Apunte Único: Álgebra I - Práctica 3

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

última actualización 24/04/25 @ 10:46

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

<u>Disclaimer:</u>
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists +$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada.* Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber.* A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:
24/04/25 @ 10:46
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 3

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

Te debo la teoría

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ una *pull request* al .

Ejercicios de la guía:

---

1. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 15\}$, determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V : n \geq 132\}$.

Se tiene al complemento:

$$A^c = \{n \in V : n < 132\}.$$

Así los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n = k \cdot 15$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n < 132$:

$$15 \cdot k < 132 \Leftrightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

El cardinal pedido es:

$$\# A^c = 8$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Empiezo por buscar los múltiplos de 3 y 5:
Múltiplos de 3: Si x es un múltiplo de 3, entonces $x = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Y si quiero que esos x estén entre 1 y 1000:

$$1 \leq x \leq 1000 \Leftrightarrow 1 \leq 3k \leq 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1000}{3} \overset{k \in \mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow} 1 \leq k \leq 333$$

Eso me dice que tengo 333★[1] números que son múltiplos de 3 entre 1 y 1000.
Haciendo lo mismo para los mútiplos de 5 encuentro que hay un total de 200★[2] números múltiplos de 5 entre 1 y 1000.
Es tentador llegado este momento usar los resultados de ★[1] y ★[2] para decir que hay un total de

$$1000 - 333 - 200 = 467$$

números que <u>no</u> son múltiplo de 3 ni de 5, peeeeero eso estaría mal, porque:

$$\begin{array}{ll} 3k & \to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, \cdots \\ 5k & \to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, \cdots \end{array}$$

vamos a estar *restando más números de los que debemos*, por ejemplo el 15, que lo estamos restando ¡2 veces! una como múltiplo de 3 y otra como múltiplo 5.
Para corregir esa cuenta calculamos los múltiplos de 15, $x = 15k$ y los sumamos al número de antes:

$$1 \leq x \leq 1000 \Leftrightarrow 1 \leq 15k \leq 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{15} \leq k \leq \frac{1000}{15} \overset{k \in \mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow} 1 \leq k \leq 66$$

Hay un total de 66★[3] números múltiplos de 15 entre 1 y 1000
Ahora sí la respuesta al enunciado usando ★[1], ★[2] y ★[3]:

$$\boxed{1000 - 333 - 200 + 66 = 533}$$

⚠ Ahora viene la versión más formal. A mí no me gusta, pero funciona para darle forma a esto. ⚠

Defino un conjunto referencial:

$$V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\},$$

y dos conjuntos

$$A = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 3\} \quad \text{y} \quad B = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 5\}.$$

Búsco calcular $\#(A \cap B)$:

$$\#(A\cap B) \overset{\text{def}}{=} \#[V - (A\cap B)^c] \overset{!}{=} \#(V - A^c \cup B^c) = \#V - \#(A^c \cup B^c) \overset{!}{=} \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)]_{\bigstar^4}$$

Donde

$$\begin{aligned} A^c &= \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}, \\ B^c &= \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}, \\ (A^c \cap B^c) &= \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 15\} \end{aligned}$$

Calculo sus cardinales y esas barritas son la *función piso*, que lo que hacen es redondear para abajo, así me queda un número entero:

- $\#A^c = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $\#B^c = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$
- $\#(A^c \cap B^c) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Finalmente:

$$\boxed{\#(A\cap B) \overset{\bigstar^4}{=} \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)] = 1000 - (333 + 200 - 66) = 533}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

---

3. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cadinales de A, B, C y sus intersecciones.

$$\begin{aligned} \#(A\cup B\cup C) &= \#(A\cup(B\cup C) \\ &= \#A + \#(B\cup C) - \#(A\cap(B\cup C)) \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B\cap C) - \#[(A\cap B)\cup(A\cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B\cap C) - [\#(A\cap B) + \#(A\cap C) - \#(A\cap B\cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B\cap C) - \#(A\cap B) - \#(A\cap C) + \#(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

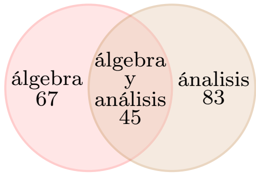
4.

a) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Álgebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no estan inscriptos en ningún curso?

b) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos no estudian ninguno de esos idiomas?

---

a)



Hacer esto intuitivamente es:

$$\overset{\substack{\text{Todos}\\ \uparrow}}{150} - (\underset{\substack{\downarrow\\ \text{análisis}}}{83} + \overset{\substack{\text{álgebra}\\ \uparrow}}{67} - \underset{\substack{\downarrow\\ \text{elimino}\\ \text{repetidos}}}{45}) = \overset{\substack{\text{no se}\\ \text{anotaron}\\ \uparrow}}{45}$$

En formato *snob*:

$$\#(\mathcal{U} \setminus A \triangle B) = \#\mathcal{U} - \#\text{Álgebra} - \#\text{Ánalisis} + \#(\text{Álgebra} \cap \text{Análisis}) = 45$$

b) Bueno para encarar este ejercicio primero quiero definir el interior de un conjunto como solo los elementos que pertenecen a ese conjunto, creo que no hay una notación estándar para esto, así que voy a definir una como

$$X_i^\circ := X_i \setminus \bigcup_{i \neq j} X_j$$

Basicamente lo que esto quiere decir es que cada vez que leamos por ejemplo A°, eso son los elementos que estan SOLO en A y no en otro conjunto.
Otra aclaración, aca los conjuntos representan personas, pero lo unico que nos interesa del conjunto es su cardinalidad, asi que cada vez que me refiera a un conjunto por su nombre, en realidad me estoy refiriendo a su cardinalidad Tenemos entonces:

$$I = 63, A = 30, F = 50$$

$$I^\circ = 30, A^\circ = 13, F^\circ = 25$$

$$I \cap A \cap F = 7$$

$$U = I^\circ + A^\circ + F^\circ + (I \cap A) + (I \cap F) + (A \cap F) + (I \cap A \cap F) + S = 110$$

Aclaración: S es el conjunto de personas que no estudian ninguno de los idiomas de interes.
Ahora voy a definir cada conjunto A,I,F en funcion de sus interiores e intersecciones

$$I = I^\circ \cup (I \cap A) \cup (I \cap F) \cup (I \cap A \cap F) = 63$$

$$A = A^\circ \cup (A \cap I) \cup (A \cap F) \cup (I \cap A \cap F) = 30$$

$$F = F^\circ \cup (F \cap I) \cup (F \cap A) \cup (I \cap A \cap F) = 50$$

La clave es que como ahora todos estos conjuntos son disjuntos puedo tratar la union como una suma comun y llamar a cada grupo de intersecciones como una variable y armar un sistema de ecuaciones:

$$x = I \cap A$$

$$y = I \cap F$$

$$z = A \cap F$$

Ahora, de las definiciones de mas arriba tengo

$$30 + x + y + 7 = 63$$
$$13 + x + z + 7 = 30$$
$$25 + y + z + 7 = 50$$

De este sistema de ecuaciones obtenemos que $x = 9$, $y = 17$, $z = 1$
Ya tenemos el ejercicio completado practicamente, veamos lo que nos pedia el enunciado...
Alumnos que estudian solo dos idiomas son las intersecciones entre dos conjuntos. Que justamente son nuestras x, y, z. A si que tenemos $\boxed{x + y + z = 27}$.
Los alumnos que estudian ingles y aleman pero no frances son la interseccion entre ingles y aleman, osea $\boxed{x = 9}$ Para determinar los alumnos que no estudian ningun idioma, tenemos que volver a una de las primeras ecuaciones que teniamos.

$$U = I^\circ + A^\circ + F^\circ + (I \cap A) + (I \cap F) + (A \cap F) + (I \cap A \cap F) + S = 110$$

Reemplazando obtenemos

$$U = 30 + 13 + 25 + 9 + 17 + 1 + 7 + S = 110$$

$$30 + 13 + 25 + 9 + 17 + 1 + 7 + S = 110$$

$$102 + S = 110$$

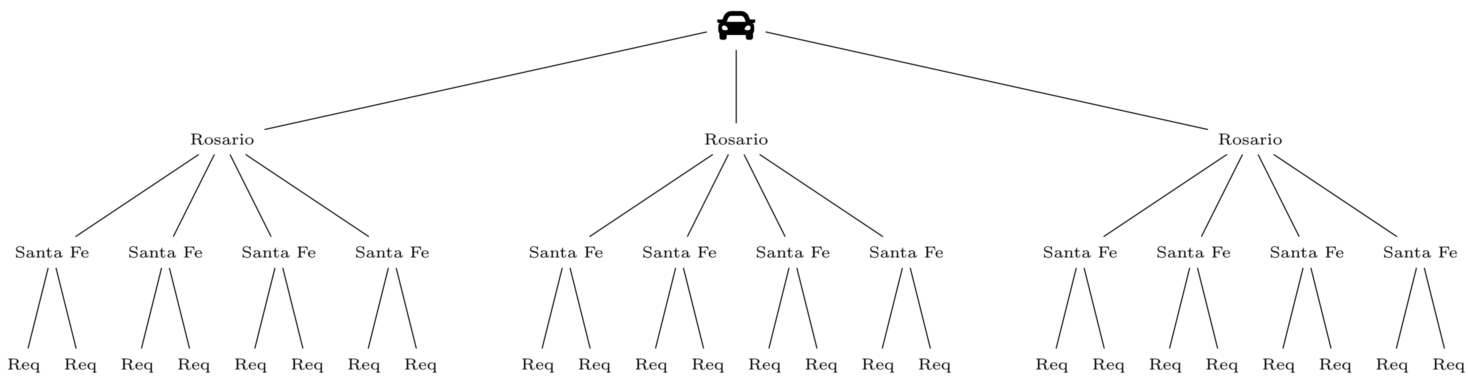
$$\boxed{S = 8}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro naD GarRaz

---

5. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿Cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

Es un ejercicio bastante directo, queremos ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por todas las ciudades intermedias, el enunciado no pone ninguna restricción ni atajos de rutas, así que simplemente multiplicamos todas las posibles rutas. Quedando $\boxed{3 \cdot 4 \cdot 2 = 24}$



Como se ve en ese diagrama de decisión, hay $\boxed{24}$ formas de llegar a Reconquista desde Buenos Aires.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

6.

a) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?

b) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

---

a) Como las cifras no pueden ser 5 y la primer cifra no puede empezar con 0, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r|cccc} \text{cifras} & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \text{posibilidades} & 8 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

entonces hay $8 \cdot 9^3 = 5832$ posibiles números.

b) Para hallar la cantidad de números de 4 cifras que contienen al 7 lo calculo con el complemento, o sea

#números de 4 cifras con el 7 = #números de 4 cifras − #números de 4 cifras sin el 7

- # números de 4 cifras:

$$\begin{array}{r|cccc} \text{cifras} & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \text{posibilidades} & 9 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

  Entonces hay $9 \cdot 10^3 = 9000$ números de 4 cifras.

