Apunte Único: Álgebra I - Práctica 1

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 10/09/25 @ 13:32

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**6.**	**11.**	**16.**	**21.**	**26.**	**31.**	**36.**
2.	**7.**	**12.**	**17.**	**22.**	**27.**	**32.**	
3.	**8.**	**13.**	**18.**	**23.**	**28.**	**33.**	
4.	**9.**	**14.**	**19.**	**24.**	**29.**	**34.**	
5.	**10.**	**15.**	**20.**	**25.**	**30.**	**35.**	

- Ejercicios de Parciales

🔥**1.**	🔥**3.**	🔥**5.**	🔥**7.**	🔥**9.**
🔥**2.**	🔥**4.**	🔥**6.**	🔥**8.**	

Disclaimer:
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists +$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada.* Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber.* A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

Esta Guía 1 que tenés se actualizó por última vez:
10/09/25 @ 13:32
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 1

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

Básicos sobre conjuntos y coso:

- *Conjunto de Partes $\mathcal{P}$:*

  Sea A un conjunto. El *conjunto de partes* de A, que se nota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, o sea el conjunto cuyos *elementos* son los subconjuntos de A. Es decir

  $$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \text{ o también } B \in \mathcal{P}\, A \iff B \subseteq A.$$

  Por ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- *Las uniones* $(\cup)$ *e intersecciones* $(\cap)$*:*
  - $A \cup B = \{x \in U : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$
  - $A \cap B = \{x \in U : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$

- *Las uniones e intersecciones de conjuntos conmutan:*

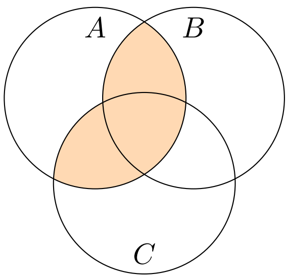
  $$A \cup B = B \cup A$$
  $$A \cap B = B \cap A$$

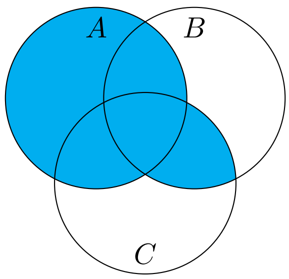
- *De Morgan Law's:*

  $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \to \text{De Morgan 1}$$
  $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \to \text{De Morgan 2}$$

- *Distribución de la intersección en una unión y alverre:*

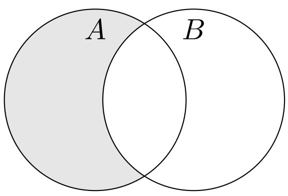
  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$





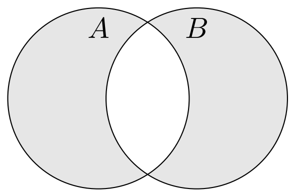
- *Diferencias en sus varios colores, sabores y notaciones:*

  $$A - B \overset{\text{idem}}{\underset{\text{notación}}{\iff}} A \setminus B \overset{\text{idem}}{\underset{\text{notación}}{\iff}} A \cap B^c$$



- *Diferencia simétrica:*

  $$A \triangle B = \begin{cases} (A - B) & \cup & (B - A) \\ (A \cup B) & \cap & (A \cap B)^c \\ (A \cup B) & \setminus & (A \cap B) \to \text{mi favorita} \\ (A \cap B^c) & \cup & (B \cap A^c) \end{cases}$$



- *Complemento:*

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \ / \ x \notin A\}$$

- *Tablas de verdad:*

  En las tablas de verdad que un elemento esté en un conjunto, $x \in A$ es equivalente a decir que la proposición A es verdadera. En mi cabeza es más fácil recordar las tablas en conjuntos que en ... lo otro.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A^c$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in \begin{array}{c} A \subseteq B \\ \hline A^c \cup B \end{array}$	$x \in A \triangle B$	$A - B$
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

  Probar por contrarrecíproco: Cuando para probar $p \implies q$ se prueba en su lugar $\neg q \implies \neg p$ se dice que es una *demostración por contrarrecíproco.*

  Probar por absurdo: Cuando para probar $p \implies q$ se prueba en su lugar $p \wedge \neg q$ para llegar así a una contradicción, se dice que es una demostración por reducción al absurdo.

- *Producto cartesiano*:

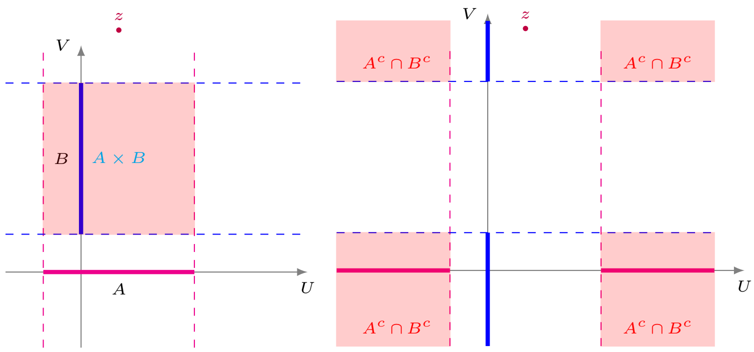
$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

  Si tenés n conjuntos:

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \cdots, x_n \in A_n\}.$$

  Parece interesante nota que un punto $z \notin A \times B$ no implica que esté en $A^c \times B^c$:

$$(A \times B)^c \text{ no es lo mismo que } (A^c \times B^c)$$



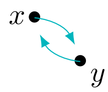
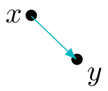
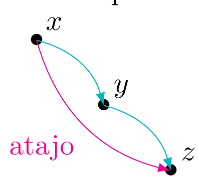
- *Relaciones $\mathcal{R}$:*

  - *Definición de relación:*

    Sean A y B conjuntos. Una relación $\mathcal{R}$ de A en B es un suconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

- *Definición de relación en un conjunto:*
  Sea A un conjunto. Se dice que $\mathcal{R}$ en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

- *Propiedades destacables de una $\mathcal{R}$:*

  - *Reflexiva*: $(x, x) \in \mathcal{R} \quad \forall x \in A$ o $x \,\mathcal{R}\, x.\ \forall x \in A$. Gráficamente, cada elemento tiene que tener un bucle. 
  - *Simétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces el par $(y, x) \in \mathcal{R}$, también si $\forall x, y \in A, x \,\mathcal{R}\, y \implies y \,\mathcal{R}\, x$. Gráficamente tiene que haber un ida y vuelta en cada elemento de la relación. 
  - *Antisimétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, con $x \neq y$ entonces el par $(y, x) \notin \mathcal{R}$, también se puede pensar como $\forall x, y \in A, x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x \implies x = y$. Gráficamente **no** tiene que haber ningún ida y vuelta en el gráfico. Solo en una dirección. 
  - *Transitiva*: Para toda terna $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Otra manera sería si $\forall x, y, z \in A$, $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, z \implies x \,\mathcal{R}\, z$. Gráficamente tiene que haber flecha directa entre las puntas de cualquier camino que vaya por más de dos nodos. 

-
  - *Relación de equivalencia*: La relación debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.
  - *Relación de orden*: La relación debe ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- *Funciones f:*

  - Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\forall x \in A,\ \exists!\, y \in B \,/\, x \,\mathcal{R}\, y$$
$$\forall x \in A,\ \exists\, y \in B \,/\, x \,\mathcal{R}\, y,$$

  si $y, z \in B$ son tales que $x \,\mathcal{R}\, y \quad$ y $\quad x \,\mathcal{R}\, z \implies y = z$.

    - Dada una función $f : A\,(dominio) \to B\,(codominio)$ el conjunto *imagen* es:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A \,/\, f(x) = y\}$$

    - *Propiedades destacables de una f:*
      - *inyectiva:* si $\forall x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$
      - *sobreyectiva:* si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. f es sobreyectiva si $\operatorname{Im}(f) = B$
      - *biyectiva:* Cuando es *inyectiva* y *sobreyectiva.*
    - *Composición de funciones:*
      A, B, C conjuntos y $f : A \to B \to C$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota:

$$g \circ f = g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

      resulta ser una función $g \circ f$ de A en C.
    - f es biyectiva cuando $f^{-1} : B \to A$ es la función que satisface que:

$$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Ejercicios de la guía:

---

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

(i) $1 \in A$ (ii) $\{1\} \subseteq A$ (iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ (iv) $\{1, 3\} \in A$ (v) $\{2\} \in A$

El símbolo *pertenece*: $\in$ se usa para decir si un elemento cualquiera está en un dado conjunto. El símbolo *subconjunto o inclusión*: $\subseteq$, es para decir que un conjunto está incluido en otro conjunto.
Por ejemplo:

$$C_1 = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{1, 2, \{1, 2\}\}$$

$$\begin{cases} 1 \in C_1 & \text{y también } \{1\} \subseteq C_1 \text{ pero } \{\{1\}\} \not\subseteq C_1 \\ \{1, 2, 3\} \in C_1 & \text{pero } \{1, 2, 3\} \not\subseteq C_1 \\ \{1, 2\} \in C_2 & \text{y también } \{1, 2\} \subseteq C_2 \end{cases}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

(i) $1 \in A$. Es verdadero, porque 1 es un elemento que pertenece al conjunto A.

(ii) $\{1\} \subseteq A$. Es verdadero, porque el conjunto, lo bautizo, $B = \{1\}$, es un conjunto cuyos elementos están todos (en este caso particular solo el 1) en A. Se dice que B es un subconjunto de A.

(iii) $\{2, 1\} \subseteq A$. Es verdadero, porque el conjunto, lo bautizo, $C = \{2, 1\}$, es un conjunto cuyos elementos están todos en A. Se dice que C es un subconjunto de A.

(iv) $\{1, 3\} \in A$. Es falso, porque el <u>elemento</u> *conjunto que tiene al 1 y a 3*: $\underbrace{\{1, 3\}}_{\text{Sí, esto es un solo elemento}}$ no está en el conjunto A.

Peeero ojo que $\{1, 3\} \subseteq A$, ¿Comprás?

(v) $\{2\} \in A$ Es falso, por lo mismo que el ítem (iv). El <u>elemento</u> *conjunto que tiene al 2* : $\{2\}$, no es un elemento de A, peeero como antes $\{2\} \subseteq A$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) $3 \in A$ (iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ (vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ (x) $\varnothing \subseteq A$

(ii) $\{3\} \subseteq A$ (v) $\{1, 2\} \in A$ (viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ (xi) $A \in A$

(iii) $\{3\} \in A$ (vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ (ix) $\varnothing \in A$ (xii) $A \subseteq A$

Muy parecido al ejercicio anterior.

(i) $3 \in A \to F$ (v) $\{1, 2\} \in A \to V$ (ix) $\varnothing \in A \to F$

(ii) $\{3\} \subseteq A \to F$ (vi) $\{1, 2\} \subseteq A \to V$ (x) $\varnothing \subseteq A \to V$

(iii) $\{3\} \in A \to V$ (vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A \to V$ (xi) $A \in A \to F$

(iv) $\{\{3\}\} \subseteq A \to V$ (viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A \to F$ (xii) $A \subseteq A \to V$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Juan Iglesias`

---

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

ii) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

Inclusión, subconjunto. A es un subconjunto de B:

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \ \forall x \in \mathcal{U}, \ x \in A \implies x \in B}$$

(i) Se tiene que

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{5, 4, 3, 2, 1\} \end{cases} \xrightarrow[\text{definición}]{\text{sale con la}} A \subseteq B$$

(ii)

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 2, \{3\}, -3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respuesta}} \quad A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} \underbrace{3 \in A \text{ pero } 3 \notin B}_{\text{contra ejemplo}}$$

(iii)

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < |x| < 3\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 3\} \end{cases}$$

En este caso:

$$A \not\subseteq B \text{ dado que } 2.5 \in A \text{ y } 2.5 \notin B$$

(iv) $\begin{cases} A = \{\varnothing\} \\ B = \varnothing \end{cases} \xrightarrow{\text{respuesta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} B$ no tiene ningún elemento, sin embargo A tiene un elemento: $\varnothing$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Mateo Z`

---

4. Dados los subconjuntos: $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial: $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

(a) $A \cap (B \triangle C)$ (b) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (c) $A^c \cap B^c \cap C^c$

---

a) $B \triangle C = \{-2, 1, 3, 10, \{1, 2, 3\}, \{3\}\}$

$$A \cap (B \triangle C) = \{-2, 1, 3\}$$

b) $A \cap B = \{1\}$ y $(A \cap C) = \{-2, 3\}$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{-2, 1, 3\}$$

c) $A^c = \{10, \{1, 2, 3\}, \{3\}\}$, $B^c = \{-2, 7, 3, \{1, 2, 3\}\}$ y $C^c = \{1, \{3\}, 7, 10\}$

$$A^c \cap B^c \cap C^c = \varnothing$$

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, ⭐ al repo, críticas, todo sirve. Ir al índice ↑
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Juan Parajó Fran Sureda

5. Dados los subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos

i) $(A \cup B \cup C)^c \overset{\text{(c)}}{=} (A \cup B)^c \cap C^c \overset{\text{(c)}}{=} A^c \cap B^c \cap C^c$ ✓

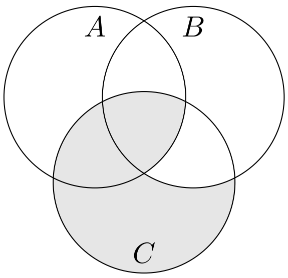
ii) $(A \cap B \cap C)^c \overset{\text{(d)}}{=} (A \cap B)^c \cup C^c \overset{\text{(d)}}{=} A^c \cup B^c \cup C^c$ ✓

6. Sean A,B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

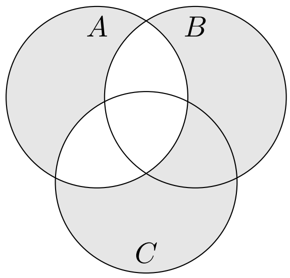
i) $(A \cup B^c) \cap C$

ii) $A \triangle (B \cup C)$

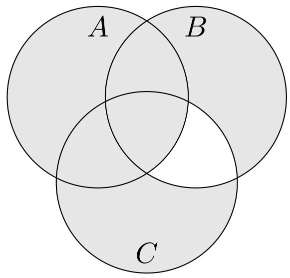
iii) $A \cup (B \triangle C)$



i)



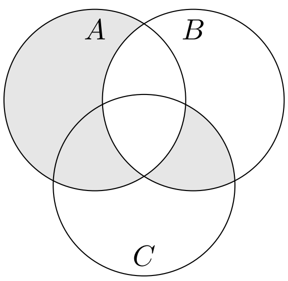
ii)



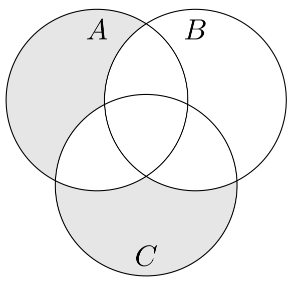
iii)

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Matías Santos

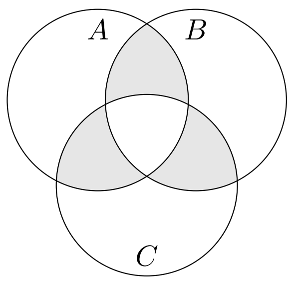
7. Encontrar fórmulas que describen las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.



(a)



(b)



(c)

(a) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap C)$

(c) $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \cap (A \cap B \cap C)^c$

(b) $(A \triangle C) \cap B^c \overset{!}{=} (A \cup C) \cap (A \cap C)^c \cap B^c$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos.

i) $A = \{1\}$ ii) $A = \{a, b\}$ iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Recordando la definición de conjunto de partes:
El conjunto de partes de A, $\mathcal{P}(A)$, está formado por todos los conjuntos B tal que B es un subconjunto de A

$$\Big\{\mathcal{P}(A) = \{B \;/\; B \subseteq A\}$$

Los elemntos del conjunto de $\mathcal{P}(A)$ son conjuntos.

(i) $A = \{1\}$ entonces $\mathcal{P}(A)$:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}}$$

(ii) $A = \{a, b\}$ entonces $\mathcal{P}(A)$:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}}$$

(iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$ enteonces $\mathcal{P}(A)$:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, A\}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

9. Sean A y B conjuntos, Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$

Prueba que la hago por absurdo, mirá la lógica en en apunte.

($\Rightarrow$) Quiero probar que:

$$\underbrace{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}_{\text{hipótesis}} \implies \underbrace{A \subseteq B}_{\text{tesis}}$$

Pruebo por absurdo. Niego la tesis, la hipótesis sigue valiendo.

