

Sistemas Digitales

Nad Garraz y comunidad (ojalá)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

[1.](#)

[2.](#)

[3.](#)

[4.](#)

[5.](#)

[6.](#)

[7.](#)

[8.](#)

[9.](#)

[10.](#)

[11.](#)

[12.](#)

[13.](#)

El repo en [github](https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales) para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales>

La Guía 1 se actualizó por última vez: 20/08/2024 @ 19:56

Guía 1



<https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales/blob/main/1-guia/1-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

Telegram .



<https://t.me/joinchat/DS9ZukGbZgI0IaHgdB1avQ>

Notas teóricas:

▣ *Complejidad:*

Es lo que nos da la necesidad de abstraer.

▣ *Abstracción:*

Para lidiar con la *complejidad* que tienen los sistemas usamos la abstracción.

De menor a mayor abstracción:

electrones → transistores → circuitos analógicos → circuitos digitales → circuitos de lógica →
micro-arquitectura → arquitectura → sistema operativo → aplicaciones de software

Lo más abstracto es más fácil de controlar e implementar que lo menos abstracto.

▣ *Sistemas numéricos:*▣ *Decimal:*

$$9745_{10} = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

El rango de un número *decimal* con n dígitos mayor o igual a cero es $10^n : 0, 1, \dots, 10^n - 1$

▣ *Binario:*

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13_{10}.$$

El rango de un número *binario* con n dígitos mayor o igual a cero es $2^n : 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Si tengo solo un bit, *binary digit*, puedo obtener o bien 0 o bien 1. Si tengo dos bits, entonces puedo tener 2^2 dígitos, 00, 01, 10, 11. (el rango es después de todo 4).

▣ *Hexadecimal:*

$$2AD_{16} = 2 \times 16^2 + A \times 16^1 + D \times 16^0 = 685_{10}$$

El rango de un número *hexadecimal* con n dígitos mayor o igual a cero es $16^n : 0, 1, \dots, 16^n - 1$. Cada dígito de un número en base hexadecimal corresponde a un número binario de 4-bits. Después de todo un número i_{16} de *un solo dígito* tiene un rango de 16: 0, ... 15 y un número binario de 4-bits tiene un rango de $2^4 = 16$ ✓

$$2AD_{16} = \underbrace{0010}_2 \underbrace{1010}_A \underbrace{1101}_D_2$$

▣ *Operaciones entre números binarios:* Se pone picante según la representación usada.

- ▣ Sumar es fácil si los números son positivos. Tengo **overflow** si el resultado tiene más cifras que bits disponibles para almacenar dicho resultado.

▣ *Números binarios con signo:*

Hay distintas *representaciones* para hacer esto, acá están las 2 más usadas:

▣ **signo+magnitud**

El bit más significativo, el de más a la izquierda, marca el **signo**. Un número con n bits en esta representación tiene un rango: $[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$. Por ejemplo con 3-bits:

El rango es $[-3, 3]$

| Base 2 | → | Base 10 |
|--------|---|---------|
| 000 | → | 0 |
| 001 | → | 1 |
| 010 | → | 2 |
| 011 | → | 3 |
| 100 | → | -0 |
| 101 | → | -1 |
| 110 | → | -2 |
| 111 | → | -3 |

Sumar normalmente en esta representación no tiene sentido. Representa en total $2^n - 1$ elementos porque el **-0** está usando un lugar al pedo.

▣ complemento a 2 :

▣ Menos intuitivo, pero más útil. Si tengo un número de n -bits, voy a tener siempre:

| | | | |
|--------------------|---|--------------|-----------------------|
| 0_{10} | → | $00...00_2$ | → <i>weird number</i> |
| -1_{10} | → | $11...11_2$ | |
| -2^{n-1}_{10} | → | $100...00_2$ | |
| $2^{n-1} - 1_{10}$ | → | $011...11_2$ | |

Teniendo al 0, -1 , -2^{n-1} y $(2^{n-1} - 1)$, puedo encontrar el resto de la *representación*:

▣ Para encontrar el opuesto a un número, se cambian los 0 por 1 y bicerveza ¹, luego se le suma 1 a eso, ej:

$$5_{10} = 0101_2 \xrightarrow[-5]{\text{busco}} 1010_2 + 0001_2 = 1011_2 = -5_{10}.$$

Cosa que no funciona con el *weird number*, porque su complemento te da a él mismo **A**.

▣ El rango es de $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$, 2^n elementos. Hay un elemento negativo más que positivos.

