חישוביות וקוגניציה - תרגיל 10

להגשה עד: 17/01/2022

<u>שימו לב</u>: שאלה 1 היא שאלה אנליטית. שאלה 2 היא שאלה נומרית.

שאלה 1

* אין קשר בין סעיף 1 לסעיף 2 בחלק זה

1. הניחו את מטריצת ה־payoff הבאה:

$$\begin{bmatrix} & L & R \\ U & (40,5) & (50,50) \\ D & (35,45) & (5,40) \end{bmatrix}$$

א. האם לשחקן 1 או לשחקן 2 יש אסטרטגיות דומיננטיות? אם כן, רשמו מהן.

ב. מצאו את כל נקודות שיווי משקל נאש (השתמשו בסעיף א' כדי להסיק אילו אסטרטגיות ייצרו שיווי משקל).

ג. האם נקודת שיווי המשקל היא פארטו־אופטימלית? הסבירו

2. לפניכם משחק בין שני שחקנים:

$$\begin{bmatrix} & L & R \\ U & (2,3) & (\text{a,b}) \\ D & (3,1) & (4,5) \end{bmatrix}$$

א. עבור אילו ערכים של a, b קיים שיווי משקל נאש יחיד כך שכל אחד מהשחקנים משחק אסטרטגיות מעורבות ממש?

ב. עבור אילו ערכים של a, b קיים שיווי משקל בו שתי האסטרטגיות הן דומיננטיות?

שאלה 2

בשאלה זו נשתמש במודל למידת חיזוק כדי ללמוד אסטרטגיית משחק סימולטני מרובה משתתפים ובו מספר סבבים.

תיאור המודל

המשחק הוא אותו המשחק שערכתם בכיתה, בו כל שחקנית נדרשת לבחור מספר שלם בין 1 ל־20 כאשר השחקנית עם המספר הייחודי (זה שלא נבחר על ידי שחקנית נוספת) הגבוה ביותר זוכה בפרס.

הניחו כי במשחק משתתפות $N = 30$ שחקניות, אשר מקבלות את ההחלטה באיזה מספר לבחור לפי **<u>אותו</u>** ווקטור משקולות $\vec{w}$ באורך 20, שמתעדכן בכל פעם לפי ההחלטות שהן קיבלו.

וקטור המשקולות מגדיר התפלגות על אוסף המספרים השלמים בין 1 ל־20, כך שהסיכוי לבחור במספר ה־i הוא:

$$p_i = \frac{w_i}{\sum_j w_j}$$

הגמול הוא $R = 1$ למספר הייחודי הגבוה ביותר שנבחר ו-$R = 0$ לכל השאר.

וקטור המשקולות יעודכן באמצעות מודל הלמידה הבא:

$$\Delta w_i = -\eta w_i + \eta R_i = \begin{cases} -\eta w_i & \text{i is not the winner} \\ -\eta w_i + \eta & \text{i is the winner} \end{cases}$$

<u>התכנסות, נק' שיווי משקל מעורבת וחוק ההתאמה:</u>

אנו מצפים כי אם תתרחש התכנסות אז היא תהיה לנק' שיווי משקל נאש מעורב. כפי שהזכרנו, בשיווי משקל מעורב, תוחלת הגמול של כל אחת מהבחירות היא זהה. את אותה התוצאה ראינו גם כשדיברנו על כלל ההתאמה, שניתן לנסח גם כך: אחוז הבחירות באופציה מסויימת נמצא ביחס ישיר לכמות הגמול שמתקבלת מהבחירה בו (בהנחה שהגמול לכל בחירה אינו קבוע, כמו במקרה הזה). שימו לב שכלל הלמידה אמור להתקרב לנקודת שיווי המשקל כי בכל שלב אנחנו מגדילים את ההסתברות לבחור באופציה שזכתה ומקטינים את ההסתברות לבחור באופציות שהפסידו. נקודת השבת של הלמידה, כלומר המשקולות עבורן **השינוי הממוצע מתאפס**, מתקבלת כאשר:

$\langle \eta(R_i - w_i) \rangle = 0 \iff \langle R_i \rangle = w_i$.

הנוסחה הזו היא ביטוי מתמטי של חוק ההתאמה.

שימו לב כי ההומוגניות של הבחירות של השחקנים מחייבת כי שיווי משקל זה יהיה מעורב. כלומר, אם כל השחקנים מקבלים את אותן הבחירות, מאותן התפלגויות, אז לא ייתכן שתהיה בחירה אחת עבור כולם, כי בחירה כזו בוודאות תהא מופסדת על ידי כולם, ולכן לא יתקיים שיווי משקל.

הוראות יישום המודל

א. אתחלו את הווקטור $\vec{w}$ באמצעות מספר אחד הנבחר מהתפלגות אחידה בין 0 ל־1. קבעו $\eta = 0.001$.

ב. כתבו סימולציית משחק עבור N השחקניות:

1. חשבו את הווקטור $\vec{p} = [p_1, ..., p_{20}]$ והגרילו מתוכו $N = 30$ מספרים שונים (מספר לכל שחקנית) באופן בלתי תלוי.
2. מצאו את המספר המנצח.
3. עדכנו את המשקולות לפי כלל הלמידה לעיל.

ג. סבב למידה: הריצו $500,000$ סבבים של הסימולציה כאשר בכל צעד אתם מעדכנים את $\vec{w}, \vec{p}$. שמרו את p_{20}, p_1 של כל הרצה.

שימו לב: אנו מצפים כי וקטור ההסתברויות יתקרב לנק' שיווי משקל נאש של המשחק.

ד. סבב משחק: קבעו את המשקולות שקיבלתם מסבב הלמידה והריצו סימולציית משחק עם $100,000$ סבבים שבה המשקולות לא משתנים (כלומר, חזרו על שלבים 1 ו־2 בחלק הקודם). לכל **מספר** שמרו את מספר הפעמים בהן הוא נבחר ואת מספר הפעמים בהן הוא ניצח.

שאלות להתייחסות בקובץ ההגשה

א. הציגו שני גרפים המתארים את ההשתנות של p_{20} ושל p_5 כפונקציה של מספר ההרצות.

ב. הציגו גרף ובו כל מספר מייצג נקודה, כאשר ציר ה־x הוא מספר הפעמים שהמספר נבחר, וציר ה־y הוא מספר הפעמים שהמספר ניצח. עשו זאת רק עבור מספרים שנבחרו (כלומר, אל תציגו אפסים). ליד כל נקודה הוסיפו כיתוב של המספר אותו היא מייצגת (בפייתון ־ אפשר להשתמש בפקודה שמופיעה בהערה המצורפת).

ג. תארו מילולית את הגרף מהסעיף הקודם והסבירו מה הוא מייצג. בפרט, התייחסו למספר הבחירות במספרים גבוהים לעומת נמוכים ולצורת הגרף.

שימו לב שבסעיף ב' התייחסנו לחוק התאמה "גלובלי" - מספר הנצחונות הכולל לעומת מספר הבחירות הכולל. במצב בו כל השחקנים מקבלים את אותן הבחירות, היחס הזה אמור להיות זהה (אם כי פחות רועש) ליחס המתקבל עבור שחקן יחיד.

הערה

כדי לסמן כיתוב ליד נקודה בגרף $plt.scatter(x, y)$ ניתן להשתמש בלולאה הבאה, כאשר n היא רשימה ובה הכיתובים השונים (כמספרים, int)

```
for i, txt in enumerate(n):
ax.annotate(txt, (x[i], y[i]))
```