- # números de 4 cifras sin el 7:
  En el ítem anterior calculamos la cantidad de números de 4 cifras que no contienen al 5, que es la misma cantidad que números de 4 cifras que no contienen al 7, por lo tanto hay 5832 números posibles.

Así, #números de 4 cifras con el $7 = 9000 - 5832 = 3168$

---

7. María tiene una colección de 17 libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

Tenemos un conjunto de libros y otro de cajas, todos los libros van a ir a parar a al menos una caja. Esto quiere decir que basicamente lo que queremos buscar son todas las funciones de libros a cajas. Que se obtiene haciendo $\#(\text{cajas})^{\#(\text{libros})} = \boxed{3^{17}}$
Otra forma de pensarlo es que por cada libro tenemos 3 opciones de mandarlo a cualquiera de las cajas, como tenemos 17 libros, esto es

$$\overbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}^{17 \text{ veces}} = 3^{17}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
sigfripro

---

8. Un estudiante puede elegir qué cursar entre 5 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar, incluyendo como posibilidad no cursar ninguna materia? ¿Y si tiene que cursar al menos dos materias?

Hay 5 materias, el conjunto de materias lo bautizo M:

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\} \quad \text{con} \quad \#M = 5$$

Si decide cursar 0 materias, eso se puede elegir de una sola manera:

$$\binom{5}{0} = 1$$

Si decide cursar 1 materia, eso se puede elegir así:

$$\binom{5}{1} = 5$$

Si decide cursar 2 materias, eso se puede elegir así:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Si decide cursar 3 materias, eso se puede elegir así:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Si decide cursar 4 materias, eso se puede elegir así:

$$\binom{5}{4} = 5$$

Si decide cursar 5 materias, eso se puede elegir así:

$$\binom{5}{5} = 1$$

Entonces la forma de elegir que cosa cursar sería la suma de todo eso:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \boxed{\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} = 32}$$

De *yapa* se puede expresar así:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \xrightarrow[n=5]{x=1,\ y=1} \boxed{2^5 = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}}$$

Si al menos tiene que cursar 2 materias, quiere decir que puede cursar 2, 3, 4 o 5. Sumando lo que corresponde:

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \boxed{\sum_{i=2}^{5} \binom{5}{i} = 26}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
♉ naD GarRaz

---

9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

Para dos conjuntos

$$A = \{1, \cdots, n\} \quad \text{y} \quad B = \{a_i \in A \quad \text{y} \quad a_j \in A \;/\; a_i \,\mathcal{R}\, a_j \;\; \forall i, j \in [1, n]\}$$

Los cardinales de conjuntos de esta pinta:

$$\#A = n, \quad \#B = n^2, \quad \#\mathcal{P}(B) = 2^{n^2}$$

¿Cuántas relaciones reflexivas tengo en A?: Sé que las relaciones reflexivas son de la forma:

$$\forall a_i \in A \implies a_i \,\mathcal{R}\, a_i,$$

es decir, lo n elementos de la diagonal de una matriz:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \hline
a_1 & R & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_2 & \cdot & R & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_3 & \cdot & \cdot & R & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & R & \cdot & \cdot \\ \hline
a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & R & \cdot \\ \hline
a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & R \\ \hline
\end{array}
$$

deben estar en mi relación. Hay solo una forma de conseguir eso:

$$\binom{n}{n} = 1 \star^1.$$

solo hay una posibilidad para que pase eso.
Todo muy lindo, hago un ejemplo de juguete para entender esta verga. Ejemplo con $A = \{a_1, a_2\}$):

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & a_1 & a_2 \\ \hline
a_1 & R & \cdot \\ \hline
a_2 & \cdot & R \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\mathcal{R}_1 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} \\
\mathcal{R}_2 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_1)\} \\
\mathcal{R}_3 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_1, a_2)\} \\
\mathcal{R}_4 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}
\end{cases}
$$

Tengo en total 4 posibles relaciones reflexivas. Se puede ver que los elementos <u>no diagonales</u> son el problema a tratar, o siendo menos dramáticos, los elementos no diagnonales me agregan posibles relaciones a mi única ($\star^1$) relación hasta el momento.

¿Cómo calculo todas las posibilidades de combinar los elementos en un conjunto
$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$?

La cantidad total de pares $A \times A$ <u>sin</u> los elementos de la diagonal, es decir (a_i, a_j) con $i \neq j$ que me puedo armar en esa matriz es:

$$n^2 - n$$

Cada uno de estos $n^2 - n$ pares pueden *aparecer o no* en la relación (como en el ejemplo de juguete). *Aparecer o no* son 2 posibilidades, *ser o no ser* 💀. Habrá:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{\#(elementos\ no\ diagonales)} = 2^{n^2-n}$$

Noto que ese resultado es $\#\mathcal{P}(\{elementos\ no\ diagonales\})$.
El total de relaciones *reflexivas*:

$$\boxed{2^{(n^2+n)}}$$

¿Cuántas relaciones simétricas habrá en A?: Las relaciones simétricas serán aquellas que

$$a_i \ \mathcal{R}\ a_j \implies a_j \ \mathcal{R}\ a_i, \qquad \forall a_i \quad \text{y} \quad a_j \in A.$$

Arranco con un ejemplo de juguete, para un conjunto $A = \{a_1, a_2\})$ tengo las siguientes relaciones simétricas:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & a_1 & a_2 \\ \hline
a_1 & S & \cdot \\ \hline
a_2 & S & S \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{cases}
\mathcal{R}_1 = \{(a_1, a_1)\} \\
\mathcal{R}_2 = \{(a_2, a_2)\} \\
\mathcal{R}_3 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\} \\
\mathcal{R}_4 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \\
\mathcal{R}_5 = \{(a_2, a_2), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \\
\mathcal{R}_6 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \\
\mathcal{R}_7 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}
\end{cases}$$

Es así que se comprueba que las profundidades del infierno no están acotadas. Por otro lado voy a ver cuántos elementos tengo para armar estar relaciones:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \hline
a_1 & S & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_2 & S & S & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_3 & S & S & S & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
a_{n-2} & S & S & S & \ddots & S & \cdot & \cdot \\ \hline
a_{n-1} & S & S & S & \ddots & S & S & \cdot \\ \hline
a_n & S & S & S & \cdots & S & S & S \\ \hline
\end{array}$$

La cantidad de elementos que hay marcados con una S en la matriz y los S debajo de la diagonal son respectivamente:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Usando un razonamiento análogo a cuando calculamos las reflexivas estos elementos pueden aparecer o no aparecer en la relación, peeeeero alguno tiene que aparecer:

$$\underbrace{(2 \cdot 2 \cdots 2)}_{\#(\text{elementos } S \text{ en la matriz})} -1 = 2^{\frac{(n^2+n)}{2}} -1$$

Agrego el -1 porque sino estoy tomando al conjunto vacío $\varnothing$ como una relación simétrica más.
El total de relaciones *simétricas*:

$$\boxed{2^{\frac{(n^2+n)}{2}} - 1}$$

¿Cuántas relaciones reflexivas y simétricas habrá:
Como se laburó en la parte de reflexividad, tengo que agarrar los n pares (a_i, a_i) y para eso hay solo una forma de hacerlo. Si quiero que las relaciones sean *reflexivas* y *simétricas* tengo que jugar con los elementos que conté para la reflexividad, pero solo con la mitad, dado que cuando aparezca el elemento matricial a_{ij} aparecerá el elemento a_{ji} debido a la simetría.
El total de relaciones *simétricas* y *reflexivas*:

$$\boxed{2^{\frac{n^2-n}{2}}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

Ir al índice ↑

---

10. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \notin \operatorname{Im}(f)\}$?

iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \operatorname{Im}(f)\}$?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2, 4, 6\}\}$?

Cuando se calcula la cantidad de funciones, haciendo el árbol se puede ver que va a haber $\#\operatorname{Cod}(f)$ de funciones que provienen de un elemento del dominio.
Por lo tanto si tengo dos conjuntos A_n y B_m, con $\#(A) = n$ y $\#(B) = m$ la cantidad de funciones $f : A \to B$ será de m^n

i) Con lo expuesto ahí arriba el total, *totalísimo* de funciones que me puedo armar sería:

$$\#\mathcal{F} = 12^5 \star^1,$$

dado que tengo 12 opciones para cada elemento del $\operatorname{Dom}(f)$.

ii) Parecido al anterior pero ahora el codominio no tiene el 10, entonces las posibilidades de formar funciones se achican:

$$\#\{f \in \mathcal{F} : 10 \notin \operatorname{Im}(f)\} = 11^5 \star^2$$

dado que tengo 11 elementos para elegir para cada elemento del $\operatorname{Dom}(f)$

iii) Para calcular esto lo pensamos con el complemento. Le sacamos al total de funciones f las funciones que no tienen al 10 en su imagen:

$$\#\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \operatorname{Im}(f)\} \overset{\star^1}{\underset{\star^2}{=}} 12^5 - 11^5$$

acá no se desperdicia nada, reciclando los resultados encontrados antes ahí están las funciones buscadas.

iv) Para atacar el problema está bueno pensarlo en 2 partes:

(1) Cumplir $f(1) \in \{2, 4, 6\}$

(2) Contar lo que queda sin hacer 💩

En el arte de escribir sin decir nada, empiezo por el principio:

(1) Para que una función esté bien definida, siempre hay que agarrar todos los elementos de su dominio. En este caso me piden que $f(1) \in \{2, 4, 6\}$ por lo que tengo:

$$\binom{3}{1} = 3$$

Lo cual no es una locura, dado que tengo solo 3 opciones:

$$\begin{cases} f(1) & = & 2 \\ & \text{o} & \\ f(1) & = & 4 \\ & \text{o} & \\ f(1) & = & 6 \end{cases}$$

(2) Ahora a contar sin... bueh 💩. Acá no hay que tener en cuenta que esta función no tiene restricciones, como ser inyectiva o yo que sé, es decir que para calcular todas las demás funciones que podemos formar, vamos a tener algo así:

$$A' = \{2, 3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \implies \#A = 4 \quad \text{y} \quad \#B = 12$$

Y contamos como al principio: 12^4.

