למידה חישובית- מטלה 3

שאלה 1:

יהי $D = (x_1, \ldots, x_n)$ דגימה ופונקציית הסתברות: $\Pr[X_i = x_i] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$.

לכן, הלייקי הוד של כל הדגימה הוא $L(\lambda|D) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \lambda^{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}\, e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$.

ניקח לוג טבעי: $\ln[L(\lambda|D) = \ln\left(\lambda^{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}\, e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}\right) = \ln(\lambda^{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}) - n\lambda - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) =$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} x_i (\ln(\lambda)) - n\lambda \ -\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$$

שאלה 2:

ניקח את הפונקציה שקיבלנו בסעיף הקודם, נגזור ונשווה אותה ל-0 :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\Sigma_{i=1}^{n} x_i (\ln(\lambda)) - n\lambda \ -\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)\right] = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \lambda = \bar{x}$$

כעת, נוודא כי אכן מדובר בנקודת מקסימום:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\Sigma_{i=1}^{n} x_i (\ln(\lambda)) - n\lambda \ -\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)\right] = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n\right] = -\frac{1}{\lambda^2}\Sigma_{i=1}^{n} x_i < 0$$

מהיות והנגזרת השנייה שלילית, $\hat{\lambda} = \bar{x}$ MLE.

שאלה 3:

נסמן: $\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$ כך ש-$X_1, \ldots, X_n$ בלתי תלויים ומתפלגים $Pois(\lambda)$ ונחשב את התוחלת:

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\lambda = \frac{1}{n} * n\lambda = \lambda$$

כעת, נחשב את $Var(\hat{\lambda})$:

$$Var(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\Sigma_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\Sigma_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} * n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

כלומר, קיבלנו כי: $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \lambda$ $\quad Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}$

שאלה 4:

בהנחת נורמליות אסימפטוטית, מתקיים: $\frac{\hat{\lambda}-\mathbb{E}(\hat{\lambda})}{\sqrt{Var(\hat{\lambda})}} = \frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$.

ברמת אמון $1-\alpha = 0.95$ נשתמש בקבוע הקריטי :

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$$

כעת נבצע חישובים:

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}} \approx 0.95$$

$$-\phi(0.975) \le \frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \le \phi(0.975)$$

$$\hat{\lambda} - \phi(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \le \lambda \le \hat{\lambda} + \phi(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$

בכתיב הסתברותי:

$$\Pr(\hat{\lambda} - \phi(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \le \lambda \le \hat{\lambda} + \phi(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}) \approx 0.95$$

לכן, הגבולות הם: $\left[\hat{\lambda} - \phi^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}, \hat{\lambda} + \phi^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right]$