Supongo que:

$$A \not\subseteq B \underset{!}{\overset{\text{def}}{\iff}} \exists x \in A \text{ tal que } x \notin B.$$ [1]

Y lo que intento es llegar a una contradicción, es decir me gustaría que pase algo que contradiga la hipótesis.

Según mi supuesto:

$$x \in A \xrightarrow[\text{partes}]{\text{def de}} \{x\} \in \mathcal{P}(A).$$

Peeeeeero!! por hipótesis:

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Entonces el conjunto $\{x\}$ también tiene que estar en $\mathcal{P}(B)$.

Nota que puede ser útil:

¿Cuál es el absurdo? Terminá lo que falta de esta parte de la demostración sin ver como sigue y después comparás. Ya está casi terminado, pero juntar los cables con esta info te obliga a entender lo que se está intentando hacer.

Fin nota que puede ser útil:

Si el conjunto $\{x\}$ está en $\mathcal{P}(B)$ entonces por la definición del conjunto de partes el elemento x tiene que estar en B.

Esto es un absurdo, porque arranqué diciendo en ★[1] que $x \notin B$ y ahora que $x \in B$. Absurdo 💀.

Como mi supuesto resulto falso, debido a la lógica que está en las notas teóricas sobre mostrar por absurdo concluyo que:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \implies A \subseteq B} \quad \checkmark$$

($\Leftarrow$) Quiero probar que:

$$\underbrace{A \subseteq B}_{\text{hipótesis}} \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Le pongo nombre S a los elementos de $\mathcal{P}(A)$. Todo elemento $S \overset{\star^2}{\in} \mathcal{P}(A)$ es un conjunto que cumple que $S \subseteq A$ por la definición del conjunto $\mathcal{P}(A)$. Si todo elemento S cumple que $S \subseteq A$ por hipótesis también tiene que estar en B.

Nota que puede ser útil:

Terminá lo que falta de esta parte de la demostración sin ver como sigue y después compararás.

Fin nota que puede ser útil:

$$S \in B \overset{\text{def}}{\implies} S \in \mathcal{P}(B).$$

Entonces en ★[2] dije que los S forman al conjunto $\mathcal{P}(A)$, y si todos los S están en $\mathcal{P}(B)$ entonces:

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Queda demostrado que:

$$\boxed{A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

♉ Nad Garraz

---

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

i) $p \implies q$, $\quad \neg q \implies \neg p$, $\quad \neg p$ o q $\quad$ y $\quad \neg(p \wedge \neg q)$.

Esto nos dice que podemos demostrar una afirmación de la forma $p \implies q$ probando en su lugar $\neg q \implies \neg p$ (es decir *demostrando el contrarrecíproco*), o probando $\neg(p \wedge \neg q)$ (esto es una *demostración por reducción al absurdo*).

ii) $\neg(p \implies q)$ $\quad$ y $\quad \neg q$.

---

i) Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

ii)

p	q	$\neg q$	$p \implies q$	$\neg(p \implies q)$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \implies x > 2$.

---

i) La proposición es falsa, dado que si: $a = 1 \implies \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$

ii) La proposición es falsa, dado que si:

$$x = 2 \;\wedge\; y = 2 \implies \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

iii) La proposición es falsa, dado que si:

$$x = -3 \implies 9 > 4 \implies -3 > 2$$

Y eso no es verdad.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

12.

i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \quad \text{o} \quad n \leq 8$.

b) $\exists n \in \mathbb{N} \ /\ n \geq 5 \;\wedge\; n \leq 8$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \ /\ m > n$.

d) $\exists n \in \mathbb{N} \ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n$.

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \implies x^2 > 4$.

f) Si n es un natural terminado en 4, entonces n es par.

g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones e) y f) del item i) utilizando las equivalencias del ejercicio **10.**i)

---

i) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \quad \text{o} \quad n \leq 8$.
La proposición es verdadera. El conjunto descrito por $\{n \in \mathbb{N} \ /\ n \leq 8 \quad \text{o} \quad n \geq 5\} = \mathbb{N}$

¿Se puede justificar con un gráfico? → ¡Sí!

b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5\ \wedge\ n \leq 8$.
La proposición es verdadera, en este caso es cuestión de encontrar solo un valor que cumpla, $n = 6$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.
La proposición es verdadera, si se elige por ejemplo a $m = n + 1$

d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n$.
La proposición es falsa, el único $n \in \mathbb{N}$ que no tiene un número menor estricto es el 1. Pero la condición dice que $\ \forall m \in \mathbb{N}$ se debe cumplir y si m $1 \not< 1$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \implies x^2 > 4$.
La proposición es verdadera. Si $x > 3 \implies x^2 > 9 \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}} x^2 > 9 > 4 \implies x^2 > 4$

f) $n \in \mathbb{N}$, cuyo último dígito es 4. Entonces hay un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ con su último dígito 0 tal que

$$n = m + 4.$$

Si un número tiene 0 como último dígito, debe ser múltiplo de 10, es decir $m = 10 \cdot m'$ con $m' \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Por lo que se puede escribir a n como:

$$n = 10 \cdot m' + 4 = 2 \cdot 5 \cdot m' + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (5m' + 2) = 2 \cdot m'',$$

con $m'' \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$n = 2m''.$$

Si un natural termina con 4, es par. La proposición es verdadera.

g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.
Están proponiendo que dado $z \in \mathbb{R} \implies z \in \mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \{a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\ /\ a + ib\}$, con $i^2 = -1$ Por lo tanto para $b = 0$, podría generar todo $\mathbb{R}$.

---

ii) a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n < 5\ \wedge\ n > 8$.
$A = \{n \in \mathbb{N}\ /\ n < 5\ \wedge\ n > 8\} = \varnothing \implies \nexists n$ que cumpla lo pedido.

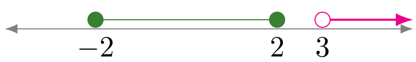
b) $\forall n \in \mathbb{N}\ /\ n < 5\quad$ o $\quad n > 8$.
La proposición es falsa, $n = 6$ no cumple estar en ese conjunto.

c) $\exists n \in \mathbb{N},\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ /\ m \leq n$.
La proposición es falsa, porque el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene un máximo. $n = m + 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}\ /\ \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$.
La proposición es verdadera, el único $m \in \mathbb{N}$ que cumple eso es el $m = 1$.

e) $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 3 \wedge x^2 \leq 4$.
La proposición es falsa. El nuevo conjunto propuesto es vacío.

$$\left\{ \begin{array}{c} A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > 3\} \\ \text{y} \\ B = \{x \in \mathbb{R}\ /\ |x| \leq 2\} \end{array} \right\} \rightarrow$$



f) *Si n es un natural que no termina en 4 entonces no es par.*
Un contraejemplo bastaría para probar que esto es falso: El número 12. No termina con el número cuatro y es par, ya que $12 = 2 \cdot 6$.

g) Si z no es un número real, entonces $z \notin \mathbb{C}$.
La proposición es falsa. Están proponiendo que dado $z \notin \mathbb{R} \implies z \notin \mathbb{C}$. Si $z = i$, se prueba lo contrario. Dado que $i \notin \mathbb{R}$, pero $i \in \mathbb{C}$

iii) e)

$p \implies q$	$\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \implies x^2 > 4$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim q \implies \sim p$	$x^2 \leq 4 \implies x \leq 3$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim p \vee q$	$x \leq 3$ o $x^2 > 4$		$A \cup B \overset{?}{=} \mathcal{U}$ ✓
$\sim (p \wedge \sim q)$	$\sim (x > 3 \wedge x^2 \leq 4)$		$(A \cap B)^c \overset{?}{=} \varnothing^c = \mathcal{U}$ ✓

f) $p \implies q$:

Si $n \in \mathbb{N}$ con último dígito 4 entonces n es un número par.

$\sim q \implies \sim p$:

Si $n \in \mathbb{N}$ es impar entonces el último dígito de n no es 4.

$\sim p \vee q$:

$n \in \mathbb{N}$ no termina con 4 o n es par.

$\sim (p \wedge \sim q)$: ¿Cómo se enuncia esto?

No es el caso en que $n \in \mathbb{N}$ termina con 4 y n es impar

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Juan Parajó Ale Nieto

---

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$ y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \varnothing \iff A = B$

---

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$. Es verdadera. La demo sale fácil con tabla de verdad.

A	B	C	C^c	$A - C$	$B - C$	$A \triangle B$	$(A \triangle B) - C$	$(A - C) \triangle (B - C)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F

Del resultado de la tabla se concluye que hay distribución entre la resta y una diferencia simétrica.

ii) ¡Es falsa! Lo demuestro por *contraejemplo*. Sean:

$$A = C = \{1\}, B = \varnothing,$$

luego,

$$(A \cap B) \triangle C = \varnothing \triangle A = A$$

peeeero,

$$(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = (A \triangle A) \cap (B \triangle A) = \varnothing \cap A = \varnothing \neq A$$

$$\boxed{\therefore (A \cap B) \triangle C \neq (A \triangle C) \cap (B \triangle C)}$$

iii) Este ejercicio sale en 2 patadas haciendo unos *diagramas de Venn*, o casi de cualquier forma. Pero tenía ganas de hacer esta versión, porque en las materias de *algoritmos* se usa más esta forma de atacar los problemas.

Sugerencia: Amigate con las implicaciones. Ayer.

$$\overbrace{\underbrace{C \subseteq A}_{\text{hipótesis}} \implies \underbrace{B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c}_{\text{tesis}}}^{\textit{razonamiento}}$$

Para que ese *razonamiento* sea válido, la premisa, la hipótesis tiene que ser verdadera y luego la tesis también tiene que ser verdadera. Es decir que por hipótesis laburo con valores, elementos x tales que:

$$C \subseteq A \overset{!}{\Leftrightarrow} x \in C \implies x \in A$$

o equivalentemente:

$$\forall x \in \mathcal{U} : (x \notin C) \vee (x \in A) \quad \star^1$$

Esa proposición tiene un valor verdadero excepto para los $x \in C \wedge x \notin A$, por lo que laburo con los valores de x para los cuales eso no pasa. Esto es lo que me dice la hipótesis $\star^1$ y voy a usar más adelante.

Estudio la tesis

La proposición $B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$ en formato lógico:

$$\big(\forall x \in \mathcal{U}\big) : \big((x \in B) \wedge (x \in C)\big) \implies \Big(\big(x \in (A \wedge B^c)\big) \vee \big(x \in (A^c \wedge B)\big)\Big)^c\Big)\star^2$$

Esa proposición es inmediatamente verdadera si $x \notin C$ (también lo es $\star^1$), así que el caso que me interesa estudiar, que cumple que la hipótesis es *verdadera* es,

$$x \in C \wedge x \in A.$$

Al igual que antes para que el razonamiento de $\star^2$ sea válido, necesito partir de algo verdadero y llegar a algo verdadero:

$$\overbrace{\underbrace{x \in B}_{\substack{\text{debe ser}\\ \text{verdadera}}} \wedge \underbrace{(x \in C)}_{\substack{\text{por hipótesis}\\ \star^1\text{verdadera}}}}^{\text{verdadero}} \implies \overbrace{\Big(\big(\underbrace{(x \in (A \wedge B^c))}_{\substack{\text{falso}\\ \text{porque } x \in B}} \vee \underbrace{(x \in (A^c \wedge B))}_{\substack{\text{falso}\\ \text{por hipótesis } x \in A}}\big)^c\Big)}^{\text{verdadero}}$$

Si te cuestionás el ¿Pero que pasa si $x \notin B$? Bueno, la premisa sería falsa y la implicación $\star^2$ sería verdadera, porque en la implicación $p \implies q$ con p falso no importa q, la implicación es verdadera por default.

Por lo tanto el razonamiento del enunciado resulta válido.

$$\boxed{C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c \quad \text{es verdadera.}}$$

iv) ¡Es verdadera!

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} A \triangle B = \varnothing &\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} (A - B) \cup (B - A) = \varnothing \\ &\overset{!}{\Leftrightarrow} (A - B = \varnothing) \wedge (B - A = \varnothing) \\ &\Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

$$A = B \implies A \triangle B = A \triangle A = \varnothing$$

Probada la ida y vuelta, queda demostrado que:

$$\boxed{A \triangle B = \varnothing \iff A = B}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Mateo Z` `naD GarRaz`

---

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que:

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

iv) $(A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c = (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c$.

v) $A \subseteq B \implies A \triangle B = B \cap A^c$.

vi) $A \cap C = \varnothing \implies A \cap (B \triangle C) = A \cap B$.

vii) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$.

viii) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

---

i) Voy a usar tablas con los resultados que hay en las tablas de verdad acá.

A	B	C	$B \triangle C$	$A \cap B$	$A \cap C$	$A \cap (B \triangle C)$	$(A \cap B) \triangle (A \cap C)$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

ii) Este sale sin tablas: Tratá de hacerlo con estas propiedades, (notas teóricas acá):

1) Notación de diferencia

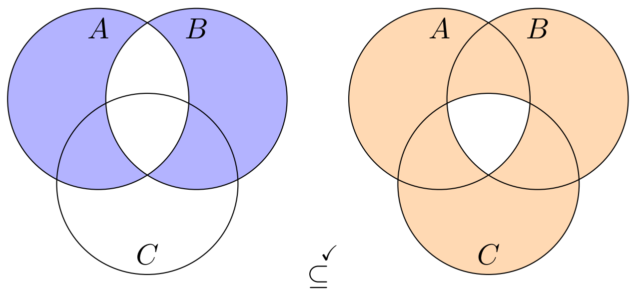
2) Distributivas

3) DeMorgan

$$(A - B) \cup (A \cap C) \overset{!}{=} [(A \cap B^c) \cup A] \cap [(A \cap B^c) \cup C] \overset{!!}{=} A \cap (A \cup C) \cap (B^c \cup C) \overset{!!!}{=} A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B - C)^c \overset{!}{=} A - (B - C) \quad \checkmark$$

iii) Opción 1, con diagramas de Venn:

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C):$$



Opción 2, para probar que un conjunto es subconjunto de otro, me alcanza con probar que para cualquier elemento de $\mathcal{U}$, si pertenece al primero entonces pertenece al segundo.

Luego, quiero probar que

$$x \in A \triangle B \implies x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C), \ \ \forall x \in \mathcal{U}$$

Hay que acomdar las expresiones para hacer el seguimiento del elmento x:

$$x \in A \triangle B \overset{\text{def}}{\iff} \underbrace{(x \in A \ \wedge \ x \notin B)}_{I} \ \vee \ \underbrace{(x \notin A \ \wedge \ x \in B)}_{II},$$

la otra parte:

$$x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C) \overset{\text{def}}{\iff} ((x \in A \ \wedge \ x \notin C) \vee (x \notin A \ \wedge \ x \in C)) \vee ((x \in B \ \wedge \ x \notin C) \vee (x \notin B \ \wedge \ x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin C) \ \vee \ (x \notin A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin C) \ \vee \ (x \notin B \ \wedge \ x \in C).$$

Se que $x \in A \triangle B \implies I \ \vee \ II$. Separo en casos,

$$\text{Si } I \text{ es Verdadero, } I \overset{\bigstar^1}{\implies} (x \in A \ \wedge \ x \notin C) \ \vee \ (x \notin B \ \wedge \ x \in C) \implies x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

$$\text{Si } II \text{ es Verdadero, } II \overset{\bigstar^1}{\implies} (x \notin A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin C) \implies x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

$$\text{Si } I \ \wedge \ II \text{ es Verdadero, } I \ \wedge \ II \implies I \overset{\text{idem}}{\implies} x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

$$\boxed{\therefore x \in A \triangle B \implies x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C),}$$

como quería probar.

$\bigstar^1$ Observo que (Verdadero $\wedge$ p) $\vee$ (Verdadero $\wedge$ $\neg p$) es una tautología.

iv) $(A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c = (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c$ Las intrucciones: Intentalo y después mirá la solución.

1) De Morgan
2) Conmutatividad, asociatividad de la unión
3) De Morgan nuevamente

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c &= (A^c \cup B^c) \cup (C^c \cup D^c) \\ &= A^c \cup B^c \cup C^c \cup D^c \\ &= A^c \cup C^c \cup B^c \cup D^c \\ &= (A^c \cup C^c) \cup (B^c \cup D^c) \\ &= (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c \end{aligned}$$

v) Para probar la igualdad, hay que probar la ida y la vuelta:

($\Rightarrow$) Por hipótesis del ejercicio:

$$A \subseteq B \bigstar^1$$

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} A - B \cup B - A \underset{\bigstar^1}{\overset{!!}{=}} B - A = B \cap A^c$$

($\Leftarrow$) La vuelta es similar:

$$B \cap A^c \overset{\text{def}}{=} B - A = B - A \cup \varnothing \underset{\star^1}{\overset{!!}{=}} B - A \cup A - B \overset{\text{def}}{=} A \triangle B$$

¿Había qué hacer la ida y la vuelta? 😅

vi) Sale casi en forma directa:

$$(A \cap C) - B \overset{\text{def}}{=} (A \cap C) \cap B^c \overset{!}{=} (A \cap B^c) \cap C \overset{\text{def}}{=} (A - B) \cap C$$

Queda así demostrada la igualdad.

vii) Mirando el ítem i) del ejercicio sale en dos patadas. Tené en cuenta que:

$$X \triangle \varnothing \overset{!}{=} X$$

Todo tuyo!

viii) Este lo resuelvo *pulenta* para los puristas que subestiman las *tablas de verdad* y los *diagramas de Venn*. En otras palabras para la gente que le gusta complicar las cosas innecesariamente 😛.

