Sistemas Digitales

Nad Garraz y comunidad (ojalá)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales

La Guía 1 se actualizó por última vez: 19/08/2024 @ 22:25

Guía 1

https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales/blob/main/1-guia/1-sol.pdf

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

https://t.me/+X4p0xKnXp0Y3ZThh

Notas teóricas:

- *Complejidad:*

  Es lo que nos da la necesida de abstraer.

- *Abstracción*:

  Para lidiar con la *complejidad* que tienen los sistemas usamos la abstracción.

  De menor a mayor abstracción:

  electrones → transistores → circuitos analógicos → circuitos digitales → circuitos de lógica → micro-arquitectura → arquitectura → sistema operativo → aplicaciones de software

  Lo más abstracto es más fácil de controlar e implementar que lo menos abstracto.

- *Sistemas numéricos:*

  - *Decimal:*

    $$\mathtt{9745}_{10} = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

    El rango de un número *decimal* con $\mathtt{n}$ dígitos mayor o igual a cero es $10^{\mathtt{n}} : 0, 1, \ldots, 10^{\mathtt{n}} - 1$

  - *Binario:*

    $$\mathtt{1101}_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = \mathtt{13}_{10}.$$

    El rango de un número *binario* con $\mathtt{n}$ dígitos mayor o igual a cero es $2^{\mathtt{n}} : 0, 1, \ldots, 2^{\mathtt{n}} - 1$. Si tengo solo un bit, *binary digit*, puedo obtener o bien 0 o bien 1. Si tengo dos bits, entonces puedo tener 2^2 dígitos, 00, 01, 10, 11. (el rango es después de todo 4).

  - *Hexadecimal:*

    $$\mathtt{2AD}_{16} = 2 \times 16^2 + \mathtt{A} \times 16^1 + \mathtt{D} \times 16^0 = \mathtt{685}_{10}$$

    El rango de un número *hexadecimal* con $\mathtt{n}$ dígitos mayor o igual a cero es $16^{\mathtt{n}} : 0, 1, \ldots, 16^{\mathtt{n}} - 1$. Cada dígito de un número en base hexadecimal corresponde a un número binario de 4-bits. Después de todo un número i_{16} de *un solo dígito* tiene un rango de 16: $0, \ldots 15$ y un número binario de 4-bits tiene un rango de $2^4 = 16$ ✓

    $$\mathtt{2AD}_{16} = \underbrace{\mathtt{0010}}_{\mathtt{2}}\underbrace{\mathtt{1010}}_{\mathtt{A}}\underbrace{\mathtt{1101}}_{\mathtt{D}}{}_{\mathtt{2}}$$

- *Operaciones entre números binarios:* Se poné picante según la representación usada.

  - Sumar es fácil si los números son positivos. Tengo `overflow` si el resultado tiene más cifras que bits disponibles para almacenar dicho resultado.

- *Números binarios con signo:*

  Hay distintas *representaciones* para hacer esto, acá están las 2 más usadas:

  - `signo+magnitud`

    El bit más significativo, el de más a la izquierda, marca el signo. Un número con $\mathtt{n}$ bits en esta representación tiene un rango: $[-2^{\mathtt{n}-1} + 1, 2^{\mathtt{n}-1} - 1]$. Por ejemplo con 3-bits:

El rango es [-3, 3]

Base 2	→	Base 10
000	→	0
001	→	1
010	→	2
011	→	3
100	→	-0
101	→	-1
110	→	-2
111	→	-3

Sumar normalmente en esta representación no tiene sentido. Representa en total $2^n - 1$ elementos porque el -0 está usando un lugar al pedo.