▣ Ejemplito: En 3-bits me encuentro todo el conjunto, $[-4, 3]$:

| | | |
|---------|---|-----------|
| 000_2 | → | 0_{10} |
| 001_2 | → | 1_{10} |
| 010_2 | → | 2_{10} |
| 011_2 | → | 3_{10} |
| 100_2 | → | -4_{10} |
| 101_2 | → | -3_{10} |
| 110_2 | → | -2_{10} |
| 111_2 | → | -1_{10} |

▣ *Suma en complemento a 2* : Si sumo dos números de distinto signo no voy a tener **overflow** !

$$4 \text{ bits: } -4_{10} + 5_{10} = 1100_2 + 0101_2 = \cancel{1}0001_2 = 1_{10}$$

▣ *Sign extension*: Para encontrar la representación de un número conocido con más bits.

Copio el signo al resto de los númerosengo que mandar el bit del signo hacia el dígito más significativo, :

$$4 \text{ bits: } 6_{10} = 0110_2 \text{ y } -5_{10} = 1011_2$$

$$\text{Extendido a 8 bits: } 6_{10} = (0000 \ 0110)_2 \text{ y } -5_{10} = (1111 \ 1011)_2$$

▣ Exceso m :

▣ Se desplaza el 0 a la posición m . Es así que si la representación es **exceso 4** en 6-bits base 3:
 $0_{10} = (000 \ 0011)_3$

¹chiste: bicerveza = . Se escribe viceversa .

▣ Comparación representaciones del mismo Dato:

| Posición | Dato | unsigned | signo+magnitud | Exceso m (m=4) | complemento a 2 |
|----------|------------|----------|----------------|----------------|-----------------|
| 0 | $(0000)_2$ | 0 | 0 | -4 | 0 |
| 1 | $(0001)_2$ | 1 | 1 | -3 | 1 |
| 2 | $(0010)_2$ | 2 | 2 | -2 | 2 |
| 3 | $(0011)_2$ | 3 | 3 | -1 | 3 |
| 4 | $(0100)_2$ | 4 | 4 | 0 | 4 |
| 5 | $(0101)_2$ | 5 | 5 | 1 | 5 |
| 6 | $(0110)_2$ | 6 | 6 | 2 | 6 |
| 7 | $(0111)_2$ | 7 | 7 | 3 | 7 |
| 8 | $(1000)_2$ | 8 | -0 | 4 | -8 |
| 9 | $(1001)_2$ | 9 | -1 | 5 | -7 |
| 10 | $(1010)_2$ | 10 | -2 | 6 | -6 |
| 11 | $(1011)_2$ | 11 | -3 | 7 | -5 |
| 12 | $(1100)_2$ | 12 | -4 | 8 | -4 |
| 13 | $(1101)_2$ | 13 | -5 | 9 | -3 |
| 14 | $(1110)_2$ | 14 | -6 | 10 | -2 |
| 15 | $(1111)_2$ | 15 | -7 | 11 | -1 |

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1

- Utilizando el método del cociente, expresar en bases 2, 3 y 5 los números 33_{10} y 511_{10} .
- Expresar en decimal los números 1111_2 , 1111_7 y $CAFE_{16}$.
- Expresar 17_8 en base 5 y $BABA_{13}$ en base 6.
- Pasar $(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2$, $(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2$, $(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2$, a base 4, 8 y 16 agrupando bits.
- Expresar en decimal los números $0x142536$, $0x142536$ y $0xFCD9$, y pasar a base 16 los números 7848_{10} y 46183_{10} .

- Fijarse si el número es cercano a una potencia de la base buscada.*

$$33_{10} = (10\ 0001)_2 = 1020_3 = 113_5$$

$$511_{10} = (1111\ 1111)_2 = (20\ 0221)_3 = 4021_5$$

- ¿Tiene truco?

$$1111_2 = 15_{10}$$

$$1111_7 = 400_{10}$$

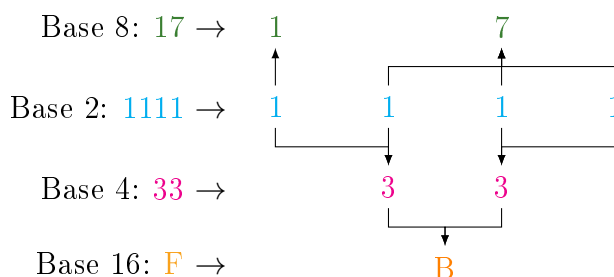
$$CAFE_{16} = C \times 16^3 + A \times 16^2 + F \times 16^1 + E \times 16^0 = 12 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 51966_{10}$$

