k=1}^{h+1} kX^{k-1} = \underbrace{1 + 2X + \cdots + hX^{h-1}}_{f'_h(X)} + (h+1)X^h = f'_h(X) + (h+1)X^h \\ \xrightarrow[\text{en } \alpha_{h+1}]{\text{evalúo}} f'_{h+1}(\alpha_{h+1}) \stackrel{\text{HI}}{=} \underbrace{f'_h(\alpha_{h+1})}_{\neq 0} + (h+1) \underbrace{\alpha_{h+1}^h}_{\neq 0} \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto  $p(k+1)$  resultó verdadera.

Como  $p(1), p(h)$  y  $p(h+1)$  resultaron verdaderas por principio de inducción en  $n$  también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

## 33. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve. La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Ir al índice ↑

## 34. ... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram , o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una *pull request* al .

35. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

es una raíz sexta de la unidad que no es una raíz cubica de la unidad. Para cada valor de  $a \in \mathbb{C}$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

Sea  $w$  una raíz sexta de la unidad tal que  $w^3 = -1$ . (por enunciado). Evaluamos el polinomio en esa  $w$  y arreglamos el  $a$  para que sea igual a cero, así  $w$  es raíz.

$$\begin{aligned} f(w) &= w^6 + w^5 - 3w^4 + 2w^3 + w^2 - 3w + a \stackrel{?}{=} 0 \\ f(w) &= 1 + w^2 + w^3 + w^5 \star^1 - 3w^4 + w^3 - 3w + a \\ f(w) &= -4w^4 - 4w + w^3 + a \\ f(w) &= -4(w^4 + w) + w^3 + a \\ f(w) &= -4(w(w^3 + 1)) \star^2 + w^3 + a \\ f(w) &= w^3 + a \stackrel{?}{=} 0 \iff -1 + a = 0 \iff a = 1 \end{aligned}$$

Como eso fue para una  $w$  genérica que cumple eso, agarremos ahora  $\zeta$  raíz primitiva sexta de la unidad, de esta manera  $\zeta, \zeta^3, \zeta^5$  son distintas, y cumplen lo pedido por el enunciado <sup>3</sup>, como son raíces sigue que  $(X - \zeta)(X - \zeta^3)(X - \zeta^5) \mid X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + 1 \iff (X + 1)(X^2 - \zeta\zeta^5X + \zeta\zeta^5) = (X + 1)(X^2 - X + 1) = (X^3 + 1) \mid X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + 1$ . Ahora que sabemos eso procedemos a hacer la división.

$$\begin{array}{r|l} X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + 1 & | X^3 + 1 \\ - X^6 & | X^3 + X^2 - 3X + 1 \\ \hline X^5 - 3X^4 & + X^3 + X^2 \\ - X^5 & | - X^2 \\ \hline - 3X^4 & + X^3 \quad - 3X \\ 3X^4 & \quad + 3X \\ \hline X^3 & \quad + 1 \\ - X^3 & \quad - 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ahora buscamos raíces racionales en el polinomio resultante de la división ya que es de grado 3, veo aplicando Gauss que las posibles son 1 y -1, pruebo evaluando en 1 y veo que es raíz, luego hago la división:

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X^2 - 3X + 1 & | X - 1 \\ - X^3 + X^2 & | X^2 + 2X - 1 \\ \hline 2X^2 - 3X & \\ - 2X^2 + 2X & \\ \hline - X + 1 & \\ X - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ahora veamos las raíces del polinomio resultante, para eso aplicamos la fórmula resolvente o de Bhaskara, y obtenemos que  $X^2 + 2X - 1 = (X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2})$ .

Ya prácticamente tenemos todas las factorizaciones, pero retomamos momentáneamente una parte de la factorización compleja, habíamos dicho  $(X - \zeta)(X - \zeta^5) = (X^2 - X + 1)$ , pero quienes son estos  $\zeta$ ? son las raíces primitivas sextas de la unidad, así que las escribimos en forma exponencial, serían  $e^{\frac{2\pi i}{6}}$  y  $e^{\frac{10\pi i}{6}}$ .

Finalmente, las 3 factorizaciones serían:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[X] &\rightarrow f = (X+1)(X-1)(X^2+2X-1)(X^2-X+1) \\ \mathbb{R}[X] &\rightarrow f = (X+1)(X-1)(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X^2-X+1) \\ \mathbb{C}[X] &\rightarrow f = (X+1)(X-1)(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X-e^{\frac{2\pi i}{6}})(X-e^{\frac{10\pi i}{6}})\end{aligned}$$

★<sup>1</sup> Acá usamos que  $1+w+w^2+w^3+w^4+w^5=0$  y movemos ciertos términos para la derecha.

★<sup>2</sup> Aca usamos que  $w^3=-1$

★<sup>3</sup> Sabemos que cumplen lo del enunciado por que  $\zeta$  y  $\zeta^5$  son raíces primitivas ya que  $(1:6)=(5:6)=1$ , y  $\zeta^3$  es simplemente  $-1$ , por lo tanto con estas elecciones estamos respetando lo que pide el enunciado

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ sigfripro 🎉

### 36.

- i) En cada caso, hallar un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que:
- $X^2(X^2+1) \mid (f : f')$ .
  - $(f : f') = X^5 - 5X^4 + \frac{25}{4}X^3$  y  $f(1) = 3$ .
  - $X+2 \mid f$ ,  $(f : (X-\sqrt{2})^2) = X-\sqrt{2}$  y  $f$  mónico.
- ii) Determinar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  mónicos de grado 5 que satisfacen simultáneamente que  $(f : f')$  tiene grado 2,  $1+2i$  es raíz de  $f$  y  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

💡... hay que hacerlo! 🤔

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 📡, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🐾.

### 37. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$ . Determinar

- i)  $a+b+c$ ,      ii)  $ab+ac+bc$ ,      iii)  $abc$ .

Si  $a, b, c$  son las 3 raíces del polinomio  $P = 2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$ . El polinomio  $P$  en forma factorizada:

$$2(X-a)(X-b)(X-c) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Distribuyendo todo se recupera la forma polinómica de  $P$ :

$$\begin{aligned}2(X-a)(X-b)(X-c) &= 2(X^2 - aX - bX + ab)(X - c) \\ &= 2(X^3 - aX^2 - bX^2 + abX - cX^2 + acX + bcX - abc) \\ &= 2X^3 - 2(a+b+c)X^2 + 2(ab+ac+bc)X - 2abc\end{aligned}$$

Si comparamos esta expansión genérica con el polinomio, vemos que justamente lo que nos piden en el enunciado son los coeficientes de  $P$ , expresados en función de sus raíces.

Esta forma de relacionar raíces con coeficientes se puede generalizar y se conoce como Fórmulas de Viète.

