Sistemas Digitales

Nad Garraz y comunidad (ojalá) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

• Notas teóricas

• Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.
2.	7.	12.
3.	8.	13.
4.	9.	
5.	10.	

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.



La Guía 1 se actualizó por última vez: 22/08/2024 @ 22:10



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram \bigcirc .



Notas teóricas:

□ Complejidad:

Es lo que nos da la necesida de abstraer.

□ Abstracción:

Para lidiar con la complejidad que tienen los sistemas usamos la abstracción.

De menor a mayor abstracción:

electrones \rightarrow transistores \rightarrow circuitos analógicos \rightarrow circuitos digitales \rightarrow circuitos de lógica \rightarrow micro-arquitectura \rightarrow arquitectura \rightarrow sistema operativo \rightarrow aplicaciones de software

Lo más abstracto es más fácil de controlar e implementar que lo menos abstracto.

- □ Sistemas numéricos:
 - Decimal:

$$9745_{10} = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

El rango de un número decimal con n dígitos mayor o igual a cero es $10^n:0,1,\ldots,10^n-1$

■ Binario:

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 13_{10}$$
.

El rango de un número <u>binario</u> con n dígitos mayor o igual a cero es $2^n : 0, 1, ..., 2^n - 1$. Si tengo solo un bit, <u>binary digit</u>, puedo obtener o bien 0 o bien 1. Si tengo dos bits, entonces puedo tener 2^2 dígitos, 00, 01, 10, 11. (el rango es después de todo 4).

 \blacksquare Hexadecimal:

$$2AD_{16} = 2 \times 16^2 + A \times 16^1 + D \times 16^0 = 685_{10}$$

El rango de un número <u>hexadecimal</u> con n dígitos mayor o igual a cero es $16^n:0,1,\ldots,16^n-1$. Cada dígito de un número en base hexadecimal corresponde a un número binario de 4-bits. Después de todo un número i_{16} de un solo dígito tiene un rango de $16:0,\ldots 15$ y un número binario de 4-bits tiene un rango de $2^4=16$ \checkmark

$$2\mathtt{AD_{16}} = \underbrace{\mathtt{0010}}_{2} \underbrace{\mathtt{1010}}_{\mathtt{A}} \underbrace{\mathtt{1101}}_{\mathtt{D}} \, {}_{2}$$

- □ Operaciones entre números binarios: Se poné picante según la representación usada.
 - Sumar es fácil si los números son positivos. Tengo overflow si el resultado tiene más cifras que bits disponibles para almacenar dicho resultado.
- □ Números binarios con signo:

Hay distintas representaciones para hacer esto, acá están las 2 más usadas:

■ signo+magnitud

El bit más significativo, el de más a la izquierda, marca el signo. Un número con n bits en esta representación tiene un rango: $[-2^{n-1}+1,2^{n-1}-1]$. Por ejemplo con 3-bits:

El rango es [-3, 3]

Base 2	\rightarrow	Base 10
000	\rightarrow	0
001	\rightarrow	1
010	\rightarrow	2
011	\rightarrow	3
100	\rightarrow	-0
101	\rightarrow	-1
1 10	\rightarrow	-2
111	\rightarrow	-3

Sumar normalmente en esta representación no tiene sentido. Representa en total 2^n-1 elementos porque el -0 está usando un lugar al pedo.

■ complemento a 2:

Menos intuitivo, pero más útil. Si tengo un número de n-bits, voy a tener siempre:

 \blacksquare Para encontrar el opuesto a un número, se cambian los 0 por 1 y bicerveza 1 , luego se le suma 1 a eso, ej:

$$5_{10} = 0101_2 \xrightarrow[-5]{\text{busco}} 1010_2 + 0001_2 = 1011_2 = -5_{10}.$$

Cosa que no funciona con el weird number, porque su complemento te da a él mismo Δ .

 \square El rango es de $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$, 2^n elementos. Hay un elemento negativo más que positivos.

