למידה חישובית – מטלה 2

1. ראשית, נשים לב כי מהגדרה $\varphi GIni(p) = 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2 = 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2 \cdot 1, p \in [0,1]^k$.

מאי-שיוויון קושי-שוורץ לכל $u, v \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$\langle u, v\rangle \le ||u|| \times ||v|| \to \langle u, v\rangle^2 \le ||u||^2 \times ||v||^2$$

נגדיר $u = \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2, v = 1$ ונקבל

$$\langle u, v\rangle^2 = \left(\Sigma_{j=1}^{k} p_j \cdot 1\right)^2 \le \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2 \cdot \Sigma_{j=1}^{k} 1^2 = ||u||^2 \times ||v||^2$$

היות ו-$\Sigma_{j=1}^{k} p_j = 1$ וגם $\Sigma_{j=1}^{k} 1^2 = k$ אזי ש-$(*) 1 \le \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2 \cdot k \to \frac{1}{k} \le \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2$

ולכן קיבלנו כי $\varphi GIni(p) = 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2 \le^{*} 1 - \frac{1}{k}$

2. $\varphi Gini(p) = \Pr[Y_1 \ne Y_2] = 1 - \Pr[Y_1 = Y_2] =$

$$1 - \Sigma_{j=1}^{k} \Pr[Y_1 = j, Y_2 = j] =^{independent} 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p(Y_1 = j) p(Y_2 = j) = 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p_j p_j$$
$$= 1 - \Sigma_{j=1}^{k} p_j^2$$

שאלה 2:

סעיף 1:

נוכיח בעזרת אינדוקציה כי $h(\Sigma_{i=1}^{t} \lambda_i x_i) \ge \Sigma_{i=1}^{t} \lambda_i h(x_i)$.

מקרה בסיס: נשים לב כי המקרה k=1 נתון לנו ולכן נבדוק אחריו.

כאשר k=2 : $h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2)$.

צעד האינדוקציה: נניח כי מתקיים: $2 \le t \le k$ לכל $k \ge 2$ ונוכיח כי השוויון מתקיים לכל $t = k + 1$.

יהי $y = \Sigma_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} x_j$.

ניתן לראות כי: $\Sigma_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = (1 - \lambda_{k+1})\, y + \lambda_{k+1} x_{k+1}$

כעת, נשתמש במקרה הבסיס ונקבל:

1. $h(\Sigma_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j) = h\,[(1 - \lambda_{k+1}) y + \lambda_{k+1} x_{k+1}] \ge (1 - \lambda_{k+1}) h(y) + \lambda_{k+1} h(x_{k+1})$

לפי הנחת האינדוקציה אנו יודעים כי: $h(y) \ge \Sigma_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} h(x_j)$

לכן גם מתקיים:

2. $(1 - \lambda_{k+1}) h(y) \ge (1 - \lambda_{k+1}) \Sigma_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} h\left(x_j\right) = \Sigma_{j=1}^{k} \lambda_j h\left(x_j\right)$

נציב את 1,2 ונקבל:

$$h\left(\Sigma_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j\right) \ge (1 - \lambda_{k+1}) h(y) + \lambda_{k+1} h(x_{k+1}) \ge \Sigma_{j=1}^{k} \lambda_j h\left(x_j\right) + \lambda_{k+1} h(y_{k+1})$$
$$= \Sigma_{j=1}^{k+1} \lambda_j h(x_j)$$

הוכחנו את נכונות הטענה בעזרת אינדוקציה. לכן הטענה נכונה !

<u>סעיף 2:</u>

הסעיף תחת ההנחה כי יש רק 2 קלאסים.

הראינו כי: $h\left(\Sigma_{\mathrm{v}} \frac{|S_v|}{|S|} p_v\right) \geq \Sigma_{\mathrm{v}} \frac{|S_v|}{|S|} h(p_v)$ כלומר מתקיים: $H(S) \geq \Sigma_{\mathrm{v}} \frac{|Sv|}{|S|}\ H(S_v)$

ולכן נוכל לקבוע כי: $H(S) - \ \Sigma_{\mathrm{v}} \frac{|Sv|}{|S|}\ H(S_v) \geq 0$ ומתקיים $IG(S,A) \geq 0$.