Para resolver el ejercicio se plantea la igualdad de los polinomios:

$$2X^3 - 2(a+b+c)X^2 + 2(ab+ac+bc)X - 2abc = 2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$$

Dos polinomios son iguales si y solo si todos sus coeficientes son iguales:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2(a+b+c) = -3 \Leftrightarrow a+b+c = \frac{3}{2} \\ 2(ab+ac+bc) = 4 \Leftrightarrow ab+ac+bc = 2 \\ -2abc = 1 \Leftrightarrow abc = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:  
💡 sigfripro 🤖

---

38.

- Hallar todas las raíces en  $\mathbb{C}$  del polinomio  $f = X^4 - (i+4)X^3 + (8+4i)X^2 - (2i+24)X + 12$  sabiendo que tiene al menos una raíz real.
  - Hallar todas las raíces en  $\mathbb{C}$  del polinomio  $f = X^6 - 3X^4 - (2+8i)X^3 + 24iX + 16i$ , sabiendo que tiene al menos una raíz entera.
- 

(a) Separo en parte real e imaginaria para que sea más manejable:

$$f = X^4 - (i+4)X^3 + (8+4i)X^2 - (2i+24)X + 12 = \underbrace{X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 24X + 12}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(-X^3 + 4X^2 - 2X)}_{\text{Im}(f)}$$

Ataco primero  $\text{Im}(f)$  que está más fácil:

$$\text{Im}(f(r)) = -r^3 + 4r^2 - 2r = 0 \Leftrightarrow -r \cdot (r^2 - 4r + 2) = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} r \in \{0, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$$

El 0 claramente no es raíz de la parte real  $\text{Re}(f)$ , por lo tanto las otras tienen que serlo, debido a que el polinomio no tiene coeficientes irracionales y por enunciado  $f$  tiene al menos una raíz real:

$$\begin{array}{r} X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 24X + 12 \\ - X^4 + 4X^3 - 2X^2 \\ \hline 6X^2 - 24X + 12 \\ - 6X^2 + 24X - 12 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} X^2 - 4X + 2 \\ X^2 + 6 \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$\text{Re}(f) = (X^2 - 4X + 2) \cdot (X^2 + 6) = (X - (2 + \sqrt{2}))(X - (2 - \sqrt{2}))(X - i\sqrt{6})(X + i\sqrt{6})$$

Sé que las raíces complejas no son raíces de la parte imaginaria así que no me sirven. Las únicas raíces que tienen en común  $\text{Re}(f)$  y  $\text{Im}(f)$ , me forman el  $(\text{Re}(f) : \text{Im}(g)) = X^2 - 4X + 2$ , datazo que nadie pidió!

Ahora le bajo el grado al polinomio original  $f$  y queda ahí medio cocinado:

$$\begin{aligned} f &= X^4 - (i+4)X^3 + (8+4i)X^2 - (2i+24)X + 12 \\ &= (X^2 - iX + 6) \cdot (X^2 - 4X + 2) \\ &= \boxed{(X - 3i)(X + 2i)(X - (2 + \sqrt{2}))(X - (2 - \sqrt{2}))} \end{aligned}$$

(b) 💡... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📡, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → [una pull request](#) al 🤖.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:  
💡 naD GarRaz 🤖

---

39. Sea  $p$  un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ ? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

La estructura de un polinomio mónico de grado 2 es la siguiente:

$$X^2 + aX + b \quad a, b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Tenemos que elegir un valor para  $a$  y otro para  $b$ , entre 0 y  $p - 1$ , o sea  $p$  distintos, dos veces. Así que la cantidad de polinomios mónicos de grado dos total:

$$p^2.$$

Para buscar aquellos que sean reducibles, es decir que puedan factorizarse en mónicos de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ :

$$X^2 + aX + b = (X - p_1) \cdot (X - p_2)$$

*Caso donde  $p_1 \neq p_2$ :*

Hay  $p \cdot (p - 1)$  opciones, pero como el orden de los factores no va a alterar el polinomio, por ejemplo:

$$(X - 2)(X - 3) = (X - 3)(X - 2).$$

*¡Hay que dividir por 2 para no contar dos veces lo mismo!*

*Caso donde  $p_1 = p_2$ :*

Los elementos de la forma  $(X - p_0)^2$  están contados solo una vez, de estos hay exactamente  $p$  elementos.

La cantidad de polinomios en  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  reducibles:

$$\frac{p^2 - p}{2} + p = \frac{p^2 + p}{2}$$

La cantidad de polinomios en  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  irreducibles:

$$\frac{p^2 - p^2 + p}{2} = \frac{p^2 - p}{2}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ sigfripro ⚡

⭐ naD GarRaz ⚡

#### 40.

- Hallar todos los polinomios de grado 2 irreducibles en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ .
- Decidir cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ :

$$(a) f = X^4 + X + 1, \quad (b) f = X^4 + X^2 + 1, \quad (c) f = X^4 + X^3 + 1.$$

- Usando resultados del ejercicio 39., debería haber un total de 3 polinomios reducibles y 1 irreducible.

Son solo **4 polinomios**, vayamos uno por uno:

$$\begin{aligned} (X - 0)^2 &= X^2 \\ (X - 1)^2 &= X^2 - 2X + 1 \stackrel{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{=} X^2 + 1 \\ (X - 0)(X - 1) &= X^2 - X \stackrel{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{=} X^2 + X \end{aligned}$$

Vemos que el único que falta que podemos construir con elementos de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ :

$$X^2 + X + 1,$$

el único polinomio irreducible en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ .

ii) Este ejercicio sale usando el resultado del ítem anterior:

*Nota que puede ser de interés:*

Por ejemplo  $P \in \mathbb{R}[X]$ :

$$P = X^4 + 3X^2 + 2 = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + 2)$$



es un polinomio que no tiene raíces reales, pero se puede factorizar como producto de irreducibles, es decir otros polinomio que obviamente tampoco tienen raíces reales.

*fin nota que puede ser de interés*

Los polinomio no tienen raíces en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , lo cual *no* implica que sean *irreducibles*. Porque podrían ser divisibles por un polinomio *irreducible* de menor grado, o sorpresa 😊, tenemos el que calculamos en el ítem anterior.