 \blacksquare Ejemplito: En 3-bits me encuentro todo el conjunto, [-4, 3]:

0002	\rightarrow	010
0012	\rightarrow	1 ₁₀
0102	\rightarrow	210
0112	\rightarrow	3 ₁₀
1002	\rightarrow	-4 ₁₀
1012	\rightarrow	-3 ₁₀
1102	\rightarrow	-210
1112	\rightarrow	-1 ₁₀

💻 Suma en complemento a 2 : Si sumo dos números de distinto signo no voy a tener overflow!

4 bits:
$$-4_{10} + 5_{10} = 1100_2 + 0101_2 = 1/0001_2 = 1_{10}$$

sign extension: Para encontrar la representación de un número conocido con más bits. Copio el signo al resto de los númerosengo que mandar el bit del signo hacia el dígito más significativo,:

4 bits:
$$6_{10} = 0110_2$$
 y $-5_{10} = 1011_2$
Extendido a 8 bits: $6_{10} = (0000 \ 0110)_2$ y $-5_{10} = (1111 \ 1011)_2$

□ Exceso m:

💻 Se desplaza el 0 a la posición m. Es así que si la representación es exceso 4 en 6-bits base 3: $0_{10} = (000 \ 0011)_3$

¹chiste: bicerveza = **DD**. Se escribe viceversa **▲●**.

$\ {\bf \square}\ Comparación\ representaciones\ del \ mismo\ {\bf Dato}:$

Posición	Dato	unsigned	signo+magnitud	Exceso m (m=4)	complemento a 2
0	(0000) ₂	0	0	-4	0
1	(0001) ₂	1	1	-3	1
2	(0010) ₂	2	2	-2	2
3	(0011) ₂	3	3	-1	3
4	(0100) ₂	4	4	0	4
5	(0101) ₂	5	5	1	5
6	(0110) ₂	6	6	2	6
7	(0111) ₂	7	7	3	7
8	(1000) ₂	8	-0	4	-8
9	(1001) ₂	9	-1	5	-7
10	(1010) ₂	10	-2	6	-6
11	(1011) ₂	11	-3	7	-5
12	(1100) ₂	12	-4	8	-4
13	(1101) ₂	13	-5	9	-3
14	(1110) ₂	14	-6	10	-2
15	(1111) ₂	15	-7	11	-1

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1

- a) Utilizando el método del cociente, expresar en bases 2, 3 y 5 los números 33₁₀ y 511₁₀.
- b) Expresar en decimal los números 1111₂, 1111₇ y CAFE₁₀.
- c) Expresar 17_8 en base 5 y $BABA_{13}$ en base 6.
- d) Pasar (1010 1110 1010 1101)₂, (1111 1011 0010 1100 0111)₂, (0 0110 0010 1001)₂, a base 4, 8 y 16 agrupando bits.
- e) Expresar en decimal los números 0x142536, 0x142536 y 0xFCD9, y pasar a base 16 los números 7848_{10} y 46183_{10} .
- a) Fijarse si el número es cercado a una potencia de la base buscada.

$$33_{10} = (10\ 0001)_2 = 1020_3 = 113_5$$
 $511_{10} = (1111\ 1111)_2 = (20\ 0221)_3 = 4021_5$

b) ¿Tiene truco?

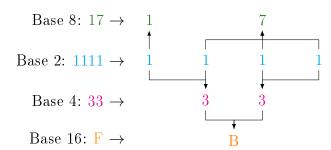
$$\begin{aligned} &\text{1111}_2 = \text{15}_{\text{10}} \\ &\text{1111}_7 = 400_{\text{10}} \\ &\text{CAFE}_{\text{16}} = \text{C} \times 16^3 + \text{A} \times 16^2 + \text{F} \times 16^1 + \text{E} \times 16^0 = \text{12} \times 16^3 + \text{10} \times 16^2 + \text{15} \times 16^1 + \text{14} \times 16^0 = \text{51966}_{\text{10}} \end{aligned}$$

c) Hay truco para no pasar por base 10?

$$17_8 = 15_{10} = 30_5$$

 $BABA_{13} = 11 \times 13^3 + 10 \times 13^2 + 11 \times 13^1 + 10 \times 13^0 = 26180_{10} = 321112_6$

d) Como las bases se tiene que cambiar a otras bases que son potencia de 2, se puede hacer agrupando los bits.



