נדב ויילר

316493758

5:38 PM Thursday, November 11, 2021

שאלה 1

נתונה רשת הופפילד בעלת N נוירונים שהטביעו בה P זכרונות ($P, N \gg 1$) באופן הבא:

תבניות הזכרון הן וקטורים בינאריים דלילים בלתי־תלויים, $p_i^\mu = \begin{cases} 1 & \text{w.p } f \\ 0 & \text{w.p } 1-f \end{cases}$ כפי שהוגדר בכיתה. אולם, במקום שכלל הלמידה ישתמש בפרמטר f (של תבניות הזכרון) הוא פועל עם פרמטר q ($q \neq f$, ו $0 \leq q \leq 1$), כך שמטריצת הקשרים היא:

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{q(1-q)} \frac{1}{N} \sum_\mu \left(p_i^\mu - q\right)\left(p_j^\mu - q\right) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

הקלט לנוירון ה i מוגדר כרגיל כ $h_i = \sum_j J_{ij} s_j$

והדינימקה גם היא מוגדרת כרגיל לפי העדכון האי־סינכרוני $s_i = \Theta\left(h_i - T\right) = \begin{cases} 1 & h_i > T \\ 0 & h_i \leq T \end{cases}$ (T הוא הסף של הנוירון):

מטרתינו היא להבין כיצד ישפיע השינוי בכלל הלמידה על הקיבולת ברשת, בהתבסס על ניתוח יחס־אות־לרעש כפי שבצענו בכיתה.

נניח שמאתחלים את מצב הרשת לתבנית הזכרון הראשונה (כלומר $s_j = p_j^1$):

1. חשבו את ממוצע הקלט לנוירון i, כלומר את $\mathbb{E}\left[h_i\right]$, במקרה שבו $p_i^1 = 1$ ובמקרה שבו $p_i^1 = 0$.

ראשית, נחשב את h_i

$$h_i = \sum_j J_{ij} s_j = \sum_{i \neq j} \frac{1}{q(1-q)} \cdot \frac{1}{N} \sum_\mu (p_i^\mu - q)(p_j^\mu - q) p_j^1 = \frac{1}{q(1-q)N} \sum_\mu (p_i^\mu - q) \sum_{i \neq j} (p_j^\mu - q) \cdot p_j^1 =$$

$$\underbrace{\frac{1}{q(1-q)N} (p_i^1 - q) \sum_{j \neq i} (p_j^1 - q) p_j^1}_{Signal\ (\mu=1)} + \underbrace{\frac{1}{q(1-q)N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{i \neq j} (p_i - 1)(p_j - 1) p_j^1}_{Noise\ (\mu \neq 1)}$$

$$Signal = \frac{(p_i^1 - q)}{q(1-q)N} \sum_{j \neq i} (p_j^1 - q) \cdot p_j^1 = \frac{p_i^1 - q}{q(1-q)N} \sum_{i \neq j} (p_j^{1\,2} - q p_j^1) =$$

$$\frac{p_i^1 - q}{q(1-q)N} \sum_{i \neq j} p_j^1 (1-q) = \frac{p_i^1 - q}{qN} \sum_{i \neq j} p_j^1 \approx \frac{p_i^1 - q}{qN} \cdot Nf = \frac{p_i^1 - q}{q} \cdot f$$

$$Noise: \frac{1}{q(1-q)N} \sum_{\mu \neq 1} \sum_{i \neq j} (p_i - 1)(p_j - 1) p_j^1 =$$

p_j^μ ; p_j^1 הם בלתי תלויים, ולכן $p_j^\mu - q$ גם הם ב״ת ולכן

$\sum_{i \neq j} (p_j^\mu - q) \cdot p_j^1$ הוא סכום של מ״מ ב״ת מתפלגים נורמלית ולכן עם התפלגות

נורמלית, בהרשמה סביר

$$z_i = \frac{1}{q(1-q)N} \sum_{\mu \neq 1} (p_i^\mu - q) \sum_{i \neq j} (p_j^\mu - q) \cdot p_j^1$$

$$E(z_i) = \frac{1}{q(1-q)N} E\left(\sum_{\mu \neq 1} (p_i^\mu - q) \sum_{i \neq j} (p_j^\mu - q) \cdot p_j^1\right) = \frac{1}{q(1-q)N} \sum_{\mu \neq 1} E(p_i^\mu - q) \cdot E\left(\sum_{i \neq j} (p_j^\mu - q) \cdot p_j^1\right) =$$

$$\approx \frac{1}{q(1-q)N} \cdot P \cdot (f-q) \cdot N \cdot \left((1-q) f^2 + q(f-1) \cdot f\right) = \frac{P(f-q)}{q(1-q)} (f^2 - fq) = \frac{fP(f-q)^2}{q(1-q)}$$

$\approx \frac{1}{q(1-q)N} \cdot p \cdot (f-q) \cdot N \cdot (1 \quad q) \quad q \quad \ldots \quad q(1-q) \quad \ldots \quad q(1-q)$

ובכן:

$$E(h_i) = \quad p_i' = 1 = \frac{f(1-q)}{q} + \frac{pf(f-q)^2}{q(1-q)}$$

$$p_i' = 0 \quad -f + \frac{pf(f-q)^2}{q(1-q)}$$

2. נניח שקבענו את הסף כ $T = \frac{1}{2} - f$. בנוסף, הניחו כי $f = 1.1 \cdot q$. מהי קיבולת הרשת במקרה זה? האם התשובה תשתנה עבור $T = \frac{1}{2} - q$?

ראינו בסעיף הקודם כי הקיבולת תלויה ב-p.

נתון כי $p, M \geq 1$, $0 \leq q \leq 1$ (ולכן $0 \leq f \leq 1.1$) וגם $p > f, q$.

לכן, הסף בפועל מוגדר $T = \frac{1}{2} - f$ ויש $-0.6 \leq T \leq 0.5$.

בגלל שהקיבולת תלויה ב-$p > 1$ ויש מרכז ההתפלגות אמור להיות גם גדול מ-1.

ולכן מרכז ההתפלגות יהיה במרחק ניכר מהצד הימני של הסף.

לכן, T - זה לא ישפיע על יכולת הזיכרון וזיכרונות לא ישמרו.

באופן דומה עבור $T = \frac{1}{2} - q$, משום שערכי T יהיו $-0.5 \leq T \leq 0.5$.