Por lo tanto el total de funciones que cumplen lo pedido será:

$$\boxed{\#\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2, 4, 6\}\} = 3 \cdot 12^4}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Diego Moros naD GarRaz

---

11. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay tales que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?

Cuando cuento funciones biyectivas, el ejercicio es como reordenar los elementos del conjunto de llegada de todas las formas posibles. Dado un conjunto $\text{Im}(f)$, la cantidad de funciones biyectivas será:

$$\#\,\text{Im}(f)!$$

i) Hay un total de

$$\boxed{7! = 5040}$$

funciones biyectivas.

ii) Del enunciado puedo formarme con $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$ un total de:

$$3!$$

combinaciones para respetar esa condición. Luego para definir el resto de la funciones tengo que contar:

$$f(\{4, 5, 6, 7\}) = \{8, 9, 10, 11\}.$$

Esto me da un total de 4! combinaciones por cada una de las 3! combinaciones encontradas antes. Por lo tanto el total de funciones será:

$$\boxed{3! \cdot 4! = 144}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

12. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?

---

1) Hay que usar $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y reordenarlos de todas las formas posibles. 5!

2) Hay que usar $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ y ver de cuantas formas posibles pueden ponerse en 5 lugares:

$$\left\{ \underset{1}{-} \quad \underset{2}{-} \quad \underset{3}{-} \quad \underset{4}{-} \quad \underset{5}{-} \right. ,$$

dado que no puedo repetir, a medida que voy llenando los valores, me voy quedando cada vez con menos elementos para elegir del conjunto, por lo tanto queda algo así:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \#7 & \#6 & \#5 & \#4 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underset{1}{-} & \underset{2}{-} & \underset{3}{-} & \underset{4}{-} & \underset{5}{-} \end{array} \right.$$

Tengo:

$$\boxed{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{2!}}$$

3) Parecido al anterior pero fijo el 2 en el dígito de las centenas:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \#6 & \#5 & \#4 & \#1 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underset{1}{-} & \underset{2}{-} & \underset{3}{-} & \underset{4}{2} & \underset{5}{-} \end{array} \right.$$

Tengo:

$$\boxed{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6!}{2!}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

13. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?

iii) ¿Y cuántas tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

---

i) Una pregunta equivalente a si tengo 10 pelotitas distintas y 7 cajitas cómo puedo ordenarlas.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#10 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \to \boxed{\frac{10!}{3!}} = \frac{\#B}{\#B - \#A}$$

ii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de $f(1)$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \to \boxed{5 \cdot \frac{9!}{3!}}$$

iii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de $f(1)$, luego habrá 4 números pares para $f(2)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \to \boxed{5 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{3!}}$$

14. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ tales que $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ hay?

Primero veo la condición $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$, donde podría formar

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

combinaciones biyectivas.
Para obtener la cantidad de funciones pedidas, tengo que usar todos los valores del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
Primero fijo la cantidad de valores que pueden tomar $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ luego lo que reste:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#3 & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \\ \multicolumn{3}{c}{\text{Condiciones pedidas}} & \multicolumn{4}{c}{\text{Lo que resta para completar}} \end{array} \right. \to \boxed{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot 4!}$$

15. Sea $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ tal que f es una función inyectiva.
Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en A definida por: $f\,\mathcal{R}\,g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$.
Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$ ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

Las funciónes $f \in A$ del enunciado tiene solo cuatro valores en su $\mathrm{Dom}(f)$ y tiene 8 elementos en el $\mathrm{Cod}(f)$. Me dan una $f(n)$ es específica:

$$f(n) = n + 2 \implies \left\{ \begin{array}{ccc} f(1) & = & 1 + 2 = 3 \\ f(2) & = & 2 + 2 = 4 \\ f(3) & = & 3 + 2 = 5 \\ f(4) & = & 4 + 2 = 6 \end{array} \right.$$

La cual se relacionará según $\mathcal{R}$ con otra funciones $g(n)$ del conjunto A siempre que $g(1) + g(2) = 7$. Formas de que $g(1) + g(2) = 7$ puede contarse a mano:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1) + g(2) = 1 + 6 = 7 \\ g(1) + g(2) = 2 + 5 = 7 \\ g(1) + g(2) = 3 + 4 = 7 \\ g(1) + g(2) = 4 + 3 = 7 \\ g(1) + g(2) = 5 + 2 = 7 \\ g(1) + g(2) = 6 + 1 = 7 \end{array} \right.$$

Un total de 6★[1] formas. Un ejemplo de una g tal que $f\,\mathcal{R}\,g$ sería:

$$\left\{ \begin{array}{ccl} g(1) & = & 3 \to \text{ para cumplir } \mathcal{R} \\ g(2) & = & 4 \to \text{ para cumplir } \mathcal{R} \\ g(3) & = & \{1,2,5,6,7,8\} \leftarrow \text{alguno de esos que sea \underline{distinto} a } g(4) \\ g(4) & = & \{1,2,5,6,7,8\} \leftarrow \text{alguno de esos que sea \underline{distinto} a } g(3) \end{array} \right.$$

Eso último es para que la función sea inyectiva. Formas de elegir esos últimos 2 valores para $g(3)$ y $g(4)$:

$$6 \cdot 5 = 30^{\star 2}$$

Así concluyendo que la cantidad de funciones $g \in A$ tales que $f\ \mathcal{R}\ g$ donde $f(n) = n + 2$ será:

$$\boxed{\xrightarrow{\star^1 \star^2} 6 \cdot 30 = 180}.$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

---

16. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva,
- $f(5) + f(6) = 6$,
- $f(1) \leq 6$.

- f inyectiva hace que mi conjunto de llegada se reduzca en 1 con cada elección.
- Si $f(5) + f(6) = 6$ entonces $f : \{5, 6\} \to \{1, 2, 4, 5\}$. Una vez que $f(5)$ tome un valor de los 4 posibles e.g. $f(5) = 1 \xrightarrow[\text{única opción}]{\text{condiciona}} f(6) = 5$
- $f(1) \leq 6 \to f : \{1\} \to \{\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, 6\}$ donde cancelé el 1 y el 4, para sacar 2 números que sí o sí deben irse en la condición de $f(5) + f(6) = 6$. Por lo tanto $f(1)$ puede tomar 4 valores. Por lo que sobrarían 9 elementos del conjunto de llegada para repartir en las f que no tienen condición.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \#4 & \#9 & \#8 & \#7 & \#4 & \#1 & \#6 & \#5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{cuento}} 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 241.920$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz

17.

i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ii) ¿ Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿ Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿ Y si se pide que 1 o 2 pertenezca al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

El problema de tomar k elementos de un conjunto de n elementos se calcula con $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

i) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}(\cancel{3!})} = 35$

ii) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$

iii) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

iv) $\binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 20$

---

18. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Calcular la cantidad de subconjuntos $B \subseteq A$ que cumplen las siguientes condiciones:

i) B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.

ii) B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.

---

i) El conjunto A:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \quad \text{con} \quad \#A = 20$$

El subconjunto de los múltiplos de 3, lo bautizo como C:

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \quad \text{con} \quad \#C = 6$$

Quiero armar un conjunto con 10 elementos. 4 de esos elementos deben ser de C ¿Cuántas formas de agarrar 4 elementos de C hay?:

$$\binom{6}{4} \star^{1}$$

Como quiero después agarrar *6 elementos más de A para llegar a 10*, y que ninguno esté en C, Tengo para agarrar:

$$\#(A - C) = 14$$

Formas de agarrar 6 elementos de esos 14 que quedaron:

$$\binom{14}{6} \star^{2}$$

Finalmente quedan juntando $\star^{1}$ y $\star^{2}$, la cantidad de conjuntos B que satisfacen lo pedido:

$$\boxed{\binom{6}{4} \cdot \binom{14}{6} = 45.045}$$

ii) La condición de que la suma *no sea impar* implica que <u>todos</u> los elementos <u>deben ser</u> par o todos impar.

Conjuntos de números pares e impares, los bautizo, P e I respectivamente:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \quad \text{con} \quad \#P = 10$$

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \quad \text{con} \quad \#I = 10$$

Ahora para armar los conjuntos B con $\#B = 5$ tengo que tomar solo 5 elementos ya sea de P o 5 elementos de I. Eso es tomar 5 elementos de un conjunto de 10:

$$\binom{10}{5} = 252$$

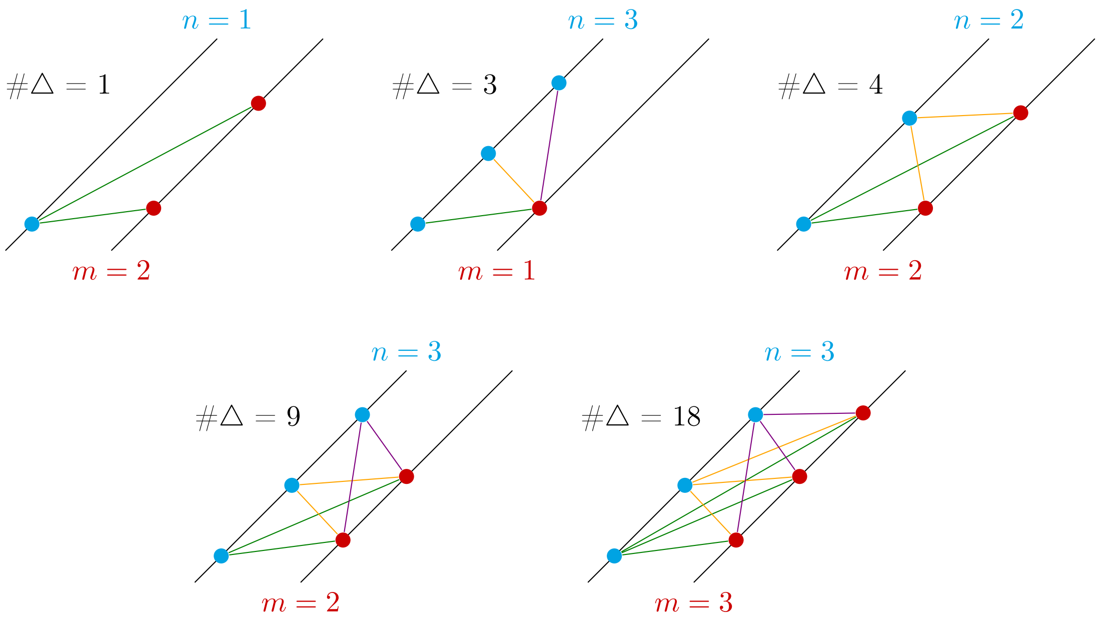
Entonces puedo armarme 252 conjuntos B con los elementos del conjunto P y también 252 con los de I. Por lo tanto la cantidad total de conjuntos que satisfacen lo pedido:

$$\boxed{252 + 252 = 504}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Jean Nico S

19. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. No van a repetirse nunca. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

Haciendo para algunos casos a mano se tiene algo así:



Para armar un triángulo con 3 vértices, tengo que agarrar 1 vértice de una recta y 2 vértices de la otra.