(a)

$$\begin{array}{r} X^4 \\ - X^4 - X^3 - X^2 \\ \hline - X^3 - X^2 + X \\ X^3 + X^2 + X \\ \hline 2X + 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} + X + 1 \\ | \\ X^2 + X + 1 \\ X^2 - X \end{array}$$

Ese resultado en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ :

$$X^4 + X + 1 \stackrel{!}{=} (X^2 + X + 1) \cdot (X^2 + 1) + 1$$

El resto es siempre 1, así que no se va a poder factorizar,  $X^4 + X + 1$  es irreducible en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

(b)

$$\begin{array}{r} X^4 \\ - X^4 - X^3 - X^2 \\ \hline - X^3 \\ X^3 + X^2 + X \\ \hline X^2 + X + 1 \\ - X^2 - X - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} + X^2 \\ | \\ X^2 + X + 1 \\ X^2 - X + 1 \end{array}$$

Ese resultado en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ :

$$X^4 + X^2 + 1 \stackrel{!}{=} (X^2 + X + 1) \cdot (X^2 + X + 1)$$

Este sí se puede factorizar,  $X^4 + X^2 + 1$  es reducible en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

(c)

$$\begin{array}{r} X^4 + X^3 \\ - X^4 - X^3 - X^2 \\ \hline - X^2 \\ X^2 + X + 1 \\ \hline X + 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} + 1 \\ | \\ X^2 + X + 1 \\ X^2 - 1 \end{array}$$

Ese resultado en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ :

$$X^4 + X^3 + 1 \stackrel{!}{=} (X^2 + X + 1) \cdot (X^2 + 1) + X$$

Este no se puede factorizar,  $X^4 + X^3 + 1$  es irreducible en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 sigfripro 🤗

👉 naD GarRaz 🤗

## 🔥 Ejercicios de parciales:

---

🔥1.

- a) Hallar todos los posibles  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} > 0$  tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento  $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de  $\mathbf{c}$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ , sabiendo que tiene al menos una raíz doble.
- 

- a) Si la raíz  $\alpha = r \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) = -ir \implies f(-ir) = 0$

Voy a usar que:

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{rcl} (-i)^2 & = & -1 \\ (-i)^3 & = & i \\ (-i)^4 & = & 1 \\ (-i)^5 & = & -i \\ (-i)^6 & = & -1 \end{array} \right.$$

Evaluó  $f(-ir)$ :

$$\begin{aligned} f(-ir) &= (-ir)^6 - 4(-ir)^5 - (-ir)^4 + 4r^3i + 4(-ir)^2 + 48(-ir) + \mathbf{c} \\ &\stackrel{\star^1}{=} -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} = 0 \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser 0 cuando su parte imaginaria y su parte real sean ambas 0:

$$\begin{aligned} f(-ir) &= -r^6 + 4ir^5 - r^4 + 4ir^3 - 4r^2 - 48ir + \mathbf{c} \\ &= (-r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c}) + i(4r^5 + 4r^3 - 48r) = 0 \end{aligned}$$

En el siguiente paso no busco exhaustivamente todas las raíces, porque es al pedo. Solo busco lo que me interesa según las condiciones del ejercicio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Im}(f(-ir)) = 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0 \xrightarrow[r \in \mathbb{R}]{r > 0} r = \sqrt{3} \star^2 \\ \text{Re}(f(-ir)) = -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \xrightarrow[r \in \mathbb{R}]{r = \sqrt{3}} \mathbf{c} = 48 \end{array} \right.$$

Por lo tanto con ese  $\mathbf{c} = 48$ :

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48$$

y las raíces que tiene este polinomio son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{3}i \\ \alpha_2 &= \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Apareció el conjugado de la raíz dado que que  $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que  $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r} X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \\ - X^6 \quad \quad \quad - 3X^4 \\ \hline - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \\ 4X^5 \quad \quad \quad + 12X^3 \\ \hline - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\ 4X^4 \quad \quad \quad + 12X^2 \\ \hline 16X^3 + 16X^2 + 48X \\ - 16X^3 \quad \quad \quad - 48X \\ \hline 16X^2 \quad \quad \quad + 48 \\ - 16X^2 \quad \quad \quad - 48 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} X^2 + 3 \\ X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \end{array} \right.$$

Hasta el momento  $f$  queda:

$$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_g$$

como  $f$  tiene al menos una raíz doble la busco en las raíces de la derivada de  $g$ :

$$\begin{aligned} g' &= (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' \\ &= 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \end{aligned}$$

Con el lema de Gauss sé que las posibles raíces de  $g'$  están en:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Probando encuentro que  $g'(1) = 0$ , pero  $g(1) \neq 0 \implies f(1) \neq 0$ . Si  $X = 1$  no es raíz de  $g$ , continúo bajándole el grado a  $g'$  para buscar otras raíces:

$$\begin{array}{r} X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \mid X - 1 \\ - X^3 \quad + X^2 \quad \quad \quad | X^2 - 2X - 4 \\ \hline - 2X^2 - 2X \\ 2X^2 - 2X \\ \hline - 4X + 4 \\ 4X - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Con este resultado se puede escribir a  $g'$  como:

$$g' = 4(X - 1)(X^2 - 2X - 4)$$

De la parte cuadrática salen 2 raíces de  $g'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \\ X^2 - 2X - 4 &= (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5})) \end{aligned}$$

(para mostrar que son raíces dobles y no triples, por ejemplo, debería comprobar que  $\alpha_{1,2}$  no son raíces de  $g'' = 4(3X^2 - 6X - 2)$ , pero no tengo ganas, **elijo creer que no lo son**).

Compruebo que sean también raíces de  $g$ :

$$\begin{array}{r} X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \mid X^2 - 2X - 4 \\ - X^4 + 2X^3 + 4X^2 \quad \quad \quad | X^2 - 2X - 4 \\ \hline - 2X^3 \quad \quad \quad + 16X \\ 2X^3 - 4X^2 \quad \quad \quad - 8X \\ \hline - 4X^2 \quad \quad \quad + 8X + 16 \\ 4X^2 \quad \quad \quad - 8X - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dado que el resto dio 0  $\alpha_{1,2}$  son raíces de  $g$  y como son raíces de  $g'$  entonces son raíces dobles de  $g$ , y de  $f$ .

Notar que viendo el cociente de esa última división quizás haber visto el caso de factoreo a ojo, pero bueh, no pasó.

*Factorizaciones:*

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[X] &\rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{R}[X] &\rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2 \\ \mathbb{C}[X] &\rightarrow f = (X - \sqrt{3}i) \cdot (X + \sqrt{3}i) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2\end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

💡 2. Factorizar el polinomio  $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$  como producto de irreducibles en  $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{7}$  es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional  $\alpha = \sqrt{7}$ , tendrá también al *conjugado irracional*<sup>1</sup>,  $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que  $\sqrt{7}$  es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \implies (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \implies (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \end{array} \right. \checkmark$$

$$\begin{array}{r} X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 \\ - X^6 \quad + 14X^4 \quad - 49X^2 \\ \hline - X^5 \quad + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X \\ X^5 \quad - 14X^3 \quad + 49X \\ \hline X^4 \quad - 14X^2 \quad + 49 \\ - X^4 \quad + 14X^2 \quad - 49 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} X^4 - 14X^2 + 49 \\ X^2 - X + 1 \end{array} \right.$$

Todo hermoso. Nos queda un polinomio de grado 2 para laburar en la factorización:

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1),$$

se fusila con la resolvente:

$$\xrightarrow[\text{no ofender a nadie}]{\text{se escribe así para}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{+, -} = \frac{1 \pm \sqrt{w}}{2} \\ w^2 = -3 \end{array} \right. \rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

Finalmente las factorizaciones en sus 3 deliciosos sabores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 + 7)^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{array} \right.$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ naD GarRaz 🎉