- complemento a 2 :
  - Menos intuitivo, pero más útil. Si tengo un número de n-bits, voy a tener siempre:

0_{10}	→	$00\ldots00_2$	
-1_{10}	→	$11\ldots11_2$	
$-2^{n-1}{}_{10}$	→	$100\ldots00_2$	→ *weird number*
$2^{n-1} - 1_{10}$	→	$011\ldots11_2$	

  Teniendo al 0, -1, -2^{n-1} y $(2^{n-1} - 1)$, puedo encontrar el resto de la *representación*:
  - Para encontrar el opuesto a un número, se cambian los 0 por 1 y bicerveza [1] , luego se le suma 1 a eso, ej:

$$5_{10} = 0101_2 \xrightarrow[-5]{\text{busco}} 1010_2 + 0001_2 = 1011_2 = \text{-}5_{10}.$$

  Cosa que no funciona con el *weird number*, porque su complemento te da a él mismo.
  - El rango es de $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$, 2^n elementos. Hay un elemento negativo más que positivos.
  - Ejemplito: En 3-bits me encuentro todo el conjunto, $[-4, 3]$:

000_2	→	0_{10}
001_2	→	1_{10}
010_2	→	2_{10}
011_2	→	3_{10}
100_2	→	-4_{10}
101_2	→	-3_{10}
110_2	→	-2_{10}
111_2	→	-1_{10}

  - *Suma en complemento a 2 :* Si sumo dos números de distinto signo no voy a tener overflow !

$$4 \text{ bits: } -4_{10} + 5_{10} = 1100_2 + 0101_2 = \cancel{1}0001_2 = 1_{10}$$

  - *Sign extension:* Para encontrar la representación de un número conocido con más bits. Copio el signo al resto de los númerosengo que mandar el bit del signo hacia el dígito más significativo, :

$$4 \text{ bits: } 6_{10} = 0110_2 \text{ y } -5_{10} = 1011_2$$
$$\text{Extendido a 8 bits: } 6_{10} = (0000\ 0110)_2 \text{ y } -5_{10} = (1111\ 1011)_2$$

- Exceso m:
  - Se desplaza el 0 a la posición m. Es así que si la representación es exceso 4 en 6-bits base 3: $0_{10} = (000\ 0011)_3$

[1]chiste: bicerveza = 🍺🍺. Se escribe viceversa 👍😊.

Comparación representaciones del mismo Dato:

Posición	Dato	unsigned	signo+magnitud	Exceso m (m=4)	complemento a 2
0	$(0000)_2$	0	0	-4	0
1	$(0001)_2$	1	1	-3	1
2	$(0010)_2$	2	2	-2	2
3	$(0011)_2$	3	3	-1	3
4	$(0100)_2$	4	4	0	4
5	$(0101)_2$	5	5	1	5
6	$(0110)_2$	6	6	2	6
7	$(0111)_2$	7	7	3	7
8	$(1000)_2$	8	-0	4	-8
9	$(1001)_2$	9	-1	5	-7
10	$(1010)_2$	10	-2	6	-6
11	$(1011)_2$	11	-3	7	-5
12	$(1100)_2$	12	-4	8	-4
13	$(1101)_2$	13	-5	9	-3
14	$(1110)_2$	14	-6	10	-2
15	$(1111)_2$	15	-7	11	-1

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1

a) Utilizando el método del cociente, expresar en bases 2, 3 y 5 los números 33_{10} y 511_{10}.

b) Expresar en decimal los números 1111_2, 1111_7 y $\mathtt{CAFE}_{10}$.

c) Expresar 17_8 en base 5 y $\mathtt{BABA}_{13}$ en base 6.

d) Pasar $(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2$, $(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2$, $(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2$, a base 4, 8 y 16 agrupando bits.

e) Expresar en decimal los números 0x142536, 0x142536 y 0xFCD9, y pasar a base 16 los números 7848_{10} y 46183_{10}.

---

a) *Fijarse si el número es cercado a una potencia de la base buscada.*

$33_{10} = (10\ 0001)_2 = 1020_3 = 113_5$

$511_{10} = (1111\ 1111)_2 = (20\ 0221)_3 = 4021_5$

b) ¿Tiene truco?

