

Sistemas Digitales

Nad Garraz y comunidad (ojalá)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

[1.](#)

[6.](#)

[11.](#)

[2.](#)

[7.](#)

[12.](#)

[3.](#)

[8.](#)

[13.](#)

[4.](#)

[9.](#)

[5.](#)

[10.](#)

El repo en [github](https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales) para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales>

La Guía 1 se actualizó por última vez: 21/08/2024 @ 18:26

Guía 1



<https://github.com/nad-garraz/sistemasDigitales/blob/main/1-guia/1-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

[Telegram](https://t.me/joinchat/DS9ZukGbZgIOIaHgdbLavQ).



<https://t.me/joinchat/DS9ZukGbZgIOIaHgdbLavQ>

Notas teóricas:

▣ *Complejidad:*

Es lo que nos da la necesidad de abstraer.

▣ *Abstracción:*

Para lidiar con la *complejidad* que tienen los sistemas usamos la abstracción.

De menor a mayor abstracción:

electrones → transistores → circuitos analógicos → circuitos digitales → circuitos de lógica →
micro-arquitectura → arquitectura → sistema operativo → aplicaciones de software

Lo más abstracto es más fácil de controlar e implementar que lo menos abstracto.

▣ *Sistemas numéricos:*▣ *Decimal:*

$$9745_{10} = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

El rango de un número *decimal* con n dígitos mayor o igual a cero es $10^n : 0, 1, \dots, 10^n - 1$

▣ *Binario:*

$$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13_{10}.$$

El rango de un número *binario* con n dígitos mayor o igual a cero es $2^n : 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Si tengo solo un bit, *binary digit*, puedo obtener o bien 0 o bien 1. Si tengo dos bits, entonces puedo tener 2^2 dígitos, 00, 01, 10, 11. (el rango es después de todo 4).

▣ *Hexadecimal:*

$$2AD_{16} = 2 \times 16^2 + A \times 16^1 + D \times 16^0 = 685_{10}$$

El rango de un número *hexadecimal* con n dígitos mayor o igual a cero es $16^n : 0, 1, \dots, 16^n - 1$. Cada dígito de un número en base hexadecimal corresponde a un número binario de 4-bits. Después de todo un número i_{16} de *un solo dígito* tiene un rango de 16: 0, ... 15 y un número binario de 4-bits tiene un rango de $2^4 = 16$ ✓

$$2AD_{16} = \underbrace{0010}_2 \underbrace{1010}_A \underbrace{1101}_D_2$$

▣ *Operaciones entre números binarios:* Se poné picante según la representación usada.

- ▣ Sumar es fácil si los números son positivos. Tengo **overflow** si el resultado tiene más cifras que bits disponibles para almacenar dicho resultado.

▣ *Números binarios con signo:*

Hay distintas *representaciones* para hacer esto, acá están las 2 más usadas:

▣ **signo+magnitud**

El bit más significativo, el de más a la izquierda, marca el **signo**. Un número con n bits en esta representación tiene un rango: $[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$. Por ejemplo con 3-bits:

El rango es $[-3, 3]$

Base 2	→	Base 10
000	→	0
001	→	1
010	→	2
011	→	3
100	→	-0
101	→	-1
110	→	-2
111	→	-3

Sumar normalmente en esta representación no tiene sentido. Representa en total $2^n - 1$ elementos porque el **-0** está usando un lugar al pedo.

▣ complemento a 2 :

▣ Menos intuitivo, pero más útil. Si tengo un número de n-bits, voy a tener siempre:

0_{10}	→	$00 \dots 00_2$	→ <i>weird number</i>
-1_{10}	→	$11 \dots 11_2$	
-2^{n-1}_{10}	→	$100 \dots 00_2$	
$2^{n-1} - 1_{10}$	→	$011 \dots 11_2$	

Teniendo al 0, -1 , -2^{n-1} y $(2^{n-1} - 1)$, puedo encontrar el resto de la *representación*:

▣ Para encontrar el opuesto a un número, se cambian los 0 por 1 y bicerveza ¹, luego se le suma 1 a eso, ej:

$$5_{10} = 0101_2 \xrightarrow[-5]{\text{busco}} 1010_2 + 0001_2 = 1011_2 = -5_{10}.$$

Cosa que no funciona con el *weird number*, porque su complemento te da a él mismo **A**.

▣ El rango es de $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$, 2^n elementos. Hay un elemento negativo más que positivos.