<sup>1</sup>Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

**3.** Hallar **todos** los polinomios **mónicos**  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

i)  $1 - \sqrt{2}$  es raíz de  $f$ ;

ii)  $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$ ;

iii)  $(f : X^3 - 1) \neq 1$ ;

iv)  $f(-1) = 27$ ;

i) Como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si  $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$  es raíz entonces  $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$  para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto:

$$X^2 - 2X - 1$$

será un factor de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

ii) Para el requerimiento  $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$ :

$$X(X - 2)^2 \mid (f : f') \stackrel{\text{def}}{\iff} (f : f') = X(X - 2)^2 \cdot q,$$

de donde se deduce que por lo menos (dado que no conoce  $q$  y tampoco importa ahora):

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ es por lo menos raíz simple de } f' \implies \text{es por lo menos raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ es por lo menos raíz doble de } f' \implies \text{es por lo menos raíz triple de } f \end{cases} .$$

Por lo tanto como en los ejercicios estos piden *menor grado*:

$$X^2(X - 2)^3$$

también serán factores de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

iii) Si  $(f : X^3 - 1) \neq 1$  quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

tiene que aparecer en la factorización de  $f$ .

Parecido al ítem i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo de la raíz, para que no me queden coeficientes de  $f$  con componente imaginaria:

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1),$$

a priori me quedaría con el *factor de menor grado* siempre que eso no rompa otras condiciones, pero todavía no tomo la decisión  $\Theta$ .

Por lo tanto:

$$(X - 1) \quad \text{o} \quad (X^2 + X + 1)$$

ya veremos cual, aparecerá en la factorización de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

iv)  $f(-1) = 27$ . Hasta el momento juntando los resultados tengo 2 candidatos  $f_1$  y  $f_2$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108, \end{aligned}$$

ninguno es el 27 que quiero, así que hay que hacer algo más.

Para encontrar *un* polinomio **mónico** que cumpla lo pedido tomaría el  $f_2$  que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por:

$$f = f_2 \cdot (X - a) \quad \text{con } a \in \mathbb{Q}$$

de manera que pueda elegir el  $a$  para cumplir lo que quiero:

$$f(-1) = f_2(-1) \cdot (X - a) = 108 \cdot (-1 - a) = 27 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$f = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \cdot (X + \frac{5}{4})$$

así cumpliendo todas las condiciones.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🙏

👉 Ale Teran 🙏

4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$ , esto nos da información sobre *raíces comunes* entre  $f$  y  $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$ . Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho **mónico** será el MCD.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1.$$

Las raíces del MCD son  $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{w}}{2}$  con  $w^2 = 3i$ .

$$X^2 - X + 1 = (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que  $X^2 - X + 1 \mid f$ , haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{r} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 \\ - X^5 + X^4 - X^3 \\ \hline 3X^4 - 8X^3 - 7X^2 \\ - 3X^4 + 3X^3 - 3X^2 \\ \hline - 5X^3 - 10X^2 + 10X \\ 5X^3 - 5X^2 + 5X \\ \hline - 15X^2 + 15X - 15 \\ 15X^2 - 15X + 15 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^2 - X + 1 \\ X^3 + 3X^2 - 5X - 15 \end{array} \right.$$

Obtuvimos que:

$$f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0.$$

Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Guass ni ninguna cosa extraña podemos expresar a  $f$  como:

$$f \stackrel{!!!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en ! te recomiendo que sigas mirando sin *spoiler de calculadora o del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Son puros casos de factoreo que *deberían verse a ojo*.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1, *los primos en el mundo de polinomios*. Para tener una mejor explicación [clíckeá acá!](#) Y vas a la teoría del apunte. *Factorizaciones:*

$\mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 - 5) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$
$\mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$
$\mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + 3) \cdot (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤝

👉 Ale Teran 🤝

🔥 5. Sea  $(f_n)_{(n \geq 1)}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{R}[X]$  definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad y \quad f_{n+1} = (X + 2)^2 f'_n + 3f_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $-2$  es raíz doble de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

No caer en la *trampilla* de olvidar que para que una raíz de  $f$  sea doble, i.e.  $\text{mult}(-2; f) = 2$  debe ocurrir lo "obvio",  $f(-2) = f'(-2) = 0$  y también que  $f''(-2) \neq 0$ . Si olvidamos esto último solo probaríamos que la  $\text{mult}(-1; f) \geq 2$  y tendríamos el ejercicio mal.

Por inducción en  $n$ :

$$p(n) : -2 \text{ es raíz doble de } f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_1$$

Derivar y evaluar:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \xrightarrow{\text{evaluar en } -2} \quad f_1(-2) = 0 \\ f'_1 = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X \quad \xrightarrow{\text{evaluar en } -2} \quad f'_1(-2) = 0 \\ f''_1 = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 \quad \xrightarrow{\text{evaluar en } -2} \quad f''_1(-2) = -54 \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto  $\text{mult}(-2; f_1) = 2 \implies -2$  es raíz doble de  $f_1 \implies p(1)$  resultó ser verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$

$$p(k) : \underbrace{-2 \text{ es raíz doble de } f_k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : -2 \text{ es raíz doble de } f_{k+1}$$

también lo sea.

Sé que:

$$f_{\textcolor{blue}{k}} \xrightarrow[\text{que}]{\text{cumple}} \begin{cases} f_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = 0 \star^1 \\ f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = 0 \star^2 \\ f''_{\textcolor{blue}{k}}(-2) \neq 0 \star^3 \end{cases}$$

Laburo con  $f_{\textcolor{blue}{k}+1}$ :

$$\begin{cases} f_{\textcolor{blue}{k}+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_{\textcolor{blue}{k}} + 3 \cdot f_{\textcolor{blue}{k}} \\ f'_{\textcolor{blue}{k}+1} = 2(X+2)f'_{\textcolor{blue}{k}} + (X+2)^2 f''_{\textcolor{blue}{k}} + 3 \cdot f''_{\textcolor{blue}{k}} \\ f''_{\textcolor{blue}{k}+1} = 2f'_{\textcolor{blue}{k}} + (2X+4)f''_{\textcolor{blue}{k}} + 2(X+2)f'''_{\textcolor{blue}{k}} + (X+2)^2 f''''_{\textcolor{blue}{k}} + 3 \cdot f''_{\textcolor{blue}{k}} \end{cases}$$

Evaluar en  $-2$ :

$$f_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) = \cancel{(-2+2)^2} f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + 3f_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = 0^2 f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + 3f_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = 3f_{\textcolor{blue}{k}}(-2) \stackrel{\star^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f'_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f'_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + \cancel{(-2+2)^2} f''_{\textcolor{blue}{k}} + f_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) \stackrel{\star^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f''_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) \stackrel{?}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''_{\textcolor{blue}{k}+1}(-2) = 2f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)^2} f'''_{\textcolor{blue}{k}}(-2) + f''_{\textcolor{blue}{k}}(-2) = 2\underbrace{f'_{\textcolor{blue}{k}}(-2)}_{=0 \star^2} + \underbrace{f''_{\textcolor{blue}{k}}(-2)}_{\neq 0 \star^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

Por lo tanto  $\text{mult}(-2; f_{\textcolor{blue}{k}+1}) = 2 \Rightarrow -2$  es raíz doble de  $f_{\textcolor{blue}{k}+1} \Rightarrow p(\textcolor{blue}{k}+1)$  es verdadera también.