($\Rightarrow$) Quiero probar que:

$$A \subseteq B \implies B^c \subseteq A^c$$

A subconjunto de B se puede escribir en lenguaje lógico como:

$$[A \subseteq B] \overset{\text{def}}{\leftrightsquigarrow} [A \implies B] \overset{\star^1}{\leftrightsquigarrow} [\ \forall x \in \mathcal{U} : (x \notin A) \vee (x \in B)]$$

Esos corchetes son equivalentes ¡Tienen la misma información! Tomate el tiempo hasta que lo veas. Laburo con el último corchete:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{U} : (x \notin A) \vee (x \in B) \quad & \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in \mathcal{U} : (x \in A^c) \vee (x \notin B^c) \\ & \underset{\text{del } \vee}{\overset{\text{conmutatividad}}{\Longleftrightarrow}} \quad \forall x \in \mathcal{U} : (x \notin B^c) \vee (x \in A^c) \\ & \overset{\star^1}{\leftrightsquigarrow} \quad B^c \implies A^c \\ & \overset{!!}{\Leftrightarrow} \quad B^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) La vuelta es lo meeeeeesmo. Toda tuya.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz Mateo Z

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

- $A \times A = \begin{cases} \{a \in A, b \in A \ / \ (a, b) \in A \times A\} \to \text{Comprensión} \\ \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \to \text{Extensión} \end{cases}$
- $A \times B = \cdots$
- $(A \cap B) \times (A \cup B) =$

$\{1, 3\} \times \{1, 2, 3, 5, 7\} =$

$\times$	1	2	3	5	7
1	$(1,1)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(1,7)$
3	$(3,1)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(3,7)$

$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{s \in (A \cap B), t \in (A \cup B) \ / \ (s, t) \in (A \cap B) \times (A \cup B)\}$

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

---

i) Para demostrar igualdad de conjuntos habría que probar la doble inclusión, es decir:

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$$

O bien si podemos conectar los pasos con " $\iff$ ". En este caso se usa el de los " $\iff$ " y mucho de las definiciones que podés ver acá en las notas teóricas:

Sea el par (x, y)

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C) \underset{\text{Cartesiano}}{\overset{\text{def prod.}}{\iff}} x \in (A \cup B) \quad \text{y} \quad y \in C \underset{\cup}{\overset{\text{def}}{\iff}} (x \in A \quad \text{o} \quad x \in B) \quad \text{y} \quad x \in C$$

Si está en A o en B y seguro está en C, entonces x tiene que estar en $A \cap C$ o bien en $B \cap C$, que no es otra cosa que distribuir el "y" con el "o":

$$\overset{\text{distribución}}{\iff} (x \in A \quad \text{y} \quad x \in C) \quad \text{o} \quad (x \in B \quad \text{y} \quad x \in C) \overset{!}{\Leftrightarrow} (x, y) \in (A \times C) \quad \text{o} \quad (x, y) \in (B \times C)$$

Ese paso del ! es la definición de producto cartesiano como al principio y se concluye que:

$$(A \cup B) \times C \overset{\checkmark}{=} (A \times C) \cup (B \times C)$$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)
\end{aligned}$$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \times C) - (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \\
&\overset{\text{Aux.1}}{\iff} (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \\
&\overset{\text{Aux.2}}{\iff} x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in (A - B) \times C
\end{aligned}$$

Auxiliar 1 Sean las proposiciones p, q y r. Podemos distribuir el $\wedge$ con respecto a $\vee$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Tomemos

$$\begin{aligned}
&p : x \in A \wedge y \in C \\
&q : x \notin B \\
&r : y \notin C
\end{aligned}$$

Entonces

$$(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C)$$

Auxiliar 2 Sean las proposiciones p y q, donde q es falsa. Entonces

$$p \vee q \Leftrightarrow p$$

Tomemos

$$p : x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$$
$$q : x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C$$

Deberiamos ver que valor de verdad de q es falso. En q tenemos como condición que $y \in C$ y que $y \notin C$, y esto no puede ser posible, por lo tanto q es falsa. Entonces

$$(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$
Veamos dos formas de demostrar esto, una es con igualdad de conjuntos, la que venimos usando en las demostraciones anteriores y la otra es usando los puntos (i) y (iii).

(a) Por igualdad de conjuntos

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in (A \times C) \triangle (B \times C) \xLeftrightarrow{\text{Aux.1}} (x,y) \in ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C)) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in ((A \times C) - (B \times C)) \vee (x,y) \in ((B \times C) - (A \times C)) \\
&\Leftrightarrow ((x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C) \vee ((x,y) \in B \times C \wedge (x,y) \notin A \times C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge (x \notin B \vee y \notin C)) \vee (x \in B \wedge y \in C \wedge (x \notin A \vee y \notin C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \\
&\qquad \vee (x \in B \wedge y \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge y \in C \wedge y \notin C) \\
&\xLeftrightarrow{\text{Aux.2}} (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge y \in C \wedge x \notin A) \\
&\Leftrightarrow (x \in (A - B) \wedge y \in C) \vee (x \in (B - A) \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in (B - A)) \wedge y \in C \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow x \in A \triangle B \wedge y \in C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \triangle B) \times C
\end{aligned}$$

(b) Usando los puntos (i) y (iii)

$$\begin{aligned}
&(A \times C) \triangle (B \times C) \overset{\text{Aux}}{\underset{1}{=}} ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C)) \overset{(iii)}{=} \\
&\overset{(iii)}{=} ((A - B) \times C) \cup ((B - A) \times C) \overset{(i)}{=} ((A - B) \cup (B - A)) \times C \overset{\text{Aux}}{\underset{1}{=}} (A \triangle B) \times C \\
&\implies (A \times C) \triangle (B \times C) = (A \triangle B) \times C
\end{aligned}$$

Auxiliar 1 Sean los conjuntos $A, B \subseteq V$

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Auxiliar 2 Sean las proposiciones p y q, donde q es falsa. Entonces

$$p \vee q \Leftrightarrow p$$

Podemos tomar

$$p : x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$$
$$q : x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C$$

donde claramente q es falso pues $y \in C$ e $y \notin C$. Entonces

$$(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$$

Para este otro caso diferente al anterior, podemos tomar

$$p : x \in B \wedge y \in C \wedge x \notin A$$
$$q : x \in B \wedge y \in C \wedge y \notin C$$

donde q es falso pues $y \in C$ e $y \notin C$. Entonces

$$(x \in B \wedge y \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge y \in C \wedge y \notin C) \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \wedge x \notin A$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz
Marcos Zea

Relaciones

---

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar las siguientes relaciones de A y B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$

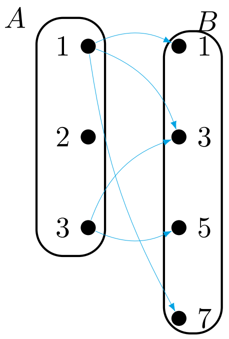
iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$

Es útil traer la *definición de Relación,* $\mathcal{R}$ *:*

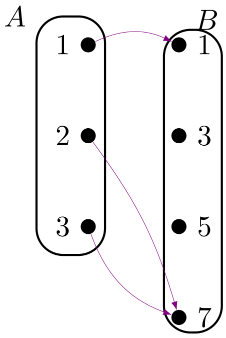
> Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

i) Esta es una $\mathcal{R}$:

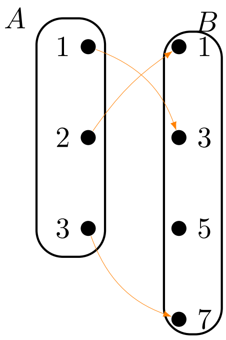


ii) No es una relación dado que $3 \; \mathcal{R} \; 2 \notin \mathcal{P}(A \times B)$

iii) Es una relación:



iv) Es una relación:



Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

---

18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las siguientes relaciones de A en B:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

Describir por extensión es mostrar todos los elementos de forma explícita. Para estos conjuntos finitos con esas relaciones, se hace así:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a > b \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2, 1), (3, 1)\}$

iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \cdot b \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7)\}$

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a + b > 6 \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

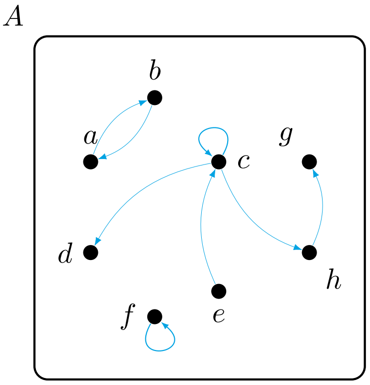
naD GarRaz

---

19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es *reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.*

Podés ver el resumen de la teoría acá y así entender, o corregir 🤖, lo que se hizo.

i)

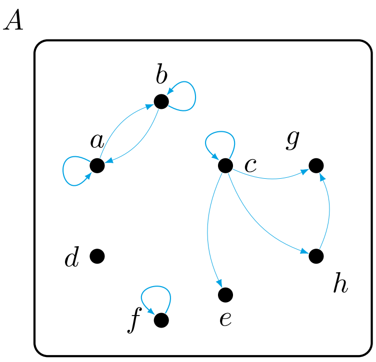


Por extensión:

$$\{(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(c,h),(e,c),(f,f),(h,g)\}$$

- *Reflexiva*: Noup, porque no hay bucles en todos los vértices, en particular $a \not\mathcal{R}\ a$.
- *Simétrica:* Noup, porque $d \not\mathcal{R}\ c$.
- *Transitiva*: No, falta atajo, $c\ \mathcal{R}\ h$ y $h\ \mathcal{R}\ g$, pero $c \not\mathcal{R}\ g$.
- *Antisimétrica:* No, porque $a\ \mathcal{R}\ b$ y $b\ \mathcal{R}\ a$ con $a \neq b$.

ii)



Por extensión:

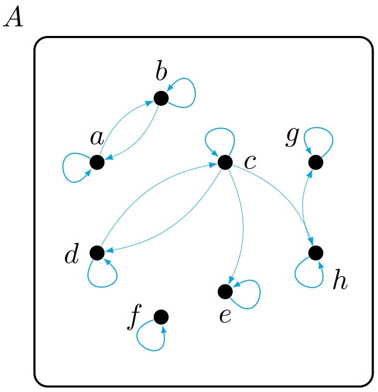
$$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,e),(c,g),(c,h),(f,f),(h,g)\}$$

- *Reflexiva*: No, faltan bucles en algunos vértices.
- *Simétrica*: No, $c\ \mathcal{R}\ e$, pero $e \not\mathcal{R}\ c$.
- *Transitiva*: Sí. está el *atajo* en la única terna:

$$c\ \mathcal{R}\ h,\ h\ \mathcal{R}\ g \implies c\ \mathcal{R}\ g.$$

- *Antisimétrica:* No, porque $a\ \mathcal{R}\ b$ y $b\ \mathcal{R}\ a$ con $a \neq b$.

iii)

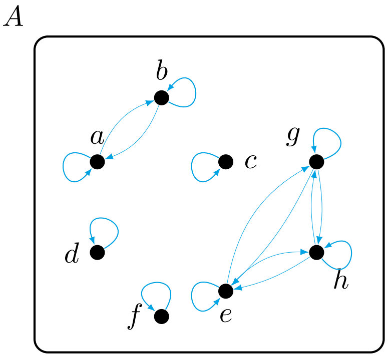


Por extensión:

$$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(c,e),(c,h)(d,d),(d,c),(e,e),(f,f),(g,g),(h,h),(h,g)\}.$$

- *Reflexiva*: Sí, están todos los bucles.
- *Simétrica*: No, $c\ \mathcal{R}\ h$, pero $h \not\mathcal{R}\ c$.
- *Transitiva*: No, falta atajo, $c\ \mathcal{R}\ h$ y $h\ \mathcal{R}\ g$, pero $c \not\mathcal{R}\ g$.
- *Antisimétrica:* No, porque $a\ \mathcal{R}\ b$ y $b\ \mathcal{R}\ a$ con $a \neq b$.

iv)



Por extensión:

$$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(e,g),(e,h),(f,f),(g,g),(g,e),(g,h),(h,h),(h,e),(h,g)\}.$$

- Reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $a\ \mathcal{R}\ b$ y $b\ \mathcal{R}\ a$ con $a \neq b$.
- Es transitiva, porque hay *atajos* en todas las relaciones de ternas.

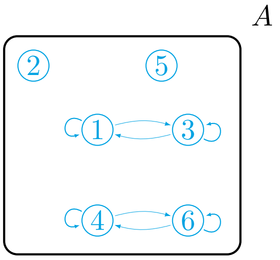
Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Agus F.

---

20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación,

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (6,4), (4,6), (4,4), (6,6)\}$$

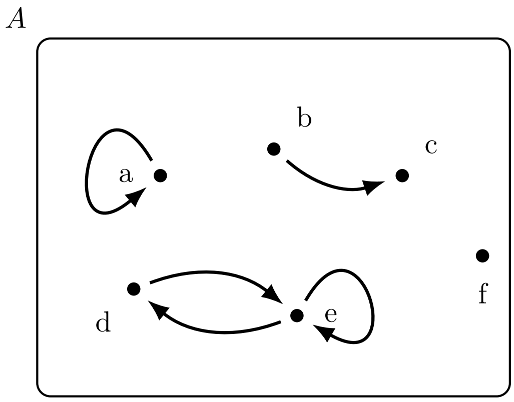
como está hecho en el ejercicio anterior y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



- No es reflexiva porque no hay bucles ni en 2 ni en 5.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $1 \mathcal{R} 3$ y $3 \mathcal{R} 1$ con $1 \neq 3$.
- Es transitiva.
  Chequear. Caso particula donde no hay ternas de x, y, z distintos. Sí, el que 2 esté ahí solo ni cumple la hipótesis de transitividad.

---

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico.



Hallar la minima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva
ii) simétrica
iii) transitiva
iv) reflexiva y simétrica
v) simétrica y transitiva
vi) de equivalencia

---

i) Para que la relación sea reflexiva se debe cumplir que $\forall a \in A, a \mathcal{R} a$, visto como grafo, cada ítem tiene que tener un bucle (es decir una flecha hacia sí mismo). Deberíamos agregar 4 pares : $\{(b,b), (c,c), (d,d), (f,f)\}$

ii) Para que sea simétrica necesitamos que $a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a, \quad a, b \in A$. En este caso el único par que está conectado pero no tiene la vuelta es el par (b, c), así que agregando el par (c, b) ya hacemos que sea simétrica.

iii) Para que sea transitiva queremos que $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c, \quad a, b, c \in A$. Vemos que $d \mathcal{R} e \wedge e \mathcal{R} d$ pero $d \not\mathcal{R} d$, por ende lo que falta sería agregar el par (d, d), en todos los demas se cumple la transitividad.

iv) Para hacerla reflexiva teniamos que agregar $\{(b,b), (c,c), (d,d), (f,f)\}$ y para que sea simétrica (c, b)

v) Para hacerla simétrica agregabamos (c, b) y para transitiva (d, d), pero también hay que agregar bucles en b y c ya que al haber hecho simétrico ese par queremos que cumpla la transitividad también. Así que agregamos también $\{(b,b), (c,c)\}$

vi) Para que sea de equivalencia tiene que ser, reflexiva, simétrica y transitiva, combinando todo lo que hicimos arriba queda que tenemos que agregar $\{(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),(c,b)\}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

---

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$

ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a+b \text{ es par}\}$.

iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, |a| \le |b|\}$.

iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a.

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$.

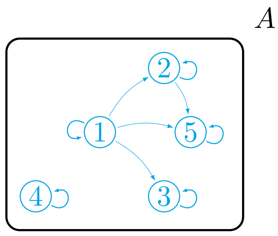
vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \;/\; n \le 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

vii) $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

Voy a estar usando cosas del resumen teórico de relaciones.

i) Haciendo un gráfico en estos ejercicios de pocos elementos sale fácil.

