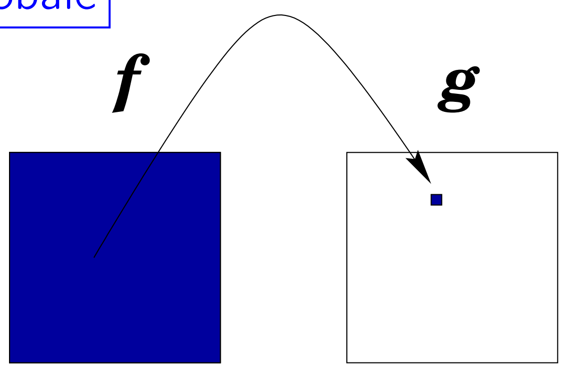
RESTAURATION
SOMMAIRE

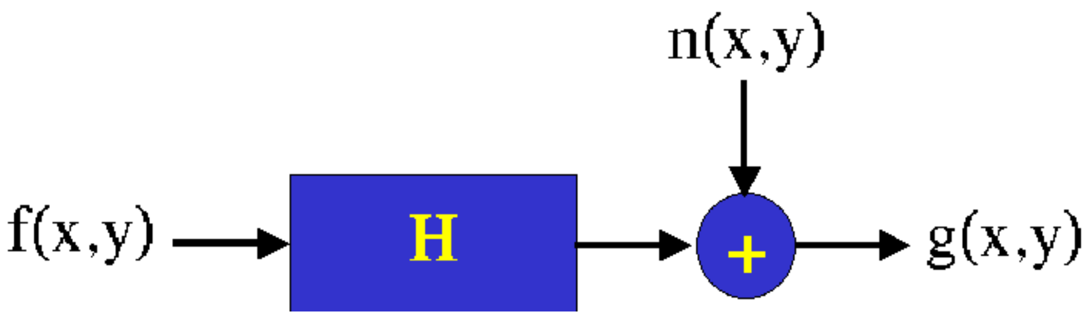
RESTAURATION
MODÈLE DE DÉGRADATION (1)

Opération Globale



Modèle de Dégradation

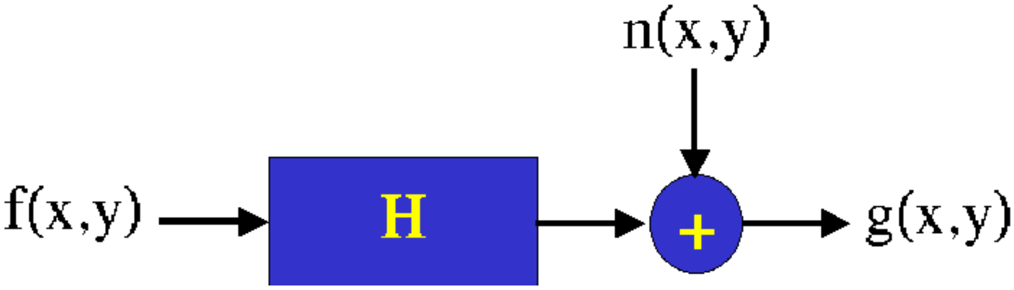
$$\boxed{g(x,y) = H\left[f(x,y)\right] + n(x,y)}$$



- $f(x,y)$ Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x,y)$ Bruit supposé additif
- $g(x,y)$ Image dégradée (ou à restaurer)

Restauration ▶ Retrouver $f(x,y)$ à partir de $g(x,y)$
- connaissant les caractéristiques du bruit $n(x,y)$?
- connaissant $H()$?

RESTAURATION
MODÈLE DE DÉGRADATION (2)



$$g(x,y) = H\Big[f(x,y)\Big] + n(x,y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation
(H invariant en position)

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

$$F^{-1} \Big\uparrow \Big\downarrow F$$

$$G(u,\nu) = H(u,\nu) \cdot F(u,\nu) + N(u,\nu)$$

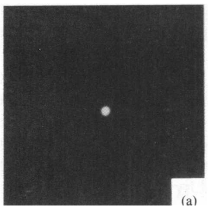
$h(x,y)$: Réponse à l'impulsion
(Réponse du système à une impulsion de Dirac)

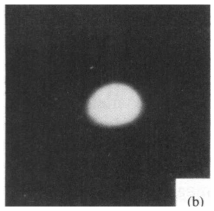
Comment trouver h(x,y) ?