$$(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2 = (22\ 32\ 22\ 31)_4 = 5555_8 = AEAD_{16}$$
 $(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2 = (33\ 23\ 02\ 30\ 13)_4 = (373\ 1307)_8 = FB2CD_{16}$
 $(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2 = (12\ 02\ 21)_4 = 3051_8 = C29_{16}$

e)
$$0x142536 = 142536_{16} = 1 \times 16^5 + 4 \times 16^4 + 2 \times 16^3 + 5 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = (132\ 0246)_{10}$$

 $0xFCD9 = FCD9_{16} = 15 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = (6\ 4729)_{10}$
 $7848_{10} = 0x1EA8$
 $(4\ 6183)_{10} = 0xB467$

Los culpables de que esto haya sucedido:

👸 Nad Garraz 😱

Ejercicio 2 Realizar las siguientes sumas de precisión fija, sin convertir a decimal. Indicar en cada caso si hubo acarreo.

$$\begin{array}{c} 100001_2 \\ + 011111_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 9999_{16} \\ + 1111_{16} \\ \end{array}$$

$$d) \quad \frac{\text{F0F0}_2}{+ \quad \text{F0CA}_2}$$

$$\begin{array}{c} {\rm a)} \ \ \begin{array}{c} 100001_2 \\ + \ \ 0111110_2 \\ \hline 1111111_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} & 9999_{16} \\ c) & + & 1111_{16} \\ \hline & \text{AAAA}_2 \end{array}$$

Acarreo b) $\frac{+ \quad 011111_2}{1000000_2}$

$$\begin{array}{c} {\rm Acarreo} & {\rm 1} \\ {\rm d}) & & {\rm F0F0_2} \\ + & {\rm F0CA_2} \\ \hline & {\rm 1E1BA_2} \end{array}$$

La precisión fija y la representación signo+magnitud al tener el acarreo que agrega un bit generan overflow . Los resultados de los items b) y d) no tienen representación en signo+magnitud .

Los culpables de que esto haya sucedido:

8 Nad Garraz 😱

Ejercicio 3 ¿Puede suceder en alguna base que la suma de dos números de precisión fija tenga un acarreo mayor que 1? Exhibir un ejemplo o demostrar lo contrario.

En cualquier base B se da que el último símbolo que puede reprentar es B-1. Entonces cuando se sumen 2 dígitos:

La expresión de un número en base B que tiene un 2 de peso:

$$x = 2 B^{n+1},$$

y otro que tiene como peso a la suma de los mayores pesos de la base:

$$y = (2B - 2) B^{n}$$

Pero, pero, pero:

Por lo que se estaría complicando para el team acarreo mayor a 1

Los culpables de que esto haya sucedido:

👸 Nad Garraz 😱

Ejercicio 4 Sean los siguientes numerales binarios de ocho dígitos:

$$r = (1011 \ 1111)_2$$
, $s = (1000 \ 0000)_2$ y $t = (1111 \ 1111)_2$.

¿Qué números representan si asumimos que son codificaciones de enteros en complemento a 2 ? ¿Y si fueran codificaciones en signo+magnitud ?

En la teoría están cuales son los valores amigos de la representación complemento a 2

• Notar que si r es de complemento:

$$r$$
 + 64 = (1011 1111)₂ + (0100 0000)₂ = (1111 1111)₂ = $-1_{10} \rightarrow r$ = -65_{10}

Puedo llegar a lo mismo usando la técnica para encontrar el complemento de r:

$$\overline{\mathbf{r}} = \overline{10111111}_2 \xrightarrow{\text{cambio}} (0100 \ 0000)_2 \xrightarrow{\text{sumo}} (0100 \ 0001)_2 = {}_2 = 65_{10} = \overline{\mathbf{r}}, \text{ entonces } \mathbf{r} = -65_{10}$$

Si fuese de signo+magnitud : $r = (1011 \ 1111)_2 = -63_{10}$

Sumar normalmente en la representación de signo+magnitud es para problemas.