▣ Ejemplito: En 3-bits me encuentro todo el conjunto, $[-4, 3]$:

000_2	→	0_{10}
001_2	→	1_{10}
010_2	→	2_{10}
011_2	→	3_{10}
100_2	→	-4_{10}
101_2	→	-3_{10}
110_2	→	-2_{10}
111_2	→	-1_{10}

▣ *Suma en complemento a 2* : Si sumo dos números de distinto signo no voy a tener **overflow** !

$$4 \text{ bits: } -4_{10} + 5_{10} = 1100_2 + 0101_2 = \cancel{1}0001_2 = 1_{10}$$

▣ *Sign extension*: Para encontrar la representación de un número conocido con más bits.

Copio el signo al resto de los númerosengo que mandar el bit del signo hacia el dígito más significativo, :

$$4 \text{ bits: } 6_{10} = 0110_2 \text{ y } -5_{10} = 1011_2$$

$$\text{Extendido a 8 bits: } 6_{10} = (0000 \ 0110)_2 \text{ y } -5_{10} = (1111 \ 1011)_2$$

▣ Exceso m:

▣ Se desplaza el 0 a la posición m. Es así que si la representación es exceso 4 en 6-bits base 3:
 $0_{10} = (000 \ 0011)_3$

¹chiste: bicerveza = . Se escribe viceversa .

▣ Comparación representaciones del mismo Dato:

Posición	Dato	unsigned	signo+magnitud	Exceso m (m=4)	complemento a 2
0	(0000) ₂	0	0	-4	0
1	(0001) ₂	1	1	-3	1
2	(0010) ₂	2	2	-2	2
3	(0011) ₂	3	3	-1	3
4	(0100) ₂	4	4	0	4
5	(0101) ₂	5	5	1	5
6	(0110) ₂	6	6	2	6
7	(0111) ₂	7	7	3	7
8	(1000) ₂	8	-0	4	-8
9	(1001) ₂	9	-1	5	-7
10	(1010) ₂	10	-2	6	-6
11	(1011) ₂	11	-3	7	-5
12	(1100) ₂	12	-4	8	-4
13	(1101) ₂	13	-5	9	-3
14	(1110) ₂	14	-6	10	-2
15	(1111) ₂	15	-7	11	-1

Ejercicios de la guía:

Ejercicio 1

- Utilizando el método del cociente, expresar en bases 2, 3 y 5 los números 33_{10} y 511_{10} .
- Expresar en decimal los números 1111_2 , 1111_7 y $CAFE_{16}$.
- Expresar 17_8 en base 5 y $BABA_{13}$ en base 6.
- Pasar $(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2$, $(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2$, $(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2$, a base 4, 8 y 16 agrupando bits.
- Expresar en decimal los números $0x142536$, $0x142536$ y $0xFCD9$, y pasar a base 16 los números 7848_{10} y 46183_{10} .

- Fijarse si el número es cercano a una potencia de la base buscada.*

$$33_{10} = (10\ 0001)_2 = 1020_3 = 113_5$$

$$511_{10} = (1111\ 1111)_2 = (20\ 0221)_3 = 4021_5$$

- ¿Tiene truco?

$$1111_2 = 15_{10}$$

$$1111_7 = 400_{10}$$

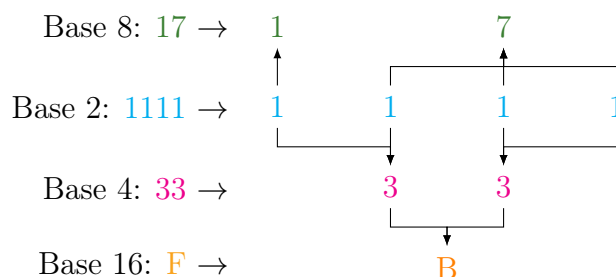
$$CAFE_{16} = C \times 16^3 + A \times 16^2 + F \times 16^1 + E \times 16^0 = 12 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 51966_{10}$$

- ¿Hay truco para no pasar por base 10?

$$17_8 = 15_{10} = 30_5$$

$$BABA_{13} = 11 \times 13^3 + 10 \times 13^2 + 11 \times 13^1 + 10 \times 13^0 = 26180_{10} = 321112_6$$

- Como las bases se tiene que cambiar a otras bases que son potencia de 2, se puede hacer agrupando los bits.