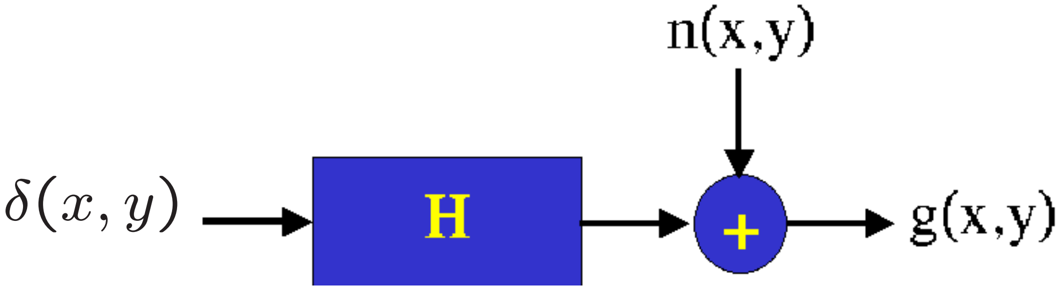
- Réponse du système à une impulsion de Dirac
- Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel

RESTAURATION
ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

Réponse du système à une impulsion de Dirac



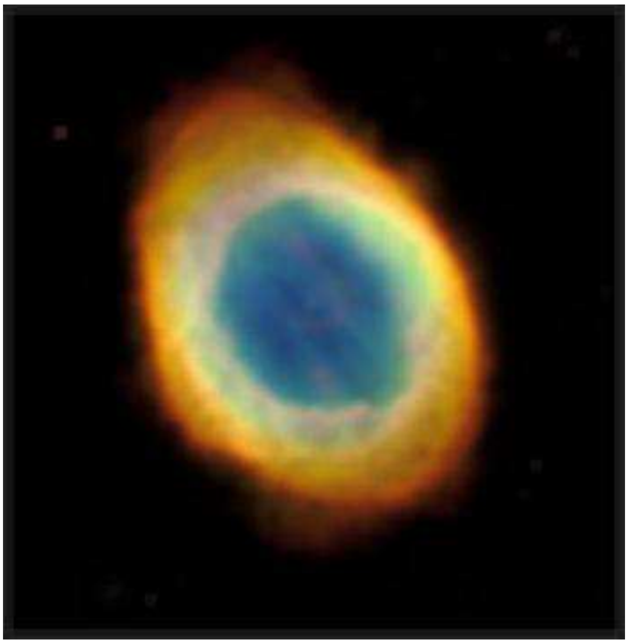


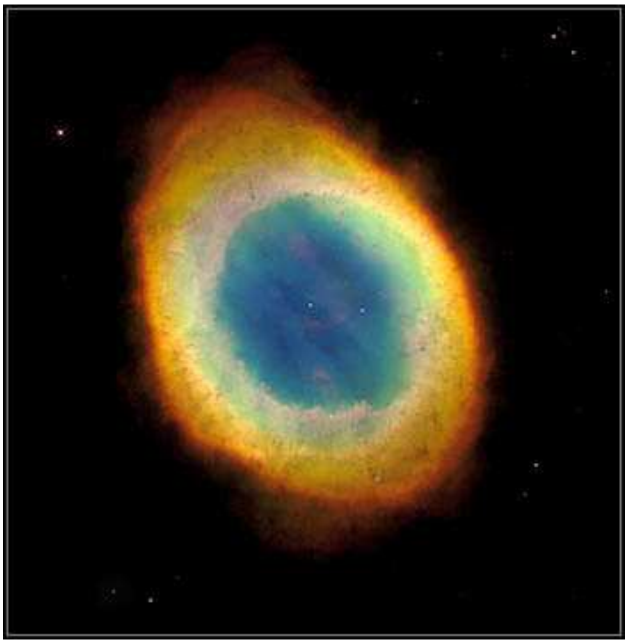


$$h(x,y) \approx h(x,y) * \delta(x,y) + n(x,y)$$

(On peut éliminer le bruit en moyennant par exemple)