(I) Agarro 1 de la recta que tiene n y 2 de la que tiene m.

De la primera tengo n opciones y agarro 1. Cantidad de formas de hacer eso: $\binom{n}{1}$
De la segunda tengo m opciones y agarro 2. Cantidad de formas de hacer eso: $\binom{m}{2}$

Es decir que tengo:

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{m}{2} = \frac{n \cdot m \cdot (m-1)}{2}$$

(II) Parecido pero cambiando las rectas, agarrando ahora 1 de la que tiene m y 2 de la que tiene n:

De la primera tengo m opciones y agarro 1. Cantidad de formas de hacer eso: $\binom{m}{1}$
De la segunda tengo n opciones y agarro 2. Cantidad de formas de hacer eso: $\binom{n}{2}$

Es decir que tengo:

$$\binom{m}{1} \cdot \binom{n}{2} = \frac{m \cdot n \cdot (n-1)}{2}$$

Finalmente sumo lo encontrado. La cantidad total de triángulos será:

$$\frac{n \cdot m \cdot (m-1)}{2} + \frac{m \cdot n \cdot (n-1)}{2} = \boxed{\frac{n \cdot m \cdot (n+m-2)}{2}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Malena`

---

20. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \dots, 11\} \to \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva,
- Si n es par, $f(n)$ es par,
- $f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7)$.

- La función es inyectiva y cuando *inyecto un conjunto de m elementos en uno de n elementos* $\to \frac{m!}{(m-n)!}$.
- Para cumplir la segunda condición el $\mathrm{Dom}(f)$ tengo 5 números par $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ y en el codominio tengo 8 números par $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ al *inyectar* obtengo $\frac{8!}{(8-5)!}$ permutaciones.
- La condición de las desigualdades se piensa con los elementos de la $\mathrm{Im}(f)$ restantes después de la inyección, que son $16 - 5 = 11$. De esos 11 elementos quiero tomar 4. El cuántas formas distintas de tomar 4 elementos de un conjunto de 11 elementos se calcula con $\binom{11}{4}$, número de combinación que cumple las desigualdades, porque todos los números son <u>distintos</u>. Para la combinación **no hay órden**, elegir $\{16, 1, 15, 13\}$ es lo mismo [1] que $\{1, 16, 13, 15\}$. Es por eso que *con 4 elementos seleccionados* solo hay <u>una</u> *permutación* que cumple las desigualdades; en este ejemplo sería $\{1, 13, 15, 16\}$
- Por último inyecto los número del dominio restantes $\{9, 11\}$ en los 7 elementos de $\mathrm{Im}(f)$ que quedaron luego de la combinación de las desigualdades $\to \frac{7!}{(7-2)!}$

  Concluyendo, habrían
$$\frac{8!}{(8-5)!} \cdot \binom{11}{4} \cdot \frac{7!}{(7-2)!} = 93.139.200$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras *estudio, elementos* y *combinatorio*?

El anagrama equivale a permutar los elementos del conjunto, en este caso las letras de las palabras.
Si no hay letras repetidas es una biyección $(\#(letras))!$, por ejemplo la palabra *estudio* tiene

$$\boxed{(\#\{e, s, t, u, d, i, o\})! = 7!}$$

anagramas en total.

Elementos:
Tiene 3 letras e, por lo tanto los elementos no repetidos son 6:
$$\{l, m, n, t, o, s\}.$$

Voy a realizar una *inyección*:

- Primero ubico lo que <u>no</u> está repetido.
- Luego agrego, en una dada posición, a esos 3 o más elementos repetidos. Esto no altera el conteo. Pensar que la palabra: *lmntoseee* cuenta como *lmntos_ _ _*.

---

[1] Que sea lo mismo quiere decir que no lo cuenta nuevamente, el contador aumenta solo si cambian los elementos y <u>no</u> el lugar de los elementos

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}}$$

son todos los posibles anagramas de la palabra *elementos*.
Otra forma de pensarlo, con combinatoria:

- Primero ubico a las 3 letras e, por ejemplo:

$$\begin{cases} \underset{1}{e} \quad \underset{2}{\_} \quad \underset{3}{e} \quad \underset{4}{\_} \quad \underset{5}{e} \quad \underset{6}{\_} \quad \underset{7}{\_} \quad \underset{8}{\_} \quad \underset{9}{\_} \end{cases},$$

  donde esta es solo una de un total de

$$\binom{9}{3}$$

  formas de hacer eso, y los elementos que quedan en el conjunto de letras se *inyectan*.

- Luego en los lugares vacíos que quedan, en este caso tengo 6 elementos *distintos* para ubicar en 6 lugares, lo que sería una biyección:

$$\#\{l, m, n, t, o, s\}! = 6!$$

Finalemente quedan:

$$\boxed{\binom{9}{3} \cdot 6! = \frac{9!}{3!}}$$

Combinatorio:
Tiene repetidas las letras i (x2) y la o (x3). Tengo un conjunto de 7 elementos distintos:

$$\{c, m.b, n, a, t, r\}.$$

Puedo ubicar las letras con en número combinatorio en 12 lugares o y luego las i en los 9 lugares restantes. Una vez hecho eso puedo *inyectar (biyectar?)* las letras no repetidas restantes:

$$\boxed{\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 7! = \frac{12!}{3! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 39.916.800}$$

Notar que: Ese número que quedó es el total de biyecciones dividido entre las cantidades de repeticiones de los elementos en cuestión.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de *cuadros*

i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?

ii) con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?

iii) con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

El conjunto de consonantes es $C = \{c, d, r, s\}$ y de vocales $V = \{u, a, o\}$

i) Para que las vocales estén juntas pienso a las 3 como un solo elemento, fusionadas las 3 letras, con sus permutaciones, es decir que tengo $3!$ cosas de la siguiente pinta:

$$\begin{cases} u & a & o \\ u & o & a \\ o & a & u \\ o & u & a \\ a & o & u \\ a & u & o \end{cases}$$

Los anagramas para que las letras estén juntas los formo combinando $\binom{5}{1} = 5$ poniendo los 3!=6 valores así en cada uno de los 5 lugares:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} uao & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & uao & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & uao & \_ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right.$$

Ahora puedo *inyectar* las 4 consonantese en los 4 lugares que quedan libres. Finalmente se pueden formar $\underbrace{4!}_{consonantes} \cdot \underbrace{\binom{5}{1} \cdot 3!}_{vocales} = 720$ anagramas con la condición pedida.

ii) Supongo que el orden relativo es que aparezcan ordenadas así "$c \dots d \dots r \dots s$", quiere decir que tengo que combinar un grupo de 4 letras en 7 que serían los lugares de la letras teniendo un total de $\binom{7!}{4!}$ y luego tengo 1! permutaciones o, *no permuto dicho de otra forma*, dado que eso alteraría el orden y no quiero que pase eso. Obtengo cosas así:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c & d & r & s & \_ & \_ & \_ \\ \_ & c & \_ & d & \_ & r & s \\ c & \_ & \_ & d & r & \_ & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right. \rightarrow$$ lo cual deja 3 lugares libres para permutar con las 3 vocales, esa permutación es una biyección da 3!.

Por último se pueden formar $\underbrace{\binom{7!}{4!} \cdot 1!}_{consonantes} \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = \frac{7!}{4!\cancel{3!}} \cdot \cancel{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

iii) $C = \{c, d, r, s\}$ sin que estén juntas quiere decir que puedo ordenar de pocas formas, muy pocas porque solo hay 7 lugares. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} c & \_ & d & \_ & r & \_ & s \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right. \rightarrow$ esta combinación es única $\binom{7!}{7!} = 1$, lo único que resta hacer es permutar las consonantes en esos espacios. 4 espacios para 4 consonantes. Luego relleno *inyectando* las vocales, como antes. El total de anagramas será $\underbrace{\binom{7!}{7!} \cdot 4!}_{consonantes} \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = 144$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`♉ naD GarRaz`

---

23. Con la palabra *polinomios*,

i) ¿Cuántos anagramas pueden formarse en las que las 2 letras i no estén juntas?

ii) ¿Cuántos anagramas puede formarse en los que la letra n aparezca a la izquierda de la letra s y la letra s aparezca a la izquierda de la letra p (no necesariamente una al lado de la otra)?

---

i) Tengo 10 letras, $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$. ~~Para que no hayan "ii" calculo $\binom{10}{3} = 120$, pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "$\underline{i}\_\underline{i}$". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:~~

Esta forma de hacerlo está mal!

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} i & \_ & i & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & i & \_ & \_ & \_ & \_ & i & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & i & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & i \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}\right.$$

→ Con las i donde están el "_" tiene 4 posiciones
→ Con las i donde están el "_" tiene 5 posiciones

Estoy contando de más. La cantidad para que las i no estén juntas es 36... salieron contando a mano $(\sum_1^8 k = 36)$.

Luego inyectando con las repeticiones de la "o": $36 \cdot \frac{8!}{3!} = 241.920$

Esta forma es la correcta:

Pensando en el complemento:

Las posiciones que pueden tomar las ii juntas, se calculan a mano enseguida. Habrían en total:

$$\to \underbrace{\frac{10!}{3! \cdot 2!}}_{\mathcal{U}} - \underbrace{9 \cdot \frac{8!}{3!}}_{\text{complemento}} = 241.920$$

ii) Tengo 10 letras, $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$. Para que se forme "$n \dots s \dots p$" calculo $\binom{10}{3} = 120$, pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "$\underline{n} \dots \underline{s} \dots \underline{p}$". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} n & s & p & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & n & s & \_ & \_ & \_ & p & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & n & \_ & s & \_ & \_ & \_ & p \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}\right.$$

→ tengo que rellenar con 7 letras los lugares que sobran, teniendo en cuenta las repeticiones de las "o" y de las "i": $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!2!}$

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

24. Pedro compró 14 unidades de fruta: 6 duraznos, 2 naranjas, 1 banana, 1 pera, 1 higo, 1 kiwi, 1 ciruela, 1 mandarina. Su propósito es comer una fruta en cada desayuno y merienda. Determinar de cuántas formas puede organizar sus refrigerios de esa semana si no quiere consumir más de una naranja por día.

