Apunte único: Algoritmos y estructura de datos

Nad Garraz y comunidad (ojalá)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**5.**	**9.**
2.	**6.**	**10.**
3.	**7.**	**11.**
4.	**8.**	**12.**

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

https://github.com/nad-garraz/algo2

La Guía 1 se actualizó por última vez: 27/08/24 @ 23:13

Guía 1

https://github.com/nad-garraz/algo2/blob/main/1-guia/1-sol.pdf

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

https://t.me/+aUVX4lkTHlg1MGMx

Notas teóricas:

- **Términos:**

  Son objetos. Devuelven un `tipo`.

- **Fórmulas:**

  Denotan valores de verdad. Devuelven un `booleano`.

- **Cuantificadores:** ¡Importantes para deducir y escribir predicados!

  - Cuantificador universal `generaliza la conjunción (∧)`:

    $$(\forall\, n : \mathbb{Z})(P(n)) \leftrightarrow (\cdots \wedge P(-N) \wedge P(-N+1) \wedge \cdots \wedge P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(N) \wedge \cdots)$$

  - Cuantificador existencial `generaliza la disyunción (∨)`:

    $$(\exists\, n : \mathbb{Z})(P(n)) \leftrightarrow (\cdots \vee P(-N) \vee P(-N+1) \vee \cdots \vee P(0) \vee P(1) \vee \cdots \vee P(N) \vee \cdots)$$

- **Un ejemplo de predicado:**

  $$(\exists\, n : \mathbb{Z})(\underbrace{n = 2}_{\texttt{fórmula:}P(n)})$$

  En `lenguaje natural` podría ser:

  - Existe un número natural que vale 2.
  - En el conjunto de los naturales por lo menos hay un elemento igual a 2.

  Si bien es un ejemplo muy sencillo, el predicado "abierto" es aún más simple de leer:

  $$(\exists\, n : \mathbb{Z})(P(n)) \leftrightarrow \overbrace{(\cdots \vee \underbrace{P(-N)}_{\texttt{falso}} \vee \underbrace{P(-N+1)}_{\texttt{falso}} \vee \cdots \vee \underbrace{P(0)}_{\texttt{falso}} \vee \underbrace{P(1)}_{\texttt{falso}} \vee \underbrace{P(2)}_{\texttt{verdadero}} \vee \cdots \vee \underbrace{P(N)}_{\texttt{falso}} \vee \cdots)}^{\texttt{verdadero}}$$

  Esto es obvio pero importante: El resultado final de la concatenación de todas esas disyunciones tiene que ser `verdadero`, porque el `predicado` lo es!, y ese predicado no depende del valor de n. Por si no lo notaste hay un $\leftrightarrow$ conectando el `predicado` y las conjunciones.

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 2 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 3 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 4 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 5 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 6 Asumiendo que el valor de b y c es verdadero, el de a es $falso$ y el de x e y es indefinido, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c)

d)

e)

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

g)

---

a) $(\neg x \vee b)$.

Tengo que evaluar de *izquierda a derecha* y se cortocircuita si el resultado de la fórmula es independiente de lo que resta leer. Cuando hay un disyunción con tener $x = F$, de manera que $\neg x = T$ ya puedo parar de evaluar. Pero si x está indefinida, no hay nada que peuda hacer.

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c)

d)

e)

f) Para que la disyunción seguro no se indefina, necesito que el primer predicado sea *verdadero* y la conjunción eso sucede si el primer predicado es *falso*.

$$(((\underbrace{c \vee y)}_{\substack{c \to \texttt{verdadero} \\ \text{No se indefine}}} \wedge \overbrace{(a \vee b)}^{\texttt{verdadero}}) \leftrightarrow \overbrace{(c \vee \underbrace{(y \wedge a)}_{\perp}}^{\text{¡necesito } \vee_{\mathrm{L}} \text{!}} \vee b))$$

g)

Ejercicio 7 Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Solo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

---

a) Al menos una es verdadera.

$$(p \vee q) \vee_{\mathrm{L}} r$$

Preguntar por solución del apunte, pqr=100?

b) Ninguna es verdadera. En este caso r no se indefine.

$$\neg(p \wedge q \wedge r)$$

Preguntar por solución del apunte, pqr=100?

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

$$(p \vee q) \vee_{\mathrm{L}} r$$

d) Solo p y q son verdaderas. r debe ser 0 cuando $q = 0$

$$(p \vee q) \vee_{\mathrm{L}} \neg r$$

solo p y q?

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera. Preguntar por solución del apunte, pqr=100?

Ejercicio 8 Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, porponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow x + y = z)$

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j)$

---

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow x + y = z)$

b) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

c) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j)$.

Las jotas están ligadas al cuantificador universal, pero la j está libre.