Como  $p(1)$ ,  $p(\textcolor{blue}{k})$  y  $q(\textcolor{blue}{k}+1)$  resultaron verdaderas, por principio de inducción  $p(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

⭐ nad GarRaz 🎉

⭐ Dani Tadd 🎉

⭐ autor original anónimo 🎉

## 6.

a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

**Solución:**

Limiando los denominadores de  $f$  se obtiene el polinomio  $g$  con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X \underbrace{(3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3)}_h$$

Por enunciado ignoramos la raíz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí,  $a_0 = -3$  y  $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Rta:**  $n = 5$  es el único valor de  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales el polinomio  $f$  tiene una raíz entera no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

**Solución:**

Primero factorizo la raíz nula de  $f$

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el ítem (a), que  $-3$  es una de las raíces racionales de  $f$ . Busco otras posibles raíces racionales en el polinomio  $h$  (con  $n = 5$ ) obtenido en el ítem (a) en el conjunto  $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

$$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3} \text{ es una raíz racional de } f.$$

Factorizo el polinomio  $f$  dividiéndolo por el producto de las dos raíces encontradas  $(X+3) \cdot (X - \frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\begin{array}{r} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 \\ - X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 \\ \hline - X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ - X^2 - \frac{8}{3}X + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ X^2 - X + 1 \end{array} \right.$$

Factorizo el polinomio cuadrático  $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

**Rta:**

$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$  con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto **irreducibles**.

$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{R}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{R}$ .

$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{Q}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{Q}$ .

7. Determinar un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- $f$  es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble,
- $f(0) = 33$ ;

El dato de  $\text{gr}(\underbrace{2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}_g) = 2$  indica que hay un polinomio,  $d$ , con  $\text{gr}(d) = 2$  que cumple que  $\left\{ \begin{array}{l} d \mid f \\ d \mid 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \end{array} \right.$  entonces,  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g$ . Estas raíces pueden ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de  $g$  usando *lema de gauss*:

Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.

$$\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} :$$

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2} \right\}.$$

Probando esos valores encuentro que  $g(\frac{1}{2}) = 0$  y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a  $g$ .

$$\begin{array}{r} 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \\ - 2X^3 + X^2 \\ \hline - 4X^2 - 20X \\ \quad 4X^2 - 2X \\ \hline - 22X + 11 \\ \quad 22X - 11 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} X - \frac{1}{2} \\ \hline 2X^2 - 4X - 22 \end{array} \right.$$

Hasta el momento:

$$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (2X^2 - 4X - 22) + 0,$$

buscamos raíces de  $2X^2 - 4X - 22$ :

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Entonces:  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$ . Dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  voy a seleccionar las raíces que tienen número irracional por la condición de grado mínimo. Recordar que si  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tiene una raíz con números irracionales, también debe estar su conjugado irracional.

Con la condición que dice que  $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble, no nos dejan muchas opciones.  $G_3$  tiene tres raíces, solución de  $w^3 = 1$ , dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(Si no te acordás como encontrar raíces de la familia  $G_n$  te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas.

Ok, tengo esas dos raíces:  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ¿Cuál elijo? ¡Cualquiera sirve! Porque, *nuevamente*  $\otimes$ , como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes.

Hasta el momento tenemos:

$$\begin{aligned} f &= \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^2}^{(X^2 + X + 1)^2} \star^1 (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))^2 \star^1 = \\ &= (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2 \end{aligned}$$

$\star^1$  Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Nos queda cumplir que  $f(0) = 33$ , si bien ahora  $f(0) = -11$ . Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición.  $f$  es *mónico*, así que no podemos corregir el valor poniendo un coeficiente principal.

Hay que proponer otro factor en  $\mathbb{Q}[X]$ , que al evaluar de el número que al multiplicarse con  $-11$  nos dé  $33$ . El candidato es  $(X - 3)$ , dado que en  $0$  vale  $-3$  y así  $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$  como queremos.

El  $f \in \mathbb{Q}[X]$  que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🤝

### 8.

a) Determinar todos los  $f \in \mathbb{R}[X]$  mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- $f$  contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \mid (f : f')$ ,
- $f$  tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$ ,

b) Con el polinomio  $f$  hallado expresar factorización en irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las  $w$  tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1 \star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} .$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en  $\mathbb{R}$  hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 \mid f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i) \mid f \\ (X + i) \mid f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i)^2 \mid f \\ (X + i)^2 \mid f \end{array} \right\}$$

$$X^2 + 1 \mid f' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i) \mid f' \\ (X + i) \mid f' \end{array} \right\}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate [esto de las notas teóricas](#), para tener contexto. Básicamente si  $\alpha$  es una raíz de  $f$  y también de  $f'$ , entonces es una raíz *por lo menos* doble de  $f$ .

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en  $\mathbb{Z}$ . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de  $G_3$ ? Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio  $f$  en 1, eso nos dé  $-12$ . Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a  $1\star^1$  para que sea raíz de  $f$ !! Y dado que  $f \in \mathbb{R}[X]$  tenemos que elegir entonces ambas  $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ . Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - \textcolor{red}{a})(X - \textcolor{blue}{b}) \\ &\stackrel{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - \textcolor{red}{a})(X - \textcolor{blue}{b}), \end{aligned}$$

con  $\textcolor{red}{a}$  y  $\textcolor{blue}{b}$  a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y  $f(1) = -12$ .

$$f(1) = -12 \iff 12 \cdot (1 - \textcolor{red}{a})(1 - \textcolor{blue}{b}) = -12 \iff (1 - \textcolor{red}{a})(1 - \textcolor{blue}{b}) = -1 \iff \begin{array}{c} \textcolor{red}{a} = 2 \\ \textcolor{blue}{b} = 0 \end{array} \in \mathbb{Z}$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible [está acá](#).

$\mathbb{Q}[X] \rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{R}[X] \rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{C}[X] \rightarrow f = X(X - 2)(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2$

Notar que en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🙏

👉 Dani Tadd 🙏

9. Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- $f$  comparte una raíz con  $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$ ,
- $1 - 2i$  es raíz de  $f$  y  $f'(1 - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios,  $f$  y  $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$ , comparten raíz buscamos raíces de  $g$  con el [lema de Gauss](#) de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro  $f$  mónico y de grado mínimo:  $A = \{\pm 1, \pm 5\}$ , con  $\alpha = 1 \implies g(1) = 0 \quad \checkmark$ .