Pedro tiene que elegir 2 frutas por día, una para desayunar y otra para merendar. Pero tiene alto mambo con las naranjas. Vamos a ver como calcular que el *infeliz* no tenga una sobredosis de *ácido ascórbico* de dos formas muy parecidas:

1) Hay 14 opciones donde podría comer una naranja:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
desayuno		1	3	5	7	9	11
merienda	×!	2	4	6	8	10	12

Dado que solo quiere consumir una naranja por día luego le quedarían 12 opciones válidas, por ejemplo:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
desayuno							
merienda	×!						

Peeeeeero, ojo que ¡Estamos contando el doble! A Pedro no le importa cual de las 2 naranjas come cada día. El razonamiento usado sirve para dos objetos distintos, las naranjas en este ejercicio son *indistinguibles*, por eso hay que dividir entre 2:

$$\frac{14 \cdot 12}{2} = 84 [1]$$

2) Otra forma de encarar: Tengo que poner 2 objetos *repetidos, iguales, indistinguibles entre sí* en 14 lugares. Recordar, porque me olvido seguido que el número combinatorio no cuenta permutaciones:

$$\binom{14}{2} = \frac{14!}{2! \cdot 12!} = 91$$

Peeeeeero, ojo que ahora estamos contando también cuando Pedro se clava dos jugosas naranjas el mismo día. Dado que hay 7 opciones para ubicar las naranjas juntas, es decir, poner 2 naranjas el mismo día, hay que *restar* esas 7 opciones:

$$\binom{14}{2} - 7 = 84$$ ★[1]

Lo que queda por hacer tiene menos rosca, es cuestión de ir ocupando los lugares que quedan con cada fruta:
Quedan 12 lugares válidos. Formas de ubicar 6 duraznos:

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$$

Quedan 6 lugares válidos. Formas de ubicar 1 banana:

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6$$

Quedan 5 lugares válidos. Formas de ubicar 1 pera:

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

Quedan 4 lugares válidos. Formas de ubicar 1 higo:

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

Quedan 3 lugares válidos. Formas de ubicar 1 kiwi:

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

Quedan 2 lugares válidos. Formas de ubicar 1 ciruela:

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$$

Quedan 1 lugar válido. Formas de ubicar 1 mandarina:

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1$$

Juntando todo, las formas que tendrá de balancear su ingesta frutífera:

$$84 \cdot 924 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 55.883.520$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz` `Román LG`

---

25. Un grupo de 15 amigos organiza un asado en un club al que llegarían en 3 autos distintos (4 por auto) y 3 irían caminando. Sabiendo que solo importa en qué auto están o si van caminando, determinar de cuántas formas pueden viajar si se debe cumplir que al menos uno entre Lucía, María y Diego debe ir en auto, y que Juan y Nicolás tienen que viajar en el mismo auto.

Este ejercicio sale contando por el complemento: primero contamos las formas totales de viajar (con el hecho de que Juan y Nicolás tienen que viajar en el mismo auto) y luego les restamos las formas en las que Lucía, María y Diego van caminando al mismo tiempo.

- Formas totales

  Teniendo en cuenta que Juan y Nicolás tienen que viajar en el mismo auto, primero elegimos en que auto van. Para esto, tenemos $\binom{3}{1}$ opciones.

  Ahora completemos los dos lugares que faltan en el auto en el que van Juan y Nicolás. Como nos quedan 13 personas por asginar, tenemos $\binom{13}{2}$ opciones.

  Completemos ahora otro auto. Como nos quedan 11 personas por asignar, tenemos $\binom{11}{4}$ opciones. Pero como cada auto es distinto, debemos contemplar que vayan en el otro auto que queda, de modo que hay que multiplicar ese número por un 2, pues son dos los autos que quedan.

  Por último, debemos llenar el último auto. Como quedan 7 personas sin asignar, tenemos $\binom{7}{4}$ opciones. Respecto a los que van caminando, no hay que asignar nada, pues ya quedan asignados al haber llenados todos los autos.

  Entonces

$$\text{Formas totales} = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{Auto para J y N}} \cdot \underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{Completo auto de J y N}} \cdot \underbrace{\binom{11}{4}}_{\text{Completo otro auto}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Dos autos}} \cdot \underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{Ultimo auto}} = 5405400$$

- Formas en las que Lucía, María y Diego van caminando

  Como los tres que van caminando ya están asignados, solo tenemos que asignar en los autos, que es similar a lo que ya hicimos.

  Teniendo en cuenta que Juan y Nicolás tienen que viajar en el mismo auto, primero elegimos en que auto van. Para esto, tenemos $\binom{3}{1}$ opciones.

  Ahora completemos los dos lugares que faltan en el auto en el que van Juan y Nicolás. Como nos quedan 10 personas por asginar, tenemos $\binom{10}{2}$ opciones.

  Completemos ahora otro auto. Como nos quedan 8 personas por asignar, tenemos $\binom{8}{4}$ opciones. Además, por lo mismo que antes, hay que multiplicar por 2. Con el último auto no queda nada por hacer, pues se asignan a las cuatro personas que quedan.

  Entonces

$$\text{Formas totales} = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{Auto para J y N}} \cdot \underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{Completo auto de J y N}} \cdot \underbrace{\binom{8}{4}}_{\text{Completo otro auto}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Dos autos}} \cdot = 18900$$

Entonces, la formas totales con Juan y Nicolás en el mismo auto y con al menos uno entre Lucía, María y Diego en auto son

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{4} \cdot 2 \cdot \binom{7}{4} - \binom{3}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot 2 = 5405400 - 18900 = \boxed{5386500}$$

`Dale las gracias y un poco de amor` ❤ `a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`Nunezca`

26. Probar que $\binom{2n}{n} > n2^n$, $\forall n \geq 4$.

Vamos a probarlo por inducción:
Proposición:

$$p(n) : \binom{2n}{n} > n2^n, \quad \forall n \geq 4$$

Caso base:

$$p(4) = \binom{8}{4} > 4 \cdot 2^4 = 70 > 64 \quad \checkmark$$

Paso inductivo:
Ahora quiero probar que:

$$p(n) \implies p(n+1),$$

o sea quiero ver que:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} > (n+1) \cdot 2^{(n+1)}, \quad \forall n \geq 4$$

Y va a ser clave tener esta expresión a mano:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \iff \underbrace{\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} > n2^n}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

Empezamos expandiendo el coeficiente binomial usando la fórmula con factoriales:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (2n+2-(n+1))!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!}$$
$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \overset{\text{HI}}{>} \frac{(2n+2)(2n+1)n2^n}{(n+1)^2}$$

Ahora quiero ver que:

$$\frac{(2n+2)(2n+1)n \cdot 2^n}{(n+1)^2} > (n+1) \cdot 2^{(n+1)} \overset{!!}{\iff} \frac{(2n+1)n}{n+1} > n+1 \overset{!}{\iff} n^2 - n > 1$$

En el !! y el !, son factores comunes, simplificaciones acomodar y nada raro. Pero te queda a vos, porque nada te aportaría verlas.
Esto último es verdadero para $n \in \mathbb{N}_{>1}$, por ende para $n \geq 4$ la prueba inductiva será válida, y queda probado por el principio de inducción que:

$$\binom{2n}{n} > n2^n, \quad \forall n \geq 4$$

`Dale las gracias y un poco de amor` ❤ `a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`sigfripro` `naD GarRaz`

27. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

Ejercicio falopa si lo hay. Sale por inducción y rezándole a Dios para no caer en un infierno de cuentas si uno va por el lugar equivocado.

Proposición:

$$p(n) : a_n = \binom{2n}{n}.$$

Casos base:

$$\begin{aligned} p(1) \quad : \quad & a_1 \overset{\text{def}}{=} 2 = \tbinom{2}{1} \quad \checkmark \\ & a_2 \overset{\text{def}}{=} 4a_1 - 2\tfrac{(2n)!}{(1+1)!1!} \overset{!}{=} 6 = \tbinom{4}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Resulta que $p(1)$ es verdadera.
Paso inductivo: Voy a asumir como verdaderaa a

$$p(k) : \quad \underbrace{a_k = \binom{2k}{k}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.
Ahora quiero probar que:

$$p(k+1) : a_{k+1} = \binom{2(k+1)}{k+1}$$

La idea es escribir la definición, meter la HI, y como siempre, rezar para que se acomode todo y que aparezca lo que queresmos que aparezca. Voy a escribir la expresión:

$$a_{k+1} \overset{\text{def}}{=} 4a_k - 2\frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$$

para masajearla y llegar a algo como esto:

$$a_{k+1} = \binom{2(k+1)}{k+1} \overset{\text{def}}{=} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} \quad & \overset{\text{def}}{=} \quad 4a_k - 2\tfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} \overset{\text{HI}}{=} 4\tbinom{2k}{k} - 2\tfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} = 4\tfrac{(2k)!}{k!\cdot k!} - 2\tfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} = 4\tfrac{(2k)!}{k!\cdot k!} - 2\tfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} \\ & \overset{!!}{=} \quad 2\tfrac{(2k)!}{k!\cdot k!} \cdot (2 - \tfrac{1}{k+1}) = 2\tfrac{(2k)!}{k!\cdot k!} \cdot (\tfrac{2k+1}{k+1}) \overset{!!!}{=} \tfrac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} \overset{\text{def}}{=} \tbinom{2(k+1)}{k+1} \end{aligned}$$

Oka, qué carajo pasó en el !!! y en el !!, lo de siempre, factores comunes, sacar algún factor del factorial y coso. En el !!! multipliqué y dividí por algo y *mirá fuerte a ese* 2 *que está adelante de todo* ☺, para que se alineen los planetas.