 \bullet Para complemento a 2: s = (1000 0000)₂ = -128₁₀ es el weird number

 $Y en signo+magnitud : s = (1000 0000)_2 = -0_{10}$

• Para complemento a 2: t = $(1111 \ 1111)_2 = -1_{10}$

 $Y \ \mathrm{en} \ \mathtt{signo+magnitud} : \mathtt{t} = (1111 \ 1111)_2 = -127_{10}$

Los culpables de que esto haya sucedido:

👸 Nad Garraz 😱

Ejercicio 5 Codificar los siguientes números en base 2, usando la precisión y forma de representación indicada en cada caso. Comparar los resultados.

- lacksquare $0_{10}
 ightarrow \mathrm{usando} \ 8 \ \mathrm{bits}, \ \mathrm{notaci\'on} \ \mathtt{signo+magnitud} \ \mathrm{y} \ \mathrm{notaci\'on} \ \mathtt{complemento} \ \mathtt{a} \ 2$.
- \blacksquare_b -1₁₀ \rightarrow usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación signo+magnitud y notación complemento a 2
- \blacksquare 255₁₀ \rightarrow usando 8 bits notación sin signo y 16 bits notación complemento a 2.
- $\blacksquare_{\tt d}$ -128 $_{\tt 10} \to {\rm usando~8~y~16~bits}, \, {\rm en~ambos~casos~notaci\'{o}n~complemento~a~2}$.
- \blacksquare_{\circ} 128 $_{\texttt{10}} \to \text{usando } 8 \text{ bits, notación sin signo y } 16 \text{ notación complemento a 2}$.

Leer la técnica para encontrar los números con complemento a 2.

- \bullet a signo+magnitud : $0_{10} = (0000\ 0000)_2 \stackrel{?}{=} (1000\ 0000)_2$. abuso de notación? complemento a 2 : $0_{10} = (0000\ 0000)_2$.
- signo+magnitud :

```
-1_{10} = (1000 \ 0001)_2.
```

- $-1_{10} = (1000\ 0000\ 0000\ 0001)_2$.
- ¡Mandá fixes o subí ejercicios, críticas, todo sirve.

 ★ al repo!

```
complemento a 2 :
      -1_{10} = (1111 \ 1111)_2.
      -1_{10} = (1111 \ 1111 \ 1111 \ 1111)_2.
   ■ Sin Signo:
      255_{10} = (1111 \ 1111)_2.
      complemento a 2 :
      255_{10} = (0000\ 0000\ 1111\ 1111)_2.
   ■d complemento a 2 :
      -128_{10} = (1000 \ 0000)_2.
      -128_{10} \ \rightarrow \ 128_{10} \ = \ (0000 \ 0000 \ 1000 \ 0000)_2 \ \xrightarrow[\text{opuesto}]{\text{busco}} \ (1111 \ 1111 \ 1000 \ 0000)_2 \ = \ -128_{10} \, .
   ■ Sin Signo:
      128_{10} = (1000 \ 0000)_2.
      128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2.
¿Qué se puede interpretar de esto?
Los culpables de que esto haya sucedido:
   👸 Nad Garraz 🞧
```

Ejercicio 6 ¿Puede alguna cadena binaria de k dígitos, interpretada en complemento a 2, representar un número que no puede ser representado por una cadena de la misma longitud, interpretada en signo+magnitud? ¿Y al revés?

De al teoría de complemento a 2, tengo que el rango es distinto en las distintas interpretaciones. Hay un número más en la de complemento a 2.

Si tengo k dígitos $(-2^{k-1})_{10} = (\underbrace{100...0}_{k-bits})_2$. Número que no puedo representar en signo+magnitud porque

el menor número es $(-2^{k-1} + 1)_{10}$.

La representación complemento a 2 contiene a todos los número de la representación signo+magnitud . ¿Hay algo que aprender? O es solo eso?

Ejercicio 7 Interpretar los operadores y resultados de las sumas del ejercicio 2 como representaciones de enteros en complemento a 2 y, para cada una de ellas, indicar cuáles son correctas, cuáles no. ¿Se evidencia overflow en alguna?