Como  $\alpha = 1$  es raíz, entonces  $X - 1 \mid g$ :

$$\begin{array}{r} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 \\ - X^3 + X^2 \\ \hline - 2X^2 + 7X \\ - 2X^2 + 2X \\ \hline 5X - 5 \\ - 5X + 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$ , busco raíces del cociente  $X^2 - 2X + 5$ , usando resolvente

$$r_{+-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g^{\star 1} = (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a  $f$   
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$ , por lo que  $(-3 + \sqrt{2})$  es una raíz de  $f$  y dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  también debe estar el conjugado irracional  $-3 - \sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \Leftrightarrow X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *muchas* *data*. Nos da una raíz compleja de  $f$ , por lo cual tambien tendremos su conjugado complejo porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Esa raíz es una de las que está en  $g^{\star 1}$ .

El dato de  $f'$ , también nos indica que la multiplicidad de  $1 - 2i$  como raíz es por lo menos 2, ya que  $f'(1 - 2i) = 0$ , y por lo tanto  $\text{mult}(1 + 2i; f)$  también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a  $f$ :

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$

10. Determinar todos los primos  $p$  positivos tales que el polinomio

$$f = pX^3 - X^2 + 13X - 1$$

tenga al menos una raíz racional positiva. Para cada valor de  $p$  hallado, factorizar  $f$  como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

El **lema de Gauss** dice que las raíces racionales que el polinomio puede tener, tienen que estar en el conjunto de los divisores del *coeficiente principal*  $p$  y el *termino independiente*  $-1$ :

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{7}, \dots, \pm \frac{1}{p} \right\}$$

Ahora hay que hacer cuentas para todos los primos y ver cuál funciona, *nah, mentira*. Si  $\frac{1}{p}$  es raíz entonces hay que dividir ( $p^{-1} = \frac{1}{p}$ , boludeces, no!):

$$\begin{array}{r} pX^3 - X^2 + 13X \\ - pX^3 + X^2 \\ \hline 13X \\ - 13X \\ \hline (-1 + 13p^{-1}) \end{array} \quad \begin{array}{c} -1 \\ | \\ pX^2 + 13 \\ + 13p^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Y a esto hay que pedirle que el **resto sea 0**, porque  $\frac{1}{p}$  es raíz racional:

$$-1 + \frac{13}{p} = 0 \Leftrightarrow p = 13$$

Si  $p$  tiene que ser primo y positivo entonces  $p = 13$ , usando el resultado de la división:

$$\begin{aligned} f = 13X^3 - X^2 + 13X - 1 &= 13(X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1) \\ &= 13(X - \frac{1}{13}) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{aligned}$$

Todo lindo las raíces:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{13} \\ X_2 = i \\ X_3 = -i \end{cases}$$

Y factorizado en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  queda.

$\mathbb{Q}[X] : f = 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1)$
$\mathbb{R}[X] : f = 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1)$
$\mathbb{C}[X] : f = 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X - i) \cdot (X + i)$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🎉

**11.** Hallar todos los  $k \in \mathbb{Q}$  para los cuales el polinomio  $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$  tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de  $k$  hallados, factorizar  $f$  en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$ .

Antes de empezar este ejercicio, estaría bueno que hagas un minuto de silencio por los que rindieron este examen...

1 minuto después

Si  $f$  tiene raíces múltiples, busco raíces en su derivada,  $f'$ :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow f' = 6r^5 + 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 \cdot (2r^3 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -2r^3$$

Entonces para el valor de una raíz  $r$ , tengo lo que tiene que valer  $k$ . Como tengo raíces múltiples, meto a  $r$  y el valor de  $k$  encontrado en  $f$ :

$$f(r) = 0 \xrightarrow{k = -2r^3} r^6 - 2r^6 + 25 = 0 \Leftrightarrow r^6 = 25$$

Ese último resultado es  $G_6$  con módulo  $\sqrt[3]{5}$ :

$$r_q = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi} \quad \text{con} \quad q \in [0, 5]$$

Estos valores son las raíces de  $f$ , pero hay que ver para cuál valor de  $k$ :

$$k = -2(r_q)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } q \text{ es par} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi})^3 = -10 \\ \text{si } q \text{ es impar} & \Rightarrow k = -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi})^3 = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles para  $k$ :

$$k \in \{-10, 10\}$$

Hay 2 valores de  $k$  que formarán 2 polinomios distintos. Cada uno de esos polinomios tiene 3 raíces tanto de  $f$  como de  $f'$  por lo tanto las mencionadas raíces son raíces dobles de  $f$ .

Notar en el resultado de la derivada metiendo los valores de  $k$ :

$$f'_{-10}(r_{q_{par}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = 5 \quad \text{y} \quad f'_{10}(r_{q_{impar}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = -5.$$

A esta altura esas ecuaciones se resuelven solas y todas esas soluciones son la  $r_q$  de antes, *miti y miti*.

Tengo entonces que factorizar 2 polinomios  $f$ :

$f_{-10} = X^6 - 10X^3 + 25 \quad \text{y} \quad f_{10} = X^6 + 10X^3 + 25$
---

Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - 2 \operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

Factorizo  $f_{-10}$ :

El valor  $k = -10$  tiene asociadas las raíces con  $q$  par:

$$\left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{5} \cdot \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Que cosa horrible esto:

$$\left( X - \sqrt[3]{5} \cdot \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \cdot \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{-10} &= X^6 - 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 - 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left( (X - \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2) \right)^2 = \left( X - \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left( X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2 \right)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left( X - \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Factorizo  $f_{10}$ :

El valor  $k = 10$  tiene asociadas las raíces con  $q$  impar:

$$\left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} = \left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{5} \cdot \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Esto es igual de horrible, pero solo *hay que cambiar un par de signos a lo de antes*:

$$\left( X - \sqrt[3]{5} \cdot \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \cdot \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \stackrel{\star^1}{=} X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{10} &= X^6 + 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 + 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left( (X + \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2) \right)^2 = \left( X + \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left( X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2 \right)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left( X + \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \cdot \left( X - \sqrt[3]{5} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🎉

🔥12. Factorizar como producto de polinomios mónicos irreducibles en  $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X]$  el polinomio

$$f(X) = X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X].$$

Busco una raíz:

$$f(i) = i^4 + i^3 + i + 2 = 1 + -i + i + 2 = 3 \stackrel{(3)}{=} 0$$

El conjugado de  $i$  también, es raíz, por lo tanto bajo el grado del polinomio dividiendo por

$$(X - i) \cdot (X + i) = X^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 X^4 + X^3 \\
 - X^4 \quad - X^2 \\
 \hline
 X^3 - X^2 + X \\
 - X^3 \quad - X \\
 \hline
 - X^2 \quad + 2 \\
 X^2 \quad + 1 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$X^4 + X^3 + X + 2 = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X - 1) + 3 \stackrel{(3)}{\equiv} (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 2) + 0$$

Al buscar las raíces de  $(X^2 + X + 2)$ , con la resolvente:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad y \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Raíces que no tienen número enteros, así que no van a figurar en la factorización.  
Nos piden factorización en  $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$  por lo que:

$$f(X) = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 2)$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🙏

🔥13. Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  el polinomio mónico de grado mínimo que satisface simultáneamente

- $X^2 + 2X + 5$  divide a  $(f : f')$ ,
- $X^2 - 4X + 1$  divide a  $(f : f'')$ ,
- $f'(2 - \sqrt{3}) = 0$ .