Por lo tanto $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas. Por el principio de inducción $p(n)$ también es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

28. En este ejercicio no hace falta usar inducción.

a) Probar que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. $\quad \left(\text{sug: } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\right)$.

b) Probar que $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

c) Probar que $\sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\binom{2n}{n} < 4^n$.

d) Calcular $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$ y deducir $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

---

a) Voy a mostrarlo usando un argumento combinatorio. Básicamente voy a mostrar que con las dos expresiones estamos contando lo mismo. Imaginemos que tenemos un conjunto de n cantidad de mujeres y otro de n cantidad de hombres. La suma de este conjunto tendría $2n$ personas. Ahora, yo quiero elegir n personas de ese total de $2n$ personas, contar eso es:

$$\binom{2n}{n}.$$

Un modelo de juguete:

En una caja con 6 *bolitas*, podría sacar 3 de $\binom{6}{3} = 20$ maneras diferentes. Ahora propongo agarrarlas de una forma diferente: Pinto 3 de rosa y 3 de azul. Sigue habiendo 6 *bolitas* solo que pintadas, ahora voy sacando de a 3, nuevamente, pero contando así:

$$\binom{3}{0}\binom{3}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{3}\binom{3}{0} = 1 + 9 + 9 + 1 = 20$$

Cada término de esa suma es contar las formas de sacar k *bolitas* rosas de las 3 *bolitas rosas* que hay para luego multplicar eso por la cantidad de sacar $(3 - k)$ *bolitas azules*. Como estoy sacando $k + (3 - k)$ es siempre estar sacando 3.

El modelo más pulenta:

Hasta ahora todo bien. Notemos que esto lo puedo decir también, es decir, es lo mismo que elegir k mujeres de las n mujeres que hay y elegir $n - k$ hombres entre los n hombres que hay.

Notar que $k + (n - k) = n$, así que el grupo que elijamos como combinación de los dos siempre va a tener n personas, y va a estar elegido una parte desde n mujeres y la otra desde n hombres.

Entonces voy a sumar todas las posibles formas de elegir n personas de entre $2n$ personas, pero agarrando siempre de k mujeres y $n - k$ hombres :

$$\binom{2n}{n} = \overbrace{\underbrace{\binom{n}{0}\binom{n}{n-0}}_{\substack{\text{elijo } 0 \text{ mujeres}\\ \text{y}\\ n \text{ hombres}}} + \underbrace{\binom{n}{1}\binom{n}{n-0}}_{\substack{\text{elijo } 1 \text{ mujeres}\\ \text{y}\\ n-1 \text{ hombres}}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-(n-1)}}_{\substack{\text{elijo } n-1 \text{ mujeres}\\ \text{y}\\ 1 \text{ hombres}}} + \underbrace{\binom{n}{n}\binom{n}{n-n}}_{\substack{\text{elijo } n \text{ mujeres}\\ \text{y}\\ 0 \text{ hombres}}}}^{\text{formas de tomar } n \text{ personas de un total entre } 2n} = \star^{1}$$

La sumatoria en $\star^{1}$ se puede reescribir por su simetría y además por la sugerencia del enunciado como:

$$\star^{1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \underset{\text{sug.}}{\overset{!}{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Como vimos, estamos contando lo mismo con las dos expresiones, por lo tanto queda probado que son iguales.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

b) ¿Vale usar *crudamente* la fórmula del binomio de Newton acá?

Si sí, se puede:

$$\underbrace{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}_{\text{Binomio de Newton}} \xrightarrow[y=-1]{x=1} (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot (-1)^{n-k} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0}$$

Si no, se puede: Con una idea de por donde va esto de sumar los números combinatorios dada su simetría:

Caso con n impar:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} &= (-1)^0\binom{n}{0}+(-1)^1\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}+\cdots+(-1)^{(n-1)}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}\\
&\overset{!}{=} \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots\pm\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\mp\binom{n}{\frac{n+1}{2}}\pm\cdots+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}\\
&\underset{\text{sug.}}{\overset{!!}{=}} \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots\pm\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\mp\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\pm\cdots+\binom{n}{1}-\binom{n}{0}=0
\end{aligned}$$

Caso con n par:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} &= (-1)^0\binom{n}{0}+(-1)^1\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}+\cdots+(-1)^{(n-1)}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}\\
&\overset{!}{=} \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}}-\cdots-\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\\
&\underset{\text{sug.}}{\overset{!!}{=}} \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}}-\cdots-\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\\
&= 2\binom{n}{0}-2\binom{n}{1}+\cdots-2\binom{n}{\frac{n}{2}-1}+\binom{n}{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Tengo que probar que eso me da cero... a ver si alguien por favor me saca de este quilombo

... hay que hacerlo!

Si querés mandá la solución → al grupo de Telegram, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→ una *pull request* al .

c) Primero queremos probar que $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=4^n$.

La forma mas sencilla de hacer esto es haciendo un cambio de variable y usando una identidad ya conocida: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, haciendo cambio de variable $m=2n$, tenemos $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m=2^{2n}=4^n$.

Otra manera de pensarlo es contando funciones de esta manera:

Recuerdo:

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ esta identidad equivale a contar las partes $\mathcal{P}$ de un conjunto de n elementos. Que tambien se puede obtener contando las funciones $f: A\subseteq\mathbb{N}\to\{0,1\}$, $\#(A)=n$, esta notacion nos dice de manera intuitiva que por cada elemento tenemos dos opciones, o lo incluimos (1), o no (0), todas las posibles maneras de relacionar el dominio con el codominio son $\#(\{0,1\})^{\#(A)}=2^5$

Ahora la idea es que tenemos el doble de elementos ($2n$) y hay que armar subconjuntos de hasta $2n$ elementos, la idea entonces es extender esta idea de la funcion a dar la posibilidad de repetir las elecciones ya hechas, extendiendo el codominio a $\{00,01,10,11\}$, de esta manera tenemos todas las posibilidades 2^n anteriores, y extendemos posibilidad de repetir o agregar elemento. Obteniendo todos los posibles subconjuntos de $2n$ elementos, ahora el codominio tiene 4 elementos, por lo que tenemos que la cantidad de funciones son 4^n.
Si no se entendió voy a hacer un ejemplo para que se vea mas visual: Imaginemos un conjunto de $n=2$ elementos $\{a,b\}$, ahora para calcular las partes voy a usar la idea de contar las funciones, tenemos 4 posibilidades:

$$\begin{cases} f(a)=0\\ f(b)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\varnothing \quad \begin{cases} f(a)=1\\ f(b)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{a\} \quad \begin{cases} f(a)=0\\ f(b)=1\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{b\} \quad \begin{cases} f(a)=1\\ f(b)=1\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{a,b\}$$

Si combinamos todos estos conjuntos obtenemos $\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}$ que precisamente son las partes $\mathcal{P}$ del conjunto $\{a,b\}$
Ahora veo la idea pero con el codominio extendido:

$$\begin{cases} f(a)=00\\ f(b)=00\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\varnothing \quad \begin{cases} f(a)=10\\ f(b)=00\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{a\} \quad \begin{cases} f(a)=01\\ f(b)=00\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{\tilde{a}\} \quad \begin{cases} f(a)=11\\ f(b)=00\end{cases}\xrightarrow{\text{queda}}\{a,\tilde{a}\}$$

$$\begin{cases} f(a)=00\\ f(b)=10\end{cases}\to\{b\} \quad \begin{cases} f(a)=10\\ f(b)=10\end{cases}\to\{a,b\} \quad \begin{cases} f(a)=01\\ f(b)=10\end{cases}\to\{\tilde{a},b\} \quad \begin{cases} f(a)=11\\ f(b)=10\end{cases}\to\{a,\tilde{a},b\}$$

$\left\{\begin{array}{l} f(a)=00 \\ f(b)=01 \end{array}\right. \to \left\{\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=10 \\ f(b)=01 \end{array}\right. \to \left\{a,\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=01 \\ f(b)=01 \end{array}\right. \to \left\{\tilde{a},\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=11 \\ f(b)=01 \end{array}\right. \to \left\{a,\tilde{a},\tilde{b}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l} f(a)=00 \\ f(b)=11 \end{array}\right. \to \left\{b,\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=10 \\ f(b)=11 \end{array}\right. \to \left\{a,b,\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=01 \\ f(b)=11 \end{array}\right. \to \left\{\tilde{a},b,\tilde{b}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=11 \\ f(b)=11 \end{array}\right. \to \left\{a,\tilde{a},b,\tilde{b}\right\}$

Aclaración:

El uso de las tildes ˜ en las letras es simplemente para marcar diferencia porq en un conjunto no puede haber elementos repetidos.
Ahora llamo $c=\tilde{a}$ y $d=\tilde{b}$ y miren lo que tengo:

$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

Esto precisamente son las partes de un conjunto de 4 elementos!, que corresponde con contar $2^4 = 2^{2n} = 4^n$.
Despues de todo este choclo, recordemos que originalmente teniamos $n=2$ elementos a,b, y con esta idea de la funcion contamos las partes de un conjunto de $2n$ elementos.

Despues el enunciado nos pedia deducir que: $\binom{2n}{n} < 4^n$.
Este no tiene mucho misterio, expandimos el lado derecha con lo que probamos recientemente y nos queda:

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$$

$$\binom{2n}{n} < \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{n} + \cdots \binom{2n}{2n}$$

Bueno todos los terminos de la derecha son positivos asi que se ve claramente que lo que nos planteaba el enunciado es verdadero.

d) Para calcular lo que nos piden no damos mucha vuelta, hacemos cambio de variable $m=2n+1$ y vemos que:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \xrightarrow{m=2n+1} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m \xrightarrow{m=2n+1} 2^{2n+1} = 2^{2n}\cdot 2 = \boxed{4^n\cdot 2}$$

Ya tenemos la primera parte del ejercicio, ahora nos piden *deducir* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$. Para hacer este vamos a usar un poco de intuicion del triangulo de pascal:

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
\text{n=0} & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
\text{n=1} & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
\text{n=2} & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
\text{n=3} & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
\text{n=4} & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\text{n=5} & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Vemos que las filas con n impares tienen una cantidad par de terminos, por ejemplo $n=3$, tiene 4 terminos, esto se debe a que como el listado empieza en 0. Como tienen una cantidad par de terminos, y sabemos que el triangulo de pascal es simétrico (por la identidad: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), con saber la mitad ya sabemos el resto (en el caso de los n impares). Entonces vamos a usar esta idea, nos piden deducir $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$, vemos que $2n+1$ siempre va a ser un numero impar, asi que podemos aplicar esta idea de la simetria, la clave acá es que sumar hasta n es sumar exactamente hasta la mitad de su respectiva fila en el triangulo de pascal. Por que? Tiene que ver con que el triangulo de pascal esta indexado en 0, pero mejor verlo graficamente, por ejemplo vean que en la fila 3 del triangulo de pascar, es como decir la fila $2m+1$, $m=1$, y justamente en m se parte al medio la fila.