Ejercicio 9 Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) "*Todos los naturales menores a 10 cumplen P*":

$$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$$

b) "*Algún natural menor a 10 cumple P*":

$$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$$

c) "*Todos los naturales menores a 10 que cumplen P y Q*":

$$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$$

d) "*No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q*":

$$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$$

---

a) "*Todos los naturales menores a 10 cumplen P*":

$$(\forall\, i:\mathbb{Z})\,\underbrace{(\overbrace{(0\le i<10)}^{f(i)}\wedge P(i))}_{R(i)}\leftrightarrow(\forall\, i:\mathbb{Z})(R(i))$$

Como el cuantificador $\forall$ generaliza la conjunción. Suponiendo que $P(i)$ no se indefine:

$$(\forall\, i:\mathbb{Z})(R(i))\leftrightarrow R(-N)\wedge R(-N+1)\wedge\cdots\wedge R(0)\wedge\ldots\wedge R(9)\wedge R(10)\wedge\cdots\wedge R(N)$$

Obtengo un resultado donde sé que los $R(0),\ldots,R(9)$ van a tener un valor `verdadero`, pero el resto de los $R(i)$ van a tener un valor de `falso`, ya que no cumplen $f(i)$.

Por lo tanto busco una solución para que esos $R(i)$ no sean moscas en mi sopa, con "$\rightarrow$" dado que:

$$\underbrace{\texttt{falso}\rightarrow \text{💩}}_{\texttt{verdadero}\ \text{🥂}}$$

Entonces cambio ese $\wedge$ por un $\rightarrow_L$, donde me aseguro de lidiar con potenciales indefiniciones de $P(i)$ que harían que todo explote:

$$(\forall\, i:\mathbb{Z})\,\underbrace{(\overbrace{(0\le i<10)}^{f(i)}\rightarrow_{\mathrm{L}} P(i))}_{S(i)}\leftrightarrow(\forall\, i:\mathbb{Z})(S(i))$$

Ahora la situación es más feliz:

$$(\forall\, i:\mathbb{Z})(S(i))\leftrightarrow S(-N)\wedge S(-N+1)\wedge\cdots\wedge S(0)\wedge\ldots\wedge S(9)\wedge S(10)\wedge\cdots\wedge S(N)$$

Todos los $S(i)$ son verdaderos y no se indefinen por el $\rightarrow_{\mathrm{L}}$

b) "*Algún natural menor a 10 cumple P*":

$$(\exists\, i:\mathbb{Z})((0\le i<10)\rightarrow P(i))$$

c) "*Todos los naturales menores a 10 que cumplen P y Q*":

$$(\forall\, x:\mathbb{Z})((0\le x<10)\rightarrow(P(x)\wedge Q(x)))$$

d) "*No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q*":

$$(\forall\, x:\mathbb{Z})((0\le x<10)\rightarrow(P(x)\wedge Q(x)))$$

Propongo

$$(\forall\, x:\mathbb{Z})\big(\underbrace{(0\le x<10)}_{f(x)}\rightarrow_{\mathrm{L}}\underbrace{\neg(P(x)\wedge_{\mathrm{L}}Q(x))}_{g(x)}\big)$$

Con el $\rightarrow_{\mathrm{L}}$ mato los casos que no cumplen $f(x)$. Luego $g(x)$ solo toma valor `falso` cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son ambas `verdadero`.

Ejercicio 10 Sean $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados que nunca se indefinen. Escribir al predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

1. *"Existe un único natural menor a 10 que cumple P"*
2. *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
3. *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
4. *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*
5. *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*
6. *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
7. *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninfuno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cump,en P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

---

1. *"Existe un único natural menor a 10 que cumple P"*

$$(\exists\, n:\mathbb{Z})\Big(\big(0\leq n<10 \wedge P(n)\big)\wedge(\forall\, m:\mathbb{Z})\big(0\leq m<10 \to (m=n\to P(m))\big)\Big)$$

2. *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*

$$[\exists\, n:\mathbb{Z}]\overbrace{\underbrace{\big[0\leq n<10\wedge P(n)\big]}_{f_1(n)}\wedge[\exists\, m:\mathbb{Z}]\underbrace{\big[0\leq m<10\wedge P(m)\wedge m\neq n\big]}_{f_2(n,m)}}^{f_3}$$

- El *cuantificador existencial* me generaliza la disyunción:

$$\cdots\vee f_1(-N)\vee f_1(-N+1)\vee\cdots\vee f_1(0)\vee\cdots\vee f_1(9)\vee\cdots\vee f_1(N-1)\vee f_1(N)\vee\ldots$$

Los $f_1(n)$ azules, tienen valores de `verdadero`, para la primera condición de f_1, los demás son falsos. Como tengo concatenación de disyunciones, con que una de las azules cumpla también $P(n)$, listo tengo un f_1 `verdadero` para algún n.

$$f_1(0)\vee\cdots\vee f_1(9)$$

Esos valores son los que me sirven para calcular los valores de verdad que hay en $f_1\wedge f_2$.

- Muy parecido ahora con f_2

$$\cdots\vee f_2(-N,n)\vee f_2(-N+1,n)\vee\cdots\vee f_2(0,n)\vee\cdots\vee f_2(9,n)\vee\cdots\vee f_2(N-1,n)\vee f_2(N,n)\vee\ldots$$

Nuevamente alguno de los m, van a cumplir las condiciones $f_1(m,n)$

- Por lo tanto obtengo siempre valores verdaderos en la expresión final f_3.

3. *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
4. *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*

- ⑤ *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*

$$(\forall\, n : \mathbb{Z})\big((P(n) \land n \bmod 2 \neq 0) \to \neg Q(n)\big)$$

- ⑥ *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
- ⑦ *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninfuno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cump,en P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

Ejercicio 11 ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 12 ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.