Ejercicio 8 ¿Cómo acomodaría esta suma de números hexadecimales de 4 dígitos en notación complemento a 2, para que en ningún momento se produzca overflow?

$$7744_{16} + 5499_{16} + 6788_{16} + AB68_{16} + 88BD_{16} + 9878_{16} = 0003_{16}$$

Dado que sabemos la suma de un número positivo y un número negativo nunca puede resultar en overflow, planteemos 3 parejas de números con uno positivo y otro negativo.

No hace falta pasar a binario para poder fijarse el signo de cada uno. En un número hexadecimal, si

el digito más significativo está en el rango [8; F] podemos asegurar que es un número negativo. Caso contrario será un número positivo.

$$\begin{array}{r}
 7744_{16} \\
 + 88BD_{16} \\
 \hline
 0001_{16}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5499_{16} \\ + \quad \text{AB68}_{16} \\ \hline 0001_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6788_{16} \\ + 9878_{16} \\ \hline 0001_{16} \end{array}$$

Y bueno por último...

$$0001_{16} + 0001_{16} + 0001_{16} = 0003_{16}$$

Ejercicio 9 Dar ocho pares de numeros tales que la suma de las representaciones de cada par en complemento a dos de 4 bits provoque lo siguiente:

- 1) No se produzca acarreo ni overflow.
- 2) Se produzca acarreo pero no overflow.
- 3) Se produzca acarreo y overflow.
- 4) No se produzca acarreo pero si overflow.
- 5) Se produzca acarreo y el resultado sea cero.
- 6) No se produzca acarreo y el resultado sea cero.
- 7) El resultado sea negativo y se produzca overflow.
- 8) El resultado sea negativo y no se produzca overflow.
- 1) $(0000, 0000)_2$ o $(0101, 1010)_2$
- 2) $(1111, 0001)_2$ o $(1100, 0100)_2$
- 3) (1111, 1111)₂
- 4) (0100, 0100),
- 5) (0001, 1111)₂
- 6) (0000, 0000)₂
- 7) (1111, 1111)₂
- 8) $(1111, 0000)_2$ o $(1111, 1001)_2$ o $(1111, 1100)_2$

Nota: Los incisos 3) y 7) están mal. Los dejamos ahí para testearte y hacerte saber que lograste esto sur Cuando usamos la representación que usemos, el overflow tiene que ver con el sentido que le damos a cierto número. Por ejemplo:

Acarreo

 $\begin{array}{c} 11111 \\ 100001_2 \\ + 011111_2 \\ \hline 1000000_2 \end{array} \text{Acabo de hacer -7}_{10} + 7_{10} = 0_{10}, \text{ el bit más significativo que supera la cantidad}$

de bits de mi cuenta se descarta y el resultado es coherente con mi represntación. No hay overflow (hay acarreo).

Los culpables de que esto haya sucedido:

🞖 Iñaki Frutos 🞧 💮 👸 Nad Garraz 📢

Ejercicio 10 La función SignExt_n convierte números de k-bits en números de k+n-bits de la siguiente manera:

$$\mathtt{SignExt_n}(b_{k-1}...b_0) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathtt{0}...\mathtt{0}b_{k-1}...b_0 & \mathtt{si} & b_{k-1} \! = \! 0 \\ \mathtt{1}...\mathtt{1}b_{k-1}...b_0 & \mathtt{si} & b_{k-1} \! = \! 1 \end{array} \right.$$

Mostrar que para todo número x de k-bits, x y SingExt_n(x) representan el mismo número si se los interpreta en notación complemento a 2 de k y k+n-bits respectivamente.

