

חישוביות וקוגניציה - תרגיל 2

להגשה עד: 7/11/2021

שימו לב: שאלה 1 היא שאלה אנליטית ושאלה 2 היא שאלת תכנות

שאלה 1

נתונה רשת הופפילד בעלת N נוירונים שהטביעו בה P זכרונות ($P, N \gg 1$) באופן הבא:

תבניות הזכרון הן וקטורים בינאריים דלילים בלתי-תלויים, $p_i^\mu = \begin{cases} 1 & \text{w.p } f \\ 0 & \text{w.p } 1-f \end{cases}$, כפי שהוגדר בכיתה. אולם, במקום שכלל הלמידה ישתמש בפרמטר f (של תבניות הזכרון) הוא פועל עם פרמטר q ($q \neq f$) ו $0 \leq q \leq 1$, כך שמטריצת הקשרים היא:

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{q(1-q)} \frac{1}{N} \sum_{\mu} (p_i^\mu - q)(p_j^\mu - q) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

הקלט לנוירון i מוגדר כרגיל $h_i = \sum_j J_{ij} s_j$

והדינמיקה גם היא מוגדרת כרגיל לפי העדכון האי-סינכרוני $s_i = \Theta(h_i - T) = \begin{cases} 1 & h_i > T \\ 0 & h_i \leq T \end{cases}$ הוא הסף של הנוירון):

מטרתנו היא להבין כיצד ישפיע השינוי בכלל הלמידה על הקיבולת ברשת, בהתבסס על ניתוח יחס-אות-לרעש כפי שבצענו בכיתה.

נניח שמאתחלים את מצב הרשת לתבנית הזכרון הראשונה (כלומר $s_j = p_j^1$):

1. חשבו את ממוצע הקלט לנוירון i , כלומר את $\mathbb{E}[h_i]$, במקרה שבו $p_i^1 = 1$ ובמקרה שבו $p_i^1 = 0$.

2. נניח שקבעו את הסף $T = \frac{1}{2} - f$. בנוסף, הניחו כי $f = 1.1 \cdot q$. מהי קיבולת הרשת במקרה זה? האם התשובה תשתנה עבור $T = \frac{1}{2} - q$?

הערה: שימו לב, ניתן לענות על שאלה 2 מבלי לחשב את השונות של h_i .

3. **סעיף בונוס:** חשבו את שונות הקלט לנוירון i , כלומר את $\text{Var}[h_i]$. כיצד תלויה השונות ב P ו N ? הסבירו מה המשמעות של התלות שמצאתם, בהקשר של קיבולת הרשת.

שאלה 2

בשאלה זו תחקרו את הקיבולת של רשת הופפילד בעזרת סימולציה.

1. כתבו פונקציה שמקבלת מספר ניוונים (N), מספר תבניות זכרון (P), ופרמטר דלילות (f) ומחזירה מטריצה בגודל $N \times P$ שבה כל עמודה היא תבנית זכרון, ואת מטריצת הקשרים J (בגודל $N \times N$) לפי ההתפלגות של

$$p_i^\mu = \begin{cases} 1 & \text{w.p } f \\ 0 & \text{w.p } 1 - f \end{cases} \quad \text{כלומר}$$

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{f(1-f)} \frac{1}{N} \sum_{\mu} (p_i^\mu - f)(p_j^\mu - f) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

2. כתבו פונקציה המחשבת דינמיקה א־סינכרונית ברשת הופפילד - עבור מטריצת קשרים J , ומצב התחלתי (תבנית פעילות ברשת s), וערך סף של הנורונים T , על הפונקציה להחזיר את תבנית הפעילות אליה הרשת התכנסה.

הערה א': מומלץ לבדוק את הפונקציות עם מספרים קטנים שניתן לבדוק 'ידנית' לפני שממשיכים לסעיפים הבאים

הערה ב': בסעיפים הבאים השתמשו בערך סף כפי שהגדרנו אותו בכיתה: $T = \frac{1}{2} - f$.

3. כתבו פונקציה לבדיקת יציבות של מצב נתון: הפונקציה מקבלת מטריצת קשרים, תבנית פעילות, ופרמטר T . השתמשו בפונקציה שכתבתם בסעיף 2 כדי לחשב ולהחזיר מה 'אחוז' (בין 0 ל 1) הנורונים שערכם השתנה במצב שאליו הרשת מתכנסת, כאשר המצב ההתחלתי הוא תבנית הפעילות הנתונה.

4. קבעו את מספר הנורונים להיות $N = 1000$. ה'עומס' על הרשת מוגדר כ $\alpha = \frac{P}{N}$, ומטרתנו היא לחשב את הסיכוי לטעות בשחזור של זכרונות כפונקציה של α . עבור ערכי α בין 0.02 ל 0.8 (כולל) בקפיצות של 0.04, בצעו 5 חזרות עבור כל ערך של α :

- קבעו את $P = \lceil N \cdot \alpha \rceil$ (כאשר $\lceil \cdot \rceil$ פירושו עיגול כלפי מעלה) הגרילו תבניות זכרון ואת מטריצת הקשרים המתאימה להם.

- השתמשו בפונקציה מהסעיף הקודם ע'מ לחשב את אחוז הטעות בהתכנסות הרשת כאשר הדינמיקה מתחילה בתבנית הזכרון הראשונה.

5. ציירו גרף של אחוז הטעות כפונקציה של α (בממוצע על פני 5 החזרות שהצתם לכל α) עבור ערכי $f = 0.1, 0.2, 0.3$ (זכרו שעבור ערכי f שונים על הסף T להשתנות בהתאם), והסבירו את התוצאות. דונו באופן שבו התוצאה שקיבלתם שונה או דומה לניתוח הקיבולת שבצענו בכיתה, בהתבסס על יחס אות לרעש.