$1111_2 = 15_{10}$

$1111_7 = 400_{10}$

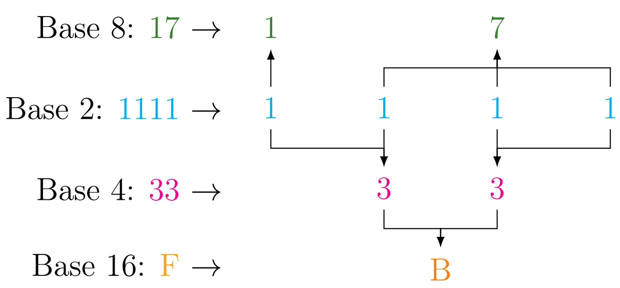
$\mathtt{CAFE}_{16} = \mathtt{C}\times16^3 + \mathtt{A}\times16^2 + \mathtt{F}\times16^1 + \mathtt{E}\times16^0 = 12\times16^3 + 10\times16^2 + 15\times16^1 + 14\times16^0 = 51966_{10}$

c) ¿Hay truco para no pasar por base 10?

$17_8 = 15_{10} = 30_5$

$\mathtt{BABA}_{13} = 11\times13^3 + 10\times13^2 + 11\times13^1 + 10\times13^0 = 26180_{10} = 321112_6$

d) Como las bases se tiene que cambiar a otras bases que son potencia de 2, se puede hacer agrupando los bits.



$(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2 = (22\ 32\ 22\ 31)_4 = 5555_8 = \mathtt{AEAD}_{16}$

$(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2 = (33\ 23\ 02\ 30\ 13)_4 = (373\ 1307)_8 = \mathtt{FB2CD}_{16}$

$(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2 = (12\ 02\ 21)_4 = 3051_8 = \mathtt{C29}_{16}$

e) $\mathtt{0x142536} = 142536_{16} = 1\times16^5 + 4\times16^4 + 2\times16^3 + 5\times16^2 + 3\times16^1 + 6\times16^0 = (132\ 0246)_{10}$

$\mathtt{0xFCD9} = \mathtt{FCD9}_{16} = 15\times16^3 + 12\times16^2 + 13\times16^1 + 9\times16^0 = (6\ 4729)_{10}$

$7848_{10} = \mathtt{0x1EA8}$

$(4\ 6183)_{10} = \mathtt{0xB467}$

Ejercicio 2 Realizar las siguientes sumas de precisión fija, sin convertir a decimal. Indicar en cada caso si hubo acarreo.

a) $\begin{array}{r} 100001_2 \\ +\ 011110_2 \\ \hline \text{------}_2 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 100001_2 \\ +\ 011111_2 \\ \hline \text{------}_2 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 9999_{16} \\ +\ 1111_{16} \\ \hline \text{----}_2 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} F0F0_2 \\ +\ F0CA_2 \\ \hline \text{----}_2 \end{array}$

a) $\begin{array}{r} 100001_2 \\ +\ 011110_2 \\ \hline 111111_2 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 9999_{16} \\ +\ 1111_{16} \\ \hline AAAA_2 \end{array}$

b) $\begin{array}{lr} \text{Acarreo} & 111111 \\ & 100001_2 \\ + & 011111_2 \\ \hline & 1000000_2 \end{array}$ d) $\begin{array}{lr} \text{Acarreo} & 1\ 1 \\ & F0F0_2 \\ + & F0CA_2 \\ \hline & 1E1BA_2 \end{array}$

Precisión fija? Tengo `overflow` en el b y en el d? Se tira el decimal de más? Cómo se expresa el resultado?

Ejercicio 3 ¿Puede suceder en alguna base que la suma de dos números de precisión fija tenga un acarreo mayor que 1? Exhibir un ejemplo o demostrar lo contrario.

Ejercicio 4 Sean los siguientes numerales binarios de ocho dígitos:

$$\texttt{r} = (1011\ 1111)_2,\ \texttt{s} = (1000\ 0000)_2 \text{ y } \texttt{t} = (1111\ 1111)_2.$$

¿Qué números representan si asumimos que son codificaciones de enteros en `complemento a 2` ? ¿Y si fueran codificaciones en `signo+magnitud` ?