Esto está no demostrado en las notas teóricas de complemento a 2. Si estoy laburando en complemento a 2 voy a tener que el 0₁₀ se representa para k-bits y k-bits + n como:

base10 k-bits k-bits + n
$$0_{10} \quad (\underbrace{0...0}_{k})_{2} \quad (\underbrace{0...0}_{n} \underbrace{0...0}_{k})_{2},$$

al -1_{10} lo represento como:

base10 k-bits k-bits + n

$$-1_{10}$$
 $(1...1)_2$ $(1...11...1)_2$,

el mayor número de la representacion también en complemento a 2:

base10 k-bits k-bits + n
$$(2^k - 1)_{10}$$
 $(01...1)_2$ $(0...001...1)_2$,

y el menor número de la representacion complemento a 2 también como:

base10 k-bits k-bits + n
$$(-2^k)_{10}$$
 $(10...0)_2$ $(1...110...0)_2$,

La verdad que no creo que esto sea una demostración pero voy a asumir que es trivial que para números positivos:

$$x_n = SignExt_n(x) si x_n > 0$$
,

porque solo son 0s a la izquierda. Y para los negativos podría buscarles el opuesto:

La suma en la parte cyan para los números positivos me va a dar lo mismo. Por lo tanto bajo la conjetura que hice de que para los positivos es trivial la igualdad $\mathbf{x}_n = \mathbf{SignExt}_n(\mathbf{x})$ me muestra que también los negativos son iguales después de aplicarles la extensión de signo.

Los culpables de que esto haya sucedido:

8 Nad Garraz 😱

Ejercicio 11 Represente los números 2₁₀, -5₁₀ y 0₁₀ en notación complemento a 2 de 4-bits de longitud. Luego:

- a) Invierta los bits de cada representación obtenida e indique a que número representa en el mismo sistema.
- b) A partir de lo realizado en el punto anterior, proponga un método para obtener la representación en complemento a 2 del inverso aditivo de un número, dada la representación de ese número en el mismo sistema.
- (a) 2₁₀
 - complemento a 2 : 0010₂ Se necesitan 3 digitos, porque con 2, solamente se podrían representar 4 numeros en total, siendo el 1 el maximo numero posible a representar
 - Inverso de la representación obtenida: $1101_2 = -3_{10}$
 - -5₁₀
 - Complemento a dos: 1011₂
 - Inverso de la representación obtenida: $\tt 0100_2 = 4_{10}$
 - 0₁₀
 - Complemento a dos: 0000₂
 - Inverso de la representación obtenida: $1111_2 = -1_{10}$
- (b) Método para obtener el inverso aditivo:
 - Buscar el inverso del número
 - Sumar uno al inverso del número

Los culpables de que esto haya sucedido:

👸 Iñaki Frutos 📢

Ejercicio 12 Diremos que un sistema de representación de números como cadenas binarias de longitud fija es biyectivo si no admite más de una representación para cada número y toda cadena disponible es utilizada para representar algún número.

Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

"No es posible dar con un sistema que represente números con signo utilizando cadenas binarias de longitud fija que sea biyectivo, tenga una representación para el cero y donde la cantidad de números positivos y negativos representados sea la misma". Justificar.

Esto buscando algo de esta pinta:

Posición	Dato	casi 1	casi 2
0	(000) ₂	-3	-4
1	(001) ₂	-2	-3
2	(010) ₂	-1	-2
3	(011) ₂	0	-1
4	(100) ₂	1	0
5	(101) ₂	2	1
6	(110) ₂	3	2
7	$(111)_2$	4	3

Y está complicado porque tengo que usar de 2ⁿ elementos Uno para el cero, por lo que quedan:

$$2^n$$
 = 2^n - 1 \rightarrow 2^n - 1 mod 2 \neq 0

luego no podría tener igual cantidad de números positivos y negativos.

Los culpables de que esto haya sucedido:

👸 Nad Garraz 📢

Ejercicio 13 Dar un ejemplo de un sistema de representación biyectivo en el que lal cantidad de números positivos y negativos representados es la misma.

Exceso 4: 2-trits. Como tengo cantidad de impar de elementos que representar es así.

Posición	Dato	Exceso 4
0	(00) ₃	-4
1	(01) ₃	-3
2	(02) ₃	-2
3	(10) ₃	-1
4	(11) ₃	0
5	(12) ₃	1
6	(20) ₃	2
7	(21) ₃	3
8	(22) ₃	4