Bueno combinemos todas estas ideas y entonces para calcular $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$ primero calculamos todos los elementos de la fila correspondiente al $2n+1$ y luego dividimos por dos porque partimos al medio la fila. Entonces tenemos:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}}{2} = \frac{4^n\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = \boxed{4^n}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

sigfripro naD GarRaz

---

29. Sea $X=\{1,2,\dots,20\}$, y sea R la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida por: $A\ \mathcal{R}\ B \iff A-B=\varnothing$. ¿Cuántos conjuntos $A\in\mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A\geq 2$ y $A\ \mathcal{R}\ \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

Los ingredientes:

(1) Para que se cumpla que $A\ \mathcal{R}\ B$ necesito que $A\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$

(2) Además necesito que por lo menos tenga $\#A\geq 2$

Por lo tanto es cuestión de ir agarrando elementos de $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$ teniendo en cuenta que esos elementos tienen que tener *un cardinal mayor o igual a* 2. Por favor entender que los *elementos del conjunto partes son conjuntos.*

Esto es un trabajo para , digo el *número combinatorio:*

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=\star^{1}$$

Y si querés averiguar cuanto *verga* es eso ahí tenés un laburo para , digo el *binomio de Newton:*

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n y^{n-k} \xrightarrow[n=9]{x=y=1} 2^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}=\underbrace{\binom{9}{0}}_{=1}+\underbrace{\binom{9}{1}}_{=9}+\underbrace{\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}}_{\star^{1}}$$

Despejando:

$$\boxed{\star^{1}=\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=2^9-10=502}$$

Me voy a comer algo, .

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

---

30. Sea $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, y sea R la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A\ \mathcal{R}\ B \iff A\cap\{1,2,3\}=B\cap\{1,2,3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B\in\mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A=\{1,3,5\}$?

Como $A=\{1,3,5\}$:

$$A\cap\{1,2,3\}=\{1,3\}.$$

Los conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ que tienen $\#B = 5$ pertenecientes a la clase $\overline{A}$ deberían cumplir:

$$B \subseteq \overline{A} \implies 1 \in B \quad \text{y} \quad 3 \in B \quad \text{y} \quad 2 \notin B,$$

donde la última condición es necesaria, dado que si:

$$2 \in B \implies 2 \in (B \cap \{1,2,3\}) \implies A \not\mathcal{R} B$$

Con esta info, los conjuntos B con $\#B = 5$ serán de la forma:

$$B = \{1, 3, 😊, 😬, 😊\}$$

Es decir tengo que agarrar 3 elementos de lo que queda del conjunto X. Los 7 números que quedan para elegir son $\{4,5,6,7,8,9,10\}$ y tengo:

$$\binom{7}{3} = 35$$

formas de agarrarlos.
La cantidad de B que cumplen lo pedido son $\boxed{35}$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

---

31. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$ y $A = \{1\}$ ¿Cuántos subconjuntos $B \subseteq X$ satisfacen que el conjunto $A \triangle B$ tiene a lo sumo 2 elementos?

$$\ldots \textit{a lo sumo} = \textit{como mucho} = \textit{como máximo}$$

$$\textit{al menos} = \textit{por poco} = \textit{como mínimo}\ldots$$

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos A y B. Si me piden que:

$$\#(A \triangle B) \leq 2 \implies \begin{cases} 1 \in B \implies 1 \leq \#B \leq 3 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Conjuntos}} \begin{cases} \#B = 3 \to \{1; 😬; 😊\} \xrightarrow[\text{99 números elijo 2}]{\text{el 1 está usado, de}} \binom{99}{2} \\ \#B = 2 \to \{1; 😬\} \xrightarrow[\text{99 números elijo 1}]{\text{el 1 está usado, de}} \binom{99}{1} \\ \#B = 1 \to \{1\} \xrightarrow[\text{99 números elijo 0}]{\text{el 1 está usado, de}} \binom{99}{0} \end{cases} \\ \\ 1 \notin B \implies 0 \leq \#B \leq 1 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Conjuntos}} \begin{cases} \#B = 1 \to \{😬\} \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B\text{. Elijo 1}]{\text{De 99 números para}} \binom{99}{1} \\ \#B = 0 \to \varnothing \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B\text{. Elijo 0}]{\text{De 99 números para}} \binom{99}{0} \end{cases} \end{cases}$$

Por último el total de subconjuntos $B \subseteq X$ que cumplen lo pedido sería:

$$\boxed{\binom{99}{2} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0} = \binom{99}{2} + 200}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

32.

a) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

b) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

Hacer!

Ejercicios de parciales:

---

1. Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la relación de equivalencia $\to X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \triangle Y \subseteq \{4,5,6,7,8\}$.
¿Cuántos conjuntos hay en la clase de equivalencia de $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$?

---

1. La relación toma valores de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
2. Los elementos del conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
3. El conjunto $X = \{6,7,8,9,10,\dots\}$ es simplemente un elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Los conjuntos $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que $X \,\mathcal{R}\, Y$ van a ser los conjuntos que junto a X formarán la clase de equivalencia.
$\overline{X} = \{Y \in \mathcal{P}\,\mathbb{N} : X \,\mathcal{R}\, Y\}$

Para tener una relación de equivalencia deben cumplirse:

- Reflexividad. $X \triangle X = \varnothing \overset{\checkmark}{\subseteq} \{4,5,6,7,8\}$
- Simetría. $X \triangle Y \overset{\checkmark}{=} Y \triangle X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Transitividad.

Condiciones que debería cumplir un elemeto Y para pertenecer a la la clase de equivalencia, en otras palabras estar relacionado con X:
Los elementos $\to$

$$\left\{\begin{array}{l}
1,2,3 \text{ no deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \begin{cases} X \triangle \underbrace{\{3,8,9,\dots\}}_{Y} = \{3,6,7\} \not\subseteq \{4,5,6,7,8\} \\ X \triangle \underbrace{\{1,2,3\}}_{Y} = \{1,2,3,6,7,\dots\} \not\subseteq \{4,5,6,7,8\} \end{cases} \\
\hline
4,5,6,7,8 \text{ pueden o no pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \begin{cases} X \triangle \underbrace{\{4,6,8,9,\dots\}}_{Y} = \{4,7\} \overset{\checkmark}{\subseteq} \{4,5,6,7,8\} \\ X \triangle \underbrace{\{9,\dots\}}_{Y} = \{6,7,8\} \overset{\checkmark}{\subseteq} \{4,5,6,7,8\} \end{cases} \\
\hline
9,10,\dots \text{ deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \begin{cases} X \triangle \underbrace{\{6,7,8\}}_{Y} = \{9,10,\dots\} \not\subseteq \{4,5,6,7,8\} \\ X \triangle \underbrace{\{10,\dots\}}_{Y} = \{9\} \not\subseteq \{4,5,6,7,8\} \\ X \triangle \underbrace{\{9,\dots\}}_{Y} = \{6,7,8\} \overset{\checkmark}{\subseteq} \{4,5,6,7,8\} \end{cases}
\end{array}\right\}$$

Se concluye que la clase de equivalencia será el conjunto $\overline{X}$ (notación inventada):
$\overline{X} = \{Y_1 \cup \{9,10,\dots\}, Y_2 \cup \{9,10,\dots\}, \dots, Y_{32} \cup \{9,10,\dots\}\}$ con $Y_i \in \mathcal{P}(\{4,5,6,7,8\})$ $i \in [1, 2^5]$ donde $\#\overline{X} = 2^5$

---

2. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$.

a) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\{x \in \mathrm{Dom}(f) \;/\; f(x) = 9\} = 2$.

b) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\,\mathrm{Im}(f) = 4$

Observo que $\#\,\mathrm{Dom}(f) = 5$ y $\#\,\mathrm{Cod}(f) = 9$.

a) Quiero contar cuántas cosas hay con esta pinta: $\star^{1}$ $\begin{array}{ccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & \beta & \gamma & 9 & \delta \end{array}$.

A partir de ese ejemplo puedo pensar que quiero que haya 2 valores de x, cualesquiera, que vayan a parar al 9 y el resto de los números, β, γ y δ tiene que ir a parar a algo que sea $\neq 9$.
Lo primero que calculo es de cuántas maneras distintas puedo agarrar 2 x de entre las 5 que tengo para usar del conjunto de partida de las f: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$, entonces tengo 10 situaciones de la pinta de $\star^{1}$ donde para cada una de esas situaciones los número que no van al 9 pueden ir a parar a cualquier valor del 1 al 8. Por lo tanto

$$\begin{array}{r|cccccl} & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 9 & \beta & \gamma & 9 & \delta & \\ \text{posibles valores} \rightarrow & \#1 & \#8 & \#8 & \#1 & \#8 & \rightarrow 8^3 \text{ funciones.} \end{array}$$

Eso es solo para el caso con lo 9 en esos lugares en particular. Tengo 10 de esos caso. Por lo que la $\boxed{\text{cantidad de funciones total va a ser: } 10 \cdot 8^3}$

b) Parecido al anterior. Voy a contar cosas con la pinta: $\star^{2}$ $\begin{array}{ccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \delta \end{array}$,

con $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$, para que $\text{Im}(f) = 4$. En un razonamiento análogo a lo hecho antes, tengo 2 valores iguales (α), que pueden estar en cualquier lugar de los 5 que hay eso, *nuevamente*: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10\star^{3}$, elijo los posibles valores, pero a diferencia del caso anterior teniendo en cuenta de <u>no</u> repetir.

$$\begin{array}{r|cccccl} & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \delta & \\ \text{posibles valores} \rightarrow & \#9 & \#8 & \#7 & \#1\star^{4} & \#6 & \rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \text{ funciones.} \end{array}$$

El valor en $\star^{4}$ es 1, porque una vez seleccionado un α el otro *solo puede valer lo mismo*, bueno, porque son la misma letra, ¿no?. Entonces en esas posiciones en particular hay $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$, y al igual que antes hay $\star^{3}$ 10 de esas configuraciones así que la $\boxed{\text{cantidad de funciones total va a ser: } 10 \cdot \frac{9!}{5!} = \frac{10!}{5!}}$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`♉ Nad Garraz`

---

3. Calcular la cantidad de anagramas de HIPOPOTAMO que preserven el orden relativo orifinal de las letras I y A, es decir, los que tengan la I a la izquierda de la A.