Hallar la factorización de  $f$  en  $\mathbb{C}[X]$ , en  $\mathbb{R}[X]$  y en  $\mathbb{Q}[X]$ .

Acomodo un poco el enunciado:

$$\begin{aligned}
 X^2 + 2X + 5 &\stackrel{!}{=} (X - (-1 + 2i)) \cdot (X - (-1 - 2i)) \\
 X^2 - 4X + 1 &\stackrel{!}{=} (X - (2 + \sqrt{3})) \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))
 \end{aligned}$$

Tengo que  $2 - \sqrt{3}$  por lo menos es triple ya que por la segunda y tercera condición:

$$\begin{aligned}
 (X - (2 - \sqrt{3})) &\mid f, \\
 (X - (2 - \sqrt{3})) &\mid f' \quad \text{por tercera condición} \\
 &\vdots \\
 (X - (2 - \sqrt{3})) &\mid f'' \quad \text{por segunda condición}
 \end{aligned}$$

Las raíces complejas  $-1 + 2i$  y  $-1 - 2i$  son por lo menos dobles.

Para que se cumpla la segunda condición las 2 raíces irracionales van a tener que tener la misma multiplicidad.

Factorización en  $\mathbb{Q}[X]$ :

$$f = (X^2 + 2X + 5)^2 \cdot (X^2 - 4X + 1)^3$$

Factorización en  $\mathbb{R}[X]$ :

$$f = (X^2 + 2X + 5)^2 \cdot (X - (2 - \sqrt{3}))^3 \cdot (X - (2 + \sqrt{3}))^3$$

Factorización en  $\mathbb{C}[X]$ :

$$f = (X - (-1 + 2i))^2 \cdot (X - (-1 - 2i))^2 \cdot (X - (\textcolor{blue}{2} - \sqrt{3}))^3 \cdot (X - (2 + \sqrt{3}))^3$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤝

👉 Olivia Portero 🤝

14. Sea  $f = X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ .

- a) Probar que  $f \mid X^{30} - 1$
- b) Hallar el polinomio  $g \in \mathbb{R}[X]$  mónico de grado mínimo tal que  $f \mid g$ .

Antes de empezar:

Recordad que los elementos de  $G_n$  son de la forma  $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$  con  $k \in \mathbb{Z}$

Ahora sí:

- a) Las raíces de  $f$ :

$$X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0 \Leftrightarrow X^5 = e^{i\frac{\pi}{3}} \stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X \in \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\}$$

Si  $X^5 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \mid X^{30} - 1$ , entonces las raíces de  $f$  también deben ser raíces de  $X^{30} - 1$ .

Observad que esas raíces son elementos de  $G_{30}$  si acomodo esas raíces:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{esos argumentos}]{\times, \div, 2} \left\{ e^{i\frac{2}{30}\pi}, e^{i\frac{14}{30}\pi}, e^{i\frac{26}{30}\pi}, e^{i\frac{38}{30}\pi}, e^{i\frac{50}{30}\pi} \right\}$$

Las raíces de :

$$X^{30} - 1 = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X \in G_{30}$$

Todas las raíces de  $f$  están en  $G_{30}$ , así que  $f \mid X^{30} - 1$

Otra forma de mostarlo:

Versión de galera y bastón:

La versión más elegante, pero que no se me ocurre primero ni a palos (mirá el ejercicio 8 ← click): Sabemos que:

$$\begin{aligned} x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid x^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 &\stackrel{x \rightarrow X^5}{\Leftrightarrow} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid (X^5)^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 \\ &\stackrel{!!}{\Leftrightarrow} X^5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mid X^{30} - 1 \end{aligned}$$

Por ende el polinomio  $f$  divide a  $X^{30} - 1$ .

- b)  $f \mid g$  Las raíces de  $f$  son todas complejas, así que voy a necesitar los conjugados para tener un  $g \in \mathbb{R}[X]$ . Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2 \operatorname{Re}(z)X + |z|^2 \star^1$$

Las raíces son:

$$\left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{25}{15}\pi} \right\} \xrightarrow[\text{conjugados}]{\text{agrego los}} \left\{ e^{i\frac{1}{15}\pi}, e^{i\frac{1}{3}\pi}, e^{i\frac{7}{15}\pi}, e^{i\frac{11}{15}\pi}, e^{i\frac{13}{15}\pi}, e^{i\frac{17}{15}\pi}, e^{i\frac{19}{15}\pi}, e^{i\frac{23}{15}\pi}, e^{i\frac{5}{3}\pi}, e^{i\frac{29}{15}\pi} \right\}$$

Armo el polinomio con esta bosta usando la expresión en  $\star^1$ :

$$g = (X^2 - 2 \cos(\frac{1}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2 \cos(\frac{1}{3}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2 \cos(\frac{7}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2 \cos(\frac{11}{15}\pi) + 1) \cdot (X^2 - 2 \cos(\frac{13}{15}\pi) + 1)$$

Listo? Esto es la respuesta? Tengo miedo, estoy cansado, jefe.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:  
♂ naD GarRaz 👉

15. Factorice en irreducibles de  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ , y  $\mathbb{C}[X]$  el polinomio

$$f = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32,$$

sabiendo que tiene alguna raíz en común con  $g = x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10$ .

Como los polinomios comparten una raíz, sé que  $(f : g) \neq 1$ . Usando al crack, titán de Euclides busco:

$$(f : g) \text{ dado que } (f : g) \mid f \quad \text{y} \quad (f : g) \mid g$$

y de ahí voy a sacar las raíces hermosas esas que tanto necesito.

$$\begin{array}{r} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 \\ - x^5 + x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 10x \\ \hline - 3x^4 + 3x^3 + 28x^2 + 50x + 32 \\ 3x^4 - 3x^3 - 27x^2 - 48x - 30 \\ \hline x^2 + 2x + 2 \end{array} \mid \begin{array}{r} x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 \\ x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$(f : g) = (x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 : x^2 + 2x + 2)$ , sigo con Euclides:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10 \\ - x^4 - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^3 - 11x^2 - 16x \\ 3x^3 + 6x^2 + 6x \\ \hline - 5x^2 - 10x - 10 \\ 5x^2 + 10x + 10 \\ \hline 0 \end{array} \mid \begin{array}{r} x^2 + 2x + 2 \\ x^2 - 3x - 5 \\ \hline \end{array}$$

Este último resultado confirma que:

$$(f : g) = x^2 + 2x + 2 \stackrel{!!}{=} (x - (-1 + i)) \cdot (x - (-1 - i))$$

Reduco a  $f$  para buscar más raíces:

$$\begin{array}{r} x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32 \\ - x^5 - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline - 6x^4 - 8x^3 + 12x^2 \\ 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 \\ \hline 4x^3 + 24x^2 + 40x \\ - 4x^3 - 8x^2 - 8x \\ \hline 16x^2 + 32x + 32 \\ - 16x^2 - 32x - 32 \\ \hline 0 \end{array} \mid \begin{array}{r} x^2 + 2x + 2 \\ x^3 - 6x^2 + 4x + 16 \\ \hline \end{array}$$

De esta manera puedo escribir:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^3 - 6x^2 + 4x + 16)$$

☺ con el *lema de Gauss* posibles raíces de:

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 16 \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}.$$

De las cuales funciona el 4 ☺.