Réponse du système à une source ponctuelle





RESTAURATION
ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

Identification du flou basé sur les zéros fréquentielles

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

$$F^{-1} \Big\uparrow\Big\downarrow F$$

$$G(u,\nu) = H(u,\nu) \cdot F(u,\nu) + N(u,\nu)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle), $H(u,\nu)$ peut être identifié en trouvant les zéros de $G(u,\nu)$.

a- Flou rectiligne causé par du mouvement

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, \ -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, \ -d \leq x \leq d \end{cases}$$

▶ Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de $1/2d$

b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2+y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2+y^2} \leq r \end{cases}$$

▶ Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période r dont le premier zéro est à la fréquence numérique $\approx 0.61/r$

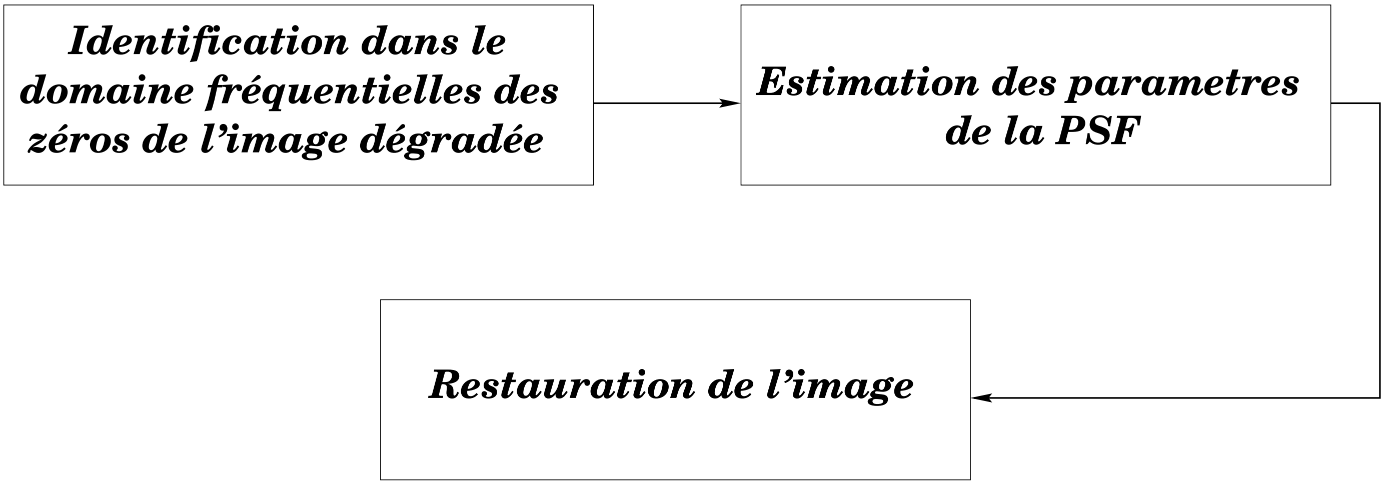
RESTAURATION
ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

▶ Zéros espacés de n/L en u et ν

Bloc Diagramme



Problèmes

▶ Requiert une forme paramétrique pour la PSF
▶ Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ▶ aucun zéro)

RESTAURATION
FILTRAGE INVERSE (1)

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \Big\uparrow \Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$G(u,\nu) = H(u,\nu) \cdot F(u,\nu) + N(u,\nu)$$

$$\hat{F}(u,\nu) = \underbrace{\frac{G(u,\nu)}{H(u,\nu)}}_{F(u,\nu) \text{ si } N(u,\nu)=0} - \frac{N(u,\nu)}{H(u,\nu)}$$

$$\boxed{\hat{F}(u,\nu) = \frac{G(u,\nu)}{H(u,\nu)} - \frac{N(u,\nu)}{H(u,\nu)}}$$