$$(1010\ 1110\ 1010\ 1101)_2 = (22\ 32\ 22\ 31)_4 = 5555_8 = AEAD_{16}$$

$$(1111\ 1011\ 0010\ 1100\ 0111)_2 = (33\ 23\ 02\ 30\ 13)_4 = (373\ 1307)_8 = FB2CD_{16}$$

$$(0\ 0110\ 0010\ 1001)_2 = (12\ 02\ 21)_4 = 3051_8 = C29_{16}$$

- $0x142536 = 142536_{16} = 1 \times 16^5 + 4 \times 16^4 + 2 \times 16^3 + 5 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = (132\ 0246)_{10}$

$$0xFCD9 = FCD9_{16} = 15 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = (6\ 4729)_{10}$$

$$7848_{10} = 0x1EA8$$

$$(4\ 6183)_{10} = 0xB467$$

Visitá los repos, perfiles y estrellalos ★, likealos 👍, o algo lindo ❤️! Gracias por tu aporte:

👤 Nad Garraz 🔄

Ejercicio 2 Realizar las siguientes sumas de precisión fija, sin convertir a decimal. Indicar en cada caso si hubo acarreo.

$$\begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011110_2 \\ \hline \text{-----}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011111_2 \\ \hline \text{-----}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999_{16} \\ + 1111_{16} \\ \hline \text{----}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} F0F0_2 \\ + FOCA_2 \\ \hline \text{----}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100001_2 \\ + 011110_2 \\ \hline 111111_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999_{16} \\ + 1111_{16} \\ \hline AAAA_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Acarreo} \quad 1111 \\ \quad 100001_2 \\ + \quad 011111_2 \\ \hline 1000000_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Acarreo} \quad 1 \\ \quad F0F0_2 \\ + \quad FOCA_2 \\ \hline 1E1BA_2 \end{array}$$

Precisión fija? Tengo overflow en el b y en el d? Se tira el decimal de más? Cómo se expresa el resultado?

Visitá los repos, perfiles y estrellalos ★, likealos 👍, o algo lindo ❤️! Gracias por tu aporte:

👤 Nad Garraz 🔄

Ejercicio 3 ¿Puede suceder en alguna base que la suma de dos números de precisión fija tenga un acarreo mayor que 1? Exhibir un ejemplo o demostrar lo contrario.

Ejercicio 4 Sean los siguientes numerales binarios de ocho dígitos:

$$r = (1011 \ 1111)_2, \ s = (1000 \ 0000)_2 \text{ y } t = (1111 \ 1111)_2.$$

¿Qué números representan si asumimos que son codificaciones de enteros en complemento a 2? ¿Y si fueran codificaciones en signo+magnitud?

En la teoría están cuales son los valores amigos de la representación complemento a 2

- Notar que si r es de complemento:

$$r + 64 = (1011 \ 1111)_2 + (0100 \ 0000)_2 = (1111 \ 1111)_2 = -1_{10} \rightarrow r = -65_{10}$$

Puedo llegar a lo mismo usando la técnica para encontrar el complemento de r :

$$\bar{r} = \overline{10111111}_2 \xrightarrow[1 \leftrightarrow 0]{\text{cambio}} (0100 \ 0000)_2 \xrightarrow[1]{\text{sumo}} (0100 \ 0001)_2 = 2 = 65_{10} = \bar{r}, \text{ entonces } r = -65_{10}$$

$$\text{Si fuese de signo+magnitud: } r = (1011 \ 1111)_2 = -63_{10}$$

Sumar normalmente en la representación de signo+magnitud es para problemas.

- Para complemento a 2: $s = (1000 \ 0000)_2 = -128_{10}$ es el weird number

$$\text{Y en signo+magnitud: } s = (1000 \ 0000)_2 = -0_{10}$$

- Para complemento a 2 : $t = (1111\ 1111)_2 = -1_{10}$
Y en signo+magnitud : $t = (1111\ 1111)_2 = -127_{10}$

Visitá los repos, perfiles y estrellalos ★, likealos 👍, o *algo lindo* ❤️! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🐙

Ejercicio 5 Codificar los siguientes números en base 2, usando la precisión y forma de representación indicada en cada caso. Comparar los resultados.

- _a $0_{10} \rightarrow$ usando 8 bits, notación signo+magnitud y notación complemento a 2 .
- _b $-1_{10} \rightarrow$ usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación signo+magnitud y notación complemento a 2 .
- _c $255_{10} \rightarrow$ usando 8 bits notación sin signo y 16 bits notación complemento a 2 .
- _d $-128_{10} \rightarrow$ usando 8 y 16 bits, en ambos casos notación complemento a 2 .
- _e $128_{10} \rightarrow$ usando 8 bits, notación sin signo y 16 notación complemento a 2 .