Reflexiva:
Es reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
Simétrica:
No es simétrica, dado que existe $(1,5)$, pero no $(5,1)$
Anti-Simétrica:
Es antisimétrica. No hay ningún par que tenga la vuelta, excepto los casos $x \,\mathcal{R}\, x$.
Transitiva:
Es transitiva. La terna 1, 2, 5 es transitiva. La relación es R, AS y T, por lo tanto es una *relación de orden.*



ii) Primero notemos que $a+b$ es par puede pensarse como $a+b = 2k, k \in \mathbb{N}$, esto lo digo para ver que como tenemos una igualdad, nos da una idea de que muy probablemente sea de equivalencia... para tener en cuenta no mas.

Reflexiva:

Hay que probar que $\forall a \in A, a \,\mathcal{R}\, a$.
Elijo un elemento arbitrario a_0, quiero ver que $a_0 \,\mathcal{R}\, a_0$. O sea que $a_0 + a_0$ es par, o dicho de otro modo: $a_0 + a_0 = 2k$, usando esta ultima afirmacion, veo que $a_0 + a_0 = 2a_0$, que efectivamente es un numero de la forma $2k$. Por lo tanto <u>es reflexiva</u>.

Simétrica:

Que una relación sea simétrica significa que $a \,\mathcal{R}\, b \implies b \,\mathcal{R}\, a$. Es bastante trivial la verdad porque la suma es conmutativa, pero bueno, fijamos $a = a_0$, $b = b_0$. Como $a \,\mathcal{R}\, b$, entonces $a_0 + b_0 = 2k$, pero $a_0 + b_0 = b_0 + a_0$ porque la suma es conmutativa, por lo tanto $b \,\mathcal{R}\, a$. Por lo tanto <u>es simétrica</u>.

Transitividad:

Que una relación sea transitiva significa que $a \mathcal{R} b \quad \text{y} \quad b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c$. Para mi la forma mas sencilla y clara de hacer este tipo de pruebas es armar un sistema de ecuaciones y ver que sale. Tenemos:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 = 2k \\ b_0 + c_0 = 2k \end{cases} \xrightarrow{\text{lo mismo que}} \begin{cases} a_0 = 2k - b_0 \\ c_0 = 2k - b_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos las ecuaciones}} a_0 + c_0 = 4k - 2b_0 \quad \bigstar^1$$

$\bigstar^1$ se ve que toda esa expresion equivale a un numero de la forma $2k$, por lo tanto $a_0 + c_0 = 2k$.
Probando la transitividad

Antisimétrica:

Que una relación sea antisimétrica significa que $a \mathcal{R} b \quad \text{y} \quad b \mathcal{R} a \implies a = b$.
Podemos facilmente ver un contraejemplo, $2 \mathcal{R} 4$ y $4 \mathcal{R} 2$, pero $2 \neq 4$. Ya con el contraejemplo queda probado que no es antisimétrica, pero quiero a parte mostrar una prueba mas general para el que le interese...

Tenemos:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 = 2k \\ b_0 + a_0 = 2k \end{cases}$$

Vemos que por conmutatividad de la suma las dos expresiones son identicas. Llamo $h = 2k$ y tengo: $a_0 + b_0 = h \longrightarrow a_0 = h - b_0$. De aca obtengo otra manera de expresar la relación como

$$(h - b_0) \mathcal{R} b_0$$

Veo que si elijo un h cualquiera (tiene que ser par), puedo elegir tambien cualquier b_0, y la regla de antisimetria no se va a cumplir para todos los numeros.

iii) Primero notamos que como hay un $\leq$ ya nos da una idea de que probablemente vaya a ser una relación de orden.
Reflexiva:

Hay que probar que $\forall a \in A, a \mathcal{R} a$.
Vemos que elijo un a_0 arbitrario y tengo que $a_0 \leq a_0$ lo cual es verdadero, por lo tanto es reflexiva.

Simétrica:

Hay que ver que $a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a$ para $a \neq b$ para todo par (a, b).

Podemos buscar un contraejemplo, $2 \mathcal{R} 4$, pero $4 \not\mathcal{R} 2$. Por lo tanto la relación no es *simétrica*

Transitividad:

Queremos ver que $a \mathcal{R} b \quad \text{y} \quad b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c$.

Justo en este caso es bastante sencillo de ver porque la propiedad estrella del $\leq$ es justamente la transitividad. Si tenemos $a_0 \leq b_0$ y $b_0 \leq c_0$, es lo mismo que tener $a_0 \leq b_0 \leq c_0$, y por transitividad del $\leq$, queda que $a_0 \leq c_0$. Probando la transitividad

Antisimétrica:

Queremos ver que $a \mathcal{R} b \quad \text{y} \quad b \mathcal{R} a \implies a = b$.

Parecido a cuando se probó la simetría, un ejemplo para un par relacionado:

$$-1 \mathcal{R} 1 \text{ ya que } |-1| \leq |1|, \text{ pero } -1 \neq 1$$

La relación no es antisimétrica.

iv) Arranco acomodando el enunciado:

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = k \cdot b \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Reflexiva:

$$a \mathcal{R} a \Leftrightarrow a = k \cdot a \Leftrightarrow k = 1$$

La relación $\mathcal{R}$ es *reflexiva*

Simetría:

$$a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a$$

Contraejemplo:

$$2 \mathcal{R} 4 \Leftrightarrow 4 = k \cdot 2 \Leftrightarrow k = 2$$

peeero,

$$4 \not\mathcal{R} 2 \text{ ya que no existe ningún } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 2 = k \cdot 4.$$

La relación $\mathcal{R}$ no es *simétrica.*

Transitividad:

$$\text{Si } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies ¿\, a \mathcal{R} c\, ?$$

Escribimos la definición y vemos que:

$$a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & k \cdot a \\ & \wedge & \\ c & = & k' \cdot b \end{cases} \implies c = k' \cdot (k \cdot a) = k'' \cdot a$$

la relación $\mathcal{R}$ es *transitiva.*

Antisimetría:

$$\text{Si } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a \implies a = b$$

Contraejemplo:

$$2 \mathcal{R} -2 \wedge -2 \mathcal{R} 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 & = & (-1) \cdot 2 \\ & \wedge & \\ 2 & = & (-1) \cdot (-2) \end{cases} \quad \text{y } 2 \neq -2$$

la relación $\mathcal{R}$ no es *antisimétrica.*

Por lo tanto $\mathcal{R}$ no es una relación de orden ni de equivalencia.

v) *Reflexividad*

$$X \mathcal{R} X \Leftrightarrow X \cap \{1,2,3\} \subseteq X \cap \{1,2,3\}$$

La relación $\mathcal{R}$ es *reflexiva.*

Simetría:

Contraejemplo:

$$\{1\} \mathcal{R} \{1,2\}$$

peeero,

$$\{1,2\} \not\mathcal{R} \{1\} \text{ ya que } \begin{cases} \{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\} \\ \{1\} \cap \{1,2,3\} = \{1\} \end{cases} \text{ y } \{1,2\} \not\subseteq \{1\}$$

La relación $\mathcal{R}$ no es *simétrica.*

Transitividad:

$$\text{Si } X \mathcal{R} Y \wedge Y \mathcal{R} Z \implies ¿\, X \mathcal{R} Z\, ?$$

Vemos que por transitividad de los subconjunto esto tiene que valer:

$$\begin{cases} X \mathcal{R} Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\} \\ Y \mathcal{R} Z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} Y \cap \{1,2,3\} \subseteq Z \cap \{1,2,3\} \end{cases} \implies X \cap \{1,2,3\} \subseteq Z \cap \{1,2,3\}$$

la relación $\mathcal{R}$ es *transitiva.*

Antisimetría:

$$\text{Si } X \mathcal{R} Y \wedge Y \mathcal{R} X \implies Y = X$$

Contraejemplo:

$$\{1,4\} \mathcal{R} \{1,5\} \ \wedge \ \{1,5\} \mathcal{R} \{1,4\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \{1,4\} \cap \{1,2,3\} & = & \{1\} \\ & \wedge & \\ \{1,5\} \cap \{1,2,3\} & = & \{1\} \end{cases} \text{ y } \{1,4\} \neq \{1,5\}$$

la relación $\mathcal{R}$ no es *antisimétrica.*

Por lo tanto $\mathcal{R}$ no es una relación de orden ni de equivalencia.

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

$2 \in X$	$2 \in Y$	$2 \in Y^c$	$2 \in X^c$	$2 \notin X \cap Y^c$	$2 \notin Y \cap X^c$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V

.

Reflexiva:

La relación es reflexiva ya que para que un elemento X esté relacionado con sí mismo debe ocurrir que $X \mathcal{R} X \iff 2 \notin X \cap X^c$, es decir $2 \notin \varnothing$, lo cual es siempre cierto.

Simétrica:

La relación no es simétrica. Se puede ver con la segunda y tercera fila de la tabla con un contraejemplo.

Si $X = \{1\}$ y $Y = \{2\}$, $X, Y \subseteq A$, $X \mathcal{R} Y$, pero $Y \not\mathcal{R} X$,

Anti-Simétrica:

La relación no es antisimétrica. Se puede ver con la primera o cuarta fila tabla con un contraejemplo.

Si $X = \{1,2\}$ e $Y = \{2,3\} \implies X \mathcal{R} Y$ y además $Y \mathcal{R} X$ con $X \neq Y$.

Transitiva:

Es transitiva. Si bien no es lo más fácil de explicar, se puede ver en la tabla que para tener 2 relaciones en una terna X, Y, Z no se puede llegar nunca al caso de la segunda fila de la tabla, donde se lograría que $X \not\mathcal{R} Z$

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

Reflexiva:

$(a,b) \mathcal{R} (a,b) \iff ba = k \cdot ab$ con $k = 1$. Se concluye que $\mathcal{R}$ sí es *reflexiva.*

Simétrica:

Hago un contraejemplo,

$$\begin{cases} (1,2) \mathcal{R} (3,3) \iff 2 \cdot 3 \overset{\text{def}}{=} k \cdot 1 \cdot 3 = 3 \cdot k \\ (3,3) \mathcal{R} (1,2) \iff 1 \cdot 3 \overset{\text{def}}{=} h \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot h \end{cases}$$

La relación no es simétrica, dado que no hay un $h \in \mathbb{Z}$ tal que $3 = 6 \cdot h$

Anti-Simétrica:

Contraejemplo: Tomo dos valores distintos y veo que están relacionados

$$\begin{cases} (1,2) \mathcal{R} (2,4) \iff 2 \cdot 2 \overset{\text{def}}{=} k \cdot 1 \cdot 4 = 4 \cdot k \\ (2,4) \mathcal{R} (1,2) \iff 4 \cdot 1 \overset{\text{def}}{=} k \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot h \end{cases}$$

$(1,2) \mathcal{R} (2,4)$ y $(2,4) \mathcal{R} (1,2)$ con $(1,2) \neq (2,4)$.

Por lo tanto la relación $\mathcal{R}$ no es *antisimétrica.*

Transitiva:

$$\begin{cases} (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k\cdot ad \\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f) \iff de \overset{\star^1}{=} h\cdot cf \\ \text{quiero ver que } (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f) \iff be = k'\cdot af \\ \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{multiplico}} \left\{ \begin{array}{l} bc \overset{\star^1}{=} k\cdot ad \\ de \overset{\star^1}{=} h\cdot cf \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{acomodo}]{\text{y}} be\cdot \cancel{cd} = k\cdot h\cdot af\cdot \cancel{cd} \to be \overset{\checkmark}{=} k'\cdot af. \end{cases}$$

Se concluye que la relación es transitiva.

Con esos resultados se puede decir que $\mathcal{R}$ en A no es de *equivalencia* ni de *orden*.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Magui sigfripro Magu N.

---

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas

ii) de equivalencia y de orden

---

i) Una relación en A es simétrica si $a\,\mathcal{R}\,b \implies b\,\mathcal{R}\,a \quad a,b \in A$.

Una relación en A es antisimétrica si $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \implies a = b$

Juntando estas dos restricciones surge que los unicos elementos que sirven para construir tal relación son los de la forma (a,a), ya que cumplen ambas condiciones, cualquier otro tipo de elemento no cumpliria ambas condiciones simultáneamente. Es decir $\mathcal{R} \subseteq \{(a,a) | a \in A\}$. O visto como un cuadro, todos los elementos de la diagonal, la cantidad de relaciones de este tipo que se pueden construir son 2^N, siendo N el cardinal del conjunto A. Notése que hay N pares $(a,a)|a \in A$, luego para constuir la relación podemos elegir si usar o si no ese par, por cada par, el argumento es idéntico a porque el cardinal de las partes de un conjunto es 2^n.

ii) de equivalencia y de orden Para que sea de equivalencia y de orden tienen que cumplir las cuatro propiedades que vimos: *Reflexividad, Simetria, Antisimetria, Transitividad.*

Por el ítem anterior ya sabemos que solo nos sirven los elementos de la diagonal, pero al tener que ser reflexiva, es decir que $\forall a \in A, a\,\mathcal{R}\,a$, si o si tenemos que usar todos los elementos a la vez, ya que si dejamos un elemento sin usar, no sería reflexiva la relacion. Por el lado de la transitividad, la relación va a ser transitiva siempre pues al no haber dos elementos distintos relacionados para aplicar la hipótesis, la hipótesis no se aplica nunca, entonces es transitiva.

Entonces tenemos $\mathcal{R} = \{(a,a) | a \in A\}$, por lo tanto solo se puede construir una relación en A que sea de equivalencia y de orden

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

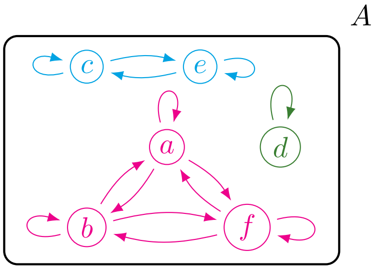
---

24. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

Hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$

Gráficamente la relación $\mathcal{R}$:



Las clases son los conjuntos de elementos que están relacionados entre sí:

$$\boxed{\begin{cases} \overline{a} & = & \{a,b,f\} & = & \overline{b} & = & \overline{f} \\ \overline{c} & = & \{c,e\} & = & \overline{e} \\ \overline{d} & = & \{d\} \end{cases}}$$

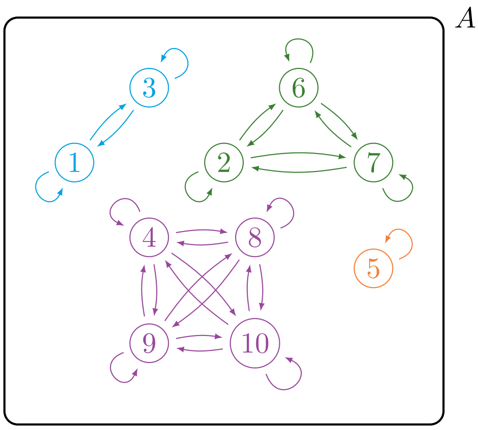
La partición asociada a $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\mathcal{R} : \{\{d\}, \{c,e\}, \{a,b,f\}\} = \{\overline{d}, \overline{c}, \overline{a}\}.}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

25. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1,3\}, \{2,6,7\}, \{4,8,9,10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.



Ese sería el grafo de la relación, es de equivalencia pues cumple que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Hay 4 clases de equivalencia ya que son 4 las particiones disjuntas del conjunto, y como representante podemos elegir cualquiera de cada clase, como convención digamos que elegimos el primero que aparece, luego los representantes son :

$$\boxed{1,2,4,5}.$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

¡Aportá con correcciones, mandando ejercicios, al repo, críticas, todo sirve. Ir al índice ↑
La idea es que la guía esté actualizada y con el mínimo de errores.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\dots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por:

$$A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio **14**iii))).

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$.

---

i) Para probar que es una relación de equivalencias hay que probar que sea *reflexiva, simétrica y transitiva*. La sugerencia que nos dan es:

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

Reflexiva: ¿$A \mathrel{\mathcal{R}} A$?

$$A \mathrel{\mathcal{R}} A \iff (A \triangle A) = \varnothing \cap \{1,2,3\} = \varnothing \quad \checkmark$$

Por lo tanto la realción $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica: ¿$A \mathrel{\mathcal{R}} B \implies B \mathrel{\mathcal{R}} A$?

$$A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff \underbrace{(A \triangle B)}_{= B \triangle A} \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

Como la diferencia simétrica es conmutativa, $A \triangle B = B \triangle A$ se tiene que la relación $\mathcal{R}$ es simétrica también.

Transitiva: ¿$A \mathrel{\mathcal{R}} B$ y $B \mathrel{\mathcal{R}} C \implies A \mathrel{\mathcal{R}} C$?

$$\begin{cases} A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \varnothing & \checkmark \\ B \mathrel{\mathcal{R}} C \iff (B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \varnothing & \checkmark \end{cases}$$

Acá uso la sugerencia.

