יובל שליין
316493758

תרגיל 6 - קוטבים וערכים עצמיים

(1)

$$Var(y) = E[y^2] - E[y]^2 = E[(w^Tx)^2] - E[w^Tx]^2 =$$

$$E[w^Tx \cdot w^Tx] - w^T \cdot E[x]^2 = \ $$

$$w^T \cdot E[x \cdot x^T] \cdot w - w^T \cdot 0 = \underline{w^T \cdot Cw}.$$

(2) נגזור בפרמטרים: $\varphi(w,\mu) = (w^Tx)^2 - \mu(\|w\|^2 - 1)$

נגזור לפי w ונשווה ל-0:

$$(\varphi(w,\mu))' = 2Cw - 2\mu w = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2Cw = 2\mu w$$

$$\Downarrow$$

$$Cw = \mu w$$

כאן μ הוא ערך עצמי של המטריצה C.

כלומר:

$$Var(y) = w^T C w = w^T \mu w = \ $$

ונחשב מחדש את μ כאשר מקבל:

$$M = \mu w^T w$$

כי w מאולכס... נציב את הערך הזה ואז נקבל שונות גדולה ונוכל

ולכך נבחר w שהוא וקטור עצמי של M בעל ערך עצמי

הגדול.

$$(XX^T)_{ij} = C_{ij} = \begin{cases} Var(x_i) & i=j \\ Cov(x_i, x_j) & i\neq j \end{cases}$$

ולכן לפי הנתונים:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ⓒ נוכל כעת לחשב ערכי עצמי שלה / נמצא ע"ר הפולינום האופייני

נחשב ערכים עצמי ע"י:

$$P(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 4$$

נמצא וקטורי עצמי שלהם:

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 4-4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 0$$

על w_2 אין שום אילוץ אבל מכיוון שדרוש כי הוקטור $\|w^2\| = 1$ נקבל $w_2 = 1$ ולכן $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

⑥

3
2
1
$\vec{w}$
-3
-2
-1
1
2
-1
-2
-3
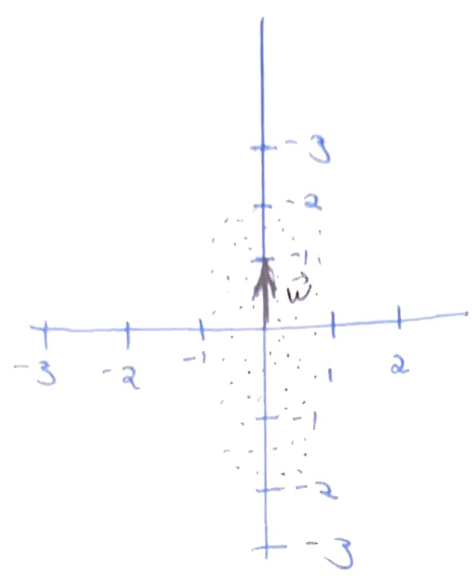
④

$$Var(y) = Var(wX) = w^2 Var(X) = w^2 E[X^2]$$

ולכן השונות ~~[illegible]~~ תהיה מקסימלית עבור w שואף לאינסוף או מינוס אינסוף.

~~[illegible]~~

⑤ מטרת סעיף 2 הייתה למקסם את השונות שמצאנו,
או במילים אחרות, לקבל את האחוז הגבוה ככל האפשר של שונות מוסברת.
ככל שנגיע יותר מהשונות כך נוכל ונמזער את שגיאות השחזור.
הפתרון האופטימלי כפי שנלמד בכיתה והוכחת מימד בעזרת PCA
עושה ~~[illegible]~~ באוטואנקודר שגיאת השחזור של האלגוריתם ומחשים זאת ע"י
הזנת הוקטור העצמי של הערך העצמי הראשוני של מטריצת ההתפלגות
כמשקולות u,v.
כך ניתן לראות כי מטרת 2 האלגוריתמים זהה. ההבדל בינהם הוא
המטרה המוגדרת בשני המקרים, אך היישום ~~[illegible]~~ דומה.
....