Leer la [técnica para encontrar los números con complemento a 2](#) .

- _a signo+magnitud : $0_{10} = (0000\ 0000)_2 \stackrel{?}{=} (1000\ 0000)_2$. **abuso de notación?**
complemento a 2 : $0_{10} = (0000\ 0000)_2$.
- _b signo+magnitud :
 $-1_{10} = (1000\ 0001)_2$.
 $-1_{10} = (1000\ 0000\ 0000\ 0001)_2$.
complemento a 2 :
 $-1_{10} = (1111\ 1111)_2$.
 $-1_{10} = (1111\ 1111\ 1111\ 1111)_2$.
- _c Sin Signo:
 $255_{10} = (1111\ 1111)_2$.
complemento a 2 :
 $255_{10} = (0000\ 0000\ 1111\ 1111)_2$.
- _d complemento a 2 :
 $-128_{10} = (1000\ 0000)_2$.
 $-128_{10} \rightarrow 128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2 \xrightarrow[\text{opuesto}]{\text{busco}} (1111\ 1111\ 1000\ 0000)_2 = -128_{10}$.
- _e Sin Signo:
 $128_{10} = (1000\ 0000)_2$.
 $128_{10} = (0000\ 0000\ 1000\ 0000)_2$.

¿Qué se puede interpretar de esto?

Visitá los repos, perfiles y estrellalos ★, likealos 👍, o algo lindo ❤️! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🐙

Ejercicio 6 ¿Puede alguna cadena binaria de k dígitos, interpretada en complemento a 2, representar un número que no puede ser representado por una cadena de la misma longitud, interpretada en signo+magnitud? ¿Y al revés?

De al teoría de complemento a 2, tengo que el rango es distinto en las distintas interpretaciones. Hay un número más en la de complemento a 2.

Si tengo k dígitos $(-2^{k-1})_{10} = (\underbrace{100\dots 0}_{k\text{-bits}})_2$. Número que no puedo representar en signo+magnitud porque el menor número es $(-2^{k-1} + 1)_{10}$.

La representación complemento a 2 contiene a todos los números de la representación signo+magnitud.

¿Hay algo que aprender? O es solo eso?

Ejercicio 7 Interpretar los operadores y resultados de las sumas del ejercicio 2 como representaciones de enteros en complemento a 2 y, para cada una de ellas, indicar cuáles son correctas, cuáles no. ¿Se evidencia overflow en alguna?

Ejercicio 8 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

Ejercicio 9 Dar ocho pares de números tales que la suma de las representaciones de cada par en complemento a dos de 4 bits provoque lo siguiente:

- 1) No se produzca acarreo ni overflow.
- 2) Se produzca acarreo pero no overflow.
- 3) Se produzca acarreo y overflow.
- 4) No se produzca acarreo pero sí overflow.
- 5) Se produzca acarreo y el resultado sea cero.
- 6) No se produzca acarreo y el resultado sea cero.
- 7) El resultado sea negativo y se produzca overflow.
- 8) El resultado sea negativo y no se produzca overflow.

- 1) $(0000, 0000)_2$ o $(0101, 1010)_2$
- 2) $(0001, 0001)_2$
- 3) $(1111, 1111)_2$

- 4) $(1000, 1111)_2$
 5) $(0001, 1111)_2$
 6) $(0000, 0000)_2$
 7) $(1111, 1111)_2$
 8) $(1111, 0000)_2$ o $(1111, 1001)_2$ o $(1111, 1100)_2$

Nota: Los incisos 3) y 7) están mal. Los dejamos ahí para testearse y hacerte saber que lograste esto 🤖. Cuando usamos la representación que usamos, el **overflow** tiene que ver con el sentido que le damos a cierto número. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} \text{Acarreo} \quad 11111 \\ \quad 100001_2 \\ + \quad 011111_2 \\ \hline 1000000_2 \end{array} \quad \text{Acabo de hacer } -7_{10} + 7_{10} = 0_{10}, \text{ el bit más significativo que supera la cantidad}$$

de bits de mi cuenta se descarta y el resultado es coherente con mi representación. No hay **overflow**.

Visita los repos, perfiles y estrellalos ★, likealos 👍, o algo lindo ❤️! Gracias por tu aporte:

👉 Iñaki Frutos 🐙

👉 Nad Garraz 🐙

Ejercicio 10 La función SignExt_n convierte números de k -bits en números de $k+n$ -bits de la siguiente manera:

$$\text{SignExt}_n(b_{k-1} \dots b_0) = \begin{cases} 0 \dots 0 b_{k-1} \dots b_0 & \text{si } b_{k-1} = 0 \\ 1 \dots 1 b_{k-1} \dots b_0 & \text{si } b_{k-1} = 1 \end{cases}$$

Mostrar que para todo número x de k -bits, x y $\text{SignExt}_n(x)$ representan el mismo número si se los interpreta en notación complemento a 2 de k y $k+n$ -bits respectivamente.

Esto está no demostrado en las [notas teóricas de complemento a 2](#). Si estoy laburando en complemento a 2 voy a tener que el 0_{10} se representa para k -bits y k -bits + n como:

$$\begin{array}{ccc} \text{base10} & k\text{-bits} & k\text{-bits} + n \\ 0_{10} & (0 \dots 0)_2 & (0 \dots 0 \ 0 \dots 0)_2, \\ & \underbrace{\hspace{1cm}}_k & \underbrace{\hspace{1cm}}_n \underbrace{\hspace{1cm}}_k \end{array}$$

al -1_{10} lo represento como:

$$\begin{array}{ccc} \text{base10} & k\text{-bits} & k\text{-bits} + n \\ -1_{10} & (1 \dots 1)_2 & (1 \dots 1 \ 1 \dots 1)_2, \end{array}$$

el mayor número de la representación también en complemento a 2:

$$\begin{array}{ccc} \text{base10} & k\text{-bits} & k\text{-bits} + n \\ (2^k - 1)_{10} & (0 \ 1 \dots 1)_2 & (0 \dots 0 \ 0 \ 1 \dots 1)_2, \end{array}$$

y el menor número de la representación complemento a 2 también como:

$$\begin{array}{ccc} \text{base10} & k\text{-bits} & k\text{-bits} + n \\ (-2^k)_{10} & (1 \ 0 \dots 0)_2 & (1 \dots 1 \ 1 \ 0 \dots 0)_2, \end{array}$$

La verdad que no creo que esto sea una demostración pero voy a asumir que es trivial que para números positivos:

$$x_n = \text{SignExt}_n(x) \text{ si } x_n > 0,$$

porque solo son 0s a la izquierda. Y para los negativos podría buscarles el opuesto:

base10	$x_{10} < 0$	$\xrightarrow{\text{opuesto}}$	$x_{10} > 0$
k-bits	$(1b\dots b)_2$	$\xrightarrow{\text{opuesto}}$	$(0\bar{b}\dots\bar{b})_2 + (0\dots 1)_2$
k-bits + n	$(1\dots 1b\dots b)_2$	$\xrightarrow{\text{opuesto}}$	$(0\dots 00\bar{b}\dots\bar{b})_2 + (0\dots 00\dots 1)_2$

La suma en la parte cyan para los números positivos me va a dar lo mismo. Por lo tanto bajo la *conjetura que hice* de que para los positivos es trivial la igualdad $x_n = \text{SignExt}_n(x)$ me muestra que también los negativos son iguales después de aplicarles la extensión de signo.

Visita los repos, perfiles y estrellalos , likealos , o *algo lindo* ! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz

Ejercicio 11 Represente los números 2_{10} , -5_{10} y 0_{10} en notación complemento a dos de 4 bits de longitud. Luego:

- (a) invierta los bits de cada representación obtenida e indique a qué número representa en el mismo sistema;
- (b) a partir de lo realizado en el punto anterior, proponga un método para obtener la representación en complemento a 2 del inverso aditivo de un número dada la representación de ese número en el mismo sistema.

- (a)
 - 2_{10}
 - Complemento a dos: 0010_2 Se necesitan 3 dígitos, porque con 2, solamente se podrían representar 4 números en total, siendo el 1 el máximo número posible a representar
 - Inverso de la representación obtenida: $1101_2 = -3_{10}$
 - -5_{10}
 - Complemento a dos: 1011_2
 - Inverso de la representación obtenida: $0100_2 = 4_{10}$
 - 0_{10}
 - Complemento a dos: 0000_2
 - Inverso de la representación obtenida: $1111_2 = -1_{10}$
- (b) Método para obtener el inverso aditivo:
 - Buscar el inverso del número
 - Sumar uno al inverso del número

Visita los repos, perfiles y estrellalos , likealos , o *algo lindo* ! Gracias por tu aporte:

Iñaki Frutos

Ejercicio 12 ... hay que hacerlo!

Si quieres mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si quieres subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

Ejercicio 13 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.