- ¿Hay truco para no pasar por base 10?

$$17_8 = 15_{10} = 30_5$$

$$BABA_{13} = 11 \times 13^3 + 10 \times 13^2 + 11 \times 13^1 + 10 \times 13^0 = 26180_{10} = 321112_6$$

- Como las bases se tiene que cambiar a otras bases que son potencia de 2, se puede hacer agrupando los bits.



$$(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2 = (22\ 32\ 22\ 31)_4 = 5555_8 = AEAD_{16}$$

$$(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2 = (33\ 23\ 02\ 30\ 13)_4 = (373\ 1307)_8 = FB2CD_{16}$$

$$(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2 = (12\ 02\ 21)_4 = 3051_8 = C29_{16}$$

- $0x142536 = 142536_{16} = 1 \times 16^5 + 4 \times 16^4 + 2 \times 16^3 + 5 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = (132\ 0246)_{10}$

$$0xFCD9 = FCD9_{16} = 15 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = (6\ 4729)_{10}$$

$$7848_{10} = 0x1EA8$$

$$(4\ 6183)_{10} = 0xB467$$

Ejercicio 2 Realizar las siguientes sumas de precisión fija, sin convertir a decimal. Indicar en cada caso si hubo acarreo.

$$\text{a) } \begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011110_2 \\ \hline \text{-----}2 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011111_2 \\ \hline \text{-----}2 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 9999_{16} \\ + 1111_{16} \\ \hline \text{----}2 \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} F0F0_2 \\ + F0CA_2 \\ \hline \text{----}2 \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011110_2 \\ \hline 111111_2 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 9999_{16} \\ + 1111_{16} \\ \hline AAAA_2 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} \text{Acarreo } 111111 \\ 100001_2 \\ + 011111_2 \\ \hline 1000000_2 \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} \text{Acarreo } 11 \\ F0F0_2 \\ + F0CA_2 \\ \hline 1E1BA_2 \end{array}$$

Precisión fija? Tengo **overflow** en el b y en el d? Se tira el decimal de más? Cómo se expresa el resultado?

Ejercicio 3 ¿Puede suceder en alguna base que la suma de dos números de precisión fija tenga un acarreo mayor que 1? Exhibir un ejemplo o demostrar lo contrario.

Ejercicio 4 Sean los siguientes numerales binarios de ocho dígitos:

$$r = (1011 \ 1111)_2, \ s = (1000 \ 0000)_2 \text{ y } t = (1111 \ 1111)_2.$$

¿Qué números representan si asumimos que son codificaciones de enteros en **complemento a 2**? ¿Y si fueran codificaciones en **signo+magnitud**?

En la **teoría** están cuales son los valores *amigos* de la representación **complemento a 2**

- Notar que si r es de complemento:

$$r + 64 = (1011 \ 1111)_2 + (0100 \ 0000)_2 = (1111 \ 1111)_2 = -1_{10} \rightarrow r = -65_{10}$$

Puedo llegar a lo mismo usando la técnica para encontrar el complemento de r :

$$\bar{r} = \overline{10111111}_2 \xrightarrow[1 \leftrightarrow 0]{\text{cambio}} (0100 \ 0000)_2 \xrightarrow[1]{\text{sumo}} (0100 \ 0001)_2 = 1 = 65_{10} = \bar{r}, \text{ entonces } r = -65_{10}$$

$$\text{Si fuese de signo+magnitud : } r = (1011 \ 1111)_2 = -63_{10}$$

Sumar normalmente en la representación de **signo+magnitud** es para problemas.

- Para **complemento a 2** : $s = (1000 \ 0000)_2 = -128_{10}$ es el *weird number*

$$\text{Y en signo+magnitud : } s = (1000 \ 0000)_2 = -0_{10}$$

- Para **complemento a 2** : $t = (1111 \ 1111)_2 = -1_{10}$

$$\text{Y en signo+magnitud : } t = (1111 \ 1111)_2 = -127_{10}$$

Ejercicio 5 Codificar los siguientes números en base 2, usando la precisión y forma de representación indicada en cada caso. Comparar los resultados.

- _a $0_{10} \rightarrow$ usando 8 bits, notación signo+magnitud y notación complemento a 2.
- _b $-1_{10} \rightarrow$ usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación signo+magnitud y notación complemento a 2.
- _c $255_{10} \rightarrow$ usando 8 bits notación sin signo y 16 bits notación complemento a 2.
- _d $-128_{10} \rightarrow$ usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación complemento a 2.
- _e $128_{10} \rightarrow$ usando 8 bits, notación sin signo y 16 notación complemento a 2.