No sé si ésta es la mejor forma de hacer esto, pero es la forma que se me ocurrió.
En total hay <u>10 letras</u>, con repeticiones. Primero voy a atacar el tema de la posición relativa de la I y la A. Calculo todas las posibles posiciones respetando que la I esté a las izquierda de la A.
La I fija y cuento posibles lugares para la A:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
I	A	_	_	_	_	_	_	_	_	$\rightarrow$ 9 posibles posiciones
_	I	A	_	_	_	_	_	_	_	$\rightarrow$ 8 posibles posiciones
_	_	I	A	_	_	_	_	_	_	$\rightarrow$ 7 posibles posiciones
_	_	_	I	A	_	_	_	_	_	$\rightarrow$ 6 posibles posiciones
_	_	_	_	I	A	_	_	_	_	$\rightarrow$ 5 posibles posiciones
_	_	_	_	_	I	A	_	_	_	$\rightarrow$ 4 posibles posiciones
_	_	_	_	_	_	I	A	_	_	$\rightarrow$ 3 posibles posiciones
_	_	_	_	_	_	_	I	A	_	$\rightarrow$ 2 posibles posiciones
_	_	_	_	_	_	_	_	I	A	$\rightarrow$ 1 posible posición

De ahí salen en total $1+2+3+4+5+6+7+8+9=\sum_{i=1}^{9} i = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ lugares los cuales hay que rellenar con las letras faltantes.
Para cada una de las 45 posiciones de la I y la A correctamente ubicadas tengo que ubicar 8 letras, de donde saldrían 8! posiciones, peeeeero, al tener repeticiones y para no contar cosas de más, divido por la cantidad de letras repetidas tanto para la O como para la P:

$$\text{Total de anagramas: } 45 \cdot \Big(\frac{8!}{\underbrace{3!}_{\text{O}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{P}}}\Big).$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

---

4. Hallar la cantidad de números naturales de exactamente 20 dígitos (o sea que no empiezan con 0) que se pueden formar con los dígitos 0, 2, 3 y 9 y que cumplen que la suma de los 7 últimos dígitos es igual a 6.

El primer dígito puede valer solo 2, 3 o 9, es decir 3 opciones. Del dígito 19 al dígito octavo puede valer solo 0, 2, 3 o 9, es decir 4 opciones. Para sumar 6 con los números que puedo usar, solo tengo 2+2+2 y 3+3: En los últimos 7 dígitos tengo $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$ opciones
TODO: HACER ESTO AGRADABLE

---

5. ¿Cuántas funciones $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 12\}$ hay que **no** sean inyectivas y que al mismo tiempo cumplan que $f(1) < f(3) < f(5)$

La receta:

1) Calcular tooodas las funciones que cumplan $f(1) < f(3) < f(5)$.
2) Calcular todas las funciones inyectivas que también cumplan $f(1) < f(3) < f(5)$.
3) Restar los resultados obtenidos da lo pedido en el enunciado.

A cocinar:

1) Entonces agarro 3 elementos del conjunto de llegada $\{1, 2, \ldots, 12\}$ sin preocuparme por nada. En el conjunto hay un total de 12 elementos agarro 3 sin mirar:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!\cdot 3!}$$

Este número combinatorio me cuenta las distintas formas de sacar 3 elementos cualesquiera de un conjunto de 12 elementos.

Si te hace ruido o pensás ¿Cómo sé que esto cumple las desigualdades? Podés pensar que todos los elementos son distintos y es imposible que elijas 3 elementos x_1, x_2, x_3 y que esos elementos *no cumplan que no sea mayor que otro o coso*.

Una vez seleccionados estos 3 elementos para cumplir $f(1) < f(3) < f(5)$, no me importa que hago con los otros elementos restantes así que agarro:

$$12^{10-3}$$

Tengo entonces un total de:

$$12^{10-3}\cdot\binom{12}{3} = 12^7\cdot\binom{12}{3} \bigstar^{1}$$

funciones que cumplirían que $f(1) < f(3) < f(5)$.

2) Para calcular ahora *las funciones inyectivas* tenemos en cuenta que hay que agarrar 10 números de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ y mandarlos a 12 números de $\{1, 2, \ldots, 12\}$. Esto con la restricción $f(1) < f(3) < f(5)$ (cálculo ya hecho), que me saca 3 elementos:

$$\binom{12}{3} \cdot \frac{(12-3)!}{((12-3)-(10-3))!} = \binom{12}{3} \cdot \frac{9!}{2!}\bigstar^2$$

3) Para calcular el número de funciones **no** inyectivas que cumplen la restricción restamos $\bigstar^1$ y $\bigstar^2$:

$$\#funciones = \binom{12}{3} \cdot (12^7 - \frac{9!}{2!})$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Ale Teran
Nad Garraz

---

6. Determine cuántas funciones sobreyectivas $f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\} \to \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\}$ cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$
- $f(1) + f(2)$ es impar.

Aclarando lo que quizás no necesite aclaración, voy a organizando la información con a que hay que jugar:

$$\underbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}_{\text{Dom}(f)} \xrightarrow{f} \underbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}_{\text{Cod}(f)}$$

Tanto el dominio como el codominio tienen 4 pares y 4 impares. La función sobreyectiva es esa que para cada valor del codominio tiene un valor en el dominio que va a parar a ahí:

$$f \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in \text{Cod}(f)\, \exists\, x \in \text{Dom}(f) \;/\; f(x) = y.$$

De ahí podemos concluir que en este ejecicio las funciones como tienen la misma cantidad de elementos en el Cod(f) y en el Dom(f) serán *biyectivas*.

¿Y a mí qué me importa?

Estarás diciendo. Lo noto, porque eso dice que vamos a tener que usar para definir a cada f, toooodos los numeritos de los conjuntos y no van a poder repetirse ☺.

Sobre $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ y $f(1) + f(2)$ es impar:
Por ejemplo estamos buscando algo así:

$$\begin{cases} f(1) & = & 1 \\ f(2) & = & 2 \\ f(3) & = & 3 \\ f(4) & = & 4 \\ f(5) & = & 5 \\ f(6) & = & 6 \\ f(7) & = & 7 \\ f(8) & = & 8 \end{cases}$$

Para que la suma de 2 números sea siempre impar necesito que los sumandos sean uno impar y uno par.
Voy a agarrar 2 números, uno par y uno impar, para cumplir que $f(1) + f(2)$ es impar de los 8 números del Cod(f).
Si porque me pintó, le pongo el impar a $f(1)$ primero y luego el par a $f(2)$, voy a tener 4 formas de elegir en cada caso. Peeero lo mismo sería si lo hago al revés y le pongo primero el par a $f(1)$, etc....

Formas de agarrar esos dos números:

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{tomo el impar para } f(1)} \cdot \overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{tomo el par para } f(2)} \quad \text{o} \quad \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{tomo el par para } f(1)} \cdot \overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{tomo el impar para } f(2)}$$

De esta manera tengo 32 formas de satisfacer que $f(1) + f(2)$ *es impar*.

No importa cuales 3 números *distintos* $\{a, b, c\} \in \text{Cod}(f)$ agarre, siempre van a cumplir que uno va a ser el menor, otro estará en el medio y otro será el mayor. Listo. Agarro 3 números entre los 6 que quedan:

$$\binom{6}{3} = 120$$

Esas serían las formas de contar las posibles combinaciones para que $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$.

Y por último hay que ubicar los 3 restantes que no tienen que cumplir nada en particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(6) \to \#3 \\ f(7) \to \#2 \\ f(8) \to \#1 \end{array} \right. \to 3!$$

Se concluye que las funciones *sobreyectivas* que cumplen lo pedido serían en total:

$$\boxed{2 \cdot \left(\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \right) \cdot \binom{6}{3} \cdot 3! = 32 \cdot 20 \cdot 6 = 3840}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
naD GarRaz Dani Tadd

---

7. Calcule la cantidad de anagramas de 6 letras que se pueden obtener usando las letras de la palabra PARTICULA, con la condición de que empiecen con C. Por ejemplo, posibles anagramas son CAPTAR y CRIPTA.

Antes de hacer este ejercicio, si estás medio que no entendés el tema, mirate el ejercicio 23(← click acá).

Hay que calcular anagrámas en una palabra PARTICULA con 9 letras, donde hay 8 posibles valores, dado que 2 son repetidas. A mí me gusta esta forma de resolver esto:

(1) Primero ubico la C:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \text{C} & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right. ,$$

Dado que la C solo va a estar ahí hay $\underline{1}$ sola forma de hacer esto.

(2) Segundo cuento las versiones con 2 valores de A. Un ejemplo de eso sería:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \text{C} & \text{A} & \_ & \text{A} & \_ & \_ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right. ,$$

En este caso tengo 5 lugares para poner estas 2 A. En total hay

$$\binom{5}{2}$$

formas de hacer eso

(3) Por último tengo que ubicar las 3 de las 5 letras restantes {P,R,T,I,U,L}. Eso lo hacemos *inyectando*, por ejemplo así:

$$\begin{cases} \text{C} & \text{A} & \text{P} & \text{A} & \text{R} & \text{T} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{cases},$$

Lo cual se podrá hacer de:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120$$

formas distintas.

Por lo tanto para este caso en el que usamos 2 A en cada palabra tenemos un total de:

$$\boxed{\#\text{ANAGRAMAS}_{\text{AA}} = 1 \cdot \binom{5}{2} \cdot \frac{6!}{3!}}$$

Esto mismo hay que hacerlo para el caso en que las palabras formadas tienen solo una A y después en el caso en que tengan ninguna A. Eso no lo desarrollo, porque *pajilla*, peeeero, como soy un tipazo te pongo lo que me dio así corroborás y si lo hice mal yo y no me avisás te condeno 😡 a recursar eternamente esta materia 😡.

En el mismo párrafo pasé de ser un tipazo a un terrible hdp.

$$\boxed{\#\text{ANAGRAMAS}_{\text{AA}} + \#\text{ANAGRAMAS}_{\text{A}} + \#\text{ANAGRAMAS} = 1 \cdot \binom{5}{2} \cdot \frac{6!}{3!} + 1 \cdot \binom{5}{1} \cdot \frac{6!}{2!} + 1 \cdot \binom{5}{0} \cdot \frac{6!}{1!}}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz