INSTITUT SUPÉRIEUR D'INFORMATIQUE ET DES TECHNIQUES DE

DE HAMMAM SOUSSE

Projet sur l'intégration numérique

Réalisé par :

Feidi Rahma

Et

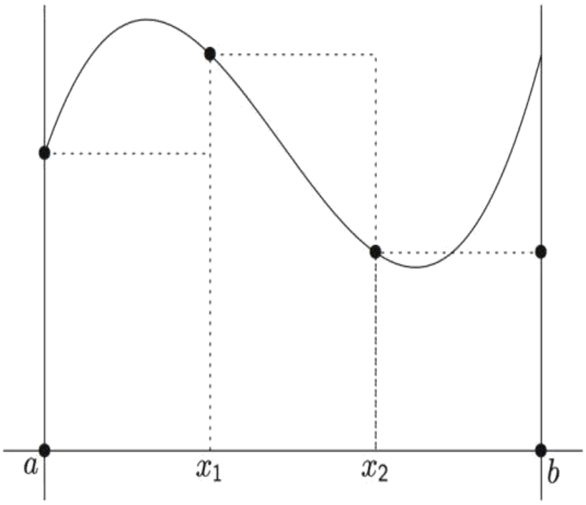
Nada Boudhina

Année Universitaire 2020 – 2021

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

1. Méthode des rectangles

1.1. Principe



Méthode des rectangles à gauche

On remplace f par la fonction en escalier qui prend, sur chaque segment de la subdivision, la même valeur à l'extrémité gauche de ce segment que f. Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 0 qui vaut $f(x_i)$.

Proposition 1 – La valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la méthode des rectangles à gauche est alors donnée par

$$\boxed{R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).}$$

Démonstration : l'aire du rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ est $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, donc

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

car $x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/n$. $\sqcup$

Remarques - • On peut définir de même la méthode des rectangles à droite.
• La formule obtenue est une somme de Riemann.

1.2. Evaluation de l'erreur

Proposition 2 – Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors on a, pour tout entier naturel n non nul

$$|R_n - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)^2 \frac{M_1}{2n}.$$

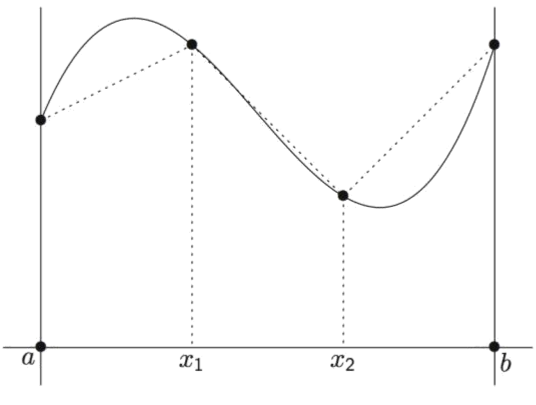
On en déduit que (R_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Démonstration : on a

$$\begin{aligned}
|R_n - \int_a^b f(t)\,dt| &= |\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt| \\
&= |\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i) - f(t))dt| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i) - f(t)|dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_i - t| M_1\,dt \text{ d'après l'inégalité des accroissements finis} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i) M_1\,dt \leq \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{(t-x_i)^2}{2}]_{x_i}^{x_{i+1}} M_1 \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} M_1 \leq n \frac{h^2}{2} M_1 = (b-a)^2 \frac{M_1}{2n}.
\end{aligned}$$

2. Méthode des trapèzes

2.1. Principe



Méthode des trapèzes

On remplace la courbe représentative de f, sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1}.

Proposition 3 – La valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la méthode des trapèzes est alors donnée par

$$\boxed{T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).}$$

Démonstration : l'aire du trapèze de base
$[x_i, x_{i+1}]$ est $(x_{i+1}-x_i)(f(x_i)+f(x_{i+1}))/2 = h(f(x_i)+f(x_{i+1}))/2$.
On en déduit que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i)+f(x_{i+1}))/2 = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\sqcup$$

2.2. Evaluation de l'erreur

Proposition 4 – Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors on a, pour tout entier naturel n non nul

$$\left|T_n - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (b-a)^3 \frac{M_2}{12n^2}.$$

On en déduit que (T_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Démonstration : cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 1 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle. D'après le théorème (EQ ? ?), comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad f(t) - P_i(t) = (x_{i+1}-t)(t-x_i)\frac{f''(\xi)}{2}.$$

On en déduit que

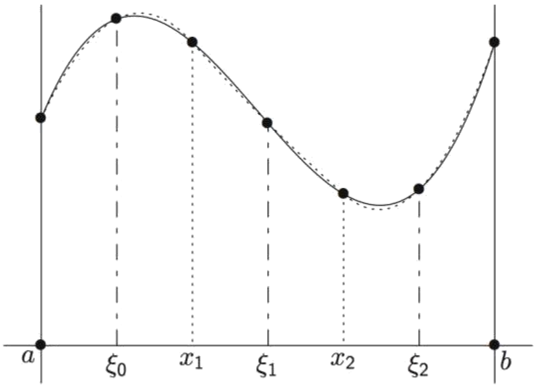
$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t)-P_i(t))\,dt\right| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i_1}-t)(t-x_i)\frac{|f''(\xi)|}{2}dt \\
&\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t)(t-x_i)\frac{M_2}{2}dt \\
&= \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t)(t-x_{i+1})dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t)(x_{i+1}-x_i)dt\right)\frac{M_2}{2} \\
&\leq \frac{M_2}{12}(x_{i+1}-x_i)^3 \leq \frac{M_2\,h^3}{12}
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\left|T_n - \int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (P_i(t)-f(t))\,dt\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|P_i(t)-f(t)\right|dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M_2\,h^3}{12} = n\frac{M_2\,h^3}{12} = (b-a)^3\frac{M_2}{12n^2}.
\end{aligned}$$

3. Méthode de Simpson

3.1. Principe



Méthode de Simpson

On remplace f, sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision, par la fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 qui prend les mêmes valeurs que f aux extrémités et au milieu ξ_i de ce segment. Cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu.

Proposition 5 – La valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la méthode de Simpson est alors donnée par

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f(\xi_i)\big) \\ &= \frac{b-a}{6n} \Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Big). \end{aligned}$$

On a $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt$. On est donc ramené au calcul de l'intégrale de Riemann d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Lemme 6 – Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $c < d$, alors

$$\int_c^d P(t)\,dt = \frac{d-c}{6}\Big[P(c) + P(d) + 4P\Big(\frac{c+d}{2}\Big)\Big].$$

Démonstration : on fait le changement de variables $t = (d-c)u + c$ pour se ramener à une intégrale de 0 à 1.

$$\int_c^d P(t)\,dt = (d-c)\int_0^1 P\big((d-c)u + c\big)\,du$$

Les polynômes de Lagrange aux points 0, 1 et 1/2 sont $l_0(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $l_1(x) = 2x^2 - x$ et $l(x) = 4x - 4x^2$; leurs intégrales entre 0 et 1 valent respectivement 1/6, 1/6 et 4/6. Soit $Q(u) = P\big((d-c)u + c\big)$, Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, on a donc $Q = Q(0)l_0 + Q(1)l_1 + Q(1/2)l$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(u)\,du = \frac{1}{6}\big[Q(0) + Q(1) + 4Q(1/2)\big]$. Comme $Q(0) = P(c)$, $Q(1) = P(d)$ et $Q(1/2) = P\big((d+c)/2\big)$, on obtient le lemme. $\sqcup$

On applique le lemme à S_n et on obtient que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \big(P_i(x_i) + P_i(x_{i+1}) + 4P_i(\xi_i)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \big(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f(\xi_i)\big) \text{ par définition de } P_i \\
&= \frac{h}{6} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Big) \\
&= \frac{b-a}{6n} \Big(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Big)
\end{aligned}$$

3.2. Evaluation de l'erreur

Proposition 7 – Si f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$|S_n - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)^4 \frac{M_3}{192n^3}.$$

On en déduit que (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Démonstration : cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu. D'après le théorème , comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, on a

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad |f(t) - P_i(t)| =\leq (x_{i+1} - t)(t - x_i)|t - \xi_i| \frac{M_3}{6}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - P_i(t)|\,dt &\leq \frac{M_3}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i)(x_{i+1} - t)|t - \xi_i|\,dt \\
&\leq \frac{M_3}{3} \int_{x_i}^{\xi_i} (t - x_i)(x_{i+1} - t)(\xi_i - t)\,dt
\end{aligned}$$

Calculons cette intégrale que l'on appelle J.

$$\begin{aligned}
J &= \int_{x_i}^{\xi_i} (t - x_i)(h + x_i - t)(\frac{h}{2} + x_i - t)\,dt \\
&= \int_{x_i}^{\xi_i} (t - x_i)[\frac{h^2}{2} + \frac{3h}{2}(x_i - t) + (x_i - t)^2]\,dt \\
&= \frac{h^2}{2}\frac{h^2}{8} - \frac{3h}{2}\frac{h^3}{24} + \frac{h^4}{64} = \frac{h^4}{64}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|S_n - \int_a^b f(t)\,dt| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - P_i(t)|\,dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_3}{3}\frac{h^4}{64} = nM_3 \frac{h^4}{192} = (b-a)^3 \frac{M_3}{192n^3}.
\end{aligned}$$

Le résultat précédent peut être affiné si la fonction f est un peu plus régulière :

Proposition 8 – Si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$|S_n - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)^5 \frac{M_4}{2880n^4}.$$

Démonstration : on pose $x_i = \alpha - h/2$, $\xi_i = \alpha$ et $x_{i+1} = \alpha + h/2$. Montrons que

$$|\int_{\alpha-h/2}^{\alpha+h/2} \big(f(t) - P_i(t)\big)\,dt| \leq \frac{h^5}{2880} M_4.$$

où P_i est la fonction polynômiale de degré 2 égale à f aux points x_i, ξ_i et x_{i+1}. Posons

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \int_{\alpha-h/2}^{\alpha+h/2} \big(f(t) - P(t)\big)\,dt \\ &= \int_{\alpha-h/2}^{\alpha+h/2} f(t)\,dt - \frac{h}{6}\big(f(\alpha+h/2) + f(\alpha-h/2) + 4f(\alpha)\big)\end{aligned}$$

Calculons ses dérivées jusqu'à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= \frac{1}{3}\Big(f(\alpha+h/2) + f(\alpha-h/2) - 2f(\alpha)\Big) - \frac{h}{12}\Big(f'(\alpha+h/2) - f'(\alpha-h/2)\Big) \\ \varphi'(0) &= 0 \\ \varphi''(h) &= \frac{1}{12}\Big(f'(\alpha+h/2) - f'(\alpha-h/2)\Big) - \frac{h}{24}\Big(f''(\alpha+h/2) + f''(\alpha-h/2)\Big) \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi^{(3)}(h) &= -\frac{h}{48}\Big(f^{(3)}(\alpha+h/2) - f^{(3)}(\alpha-h/2)\Big) \\ \varphi^{(3)}(0) &= 0\end{aligned}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^4$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\varphi^{(3)}(h)| \leq \frac{h^2}{48} M_4.$$

Par intégrations successives entre 0 et h, on trouve que

$$|\varphi(h)| \leq \frac{h^5}{2880} M_4.$$

On a alors, en notant P la fonction polynômiale par morceaux égale à P_i sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}|S_n - \int_a^b f(t)\,dt| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\int_{\xi_i-h/2}^{\xi_i+h/2} \big(f(t) - P(t)\big)dt| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^5}{2880} M_4 \\ &\leq n\frac{h^5}{2880} M_4 \leq (b-a)^5 \frac{M_4}{2880n^4}\end{aligned}$$

car $h = (b-a)/n$. $\sqcup$