Problèmes

- $H(u,\nu)$ peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u,\nu)$ et $H(u,\nu)$ peuvent s'annuler simultanément
- le bruit $N(u,\nu)$ n'est jamais nul

Image Originale

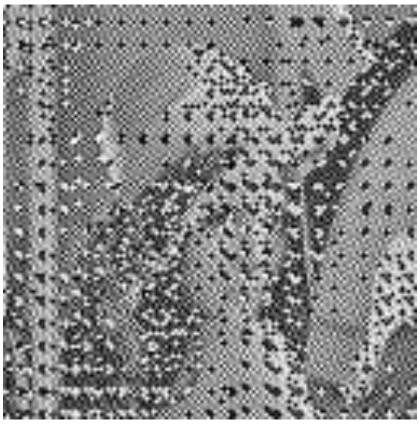
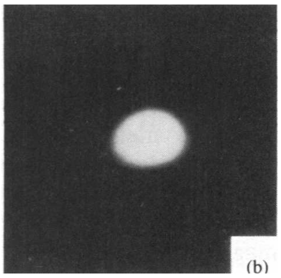


Image restorée par Filtrage Inverse

RESTAURATION
FILTRAGE INVERSE (2)

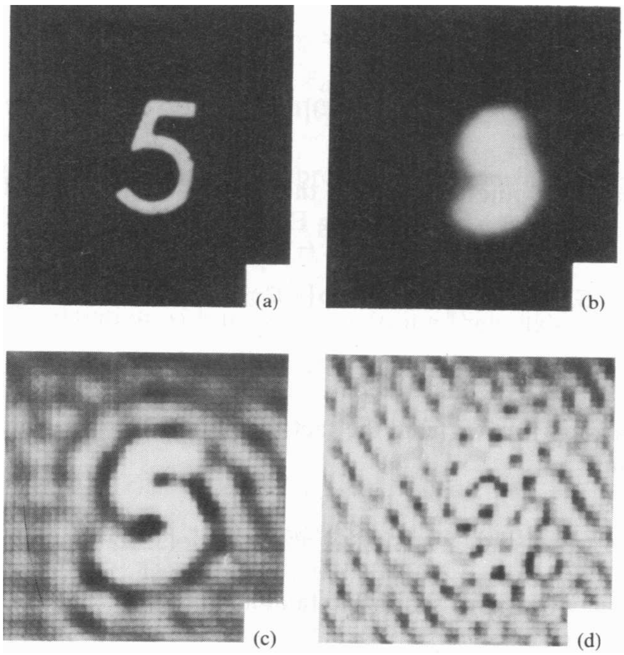
Solutions

- Si $H(u,\nu)$ petit $\widehat{F}(u,\nu) = G(u,\nu)$ (ou 0) sinon G/H
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure D_0
  - ▶ $\widehat{F}(u,\nu) = 0$ sinon $G(u,\nu)/H(u,\nu)$



$h(x,y)$

$f(x,y)$ $g(x,y)$



D_0 bien choisi D_0 trop grand

Remarque

$$\frac{G(u,\nu)}{H(u,\nu)} = \frac{H^*(u,\nu)\,G(u,\nu)}{|H(u,\nu)|^2}$$

RESTAURATION

LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

$$F^{-1} \Big\uparrow\Big\downarrow F$$

$$G(u,\nu) = H(u,\nu) \cdot F(u,\nu) + N(u,\nu)$$

▶ Problème inverse mal posé

La solution de ce problème n'est pas unique et une très faible variation sur l'image $g(x,y)$ (un bruit par exemple), a pour effet de produire de grandes variations sur la solution

Solutions pour rendre le problème bien posé

- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.)
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithme itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.)