En la teoría están cuales son los valores *amigos* de la representación `complemento a 2`

- Notar que si `r` es de complemento:

  $\texttt{r + 64} = (1011\ 1111)_2 + (0100\ 0000)_2 = (1111\ 1111)_2 = -1_{10} \to \texttt{r} = -65_{10}$

  Puedo llegar a lo mismo usando la técnica para encontrar el complemento de `r`:

  $\overline{\texttt{r}} = \overline{10111111_2} \xrightarrow[1\leftrightarrow 0]{\text{cambio}} (0100\ 0000)_2 \xrightarrow[1]{\text{sumo}} (0100\ 0001)_2 = {}_2 = 65_{10} = \overline{\texttt{r}}$, entonces $\texttt{r} = -65_{10}$

  Si fuese de `signo+magnitud` : $\texttt{r} = (1011\ 1111)_2 = -63_{10}$

  Sumar normalmente en la representación de `signo+magnitud` es para problemas.

- Para `complemento a 2` : $\texttt{s} = (1000\ 0000)_2 = -128_{10}$ es el *weird number*

  Y en `signo+magnitud` : $\texttt{s} = (1000\ 0000)_2 = -0_{10}$

- Para `complemento a 2` : $\texttt{t} = (1111\ 1111)_2 = -1_{10}$

  Y en `signo+magnitud` : $\texttt{t} = (1111\ 1111)_2 = -127_{10}$

Ejercicio 5 Codificar los siguientes números en base 2, usando la precisión y forma de representación indicada en cada caso. Comparar los resultados.

- a 0_{10} → usando 8 bits, notación `signo+magnitud` y notación `complemento a 2` .
- b -1_{10} → usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación `signo+magnitud` y notación `complemento a 2` .
- c 255_{10} → usando 8 bits notación sin signo y 16 bits notación `complemento a 2` .
- d -128_{10} → usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación `complemento a 2` .
- e 128_{10} → usando 8 bits, notación sin signo y 16 notación `complemento a 2` .

Leer la técnica para encontrar los números con `complemento a 2` .

- a `signo+magnitud` : $0_{10} = (0000\ 0000)_2 \overset{?}{=} (1000\ 0000)_2$. abuso de notación?

  `complemento a 2` : $0_{10} = (0000\ 0000)_2$.

- b `signo+magnitud` :

  $-1_{10} = (1000\ 0001)_2$.

  $-1_{10} = (1000\ 0000\ 0000\ 0001)_2$.

  `complemento a 2` :

  $-1_{10} = (1111\ 1111)_2$.

  $-1_{10} = (1111\ 1111\ 1111\ 1111)_2$.

- c Sin Signo:

  $255_{10} = (1111\ 1111)_2$.

  `complemento a 2` :

  $255_{10} = (0000\ 0000\ 1111\ 1111)_2$.

- d `complemento a 2` :

  $-128_{10} = (1000\ 0000)_2$.

  $-128_{10} \to 128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2 \xrightarrow[\text{opuesto}]{\text{busco}} (1111\ 1111\ 1000\ 0000)_2 = -128_{10}$.

- e Sin Signo:

  $128_{10} = (1000\ 0000)_2$.

  $128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2$.

¿Qué se puede interpretar de esto?

Ejercicio 6 ¿Puede alguna cadena binaria de `k` dígitos, interpretada en `complemento a 2` , representar un número que no puede ser representado por una cadena de la misma longitud, interpretada en `signo+magnitud` ? ¿Y al revés?

De al teoría de `complemento a 2` , tengo que el rango es distinto en las distintas interpretaciones. Hay un número más en la de `complemento a 2` .

Si tengo k dígitos $(-2^{k-1})_{10} = (\underbrace{100...0}_{k-bits})_2$. Número que no puedo representar en signo+magnitud porque el menor número es $(-2^{k-1} + 1)_{10}$.
La representación complemento a 2 contiene a todos los número de la representación signo+magnitud .
¿Hay algo que aprender? O es solo eso?

Ejercicio 7 Interpretar los operadores y resultados de las sumas del ejercicio 2 como representaciones de enteros en complemento a 2 y, para cada una de ellas, indicar cuáles son correctas, cuáles no. ¿Se evidencia overflow en alguna?

Ejercicio 8 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 9 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 10 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 11 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 12 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicio 13 ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.