Leer la [técnica para encontrar los números con complemento a 2](#).

- _a signo+magnitud : $0_{10} = (0000\ 0000)_2 \stackrel{?}{=} (1000\ 0000)_2$. **abuso de notación?**
complemento a 2 : $0_{10} = (0000\ 0000)_2$.
- _b signo+magnitud :
 $-1_{10} = (1000\ 0001)_2$.
 $-1_{10} = (1000\ 0000\ 0000\ 0001)_2$.
complemento a 2 :
 $-1_{10} = (1111\ 1111)_2$.
 $-1_{10} = (1111\ 1111\ 1111\ 1111)_2$.
- _c Sin Signo:
 $255_{10} = (1111\ 1111)_2$.
complemento a 2 :
 $255_{10} = (0000\ 0000\ 1111\ 1111)_2$.
- _d complemento a 2 :
 $-128_{10} = (1000\ 0000)_2$.
 $-128_{10} \rightarrow 128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2 \xrightarrow[\text{opuesto}]{\text{busco}} (1111\ 1111\ 1000\ 0000)_2 = -128_{10}$.
- _e Sin Signo:
 $128_{10} = (1000\ 0000)_2$.
 $128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2$.

¿Qué se puede interpretar de esto?

Ejercicio 6 ¿Puede alguna cadena binaria de k dígitos, interpretada en complemento a 2, representar un número que no puede ser representado por una cadena de la misma longitud, interpretada en signo+magnitud? ¿Y al revés?

De al teoría de [complemento a 2](#), tengo que el rango es distinto en las distintas interpretaciones. Hay un número más en la de complemento a 2.

Si tengo k dígitos $(-2^{k-1})_{10} = (\underbrace{100\dots 0}_{k\text{-bits}})_2$. Número que no puedo representar en signo+magnitud porque el menor número es $(-2^{k-1} + 1)_{10}$.

La representación complemento a 2 contiene a todos los número de la representación signo+magnitud .

¿Hay algo que aprender? O es solo eso?

Ejercicio 7 Interpretar los operadores y resultados de las sumas del ejercicio 2 como representaciones de enteros en complemento a 2 y, para cada una de ellas, indicar cuáles son correctas, cuáles no. ¿Se evidencia overflow en alguna?

Ejercicio 8 🤪... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

Ejercicio 9 Dar ocho pares de numeros tales que la suma de las representaciones de cada par en complemento a dos de 4 bits provoque lo siguiente

1. No se produzca acarreo ni overflow.
2. Se produzca acarreo pero no overflow.
3. Se produzca acarreo y overflow.
4. No se produzca acarreo pero si overflow.
5. Se produzca acarreo y el resultado sea cero.
6. No se produzca acarreo y el resultado sea cero.
7. El resultado sea negativo y se produzca overflow.
8. El resultado sea negativo y no se produzca overflow.

Respuestas:

1. (0000, 0000)
 2. (0001, 0001)
 3. (1111, 1111)
 4. (1111, 1111)
 5. (0001, 1111)
 6. (0000, 0000)
 7. (1111, 1111)
 8. (1111, 0000)
-

Ejercicio 10 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Ejercicio 11 Represente los números 2_{10} , -5_{10} y 0_{10} en notación complemento a dos de 4 bits de longitud. Luego:

- invierta los bits de cada representación obtenida e indique a qué número representa en el mismo sistema;
- a partir de lo realizado en el punto anterior, proponga un método para obtener la representación en complemento a 2 del inverso aditivo de un número dada la representación de ese número en el mismo sistema.

Respuestas:

- 2_{10}
 - Complemento a dos: 0010_2 Se necesitan 3 dígitos, porque con 2, solamente se podrían representar 4 números en total, siendo el 1 el máximo número posible a representar
 - Inverso de la representación obtenida: $1101_2 = -3_{10}$
 - -5_{10}
 - Complemento a dos: 1011_2
 - Inverso de la representación obtenida: $0100_2 = 4_{10}$
 - 0_{10}
 - Complemento a dos: 0000_2
 - Inverso de la representación obtenida: $1111_2 = -1_{10}$
 - Método para obtener el inverso aditivo:
 - Buscar el inverso del número
 - Sumar uno al inverso del número
-

Ejercicio 12 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Ejercicio 13 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .