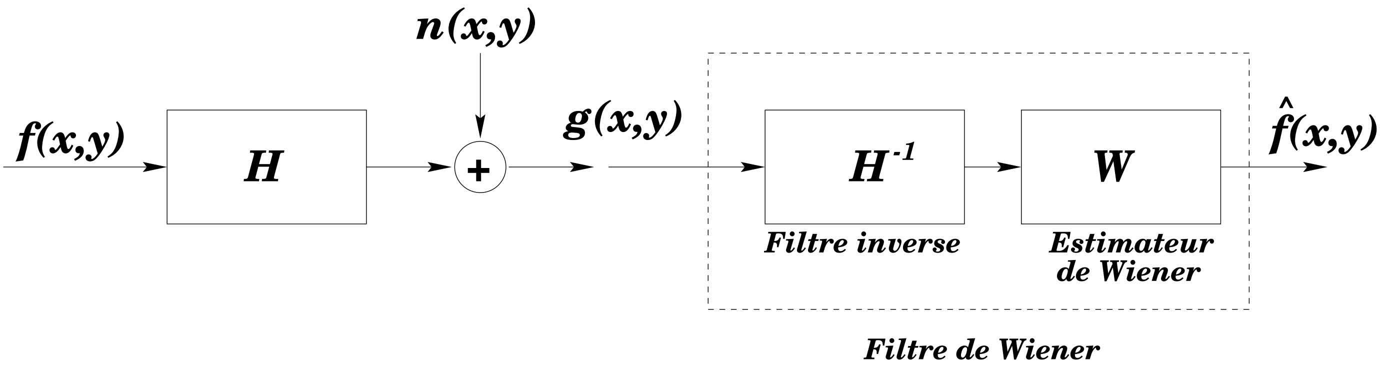
▼

On contraint la solution de ce problème

Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restoration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération

RESTAURATION
FILTRE DE WIENER (1)



▶ Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\widehat{f}(x,y) = \arg\min_{\widehat{f}} \left\{ \| \, \widehat{f}(x,y) - f(x,y) \, \|^2 \right\}$$

• Supposons que $H(u,\nu) = 1$, on montre que la réponse impulsionnelle $w(x,y)$ qui conduit à ce résultat est

$$A_{gf}(x,y) = (w * A_g)(x,y)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \Big\Uparrow\Big\Downarrow \mathcal{F}$$

$$W(u,\nu) = \frac{P_{gf}(u,\nu)}{P_g(u,\nu)}$$

• Signal et bruit non corrélés, on montre que

$$P_g = P_f + P_n \quad \text{et} \quad P_{gf} = P_f$$

où P_f et P_n désigne la DSP du signal et du bruit

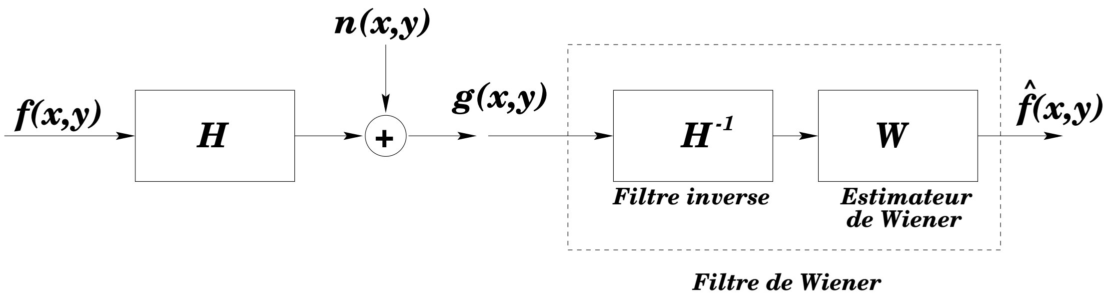
Nota

$A_g = g(x,y) * g(-x,-y)$ (Autocorrélation de $g(x,y)$)

$\mathcal{F}(A_g) = |G(u,\nu)|^2 = P_g(u,\nu)$ (DSP ou spectre de puissance)

$|\mathcal{F}(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u,\nu)$ (Spectre d'intéraction entre g et f)

RESTAURATION
FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u,\nu) = \frac{P_f(u,\nu)}{P_f(u,\nu) + P_n(u,\nu)}$$

En considérant maintenant que $H(u,\nu) \neq 1$, on trouve,

$$W(u,\nu) = \frac{P_f(u,\nu)}{P_f(u,\nu) + \frac{P_n(u,\nu)}{|H(u,\nu)|^2}} = \frac{P_f(u,\nu)|H(u,\nu)|^2}{P_f(u,\nu)|H(u,\nu)|^2 + P_n(u,\nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

$$\boxed{T(u,\nu) = \left[\frac{1}{H(u,\nu)} \cdot \frac{|H(u,\nu)|^2}{|H(u,\nu)|^2 + \frac{P_n(u,\nu)}{P_f(u,\nu)}}\right]}$$

Remarques

- $P_n(u,\nu)/P_f(u,\nu)$ peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u,\nu) \longrightarrow 0$ ▶ Filtrage inverse

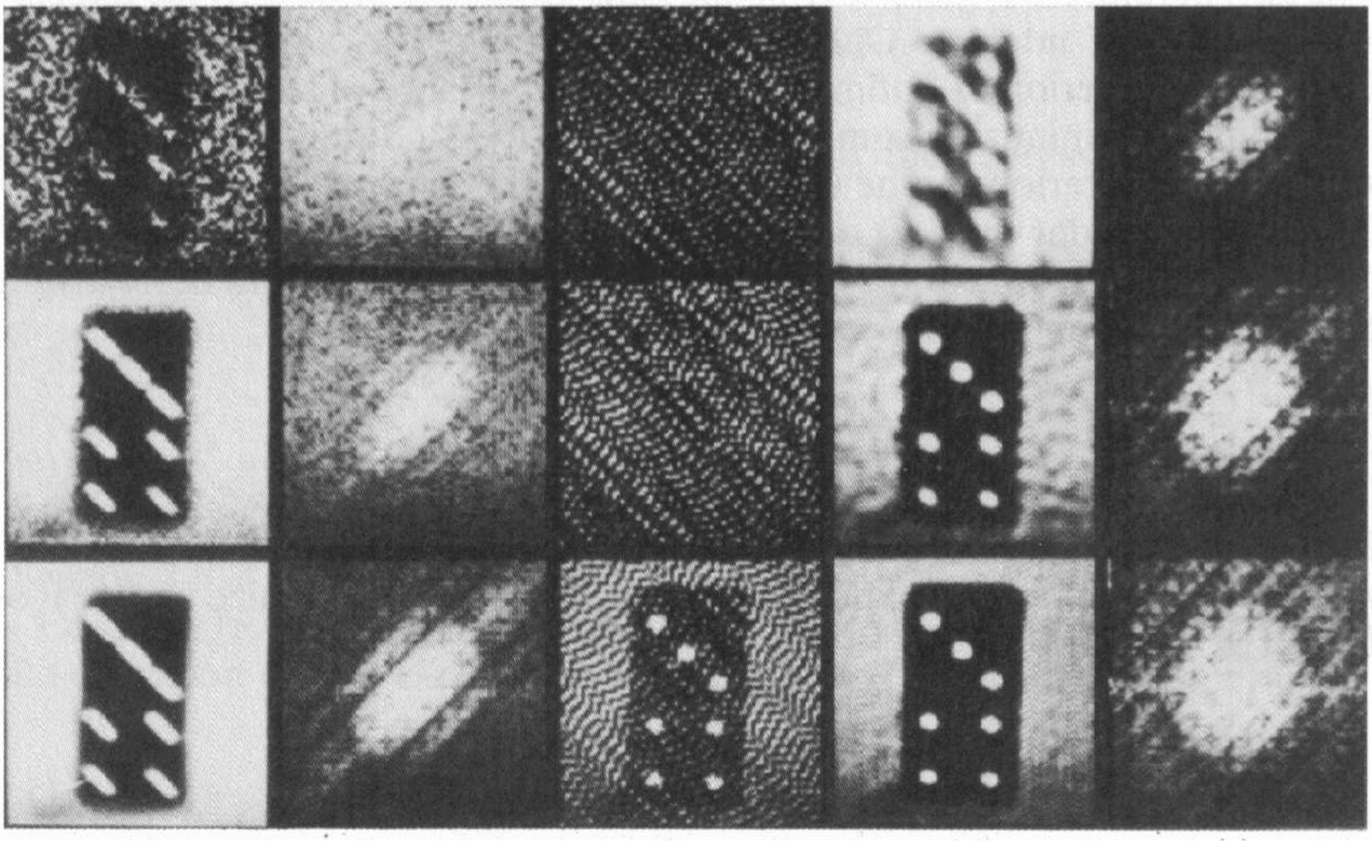
Nota

$$H\Big[P_n(u,\nu)\Big] = P_n\,|H|^2$$

RESTAURATION
FILTRE DE WIENER (3)

Exemples

$g(x,y)$	$\lvert G(u,\nu)\rvert^2$	Filtre inverse	Wiener	$\lvert\widehat{F}(u,\nu)\rvert^2$



Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$\boxed{T(u,\nu) = \left[\frac{P_f(u,\nu)}{|H(u,\nu)|^2 P_f(u,\nu) + P_n(u,\nu)}\right]^{1/2}}$$

- Remarques -

- $P_n(u,\nu) \longrightarrow 0$ ▶ Filtrage inverse
- Donne en général de meilleur résultats car $G(u,\nu) \neq 0$ lorsque $H(u,\nu)$ l'est, à la différence du filtre de Wiener.

Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

$$\boxed{T(u,\nu) = \left[\frac{1}{H(u,\nu)}\right]^{\alpha} \left[\frac{1}{H(u,\nu)} \cdot \frac{|H(u,\nu)|^2}{|H(u,\nu)|^2 + \beta\frac{P_n(u,\nu)}{P_f(u,\nu)}}\right]^{1-\alpha}}$$

α et β sont des paramètres positifs.

- Remarques -

- Pour $\alpha = 1$ ou $\beta = 0$ ▶ Filtre inverse
- Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ ▶ Filtre de Wiener
- Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$ ▶ Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)

RESTAURATION
ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Landweber

▶ Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x,y) = \arg\min_{f} \left\{ \| \, g(x,y) - h(x,y) * \hat{f}(x,y) \, \|^2 \right\}$$

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\boxed{\hat{f}_{k+1}(x,y) = \hat{f}_k(x,y) + \alpha \, h(-x,-y) * \Big(g(x,y) - h(x,y) * \hat{f}_k(x,y) \Big)}$$

avec $\quad \hat{f}_0(x,y) = g(x,y)$

Image originale

Restoration (Algo. Landweber)

▶ Algorithme de descente du gradient avec $g(x,y)$ comme solution initiale et α comme pas ($\alpha = 1$)

RESTAURATION

ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Tichonov-Miller

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x,y) = \arg\min_{f} \left\{ \| g(x,y) - h(x,y) * \hat{f}(x,y) \|^2 + \alpha \, \| c(x,y) * \hat{f}(x,y) \|^2 \right\}$$

où $c(x,y)$ représente l'opérateur laplacien 2D

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\hat{f}_{k+1}(x,y) = \hat{f}_k(x,y) +$$
$$\beta\Big(g(x,y) * h(-x,-y) - \big(A_h(x,y) + \alpha A_c(x,y)\big) * \hat{f}_k(x,y)\Big)$$
$$\text{avec} \quad \hat{f}_0(x,y) = \beta\left(g(x,y) * h(-x,-y)\right)$$

$A_h(x,y)$ et $A_c(x,y)$, autocorrélation de $h(x,y)$ et $c(x,y)$
α : paramètre de régularisation

Image originale

Restoration (Algo. Tichonov-Millerr)