Vuelvo a dividir ☺:

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 4x + 16 \\ - x^3 + 4x^2 \\ \hline - 2x^2 + 4x \\ 2x^2 - 8x \\ \hline - 4x + 16 \\ 4x - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

Podemos reescribir ☺:

$$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$$

☺ el último factor tiene raíces  $1 - \sqrt{5}$  y  $1 + \sqrt{5}$  y ya escribo  $f$  en la factorizaciones pedidas:

$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$	$\in \mathbb{Q}[X]$
$f = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{R}[X]$
$f = (x - (-1 + i)) \cdot (x - (-1 - i)) \cdot (x - 4) \cdot (x - (1 - \sqrt{5})) \cdot (x - (1 + \sqrt{5}))$	$\in \mathbb{C}[X]$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🤗

👉 Nico Alegre 🤗

🔥 16. [final 09/04/2024] Hallar todos los números  $a \in \mathbb{Q}$  para los cuales  $f = X^5 - aX^4 + X^3 - aX^2 + X - a$  y  $g = 2x^3 - 4x^2 + 11/2x - 2$  no son coprimos. Factorizar a  $f$  como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ , en  $\mathbb{R}[X]$  y en  $\mathbb{C}[X]$ .

☺... hay que hacerlo! 🚫

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram 📡, o mejor aún si querés subirlo en LATEX → una pull request al 🤗.

🔥 17. [final 04/03/24] Hallar  $a \in \mathbb{Z}$  y  $a \neq 0$  de forma tal que el polinomio  $f \in \mathbb{C}[x]$  dado por

$$f = x^5 - (4i - 4)x^4 - (16i + 8)x^3 + (16i - 11)x^2 - (20i - 16)x - a$$

tenga una raíz entera. Para el o los valores de  $a$  hallados, dar la factorización de  $f$  en  $\mathbb{C}[x]$  si además se sabe que  $(f : x^6 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$  y su grado es mayor que 1.

Para que un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x]$  tenga una raíz  $r \in \mathbb{Z}$ , debe ocurrir que:

$$f(r) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(r)) = 0 \wedge \operatorname{Im}(f(r)) = 0$$

⚠️ Ojo que ese razonamiento es válido porque  $r \in \mathbb{Z}$  si no eso no tiene por qué cumplirse.  
Dado podría haber una componente imaginaria dentro de  $r$  ⚠️

Después de hacer las cuentas queda el sistemita:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(r)) &= r^5 + 4r^4 - 8r^3 - 11r^2 + 16r - a = 0 & \star^1 \\ \operatorname{Im}(f(r)) &= -4r^4 - 16r^3 + 16r^2 - 20r = 0 & \star^2 \end{cases}$$

Ataco  $\star^2$  porque no tiene la  $a$ :

$$\begin{aligned} -4r^4 - 16r^3 + 16r^2 - 20r = 0 &\Leftrightarrow -4r \cdot (r^3 + 4r^2 - 4r + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4r \cdot (r + 5) \cdot \underbrace{(r^2 - r + 1)}_{(r - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (r - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))} = 0 \\ &\Leftrightarrow_{r \in \mathbb{Z}} r \in \{0, -5\} \end{aligned}$$

Esos valores de  $r$ , también deben anular a  $\operatorname{Re}(f)$  lo cual sucede para los valores de  $a$ :

$$\begin{aligned} r = 0 &\rightarrow \operatorname{Re}(f(0)) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 0} \quad \text{skull icon} \\ r = -5 &\rightarrow \operatorname{Re}(f(-5)) = 0 \Leftrightarrow 20 - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 20} \end{aligned}$$

Hasta el momento quedarían dos posibles  $f$ :

$$\boxed{f_{-5} = x^5 - (4i - 4)x^4 - (16i + 8)x^3 + (16i - 11)x^2 - (20i - 16)x - 20} \star^4$$

En la parte del dato del MCD,  $d = (f : x^6 - 1)$  que tenga coeficientes  $\mathbb{Q}$  y grado mayor que uno, nos da info sobre las raíces comunes que tienen  $f$  y  $x^6 - 1$ . Estudio el polinomio ese, que sé que sus raíces forman  $G_6$ :

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1) \\ &= (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \\ &\stackrel{!}{=} (x - 1) \cdot (x - (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x + 1) \cdot (x - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{aligned}$$

Del resultado para calcular  $a$ , sé que ni  $1$  ni  $-1$  son raíces de  $f$  porque son números enteros por lo tanto y dado que  $d \in \mathbb{Q}[x]$ :

$$d \in \left\{ (x^2 - x + 1), (x^2 + x + 1), \underbrace{(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)}_{x^4 + x^2 + 1} \right\}$$

El  $d = x^4 + x^2 + 1$  no puede ser, porque  $f$  en  $\star^4$  no daría ni a palos.



No veo escapatoria a tener que hacer cuentas feas



En  $\star^3$  medio de pedo apareció  $x^2 - x + 1$ , lo cual es un candidato a funcionar. Tengo que comprobar que:

$$\overline{x^3 + 4x^2 - 4x + 5} \mid f \\ (x+5) \cdot (x^2 - x + 1)$$

Y ahora divido por eso rezó :

$$\begin{array}{r} x^5 + (4 + -4i)x^4 + (-8 + -16i)x^3 + (-11 + 16i)x^2 + (16 + -20i)x - 20 \\ \hline -x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 \\ \hline -4ix^4 + (-4 + -16i)x^3 + (-16 + 16i)x^2 + (16 + -20i)x \\ \hline 4ix^4 + 16ix^3 - 16ix^2 + 20ix \\ \hline -4x^3 - 16x^2 + 16x - 20 \\ \hline 4x^3 + 16x^2 - 16x + 20 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \\ \hline x^2 - 4ix - 4 \end{array}$$

El cociente es un cuadrado de binomio:

$$x^2 - 4ix - 4 = (x - 2i)^2$$

Finalmente:

$$\boxed{f = (x + 5) \cdot (x - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (x - 2i)^2}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz 🎉

Tizi S. F. 🎉