Si el conjunto $\{1,2,3\}$ no está ni en $A \triangle B$ ni en $B \triangle C$, en particular tampoco está en $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

Sabemos que $(A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, es decir que $(A \triangle C)$ es un subconjunto de un conjunto que no tiene al conjunto $\{1,2,3\}$. Se concluye que

$$(A \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \varnothing.$$

La relación $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación es *reflexiva, simétrica y transitiva* es de equivalencia $\checkmark$.

Antisimétrica: $\forall A, B \in P$ *si* $A \mathrel{\mathcal{R}} B$ *y* $B \mathrel{\mathcal{R}} A \implies A = B$

Se podría encontrar un contraejemplo: Ya dijimos que $A \triangle B = B \triangle A$. No debería ser muy complicado encontrar un A y un B distintos que cumplan

$$A \mathrel{\mathcal{R}} B \quad \text{y} \quad B \mathrel{\mathcal{R}} A$$

ii) La clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$ va a estar formada por A y por todos los conjuntos $X \in P$ que cumplan

$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

Resulta que cerca de la sugerencia dada del **14.**iii), está el ejercicio **14.**i), donde se muestra que la intersección ($\cap$) es distributiva con la diferencia simétrica ($\triangle$). Con eso puedo reescribir la condición de más arriba como:

$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} \overset{!}{=} \{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}).$$

Si te perdiste en el !, *escribilo y miralo fuerte*. La condición para que $X \mathcal{R} \{1,2,3\}$ queda:

$$\{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}) = \varnothing,$$

que, en mi opinión, está más fácil de leer. Para que una diferencia simétrica entre 2 conjuntos resulte en vacío, necesito que los conjuntos sean iguales (mirá **13.**iv)). Por lo tanto quiero los conjuntos X tales que:

$$X \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}.$$

La clase $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left\{X \in P / \{1,2,3\} \subseteq X\right\} \text{ o también } \overline{A} = \{\{1,2,3\} \cup X \text{ con } X \in \mathcal{P}\{4,5,6,7,8,9,10\}\} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Gus Viana

---

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

b) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

---

a) Primero acomodo la condición de la relación:

$$x^2 - y^2 = 93x - 93y \overset{!!!}{\iff} \begin{cases} x \overset{\star^1}{=} y \\ \text{o bien} \\ x + y \overset{\star^2}{=} 93 \end{cases}$$

Hacer este ejercicio sin avivarse de lo que pasa en !!! es horrible.

Para ser relación de equivalencia es necesario que sea *reflexiva, simétrica* y *transitiva*:

Reflexiva:

$$x \mathcal{R} x \iff x \overset{\star^1}{=} x \quad \checkmark$$

Simétrica:

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \iff x + y \overset{\star^2}{=} 93 \\ y \mathcal{R} x \iff y + x \overset{\star^2}{=} 93 \end{cases} \quad \checkmark$$

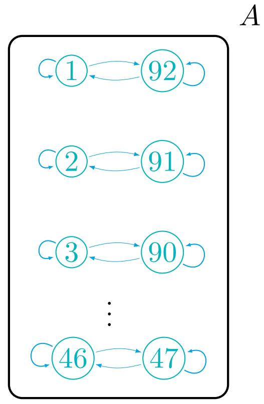
Transitiva:

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \iff x \overset{\star^2}{=} 93 - y \\ y \mathcal{R} z \iff y \overset{\star^2}{=} 93 - z \end{cases} \xrightarrow[\text{M.A.M}]{\text{resto}} x - y = -y + z \to x \overset{\star^1}{=} z \iff x \mathcal{R} z \quad \checkmark$$

Antisimétrica:

La $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, como contraejemplo se ve que $1 \mathcal{R} 92$ y $92 \mathcal{R} 1$ con $1 \neq 92$.

b) A priori no sé como encontrar las clases de equivalencia, pero solo buscando la relación del 1 con algún número (excepto el mismo) veo que únicamente se puede relacionar con el 92 por la condición $\star^2$, dado que $1 + 92 \overset{\star^2}{=} 93$. De ahí se pueden inferir que todas las clases van a ser conjuntos *chiquitos*, con los números que sumen 93.



Las clases de equivalencia :

$$\begin{cases} \overline{1} = \overline{92} = \{1, 92\} \\ \overline{2} = \overline{91} = \{2, 91\} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \overline{46} = \overline{47} = \{46, 47\} \end{cases}$$

Hay entonces 46 clases. $A = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{45}, \overline{46}\}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

28.

i) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): Dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: Dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

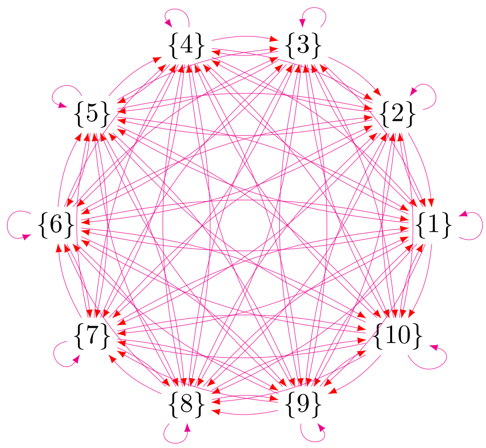
---

i) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \cdots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene un total de $2^{10} = 1024$ elementos. La relación determina 11 *clases de equivalencia* distintas.

Característica de la clase	clase	elementos ejemplo	Cantidad de conjuntos
Conjuntos con $\# = 0$:	$\overline{\varnothing}$	$\varnothing$	$\binom{10}{0} = 1$
Conjuntos con $\# = 1$:	$\overline{\{1\}}$	$\{3\}, \{7\}, \{10\}$	$\binom{10}{1} = 10$
Conjuntos con $\# = 2$:	$\overline{\{1, 2\}}$	$\{5, 2\}, \{1, 10\}, \{1, 2\}$	$\binom{10}{2} = 45$
Conjuntos con $\# = 3$:	$\overline{\{1, 2, 3\}}$	$\{1, 6, 3\}, \{5, 6, 7\}, \{8, 9, 10\}$	$\binom{10}{3} = 120$
Conjuntos con $\# = 4$:	$\overline{\{1, 2, 3, 4\}}$	$\{1, 8, 10, 4\}, \{2, 4, 6, 8\}$	$\binom{10}{4} = 210$
Conjuntos con $\# = 5$:	$\overline{\{1, 2, 3, 4, 5\}}$	$\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{2, 4, 6, 8, 10\}$	$\binom{10}{5} = 252$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Conjuntos con $\# = 10$:	$\overline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$	A	$\binom{10}{10} = 1$

Entonces las clases de equivalencia del subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$ con cardinal $= 0$ es $\overline{\varnothing}$ y de cardinal $= 10$ es $\overline{A}$.

Mirá que *bonito* queda el gráfico de la clase de equivalencia de elementos de $\mathcal{P}(A)$ que tienen un cardinal igual 1, es decir un solo elemento, hay un total de 10 de esos elementos de $\mathcal{P}(A)$:



El grafo para los conjuntos que tienen un cardinal igual a 2 tiene $\binom{10}{2} = 45$ nodos. Graficaría el resto de los conjuntos, pero no tengo interés en invocar a Satanás en el proceso...

ii) Es parecido al inciso anterior, donde ahora $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}_N)$, donde me quedo con los subconjuntos finitos.

Característica de la clase	clase	elementos ejemplo
Conjuntos con $\#0$	$\overline{\varnothing}$	$\varnothing$
Conjuntos con $\#1$	$\overline{\{1\}}$	$\{3\}$
Conjuntos con $\#2$	$\overline{\{1,2\}}$	$\{5,2\}$
Conjuntos con $\#3$	$\overline{\{1,2,3\}}$	$\{1,6,3\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Conjuntos con $\#N-1$:	$\overline{\{1,2,\dots,N-1\}}$	$\{1,2,3,\dots,N-2,N-1\}$
Conjuntos con $\#N$:	$\overline{\{1,2,\dots,N-1,N\}}$	$\{2,\dots,N-1,N,N+1\}$
Conjuntos con $\#N+1$:	$\overline{\{1,2,\dots,N-1,N,N+1\}}$	$\{3,4,\dots,N-1,N,N+1,N+2,N+3\}$

Dado que $\mathbb{N}$ es un conjunto no acotado, habrá *infinitos* subconjuntos de cardinal $N \in \mathbb{N}$ y eso ocurrirá para cada $N \in \mathbb{N}$. La única clase que no tiene infinitos elementos será: $\overline{\varnothing}$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Fran Ramos`

---

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$

ii) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b)\}$

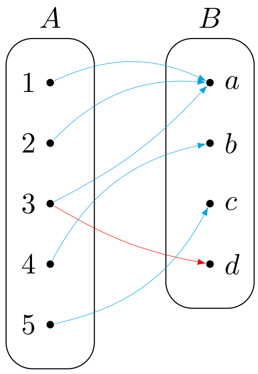
iii) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b),(5,c)\}$

iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \ / \ a = 2b-3\}$

v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \ / \ a = 2b-3\}$

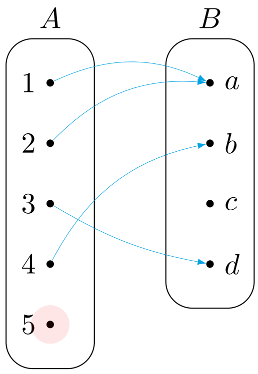
vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ a+b$ es divisible por $5\}$

i) No es función, dado que $3 \mathcal{R} a$, $3 \mathcal{R} d$ y $a \neq d$

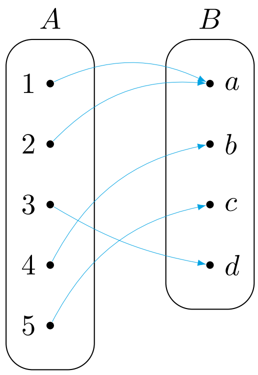


Onda, si salen dos flechas del mismo valor ya no es función.

ii) No es función, dado que todo elemento de A tiene que estar relacionado a algún elemento de B, $5 \not\mathcal{R}\ y$ para ningún $y \in B$



iii) Es función.



iv) Es función. Para cada valor de $a \in \mathbb{Z}$ habrá algún $b \in \mathbb{R}$ tal que $a = 2b - 3$.

v) No es función, $\sqrt{2} \not\mathcal{R}\ b$ para ningún $b \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{2} = 2b - 3$. Por lo tanto hay infinitos elementos en el conjunto A que no se relacionan con el conjunto B.

vi) No es función, porque $0 \mathcal{R} 5$ y $0 \mathcal{R} 10$ y necesito que si dos elementos $b, b' \in B \ \wedge \ a \mathcal{R} b \implies a \not\mathcal{R}\ b'$. Un elemento del conjunto de partida no puede estar relacionado con más de un elmentos del conjunto de llegada.

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para la que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5.$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y.$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2z).$

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b.$

vi) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si} \quad a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si} \quad a \leq 0. \end{cases}$

---

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$ No es *inyectiva*, contraejemplo:

$$f(-1) = f(1)$$

.

No es *sobreyectiva*:

$$\operatorname{Im}(f) = [-5, +\infty).$$

No es *biyectiva*, no tiene inversa. Habría que restringir dominio para cada rama de la parábola, pero no piden eso 👋

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

No se *inyectiva*. Contraejemplo:

$$f(1, 2) = 3 \quad \text{y} \quad f(2, 1) = 3$$

Es *sobreyectiva*, dado que $x + y$ genera todo $\mathbb{R}$.

iii) Sale muy parecido al anterior ii)

No es *biyectiva*, no tiene inversa.

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

No es *inyectiva*. Contraejemplo:

$$f(8) = f(3) \text{ con } {\scriptstyle \text{dah!}}\ 8 \neq 3$$

<u>Sí</u> es *sobreyectiva*.

Me formo una sucesión de números pares para *evaluar a la función en cosas convenientes*:

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_m = 2m \quad \Longrightarrow f(a_m) = f(2m) = \frac{2m}{2} = m$$

Se desprende que tan solo con la parte $\frac{n}{2}$, la imagen de la función genera todo $\mathbb{N}$, así que como $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{N}$, f es *sobreyectiva*.

No es *biyectiva*, no tiene inversa.

v) No es *inyectiva*. Contraejemplo:

$$f(2,1) = 6-2 = 4 \quad \text{y} \quad f(0,-2) = 4.$$

Para ser *sobreyectiva* la imagen debe ser $\mathbb{Z}$. Suponiendo que:

$$a = b \implies f(a,a) = 3a - 2a = a \implies \text{Im}(f) = \mathbb{Z}$$

Por lo tanto f es *sobreyectiva*.

No es *biyectiva*, no tiene inversa.

vi) La función

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si} \quad a > 0 & \to \text{genera los } \mathbb{N}_{pares} \\ 1-2a & \text{si} \quad a \le 0 & \to \text{genera los } \mathbb{N}_{impares} \end{cases}$$

La función es *inyectiva* y *sobreyectiva*. Calculo la inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad \boxed{f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz   Nico Méndez

31.

i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n+1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n,m) = n(m+1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3,4)$, $(f \circ g)(2,5)$ y $(f \circ g)(3,2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 7 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(m) = 15$.

---

i) Es cuestión de evaluar con los numeritos nada más:

$$h(n,m) = (f \circ g)(n,m) = f(g(n,m))$$

- $g(3,4) = 15$, $f(15) = 46$
- $g(2,5) = 12$, $f(12) = 72$
- $g(3,2) = 9$, $f(9) = 28$

ii) Como $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos hacer una composición $h = (f \circ g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$h(n) = \begin{cases} (\sqrt{n})^2 & \text{si} \quad \sqrt{n} \le 7 \\ 2\sqrt{n}-1 & \text{si} \quad \sqrt{n} > 7 \end{cases} \xrightarrow[\text{más pulido}]{\text{o}} \boxed{h(n) = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \le 49 \\ 2\sqrt{n}-1 & \text{si} \quad n > 49 \end{cases}}$$

De esta forma ya vemos directamente que $n = 13$ y $m = 15$ son opciones válidas para lo que pide el enunciado.

Ya tenemos la primera rama de la función cubierta con esos dos valores, así que buscamos en la otra rama.

$$2\sqrt{n} - 1 = 13 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 7 \Leftrightarrow n = 49,$$

pero justo $n = 49$ cae en la primera rama de $h(n)$, así que no sirve.

$$2\sqrt{m} - 1 = 15 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 8 \Leftrightarrow m = 64,$$

es válido pues $64 \geq 49$.

Conclusión:

$$\boxed{(f \circ g)(n) = 13 \Leftrightarrow n = 13 \quad \text{y} \quad (f \circ g)(n) = 15 \Leftrightarrow (n = 15 \ \lor \ n = 64)}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

---

32. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$.

ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 4n$.

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$.

---

i) $f \circ g = f(x + 3) = 2(x + 3)^2 - 18 = 2x^2 + 12x$
$g \circ f = g(2x^2 - 18) = 2x^2 - 18 + 3 = 2x^2 - 15$

ii) $f \circ g = f(4n) = 4n - 2$

$$g \circ f = \begin{cases} g(n-2) = 4n - 8 \text{ si } n \text{ es divisible por } 4 \\ g(n+1) = 4n + 4 \text{ si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$$

iii) En este caso $f \circ g$ se puede componer, pero al revés no (no coinciden las salidas con las entradas).
$f \circ g = f(\sqrt{n}) = (\sqrt{n} + 5, 3\sqrt{n})$

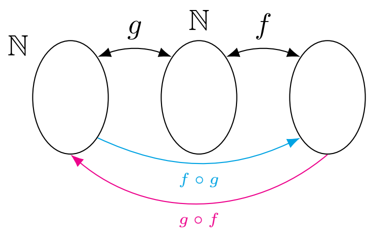
Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

---

33. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

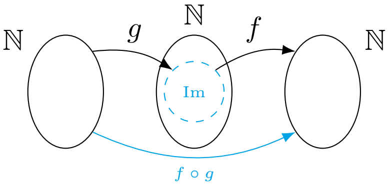
La identidad en naturales es la función: $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} = n$.
Quiero funciones que no sean biyectivas, porque de serlo:

Si $(f \circ g)(n) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ con f, g biyectivas $\implies (g \circ f)(n) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$



Algo que no quiero porque por enunciado necesito que:

$$g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$$

Por otro lado sí quiero algo así: 

Es decir que g no sea *sobreyectiva*, pero f sí.

Buscando inspiración en el ejercicio **30.**:

$$g(m) = 2m \qquad \text{y} \qquad f = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

La composición quedaría

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) = \begin{cases} \frac{2m+1}{2} & \text{si } 2m \text{ impar} \\ m & \text{si } 2m \text{ par} \end{cases} \iff f \circ g(m) = m = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$$

No obstante

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ impar} \\ n & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Donde enseguida comprobamos que $g(f(1)) = 2$ por lo tanto, $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`naD GarRaz` `sigfripro`

---

34. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \to C$ y $g : A \to B$ son funciónes entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.
ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.
iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva.
iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.
v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva.

Primero refresquemos las definiciones para el problema:
Inyectividad:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ inyectiva, } \forall x_1, x_2 \in A \big/ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Sobreyectividad:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ sobreyectiva, } \forall y \in B, \exists\, x \in A \big/ f(x) = y$$

Biyectividad:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, o } \forall y \in B, \exists!x \in A \big/ f(x) = y$$

i) Por hipótesis $f \circ g$ es inyectiva, es decir $\forall x_1, x_2 \in A$, $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \implies x_1 = x_2$, bien, ahora supongamos que para algun x_1, x_2, se cumple que $g(x_1) = g(x_2)$, aplicamos la función f y tenemos $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, por hipótesis esto implica que $x_1 = x_2$, quedando que $g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$, como se quería demostrar.

ii) Por hipótesis $f \circ g$ es sobreyectiva, es decir $\forall z \in C, \exists\, x \in A \big/ (f \circ g)(x) = z$, queremos demostrar que f es sobreyectiva, es decir que $\forall z \in C, \exists\, y \in B \big/ f(y) = z$. Notemos que $g(x) \in B$, Sea $y := g(x)$★[1], luego $f(g(x)) = f(y) = z$, es decir para todo z encontramos un y tal que $f(y) = z$, como se quería demostrar.

iii) Por hipótesis: $\forall y_1, y_2 \in B, f(y_1) = f(y_2) \implies y_1 = y_2$ y $\forall x_1, x_2 \in A, g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Queremos demostrar que $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \implies x_1 = x_2$. Supongamos que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, por inyectividad de f tenemos que $g(x_1) = g(x_2)$, luego por inyectividad de g tenemos que $x_1 = x_2$, como se quería demostrar.

iv) Por hipótesis: $\forall z \in C, \exists\, y \in B / f(y) = z$ y $\forall y \in B, \exists\, x \in A / g(x) = y$.

Queremos demostrar que $\forall z \in C, \exists\, x \in A / f(g(x)) = z$. Por hipótesis sabemos que f y g son sobreyectivas, para el caso de g podemos decir que existe x tal que $g(x) = y$, reemplazamos en f y tenemos $f(g(x)) = z$, es decir para todo z encontramos un x tal que $f(g(x)) = z$, como se quería demostrar.

v) Por hipótesis f y g son biyectivas entonces son inyectivas y sobreyectivas, por ende $f \circ g$ es inyectiva y sobreyectiva (por las dos proposiciones probadas arriba), luego $f \circ g$ es biyectiva

★[1] quiero hacer una salvedad acá, cuando decimos sea $y := g(x)$, estamos tomando un $y \in B$ especifico construido a partir de un $x \in A$. No estamos eligiendo un y arbitrario ya que eso implicaria que **todo** y se puede escribir como $g(x)$ lo que implicaría que g es sobreyectiva, lo cual no necesariamente sea cierto.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ sigfripro

---

35. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots .10\} / f$ es una función **biyectiva**$\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff \exists\, n \in \{1, \ldots, 10\} / f(n) = 1 \quad \mathbf{y} \quad g(n) = 1.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

ii) Sea $Id : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\}$ la función identidad, o sea, $Id(n) = n, \ \forall n \in \{1, \ldots, 10\}$. Dar tres elementos **distintos** de la clase de equivalencia de Id.

Importante: Al exhibir una función es indispensable definirla en **todos** lso elementos de su dominio.

---

i) Las funciones biyectivas agarran todos los elementos del conjunto de partida y lo mandan esos elementos a un elemento del conjudo de salida uno a uno. Son inyectivas y sobreyectivas.

Reflexiva:

Quiero ver que $f \,\mathcal{R}\, f$. Como f es biyectiva y $n \in \underbrace{\{1, \ldots, 10\}}_{\subseteq \mathrm{Dom}(f)}$, por lo que para algún n tiene que cumplir $f(n) = 1$. $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica:

Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g \implies g \,\mathcal{R}\, f$. Es trivial en este caso, porque la conjunción, el "**y**", de la relación es conmutativo, por lo tanto:

$$f \,\mathcal{R}\, g \implies g \,\mathcal{R}\, f$$

$\mathcal{R}$ es simétrica.

Transitiva:

Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g$ y $g \,\mathcal{R}\, h \implies f \,\mathcal{R}\, h$. Es similar al caso anterior. Por hipótesis, las relaciones $f \,\mathcal{R}\, g$ y $g \,\mathcal{R}\, h$ dicen que existen $n_1, n_2, n_3 \in \{1, \ldots, 10\}$ tales que $f(n_1) = g(n_2) = h(n_3) = 1$. Así que $f \,\mathcal{R}\, h$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación es *reflexiva*, *simétrica*, *transitiva* es una relación de equivalencia.

Antisimétrica:

Quiero ver que si $f \mathcal{R} g$ con $f \neq g$ entonces $g \not\mathcal{R} f$. Acá es donde donde el **Importante** del enunciado cobra relevancia, porque si vamos a *mostrar una función de contraejemplo* , tiene que estar definida de forma correcta, en este caso tenemos que mandar todos los elementos de $\{1, \dots, 10\}$ a todos los valores de $\{1, \dots, 10\}$ uno a uno.

$$\begin{array}{rclcl rclcl}
f(1) & = & g(1) & = & 1 & f(6) & = & g(6) & = & 6 \\
f(2) & = & g(2) & = & 2 & f(7) & = & g(7) & = & 7 \\
f(3) & = & g(3) & = & 3 & f(8) & = & g(8) & = & 8 \\
f(4) & = & g(4) & = & 4 & f(9) & = & g(10) & = & 9 \\
f(5) & = & g(5) & = & 5 & f(10) & = & g(9) & = & 10
\end{array}$$

Las funciones son distintas $f \neq g$ y $f \mathcal{R} g$, pero $g \mathcal{R} f$, por lo cual no se cumple al condición de la antisimetría.

$\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

ii) Los elementos de $\mathcal{F}$ que se relacionan entre sí, forman un conjunto denominado: *clase*. Esta clase se puede llamar clase de "*cualquiera de los elementos*", por ejemplo si $f_1, f_2, f_3, \dots, Id$ están relacionadas se puede decir que:

$$\overline{f_1} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\} \quad \text{o} \quad \overline{f_2} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\} \quad \text{o} \quad \overline{Id} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\}$$

Así que hay que definir 3 funciones que estén relacionadas con la función Id. Hay que hacerlo para todos los elementos como en el inciso de antisimetría...

$$\begin{array}{rcl rcl rcl rcl}
f_1(1) & = & 1 & f_1(6) & = & 6 & f_2(1) & = & 1 & f_2(6) & = & 6 \\
f_1(2) & = & 2 & f_1(7) & = & 7 & f_2(2) & = & 2 & f_2(7) & = & 7 \\
f_1(3) & = & 3 & f_1(8) & = & 8 & f_2(3) & = & 3 & f_2(8) & = & 10 \\
f_1(4) & = & 4 & f_1(9) & = & 10 & f_2(4) & = & 4 & f_2(9) & = & 9 \\
f_1(5) & = & 5 & f_1(10) & = & 9 & f_2(5) & = & 5 & f_2(10) & = & 8
\end{array}$$

Y la f_3 te la dejo a vos. Las funciones son **distintas** y están relacionadas con la Id porque usan el mismo n (en este caso $n = 1$) para cumplir $f_1(1) = f_2(1) = f_2(1) = Id(1) = 1 \quad \checkmark$

Nada que ver, pero ¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de Id? $\to \# \overline{Id} \overset{?}{=} 9!$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

---

36. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ una función. Consideremos el conjunto de **todas** las funciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$$

y definimos sobre $\mathcal{F}$ la relación dada por

$$g \mathcal{R} h \iff g \circ f = h \circ f.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es siempre antisimétrica (sin importar cómo sea f)?

ii) Asumiendo que f es sobreyectiva, calcular la clase de equivalencia de cada $g \in \mathcal{F}$.

La teoría de estas importantes propiedades de relaciones está acá.
Seguramente vos no te confundís, porque sos un *insoportable sabelotodo*, a diferencia mía pero:

Notar que la f en la definición de la relación $\mathcal{R}$ es una *función específica*, siempre te devuelve algo en $\{1,2,3,4\}$. Es por eso que las composiciones que aparecen en la definición de $\mathcal{R}$ no explotan por los aires. Lo aclaro porque la f que está en el conjunto $\mathcal{F}$ esa sí es una f genérica.
La f específica la pinto: f

i) Para ver si una relación es de equivalencia hay que probar que sea *reflexiva, simétrica y transitiva.*

Reflexiva: Quiero ver que:

$$\forall g \in \mathcal{F}, \quad g\,\mathcal{R}\,g.$$

Lo cual se cumple de forma trivial:

$$g\,\mathcal{R}\,g \overset{\text{def}}{\iff} g \circ f = g \circ f.$$

Por lo que la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica: Quiero ver que:

$$\forall g, h \in \mathcal{F}, \text{ si } g\,\mathcal{R}\,h \implies h\,\mathcal{R}\,g.$$

También se cumple de forma trivial:

$$\underbrace{g\,\mathcal{R}\,h}_{\text{hipótesis}} \overset{\text{def}}{\iff} g \circ f = h \circ f \quad \text{y} \quad h\,\mathcal{R}\,g \overset{\text{def}}{\iff} \underbrace{h \circ f = g \circ f}_{\text{igual a la hipótesis}}.$$

Por lo que la relación $\mathcal{R}$ es simétrica.

Transitiva: Quiero ver que:

$$\forall g,\, h,\, i \in \mathcal{F}, \quad \text{si } g\,\mathcal{R}\,h \quad \text{y} \quad h\,\mathcal{R}\,i \implies g\,\mathcal{R}\,i.$$

También se cumple de forma trivial:

$$\underbrace{g\,\mathcal{R}\,h \quad \text{y} \quad h\,\mathcal{R}\,i}_{\text{hipótesis}} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} g \circ f = \underbrace{h \circ f}_{\text{Hola}} \\ \qquad \text{y} \\ \underbrace{h \circ f}_{\text{qué tal?}} = i \circ f \end{cases} \implies g \circ f = i \circ f \implies g\,\mathcal{R}\,i.$$

Por lo que la relación $\mathcal{R}$ es transitiva.

Dado que $\mathcal{R}$ resultó ser *reflexiva, simétrica y transitiva* es una relación de equivalencia.

Antisimétrica: Quiero ver que:

$$\forall g, h \in \mathcal{F}, \quad \text{si } g\,\mathcal{R}\,h \quad \text{y} \quad g \neq h \implies h \not\mathcal{R}\, g$$

Proponemos dos funciones y las definimos completas:

$$\begin{array}{rcl} g(1) & = & 5 \\ g(2) & = & 5 \\ g(3) & = & 5 \\ g(4) & = & 5 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} h(1) & = & 5 \\ h(2) & = & 6 \\ h(3) & = & 6 \\ h(4) & = & 6 \end{array}$$

Claramente $g \neq h$, la idea ahora es proponer que ¡f sea una función que me las relacione! propongo:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1 \\ f(2) & = & 1 \\ f(3) & = & 1 \\ f(4) & = & 1. \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rclcl} g \circ f(1) & = & g(1) & = & 5 \\ g \circ f(2) & = & g(1) & = & 5 \\ g \circ f(3) & = & g(1) & = & 5 \\ g \circ f(4) & = & g(1) & = & 5. \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rclcl} h \circ f(1) & = & h(1) & = & 5 \\ h \circ f(2) & = & h(1) & = & 5 \\ h \circ f(3) & = & h(1) & = & 5 \\ h \circ f(4) & = & h(1) & = & 5. \end{array}$$

Y así llegamos a que la función no es antisimétrica, porque tenemos dos funciones *distintas* que cumplen ser simétricas, es decir:

$$g \mathrel{\mathcal{R}} h = h \mathrel{\mathcal{R}} g$$

Por lo que la relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

ii) Si f es *sobreyectiva*:

$$f \text{ sobreyectiva } \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Im}(f) = \underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\text{codominio}} \overset{\text{def}}{\iff} \forall y \in \{1,2,3,4\} \; \exists x \in \{1,2,3,4\} \text{ tal que } f(x) = y$$

En particular si el dominio y el codominio tienen la misma cantidad de elementos, podemos decir que f tiene que ser *biyectiva*. Así que f es *sobreyectiva*, distintos x_i van a parar a distinto y_i

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \xrightarrow{f} \{y_1, y_2, y_3, y_4\}.$$

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(x_1) & = & g(y_1) \\ g \circ f(x_2) & = & g(y_2) \\ g \circ f(x_3) & = & g(y_3) \\ g \circ f(x_4) & = & g(y_4). \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} h \circ f(x_1) & = & h(y_1) \\ h \circ f(x_2) & = & h(y_2) \\ h \circ f(x_3) & = & h(y_3) \\ h \circ f(x_4) & = & h(y_4). \end{array}$$

Entonces para que una función g esté relacionada con otra función h:

$$g \mathrel{\mathcal{R}} h \iff (g \circ f)(x_i) = (h \circ f)(x_i) \iff g(y_i) = h(y_i) \iff g = h \quad \text{con } i \in \{1,2,3,4\}$$

Por lo que cada función $g \in \mathcal{F}$ es una clase de un solo elemento:

$$\overline{g} = \{g\}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Ale Nieto

Ejercicios de parciales:

1. Probar la propiedad distributiva: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Tengo que hacer una doble inclusión:

1) $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

2) $X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$

1) $x \in X \cap (Y \cup Z)$ quiere decir que $x \in X$ y $\left\{ \begin{array}{c} x \in Y \\ \text{o bien} \\ x \in Z \end{array} \right\}$. Por lo tanto $\to \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap Z \end{array} \right\}$, lo que equivale a $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \checkmark$.

2) Ahora hay que probar la vuelta. Uso razonamiento análogo:

$$x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \implies x \in X \quad y \quad \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o} \\ x \in X \cap Z \end{array} \right.$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{c} Y \subseteq Y \cup Z \\ \text{y que} \\ Z \subseteq Z \cup Y, \end{array} \right. \stackrel{!!}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap (Y \cup Z) \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap (Z \cup Y) \end{array} \right. \implies x \in X \cap (Y \cup Z)$$

En !! uso algo "obvio" pero que me sirve para seguir bien donde está x: Resalto que si un elemento está en Y seguro va a estar en la unión de Y con lo que sea.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

2. Este no es de parcial, pero está por razones históricas:
Probar la propiedad $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tengo que hacer una doble inclusión $\to \begin{cases} 1) & (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \\ 2) & A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c \end{cases}$

1) Prueba directa: Si $x \in (A \cap B)^c \implies x \in A^c \cup B^c$

Por hipótesis $x \in (A \cap B)^c \stackrel{\text{def}}{\iff} x \notin A \quad \text{o} \quad x \notin B \implies x \in A^c \quad \text{o} \quad x \in B^c \implies x \in A^c \cup B^c$

A	B	$A^c \cup B^c$	$(A \cap B)^c$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Uso la tabla para ver la definición $x \in (A \cap B)^c \stackrel{\text{def}}{\iff} x \notin A \quad \text{o} \quad x \notin B$

2) Pruebo por absurdo. Si $\forall x \in A^c \cup B^c \implies x \in (A \cap B)^c$

Supongo que $x \notin (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\iff} x \in (A \cap B) \xrightarrow[\text{hipótesis}]{\text{por}} x \in A^c \cup B^c \to \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ \text{o} \\ x \notin B \end{array} \right\}$, por lo que $x \notin A \cup B \implies$ $x \notin A \cap B$ contradiciendo el supuesto, absurdo. Debe ocurrir que $x \in (A \cap B)^c$

A	B	$A \cap B$	$(A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

---

3. Sea

$$\mathcal{F} = \{h : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 50\} \ / \ h \text{ es inyectiva}\}.$$

Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f \ \mathcal{R} \ g \quad \text{si y sólo si} \quad \#(\operatorname{Im}(f) \setminus \operatorname{Im}(g)) = 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \leq x \leq 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \ \mathcal{R} \ g$

Observar que $f \in \mathcal{F}$ es una función que tiene un dominio con solo 4 elementos, es decir

$$\# \operatorname{Dom}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F},$$

y dado que f es inyectiva, todos los elementos de la imagen deben ser distintos, por lo tanto

$$\# \operatorname{Im}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F}$$

a) *Reflexiva:* Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ f$.

Esto debe ser cierto, ya que $A = \{\operatorname{Im}(f) \setminus \operatorname{Im}(f)\} = \varnothing$ y $\# \varnothing \overset{!}{=} 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{R}$ es reflexiva ✓

Simétrica: Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ g \implies g \ \mathcal{R} \ f$.

Si tengo que $f \ \mathcal{R} \ g$, sé algo sobre sus conjuntos Im ya que,

$$\left\{ \begin{array}{lcr} \# \{\operatorname{Im}(f) \setminus \operatorname{Im}(g)\} = 0 & \iff & \operatorname{Im}(f) \overset{\star 1}{=} \operatorname{Im}(g) \\ & \text{o} & \\ \# \{\operatorname{Im}(f) \setminus \operatorname{Im}(g)\} = 4 & \iff & \operatorname{Im}(f) \overset{\star 2}{\cap} \operatorname{Im}(g) = \varnothing \end{array} \right.$$

Entonces los conjuntos $\operatorname{Im}(f)$ y $\operatorname{Im}(g)$ están relacionados por un "=" y un "$\cap$", dos operadores simétricos por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica. ✓

Antisimétrica: Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ g \implies g \ \not\mathcal{R} \ f$, o también a veces está bueno pensarla la antisimetría como si $f \ \mathcal{R} \ g$ y $g \ \mathcal{R} \ f \implies f = g$. Bajo la sospecha de que la función no es antisimétrica la segunda forma de pensarlo me ayuda a encontrar un *contra*ejemplo.

$$f \to \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad g \to \left\{ \begin{array}{l} g(1) = 4 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = 2 \\ g(4) = 1 \end{array} \right.$$

$\begin{cases} f \mathrel{\mathcal{R}} g, & \text{sus imágenes cumplen } \star^1 \\ g \mathrel{\mathcal{R}} f, & \text{sus imágenes cumplen } \star^1, \end{cases}$ pero por como están definidas las funciones $f \neq g$. $\mathcal{R}$ no es anti-simétrica.

Transitiva: Quiero ver que si $f \mathrel{\mathcal{R}} g$ y $g \mathrel{\mathcal{R}} h \implies f \mathrel{\mathcal{R}} h$.
Acá podemos encontrar un *contra*ejemplo para mostrar que no es transitiva, saco de la galera 3 funciones, f, g y $h \in \mathcal{F}$

$$f \to \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{cases}, \quad g \to \begin{cases} g(1) = 5 \\ g(2) = 6 \\ g(3) = 7 \\ g(4) = 8 \end{cases} \quad \text{y} \quad h \to \begin{cases} h(1) = 1 \\ h(2) = 2 \\ h(3) = 9 \\ h(4) = 10 \end{cases}$$

$\begin{cases} f \mathrel{\mathcal{R}} g, & \text{sus imágenes cumplen } \star^2 \\ g \mathrel{\mathcal{R}} h, & \text{sus imágenes cumplen } \star^2 \end{cases}$, pero $f \not\mathrel{\mathcal{R}} h$ dado que:

$$\{\text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)\} = \{3, 4\} \implies \#\{\text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)\} = 2 \neq 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

$\mathcal{R}$ no es transitiva.

b) Para que f y g se relacionen se debe cumplir con $\star^1$ o con $\star^2$. En otras palabras necesito encontrar funciones $g \in \mathcal{F}$ cuya imagen $\text{Im}(g) = \{1, 2, 3, 4\}$ o su codominio sea $\underbrace{\text{Cod} = \{5, 6, \dots, 49, 50\}}_{\#\,\text{Cod}=46}$.

Contar cuando $\text{Im}(g) = \{1, 2, 3, 4\}$*:*

Hago la *inyección* de los 4 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \end{cases}$$

Hay $4!$ permutaciones ✓

Contar cuando codominio sea $\text{Cod} = \{5, 6, \dots, , 49, 50\}$

Hago la *inyección* de los 46 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#46 & \#45 & \#44 & \#43 \end{cases}$$

Hay $\frac{46!}{42!}$ permutaciones ✓

Se concluye que hay un total de $\frac{46!}{42!} + 4!$ funciones $g \in \mathcal{F} / f \mathrel{\mathcal{R}} g$ ✓

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

4. (recuperatorio 1er C. 24)
Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$n \mathrel{\mathcal{R}} m \iff 10 \mid n^2 + 4m^2 + m - 6n.$$

a) Probar que $n \mathrel{\mathcal{R}} m \iff 5 \mid n^2 - m^2 + m - n$ y $n \equiv m \ (2)$.

b) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

a) $(\Rightarrow)$

$$n\ \mathcal{R}\ m \overset{\text{def}}{\iff} n^2+4m^2+m-6n \equiv 0\ (10)$$

Si la expresión es divible por 10, debe ser divisible por 2 y también por 5:

$$\begin{cases} n^2+4m^2+m-6n \underset{!}{\overset{(5)}{\equiv}} n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) & \checkmark \\ n^2+4m^2+m-6n \overset{(2)}{\equiv} n^2+m \underset{!!}{\overset{(2)}{\equiv}} n+m \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow n \equiv m\ (2) & \checkmark \end{cases}$$

Si no ves lo que pasó en !! pensá en la paridad de un número y su cuadrado.
Por lo tanto si

$$n\ \mathcal{R}\ m \quad \Longrightarrow \quad 5 \mid n^2-m^2+m-n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

$(\Leftarrow)$

$$n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow n^2+4m^2+m-6n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid n^2+4m^2+m-6n \quad \checkmark$$

Ahora uso la información de $n \equiv m\ (2)$

$$\text{Si } n \equiv m\ (2) \implies n^2+4m^2+m-6n \underset{!}{\overset{(2)}{\equiv}} 5\underbrace{m(m-1)}_{\text{par!}} \equiv 0\ (2) \iff 2 \mid n^2+4m^2+m-6n \quad \checkmark$$

Por lo tanto si

$$n\ \mathcal{R}\ m \quad \Leftarrow \quad 5 \mid n^2-m^2+m-n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

b) No es casualidad que en el punto anterior tuvieramos una *redefinición* de la relación $\mathcal{R}$:

$$n\ \mathcal{R}\ m \iff \begin{cases} n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2). \end{cases}$$

En esa forma es mucho más fácil mostrar lo que sigue porque la relación queda definida en función de congruencias que *ya son relaciones de equivalencias*. Para mostrar la relación de equivalencia, hay que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Si $n\ \mathcal{R}\ n \iff \begin{cases} n^2-n^2+n-n = 0 \equiv 0\ (5) & \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv n\ (2) & \checkmark. \end{cases}$

La relación es *reflexiva*.

Simétrica: Si $n\ \mathcal{R}\ m \implies m\ \mathcal{R}\ n$, para algún par n, m.

$$\text{Si } n\ \mathcal{R}\ m \implies \begin{cases} n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) \xrightarrow{m\ \mathcal{R}\ n} m^2-n^2+n-m = -(n^2-m^2+m-n) \equiv 0\ (5) & \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \xrightarrow{m\ \mathcal{R}\ n} m \equiv n\ (2) & \checkmark \end{cases}$$

La relación es *simétrica*

Transitiva: Quiero ver que si: $n\ \mathcal{R}\ m$ y $m\ \mathcal{R}\ j \implies n\ \mathcal{R}\ j$

Si

$$n\ \mathcal{R}\ m \Leftrightarrow \begin{cases} n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \end{cases} \quad \text{y} \quad m\ \mathcal{R}\ j \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-j^2+j-m \equiv 0\ (5)\bigstar^1 \\ \quad \text{y} \\ m \equiv j\ (2)\bigstar^2 \end{cases}$$

entonces

$$\left.\begin{matrix} n^2-m^2+m-n \equiv 0\ (5) \underset{!}{\overset{\bigstar^1}{\iff}} n^2-j^2+j-n \equiv 0\ (5) \\ \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \overset{\bigstar^2}{\iff} n \equiv j\ (2) \end{matrix}\right\} \implies \boxed{n\ \mathcal{R}\ j}$$

La relación es *transitiva*.

Como la relación resultó ser *reflexiva, simétrica y transitiva,* entonces es de equivalencia. Fin.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

5. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ en $\{0,1\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en X como:

$$f \; \mathcal{R} \; g \iff f(1) + g(3) = f(3) + g(1).$$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

b) Calcular la cantidad de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y exhibir un representante de cada una de ellas.

---

a) Para probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, hay que probar que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.
Click acá para la 'teoría' de que son esas cosas

Las funciones toman todos los valores que hay en el conjunto del dominio y tienen que mandar ese valor a alguno de los dos valores que están en el conjunto del codominio. Podemos observar que la imagen de la función será $\{0\}, \{1\} \quad \text{o} \quad \{0,1\}$.

Antes de arrancar a hacer cuentas voy a acomodar la $\mathcal{R}$ para que quede más fácil de leer para mí. No es necesario hacer esto, pero como yo me distraigo hasta con la humedad del ambiente, me resulta más fácil pensarlo. Quedaría así:

$$\boxed{f \; \mathcal{R} \; g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3).}$$

Reflexiva: En este caso se cumple de forma trivial.

$$f \; \mathcal{R} \; f \iff f(1) - f(3) = f(1) - f(3)$$

Simétrica: Quiero ver que si $f \; \mathcal{R} \; g \implies g \; \mathcal{R} \; f$.

Resulta parecido al anterior dado que la igualdad no cambia al conmutar las funciones

$$\begin{aligned} f \; \mathcal{R} \; g &\iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3) \\ g \; \mathcal{R} \; f &\iff g(1) - g(3) = f(1) - f(3) \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3) \end{aligned}$$

Transitiva: Quiero ver que si

$$f \; \mathcal{R} \; g \quad \text{y} \quad g \; \mathcal{R} \; h \implies f \; \mathcal{R} \; h.$$

Partiendo de las hipótesis de estas relaciones:

$$\begin{aligned} f \; \mathcal{R} \; g &\iff f(1) - f(3) \overset{\star^1}{=} g(1) - g(3) \\ g \; \mathcal{R} \; h &\iff g(1) - g(3) \overset{\star^2}{=} h(1) - h(3) \end{aligned}$$

Despejando de $\star^2$ y reemplazando en $\star^1$:

$$g(1) \overset{\star^2}{=} h(1) - h(3) + g(3) \overset{\star^1}{\implies} f(1) - f(3) = (h(1) - h(3) + g(3)) - g(3) \Leftrightarrow \underbrace{f(1) - f(3) = h(1) - h(3)}_{f \; \mathcal{R} \; h}$$

Antisimétrica: Puedo armar un contraejemplo para ver si la función no es antisimétrica.

Cuando se define una función hay que definirla entera ¡No solo la parte que me interesa! Defino un par de funciones (f, g) con $f \neq g$ y $f\ \mathcal{R}\ g$ y que además $g\ \mathcal{R}\ f$. Eso sería suficiente para mostrar que la relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica

$$\begin{cases} f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 0 \\ f(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(1) &= 0 \\ g(2) &= 1 \\ g(3) &= 0 \\ g(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g(8) &= 0 \end{cases}$$

La relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

b) En este ejercicio hay 3 clases. Recuerdo que hago todo el ejercicio escribiendo la relación en esta forma:

$$\boxed{f\ \mathcal{R}\ g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3).}$$

Solo puedo obtener como resultado de la cuenta, para la expresión del miembro izquierdo (y el derecho):

$$-1, 0 \quad \text{o} \quad 1,$$

Por lo tanto mientras la cuenta de $f(1) - f(3)$ dé lo mismo para dos funciones distintas, las funciones van a estar relacionadas, por ende viven en la misma clase. De forma contraria estarán en distintas clases.

Cuando $f(1) - f(3)$ me da 0:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(3) = 0 \implies f(1) - f(3) = 0 \\ f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(3) = 1 \implies f(1) - f(3) = 0 \end{cases}$$

Con esos valores obtengo la clase (y me invento esta notación, ojo!) que me da $\overline{0}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Piden uno pero te doy cuatro elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque soy un tipazo, no tengo nada que hacer y con el *copy paste* es muy fácil:

$$\begin{cases} f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 0 \\ f(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f(8) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g(1) &= 1 \\ g(2) &= 0 \\ g(3) &= 1 \\ g(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g(8) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} h(1) &= 1 \\ h(2) &= 0 \\ h(3) &= 1 \\ h(4) &= 1 \\ \vdots &= \vdots \\ h(8) &= 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} i(1) &= 0 \\ i(2) &= 1 \\ i(3) &= 0 \\ i(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ i(8) &= 0 \end{cases}$$

Cuando $f(1) - f(3)$ me da 1:

$$\{\ f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(3) = 0 \implies f(1) - f(3) = 1$$

Con esos valores obtengo la clase (y sigo con la notación inventada, ojo!) que me da $\overline{1}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Tres elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque con el *copy paste* sigue siendo muy fácil:

$$\begin{cases} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 0 \\ f(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(1) &= 1 \\ g(2) &= 1 \\ g(3) &= 0 \\ g(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} h(1) &= 1 \\ h(2) &= 0 \\ h(3) &= 0 \\ h(4) &= 1 \\ \vdots &= \vdots \\ h(8) &= 1 \end{cases}$$

Cuando $f(1) - f(3)$ me da -1:

$$\left\{ \; f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(3) = 1 \implies f(1) - f(3) = -1 \right.$$

Con esos valores obtengo la clase (<u>y sigo con la notación inventada, ojo!</u>) que me da $\overline{-1}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Tres elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque con el *copy paste* sigue siendo muy fácil:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(1) & = & 0 \\ f(2) & = & 0 \\ f(3) & = & 1 \\ f(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ f(8) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g(1) & = & 0 \\ g(2) & = & 1 \\ g(3) & = & 1 \\ g(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ g(8) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} h(1) & = & 0 \\ h(2) & = & 0 \\ h(3) & = & 1 \\ h(4) & = & 1 \\ \vdots & = & \vdots \\ h(8) & = & 1 \end{array} \right.$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz   Ale Teran

---

6. Sea A el siguiente conjunto: $A = \{n \in \mathbb{N} : 100 \leq n \leq 1000\}$. Consideramos el conjunto de **todas** las funciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en A:

$$\mathcal{F} = \{g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{100, 101, \dots, 999, 1000\} \,/\, \text{es función}\}$$

y definimos sobre $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$f \;\mathcal{R}\; g \iff 11 \mid f(1) - g(1).$$

a) Determinar si la relación es reflexiva, simétric, transitiva y/o antisimétrica.

b) Sea $h(x) = x + 99$, hallar la cantidad de funciones $f \in \mathcal{F}$ **inyectivas** que cumplen simultáneamente que $f \;\mathcal{R}\; h$ y que $f(2) = 111$.

Al igual que en mucho ejercicios lo primero que voy a hacer es acomodar la forma en que nos presentan la relación, para que mi cerebro esté más cómodo:

$$f \;\mathcal{R}\; g \iff 11 \mid f(1) - g(1) \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{f(1) \equiv g(1) \;(11)} \bigstar^1.$$

a) *¿Es $\mathcal{R}$ reflexiva?*: Trivial con $\bigstar^1$:

$$f(1) \equiv f(1) \;(11)$$

La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva.

¿Es $\mathcal{R}$ simétrica?: Trivial con $\bigstar^1$:

Si

$$f \;\mathcal{R}\; g \Leftrightarrow f(1) \equiv g(1) \;(11)$$

entonces trivialmente

$$g \;\mathcal{R}\; f \Leftrightarrow g(1) \equiv f(1) \;(11)$$

La relación $\mathcal{R}$ es simétrica.

¿Es $\mathcal{R}$ transitiva?: Trivial con $\bigstar^1$:

Si

$$f \;\mathcal{R}\; g \Leftrightarrow f(1) \equiv g(1) \;(11) \quad \text{y} \quad g \;\mathcal{R}\; h \Leftrightarrow g(1) \equiv h(1) \;(11)$$

entonces por transitividad de la congruencia,

$$f\ \mathcal{R}\ h \Leftrightarrow f(1) \equiv g(1)\ \equiv\ h(1)\ (11) \implies f(1) \equiv h(1)\ (11)$$

La relación $\mathcal{R}$ es transitiva.

¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?:

No creo, me armo dos funciones para usar como contraejemplos:

$$\begin{cases} f(1) &= 100 \\ f(2) &= 1000 \\ f(3) &= 1000 \\ f(4) &= 1000 \\ f(5) &= 1000 \\ f(6) &= 1000 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(1) &= 111 \\ g(2) &= 1000 \\ g(3) &= 1000 \\ g(4) &= 1000 \\ g(5) &= 1000 \\ g(6) &= 1000 \end{cases}$$

Se puede ver que:

$$f \neq g \quad \text{sin embargo} \quad f\ \mathcal{R}\ g \Leftrightarrow f(1) \equiv g(1)\ (11)$$

La relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

b) Para que $f\ \mathcal{R}\ h$ necesito que:

$$f(1) \equiv h(1)\ (11) \Leftrightarrow f(1) \equiv 100\ (11) \Leftrightarrow f(1) \equiv 1\ (11)$$

Cuáles son los valores del conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : 100 \leq n \leq 1000\}$, con $\#A = 901$ que cumplen eso, más que cuales, cuántos es lo que me importa. Los elementos de $n \in A$ que cumplen $n \equiv 1\ (11)$:

$$B = \{100, 111, \ldots, 991\} \quad \text{con} \quad \#B \stackrel{!}{=} 82$$

Donde el 82, lo saco de pensar que el primer $n \in A$ que cumple es:

$$100 = 11 \cdot 9 + 1$$

y el último:

$$991 = 11 \cdot 90 + 1$$

En total hay $\#\{9, 10, 11, \ldots, 89, 90\} = 82$ valores de k que cumplen que $n \equiv 1\ (11)$. Pero, me dicen que f es inyectiva y además $f(2) = 111$, por lo que tengo que restar uno de esos posibles k, porque:

$$111 = 11 \cdot 10 + 1$$

Entonces ya sé que para cumplir $f\ \mathcal{R}\ h$ y que f(2) $= 111$, tengo $\#\{9, 11, 12, \ldots, 89, 90\} = 81$ posibles valores para $f(1)$.

Ahora solo faltan los demás valores que pueden tomar los otro elementos del dominio de f:

$$\begin{array}{ccccccc} & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} & 81 & 1 & (901-2) & (901-3) & (901-4) & (901-5) \end{array}$$

Por lo tanto tendré un total de:

$$\boxed{81 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897 \cdot 896 = 81 \cdot \frac{899!}{895!}}$$

funciones f que cumplen lo pedido.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

7. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 200\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$?

---

a) Para ver esto de qué cosa son las propiedades de reflexión y eso acá está la teoría.

¿Es $\mathcal{R}$ reflexiva?:

$$A \mathcal{R} A \iff A - A = \varnothing \subseteq Y$$

Lo cual es cierto, dado que el conjunto vacío, $\varnothing$, está en todo conjunto.

¿Es $\mathcal{R}$ simétrica?:

Por hipótesis:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y \quad \checkmark$$

Quiero ver que pasa con $B \mathcal{R} A$:

$$B \mathcal{R} A \overset{??}{\iff} A - B \subseteq Y$$

Propongo que $A = \{101, 200\}$ y que $B = \{1, 200\}$. Con estos conjuntos se tiene:

$$B - A = \{1\} \subseteq Y$$

peeeeero,

$$A - B = \{101\} \not\subseteq Y$$

Por lo tanto la relación <u>no</u> es simétrica.

¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?:

Por hipótesis:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y \quad \checkmark$$

De ser antisimétrica debería ocurrir que

$$A \mathcal{R} B \implies B \not\mathcal{R} A \text{ para } B \neq A.$$

Veamos por ejemplo qué pasa con $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$, donde $A \neq B$:

$$B - A = \{2\} \subseteq Y \implies A \mathcal{R} B$$

y también,

$$A - B = \{1\} \subseteq Y \implies B \mathcal{R} A$$

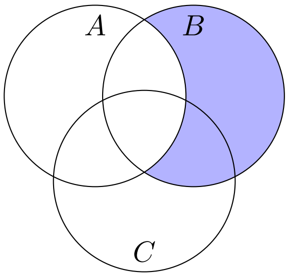
Por lo tanto la relación <u>no</u> es antisimétrica.

¿Es $\mathcal{R}$ transitiva?:

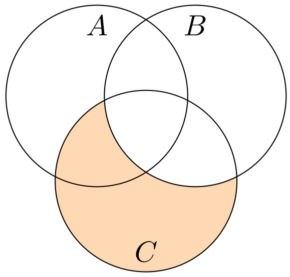
Por hipótesis:

$$\star^1 A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y \quad \checkmark$$
$$\star^2 B \mathcal{R} C \iff C - B \subseteq Y \quad \checkmark$$

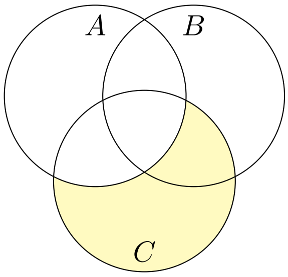
En diagramas de Venn:



$\star^{1}$ y $\star^{2}$

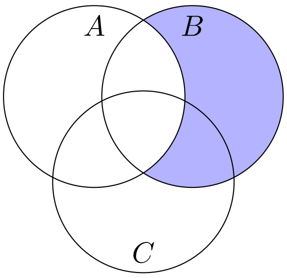


Quiero ver si $A\ \mathcal{R}\ C$ es decir si $C - A \subseteq Y$:

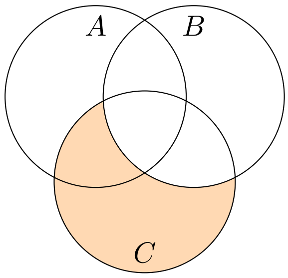


$\star^{3}$

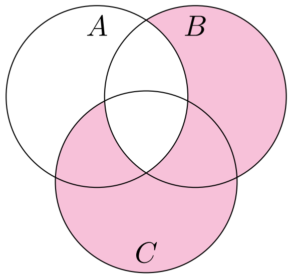
Esto está lindo porque $\star^{1}$ y $\star^{2}$ están en Y, lo cual equivale a decir que su unión también está en Y:



$\cup$



$=$



En los diagramas se puede ver que $\star^{3}$ es un conjunto que está en la unión de $\star^{1}$ y $\star^{2}$, y como, por hipótesis, esa unión está en Y, la relación es *transitiva*.

b)

$$\#B = \#\{n \in X : n \text{ es par}\} = \#\{2, 4, 6, \dots, 198, 200\} = 100$$

Para que $A\ \mathcal{R}\ B$ necesito que los todos los conjuntos A *le saquen* a B los elementos del 102 al 200. Por lo tanto:

$$\{102, 104, \dots, 200\} \subseteq A.$$

De forma tal que $B - A \subseteq Y$. Teniendo en cuenta que $\#\{102, 104, \dots, 200\} = 50$, ahora tengo que jugar con el conjunto C que es como llamo al resto de números que le queda a B después de restar, es decir:

$$C = B - \{102, \dots, 200\} = \{2, 4, \dots, 100\} \xrightarrow{\text{con cardinal}} \#C = \#\{2, 4, \dots, 100\} = 50$$

y tomar solo 30 elementos de C para darselos a A y así satisfacer $\#(A \cap B) = 80$.

Formas de tomar esos números:

$$\binom{50}{30} = \frac{50!}{30! \cdot 20!}$$

Ese resultado cumple las condiciones, peeeeero no hay que olvidar que $A \in \mathcal{P}(X)$, por lo tanto A, podría tener números impares entre 1 y 200, esto me va a agregar posibles conjuntos A. Dado que si agrego números impares a los conjuntos de arriba no rompo ninguna condición.

¿Cuántos A me agrega? Empiezo por agregar ningún número impar de un conjunto de 100 para elegir:

$$\binom{100}{0}$$

Puedo formar así un A que cumple todo lo pedido y no tiene ningún número impar.

Ahora agarro 1 número entre 100:

$$\binom{100}{1}$$

Puedo formar así 100 A que cumplen todo lo pedido y tienen un número impar.

Ahora agarro 2 números entre 100:

$$\binom{100}{2}$$

Puedo formar así 5445 A que cumplen todo lo pedido y tienen 2 números impar.

Ahora agarro 3 números entre 100:

$$\binom{100}{3}$$

... bueh, creo que se ve a donde estamos yendo. ...

Sigo así hasta agarrar a todos en algún momento llego a que:

$$\binom{100}{100} = 1$$

Juntando todo eso con el resultado de la parte *par* quedaría que el total de conjuntos A es:

$$\boxed{\binom{50}{30} \cdot \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i}}$$

Y bueh para mí ahí está un posible resultado final. Lo que viene ahora no creo que haya sido necesario, y de haberlo sido, me hubiese puesto a llorar en el examen:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^k \xrightarrow[n=100]{x=y=1} 2^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i}$$

Por lo tanto y nuevamente la cantidad de conjuntos A que cumplen lo pedido pero escrito en una forma más *elegante* es:

$$\boxed{\binom{50}{30} \cdot 2^{100}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`Nad Garraz` `Fiona M L`

---

8. Sea $X = \{f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\} \to \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 100\}\}$, es decir, X es el conjunto de todas las funciones del conjunto $\{1, \dots, 5\}$ en el conjunto $\{0, \dots, 100\}$. Se define en X la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$f \mathcal{R} g \iff f(4) \equiv g(4) \pmod 3$$

a) Decida si la relación es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

b) Sea $g \in X$ la función difinida $g(n) = 5$ para todo $n \in \{1, \dots 5\}$. Calcule la cantidad de funciones inyectivas f tales que $f \mathcal{R} g$ y $f(5) = 14$.

---

a) Dado que la relación $\mathcal{R}$ está definida en una congruencia algunas de las propiedades se cumplen de forma trivial debido a la congruencia.

¿Es la relación $\mathcal{R}$ reflexiva?

$$f(4) \equiv f(4)\ (3)$$

Se cumple de manera trivial. $\boxed{\mathcal{R} \text{ es } \textit{reflexiva}}$.

¿Es la relación $\mathcal{R}$ simétrica?

$$\text{Si } f(4) \equiv g(4)\ (3) \overset{?}{\Rightarrow} g(4) \equiv f(4)\ (3)$$

Se cumple de manera trivial. $\boxed{\mathcal{R} \text{ es } \textit{simétrica}}$.

¿Es la relación $\mathcal{R}$ transitiva?

$$\text{Si } f(4) \equiv g(4)\ (3) \quad \text{y} \quad g(4) \equiv h(4)\ (3) \overset{?}{\Rightarrow} f(4) \equiv h(4)\ (3)$$

Se cumple de manera trivial. $\quad f(4) \equiv g(4) \overset{(3)}{\equiv} h(4)\ (3) \quad \boxed{\mathcal{R} \text{ es } \textit{transtiva}}$.

¿Es la relación $\mathcal{R}$ antisimétrica?

$$\text{Si } f(4) \equiv g(4)\ (3) \quad \text{y} \quad g(4) \equiv f(4)\ (3) \overset{?}{\Rightarrow} f = g$$

Y, me parece que no. Un contraejemplo viene al pelo. Busco dos funciones que cumplan la relación pero que sean distintas:

$$\begin{cases} f(n) = 6n \\ g(n) = 3n \end{cases} \implies \underbrace{f(4)}_{\overset{(3)}{\equiv} 0} \equiv \underbrace{g(4)}_{\overset{(3)}{\equiv} 0}\ (3) \quad \text{y} \quad \underbrace{g(4)}_{\overset{(3)}{\equiv} 0} \equiv \underbrace{f(4)}_{\overset{(3)}{\equiv} 0}\ (3) \quad \text{con} \quad f \neq g$$

El contraejemplo dice que $\boxed{\mathcal{R} \ \underline{\text{no}} \text{ es } \textit{antisimétrica}}$.

b) Quiero que ocurra que:

- $f(5) = 14$.
- f es inyectiva.
- $f \,\mathcal{R}\, g \implies f(4) \overset{(3)}{\equiv} g(4) \equiv 2\ (3)$

Esa última condición me dice que $f(4)$ es de la pinta:

$$f(4) = 3k + 2 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

¿Cuánto posibles valores del conjunto del codominio $\{0, \dots, 100\}$ hay que cumplan que su módulo 3 es 2?

$$0 \leq 3k + 2 \leq 100 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 3k + 2 \leq \frac{98}{3} \Leftrightarrow k \in \{0, \dots, 32\}$$

donde $\#\{0, \dots, 32\} = 33$.

Ojito que hay una *trampilla* con el $f(5) = 14$, que o sorpresa $14 \equiv 2\ (3)$!!

Por lo tanto si me quiero armar funciones *inyectivas* que cumplan lo pedido:

$$\begin{cases} f(4) \to 32 \text{ opciones} \\ f(5) \to \text{ única opción} \\ f(1) \to 99 \text{ opciones} \\ f(2) \to 98 \text{ opciones} \\ f(3) \to 97 \text{ opciones} \end{cases}$$

$f(4)$ y $f(5)$ son las que se laburaron, las otras 3 $f(1), f(2)$ y $f(3)$ son el relleno donde solo hay que prestar atención a no romper la inyectividad.

Se concluye que la cantidad de funciones f que cumplen lo pedido son en total:

$$\boxed{32 \cdot 1 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Magui

9. Sea $A = \{f : \{1, \ldots, 8\} \to \{1, \ldots, 10\} : f \text{ inyectiva}\}$. Se define en A la siguiente relación $\mathcal{R}$:

$$f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f(2) - g(2) = f(3) - g(3) \quad \text{y} \quad f(1) - g(1) \text{ es par.}$$

(a) Calcular el cardinal de A.

(b) Decidir si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(c) Si $f : \{1, \ldots, 8\} \to \{1, \ldots, 10\}$ es $f(n) = r_8(n) + 1$, calcular la cantidad de funciones en A que se relacionan con f.

Haga lo que haga en este ejercicio voy a reescribir la relación $\mathcal{R}$ así:

$$f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f(2) - f(3) = g(2) - g(3) \quad \text{y} \quad f(1) - g(1) \text{ es par.}$$

es que soy medio disléxico y así lo veo mejor.

a) Tengo una función *inyectiva*, por lo tanto para cada número del dominio tenemos que asignarle un número del codominio sin repetirlo:

$$\begin{array}{rcccccccc} & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{cantidad de opciones} \longrightarrow & \#10 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 & \#3 \end{array}$$

Hay un total de

$$\boxed{\frac{10!}{2!} \text{ funciones inyectivas } f \text{ que se pueden armar en } A}$$

b) Lo es no hay nada nuevo.

Desarrollarlo queda de tarea para *yo del futuro o para algún buen samaritano*.

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

c) Esa $f(n) = r_8(n) + 1$ es lo mismo que decir:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad n < 8 \\ 1 & \text{si} \quad n = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{evaluando}} f(n) = \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 4 \\ f(4) = 5 \\ f(5) = 6 \\ f(6) = 7 \\ f(7) = 8 \\ f(8) = 1 \end{cases}$$

Vieno la pinta que tiene $f(n)$ y recordando lo que tiene que cumplir una función para estar relacionada a f,

$$f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f(2) - f(3) = g(2) - g(3) \quad \text{y} \quad f(1) - g(1) \text{ es par.}$$

sé que una posible función g, tiene que ser algo como:

$$g(n) = \begin{cases} g(1) &= 4 \\ g(2) &= 9 \\ g(3) &= 10 \\ g(4) &= 1 \\ g(5) &= 2 \\ g(6) &= 3 \\ g(7) &= 5 \\ g(8) &= 6 \end{cases}$$

Para cumplir que:

$$\underbrace{f(2) - f(3)}_{=-1} = g(2) - g(3)$$

eso me dice que los valores de $g(2)$ y $g(3)$ son consecutivos, uno será par y el otro impar. Tengo para usar como imagen de $g(2)$ un total de 4 números par $\{2, 4, 6, 8\}$ y 5 números impar $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. El 10 queda afuera, porque no tengo nada para restarle y que me dé -1.

Importante es notar que una vez elegido el valor de $g(2)$ el valor de $g(3)$ queda determimado para que la resta de -1, por lo tanto:

$$\underset{\substack{g(3)\\ \text{única opción impar}}}{\overset{\substack{g(2)\\ \text{es par}}}{4 \cdot 1}} \qquad \text{o} \qquad \underset{\substack{g(3)\\ \text{única opción par}}}{\overset{\substack{g(2)\\ \text{es impar}}}{5 \cdot 1}}$$

Para cumplir la condición de que:

$$\underset{=2}{f(1)} - g(1) \quad \text{es par}$$

nos obliga a asignarle un valor par a $g(1)$ tengo 4 opciones, porque ya usé un par en la condición anterior y la función es inyectiva.

Y por último tengo que poner los valores que sobran para definir bien a la función. Usé 3 valores, así que quedan 5 números para elegir sin condiciones de un total de 7 que quedan, siempre cumpliendo la inyectividad:

$$\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Por lo tanto el total de funciones inyectivas $g \in A$ que se van a relacionar con $f(n)$:

$$\boxed{(4+5) \cdot 4 \cdot \frac{7!}{2!}}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz